

# KÉTFÁZISÚ DISZKRÉT RÚDMODELL VIZSGÁLATA DISZKONTINUITÁSOK ÉS KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

TASSI GÉZA

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

RÓZSA PÁL

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A dolgozat ekvidisztáns közökben egymáshoz kapcsolt koaxiális elemekből álló egydimenziós modell (pl. a legegyszerűbb vasbeton rúd modellje) feszültségi-alakváltozási állapotait tárgyalja. A modell egy-egy rúdjának megfolyása esetében a szerkezet merevségi mátrixát egy-egy diáddal kell módosítani. A módosított mátrix inverzének előállítására vonatkozó tétel, valamint a kontinuáns és egypárú mátrixok sajátosságainak felhasználásával, Csebisev-polinomok segítségével, analitikus úton, zárt formában felírhatók a diszkontinuitások (repedés stb.) egyik oldalán levő kapcsolóelemek képlékeny alakváltozásai esetében az erőjátékra jellemző mennyiségek. A képletek tartalmazzák a diszkrét modell osztásközének jellemzőit, így az analitikus eljárás segítséget nyújt finit módszerek esetében a célszerű hálósűrűség megválasztásához.

## 1. Bevezetés

A mérnöki gyakorlatban egyre gyakrabban találkozunk olyan problémákkal, amelyek a rugalmas kontinuumfeladatok megoldásakor alkalmazott klasszikus módszerekkel nem oldhatók meg.

A diszkontinuitással kapcsolatos kérdések egyik legjelentősebb területe a törési mechanika. A lineárisan rugalmas testben különféle geometriai elrendezésű repedések, üregek hatásának analitikus úton való vizsgálata lehetséges egyes jellemző alapesetekben (pl. [10]), és számos képlékenységtani feladat megoldására találunk zárt formulákat (l. pl. [5]). Kétfázisú rendszerek (vasalt betonelem stb.) helyi feszültségállapotait a klasszikus vasbetonelmélet művelői is vizsgálták analitikus úton egyes esetekben (pl. [2]). Kétfázisú, diszkontinuitással zavart, rugalmas-képlékeny állapotban levő speciális elem analitikus tárgyalására a hazai gyakorlatban is van példa [9].

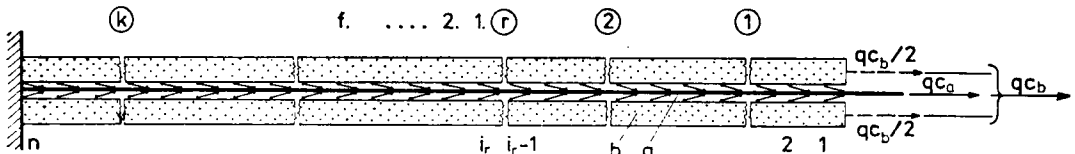
A finit módszerek hazai elterjedése a tárgyalt problémakörbe tartozó számos feladatra hozott megoldást, pl. kétfázisú, képlékeny tartományokkal rendelkező szerkezeti elemekre [1], [4] vagy a diszkontinuitások egyes kérdéseire [3].

A finit módszerek alkalmazása rendszeresen felveti az alkalmazandó véges elemek hálózatának kérdését, hiszen a durva osztást a számítás megbízhatósága sínyli meg, a túl finom pedig megsokszorozza a gépi számítási munkát.

Diszkrét feladatok analitikus úton való megoldása számos műszaki probléma közvetlen megoldása szempontjából jelentős. Leginkább azonban a diszkrét modell felvétele tekintetében kapunk az analitikus megoldással értékes információkat, mivel az eredmények a diszkrét modell jellemzőit (osztásköz stb.) tartalmazzák. Minthogy ilyen jellegű vizsgálatok száma a közelmúltban végzett hazai felmérés szerint [6] igen csekély, indokolt a témakör jellegzetes feladatok megoldása útján való művelése.

## 2. A modell

Tekintsük az 1. ábrán vázolt, ekvidisztáns közőkben egymáshoz kapcsolt két elemből álló összetett rúdmodell. A rúdmodellre csak axiális erő hat. A  $b$  jelű elem merevsége  $b$ , az  $a$  jelűé  $\nu b$ , a kapcsolóelemeké  $\gamma b$ .



1. ábra

## 3. A diszkontinuitások hatása a rugalmas összetett elemre

A  $b$  jelű rúdban  $k$  helyen adódó diszkontinuitás hatása, a diszkontinuitások (szakadások, repedések, átvágások) helyén adódó relatív elmozdulások, az egész elem merevségének módosulása a diszkontinuitások következtében, valamint a belső erők (az  $a$  és  $b$  jelű rúd szakaszaiban és a kapcsolóelemekben ható erők) változása lineárisan rugalmas anyagú rudakból és kapcsolóelemekből álló komplex modell esetén zárt formában felírható [11].

A modell vizsgálatára elmozdulásmódszerrel felírt egyenletrendszer analitikus alakban való megoldását a rendszer együtthatómátrixa sajátosságainak felismerése, valamint a kontinuáns mátrixokra és egypárú mátrixokra vonatkozó tétel [7] alkalmazása tette lehetővé.

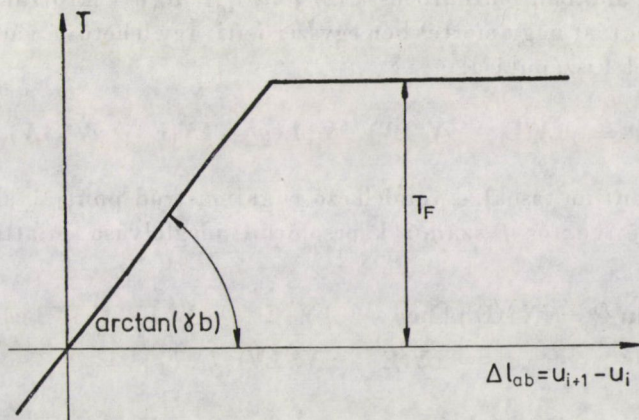
A diszkontinuitásokat, mégpedig tetszőleges,  $k > 2$  számú szakadást, az eredeti — diszkontinuitásokat nem tartalmazó — modell  $K$  merevségi mátrixának  $k$  diáddal való módosítása útján lehetett figyelembe venni. A módosított merevségi mátrix

$$K - WW^* \quad (1)$$

(l. [11] 5.3 pont).

#### 4. Képlékeny alakváltozások hatása a diszkontinuitásokkal rendelkező modell erőjátékára

A vázolt rúdmodell elemeinek képlékeny alakváltozását különféle terhelési esetekre nem kísérjük nyomon. Csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, amelyben a diszkontinuitások egyikénél, a folytonosság megszakadásának egyik oldalán, azonos előjelű rúderőt kifejtő  $f$  számú kapcsolórúdban egyszerre a  $T_F$  folyást előidéző rúderő adódik (2. ábra).



2. ábra

Ha a teher egy előző,  $q_0$  — képlékeny alakváltozás nélküli esetre vonatkozó — paramétere  $q$ -ra növekszik, és ennek során fellép  $f$  helyen a  $T_F$  kapcsolati erő, az ehhez tartozó  $\mathbf{u}$  elmozdulásvektorra (melynek elemei a  $b$  ill.  $a$  rúd diszkrét pontjainak elmozdulásai) a

$$\mathbf{K}''\mathbf{u}^{(f)} = \mathbf{q}\mathbf{c} + \mathbf{q}_m = \mathbf{q}\mathbf{c} + T_F\mathbf{v}_e \quad (2)$$

egyenlet írható fel. Itt  $\mathbf{K}''$  a diszkontinuitások, valamint az  $f$  helyen fellépő folyás miatt módosult együtthatómátrix,  $\mathbf{c}$  az egyparaméteres tehervektor (esetünkben csak két eleme nem 0, l. 1. ábra). A  $\mathbf{q}_m$  vektornak azok az elemei zérustól eltérőek — éspedig  $T_F$  ill.  $-T_F$  nagyságúak — amelyeknek megfelelő indexű pontokba az  $f$  számú megfolyt kapcsolórúd fut be (v.ö. [8]).

Egy-egy rúd megfolyása a további teherre a rúd merevségének elvesztését jelenti, azaz a merevségi mátrixból egy-egy  $b\sqrt{\gamma}\mathbf{v}$   $\sqrt{\gamma}\mathbf{v}_1^*$  alakú diádot kell levonni, ahol

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{i_r} \\ -\mathbf{e}_{i_r} \end{bmatrix}.$$

Az  $\mathbf{e}$  vektor  $f$  számú csupa 1 elemből álló összegező vektor.

A  $\mathbf{K}''$  együtthatómátrixot úgy kapjuk, hogy a diszkontinuitások miatt módosult  $\mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{W}^*$  mátrixból levonjuk az  $f$  kapcsolat megfolyását reprezentáló  $f$  diádot:

$$\mathbf{K}'' = \mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{W}^* - \sqrt{\gamma}\mathbf{V}\sqrt{\gamma}\mathbf{V}^*. \quad (3)$$

A feladat a (2) egyenlet megoldása, amelyhez a (3) együtthatómátrix invertálására lenne szükség. A teljes inverz előállítás elkerülhető, ha figyelembe vesszük, hogy a (3) inverzének az (1), már ismert  $\mathbf{L}$  (1.[11]) inverzétől való eltérése zárt alakban felírható és a (2) jelű  $\mathbf{q}_m$ , ill.  $\mathbf{c}$  vektorral való szorzás a további számítást nagy mértékben egyszerűsíti. Így lehetővé válik a következő mennyiségek kiszámítása:

$$\mathbf{m}^{(f)} = \gamma\mathbf{L}\mathbf{V}(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{c}_q + \mathbf{L}\mathbf{V}(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{e}T_F, \quad (4)$$

ami a diszkontinuitásokkal rendelkező rugalmas rúd pontjainak az elmozdulásait jelentő vektor  $f$  számú kapcsolórúd megfolyása miatti módosulását jelenti;

$$\Delta\mathbf{u}^{(f)} = (\mathbf{N} \otimes \mathbf{E}_2) \left\{ \mathbf{L}\mathbf{c}_q + \gamma\mathbf{L}\mathbf{V}(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{c}_q + \right. \\ \left. + \mathbf{L}\mathbf{V}(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{e}T_F \right\}, \quad (5)$$

s ez az  $f$  helyen fellépő folyás esetében, a  $b$  ill.  $a$  jelű rúd szomszédos pontjainak relatív elmozdulását, a szakaszok nyúlását adja a  $q$  teherparaméter esetében. A kapcsolórudak  $f$  kapcsolórúd folyása esetében adódó hosszváltozását a

$$\Delta\mathbf{u}_{ba}^{(f)} = \mathbf{u}_b^{(f)} - \mathbf{u}_a^{(f)} = \mathbf{u}_b^{(k)} + \mathbf{m}_b^{(f)} - \mathbf{u}_a^{(k)} - \mathbf{m}_a^{(f)}$$

összefüggés adja, ahol a  $(k)$  felső indexű vektorok a  $k$  diszkontinuitással rendelkező rugalmas rúd esetére utalnak.

Az egész rúd merevségének a plasztikus deformációk miatti módosulására a terhelt rúdvég pontjainak elmozdulás-változása jellemző ( $\mathbf{m}_b^{(f)}$ ).

Az (5) összefüggésben szereplő műveletek elvégzése hosszadalmas számolást igényel, de a fellépő mátrixok szabályos szerkezete lehetővé teszi, hogy analitikus alakban kapjuk a megoldást. Ehhez mindenképp az

$$\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{V} \quad (6)$$

inverzét kell meghatározni. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{V}$  egypárú mátrix, amelynek inverze csupán a sarkokban módosított egyenletes kontinuáns mátrix. Így a keresett inverz elemeit hiperbolikus függvények segítségével zárt alakban felírhatjuk.

Az (5) képletben kijelölt különbségképzés elvégzésekor vesszük figyelembe, hogy az  $\mathbf{L}\mathbf{V}$  mátrix első  $i_r - 2$  sorában az elemek kiesnek. A rugalmas,

diszkontinuitásokat tartalmazó esethez képest természetesen csak az  $i_r - 1$ -től  $i_r + 1$ -ig terjedő csomópontokon fog a módosulás jelentkezni.

A további műveletek kevésbé bonyolultak, mivel csak viszonylag egyszerű szorzásokat igényelnek. Így pl. a (4) vagy (5)  $q$ -val arányos első tagjában a  $V^*Lc$  szorzatra

$$V^*Lc = -\frac{q}{\nu} (c_b - c_a) \frac{1}{2 \sinh \frac{\vartheta}{2} \cosh (i_{r+1} - i_r) \frac{\vartheta}{2}} \cdot \\ \cdot \left[ \sinh \left( \frac{i_{r+1} - i_r + 1}{2} - i \right) \vartheta \right]; i = 1, 2, \dots, f$$

adódik. A  $\vartheta$  paramétert a

$$4 \sinh^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1 + \nu}{\nu} \gamma$$

kifejezés definiálja (l. [11]). A  $T_F$ -fel arányos tagban a (6) inverzének első oszlopa szerepel, amelynek elemei

$$(E - \gamma V^*LV)^{-1} e = \left\{ f^2 2 \sinh^2 \frac{\vartheta}{2} + f \left( 2 \sinh^2 \frac{\vartheta}{2} - 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sinh [f - 1 - (i_{r+1} - i_r)] \vartheta}{\sinh [f - (i_{r+1} - i_r)] \vartheta} \right) + 1 \right\} e + \\ + 2 \sinh^2 \frac{\vartheta}{2} \{ [i]_f - [i^2]_f \}; i = 1, 2, \dots, f.$$

A további szorzásokat is elvégezve pl. a merevségre jellemző mennyiség változását az

$$m_{b_i}^{(f)} = \frac{q\gamma(c_b + c_a)}{4\nu^2 \sinh^2 \frac{\vartheta}{2} \cosh^2 (i_{r+1} - i_r) \frac{\vartheta}{2}} \left\{ \cosh \left( i_{r+1} - i_r - f + \frac{1}{2} \right) \vartheta \cdot \right. \\ \cdot \tanh (i_{r+1} - i_r - f) \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{\sinh^2 f \frac{\vartheta}{2}}{\sinh \frac{\vartheta}{2}} + \cosh (i_{r+1} - i_r) \frac{\vartheta}{2} \cdot \\ \left. \cdot \left[ 2(f + 1) \sinh (i_{r+1} - i_r - f) \frac{\vartheta}{2} + f \cosh \left( \frac{i_{r+1} - i_r}{2} - f \right) \vartheta - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\sinh f \frac{\vartheta}{2}}{\sinh \frac{\vartheta}{2}} \cosh (i_{r+1} - i_r - f + 1) \vartheta \right\} + \\
 + \frac{\sinh f \frac{\vartheta}{2}}{\sinh \frac{\vartheta}{2}} \sinh \left( \frac{i_{r+1} - i_r - 1}{2} - f \right) \vartheta \sinh (i_{r+1} - i_r - f) \frac{\vartheta}{2} \left. \right\}$$

alakban kapjuk. Hasonló módon nyerhető a (4), ill. (5)  $q$  ill.  $T_F$  paraméterekkel arányos része.

### 5. Megállapítások

Bemutattuk, hogy szabályos jellegű, de diszkontinuitásokkal rendelkező rugalmas összetett rúdmodellben fellépő egyes képlékeny alakváltozások hatása a plasztikus deformációkat nem tartalmazó esetek alakváltozási állapotának ismeretében analitikus módon tárgyalható.

Természetesen terjedelmesebbek a formulák, ha nem csak az itt tárgyalt elemek plasztikus deformációjának hatását vizsgáljuk.

Az itt bemutatott eset is alkalmas azonban arra, hogy a diszkontinuitásokkal és képlékeny alakváltozásokkal is rendelkező diszkrét rúdmodell erő-játékáról képet kapjunk. Az ilyen diszkrét szerkezet a gyakorlatban sok esetben a folytonos kétfázisú elem (pl. vasbeton rúd) modellezését szolgálhatja. A diszkrét modellre kapott összefüggések a csomóponti indexeket, vagyis tulajdonképpen az osztásközt mint paramétert tartalmazzák.

Ez lehetőséget ad arra, hogy a kidolgozott eljárás, ill. összefüggések segítségével képet kapjunk a folytonos kétfázisú elemek — a diszkontinuitásokkal és képlékeny alakváltozásokkal is összefüggő — finit modelljeinek célszerű megválasztásáról.

### IRODALOM

1. ALMÁSI J.: Vasbeton szerkezeti elemek vizsgálata a véges elemek módszerével, *Építés-Építészettudomány* 6 (1974), 279–323
2. ФРАЙФЕЛЬД С. Е.: Собственные напряжения в железобетоне. Стройиздат, Москва—Ленинград 1941
3. KALISZKY S.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek vizsgálata, *Építés-Építészettudomány* 6 (1974), 325–340
4. PETRASOVITS G.—SOLTÉSZ P.: Kis rugalmas-képlékeny alakváltozások elméletének alkalmazása cölöpök teherbírásának vizsgálatára, MTA Műsz. Mechanikai Tanszéki Munkaközösség I. Tudományos Ülésszaka, Budapest 1974
5. PRAGER, W.—HODGE, P. G.: Tökéletesen képlékeny testek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965
6. ROLLER B.: Műszaki mechanikai kutatásaink a finit módszerek területén, *Műszaki Tudomány*, 51 (1976), 377–389

7. RÓZSA P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
8. RÓZSA P.—TASSI G.: Применение теории матриц к расчету статически неопределимых стержневых систем в упруго-пластической стадии. *Az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei.* 3 (1958), 43—62
9. SEBŐK F.—TASSI G.: A szükséges feszítőerő meghatározása termikus terhelésű vasbeton-tartályok esetében, *Építés-Építészeti tudomány* 3 (1971), 129—140
10. SNEDDON, I. N.—LOWENGRUB, M.: *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Wiley, New York—London—Sydney—Toronto 1969
11. TASSI G.: *Contribution to the Analysis of Stiffness and Cracking Conditions of Prestressed Concrete Members*, F.I.P. London 1978

**Examination of a two-phase discrete bar model with discontinuities and plastic deformations taken into consideration.** The stress and strain conditions of a one-dimensional model consisting of coaxial elements interconnected in equidistant intervals (such as the model of the simplest reinforced concrete bar) are discussed. If a bar of the model yields, the stiffness matrix of the structure is modified by one outer product. By making use of the theorem on the inverse of a modified matrix, the properties of the tridiagonal and one-pair matrices, and the Chebishev polynomials, the quantities characteristic of the play of forces can be analytically expressed in a closed form, if the connecting elements at one side of the discontinuities (cracks, etc) have undergone plastic deformation. The formulae contain the mesh characteristics of the discrete model, thus the analytical method described gives assistance for the selection of the most expedient mesh in the case of finite techniques.

**Untersuchung des zweiphasigen diskreten Stabmodells unter Berücksichtigung von Diskontinuitäten und plastischen Formänderungen.** Die Arbeit behandelt den Spannungszustand und Formänderungszustand des aus miteinander in äquidistanten Intervallen verbundenen Elementen bestehenden, eindimensionalen Modells (z. B. das einfachste Modell des Stahlbetonstabes). Wenn einzelne Stäbe des Modells zu fließen beginnen, muß die Steifigkeitsmatrix der Konstruktion jeweils um eine Dyade geändert werden. Mit Hilfe des Satzes bezüglich der Inverse einer geänderten Matrix, sowie durch Anwendung der Eigenschaften der Kontinuanten und der Einpaarigen Matrizen, sowie mit Hilfe der Tschebischewschen-Polynome können im Falle plastischer Formänderungen in analytischer Weise, in geschlossener Form die für das Kräfte-spiel charakteristischen Werte der auf einer Seite der Diskontinuität (Risse usw.) befindlichen Verbindungselemente aufgeschrieben werden. Die Formeln enthalten die Charakteristiken der Maschenweite des diskreten Modells und so bietet das analytische Verfahren im Falle finiter Methoden die Möglichkeit eine zweckmäßige Maschenweite zu wählen.

**Исследование двухфазовой дискретной модели стержня с учетом разрывов и пластических деформаций.** В работе рассматриваются напряженно-деформационные состояния одномерной модели состоящей из эквидистантно сцепленных соосных элементов, какой является и модель простейшего железобетонного стержня. В случае потека одного стержня модели матрицу жёсткости конструкции надо модифицировать по одному диаду. Пользуясь теоремой о получении обратной модифицированной матрицы, а также использованием особенностей Якобиевых и однопарных матриц, при помощи полиномов Чебышева можно написать характеризующие усилия значения, в случае пластических деформаций сцепительных элементов на одной стороне разрыва (напр. трещины). Формулы содержат параметры шага дискретной модели так аналитический метод способствует выбору целесообразной величины шага сетки в случае применения конечного метода.