SPLINE-FÜGGVÉNYEK ALKALMAZÁSA RUGALMASSÁGTANI SÍKFELADATOK MEGOLDÁSÁBAN

ÚJ JÓZSEF*

A tanulmány bonyolult alakú peremgörbével határolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas testekre vonatkozó síkfeladatok egy numerikus megoldási módszerét mutatja be. Az e feladatra megfogalmazott Muskhelishvili-féle integrálegyenlet rendszer numerikus megoldása a keresett függvények és a peremgörbe spline-approximációjával, iterációs eljárással történik. A spline-approximáció lehetővé teszi a műveletek egy részének analitikus elvégzését és a viszonylag nem magas fokszámú polinomok miatt az integrálok elég durva lépésekkel számíthatók. A számítások kis memóriakapacitású (8kB) gépen is elvégezhetők.

1. Bevezetés

Bonyolult peremmel határolt testek esetében a rugalmasságtani síkfeladatok megoldásakor az egyik legnagyobb nehézséget a perem megfelelő pontosságú matematikai leírása jelenti. A vonatkozó szakirodalom általában csak olyan feladatok megoldásával foglalkozik, amelyek peremgörbéje analitikusan egyszerű módon definiálható. Spline-függvények alkalmazásával mód nyílik tetszőleges alakú peremgörbék megfelelő pontos előállítására, és e függvények felhasználhatók a rugalmasságtani feladat megoldásában is. Emellett a spline-approximáció lehetőséget nyújt a Mushelisvili-féle integrálegyenletek egy új megoldási módszerének kidolgozására is. A tanulmány bemutatja e megoldási módszert, és egy feladat megoldásával szemlélteti e módszer alkalmazhatóságát.

2. A feladat megfogalmazása

Legyen adott egy homogén, izotrop, lineárisan rugalmas test x_1, x_2 síkba eső A tartományának g pereme, mely folytonos, sima, zárt görbe. A peremen vagy a terhelés adott (1. peremérték feladat) vagy az elmozdulás van megadva (2. peremérték feladat).

Vegyünk fel a g görbén n számú pontot, azaz adott a $\{\tau_j\}_{j=1}^{n}$ pontsokaság ($\tau_j = x_{1j} + ix_{2j}$ komplex helyvektor). A g görbét a G_Δ harmadfokú paraméteres polinomspline-nel approximáljuk, melyet a $\{\tau_j\}_{j=1}^{n}$ pontsokaságon

* Uj József, 2040 Budaörs, Lévai u. 17.

állítunk elő. Legyen a spline-függvény által leírt $\{\gamma_j\}_{j=1}^{n}$ szegmensek paraméteres egyenlete a komplex számsíkon

$$\underset{(j)}{t}(u) = \sum_{m=0}^{3}(\underset{(j)}{A_{1m}} + \underset{(j)}{A_{2m}})\, u^m; \quad u \in [0, 1]; \quad t = x_1 + ix_2. \tag{1}$$

A γ_j és γ_{j+1} ($j = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma_{n+1} \equiv \gamma_1$) szegmensek folytonos érintővel és görbülettel illeszkedjenek, ezen feltételekből számíthatók az $\underset{(j)}{A_{1m}}$, $\underset{(j)}{A_{2m}}$ együtthatók. E számítással részletesen foglalkozik az [1] előadás. Legyen a g görbét közelítő G_Δ spline által definiált görbe γ, azaz $\gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j$.

Ha testre térfogati erők nem hatnak, akkor a komplex függvénytan módszereivel a feladat a $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ komplex potenciálok meghatározására vezethető, melyeknek a peremen felvett értékeire fennáll [2, 144—145. old.]:

$$\varkappa\,\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f(t)}, \quad t \in \gamma, \tag{2}$$

ahol

$$\varkappa = \begin{cases} 1 \\ 4\nu - 3 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} i\int_0^{s(t)} (p_1 + ip_2)\, ds & \text{az 1. peremfeladatra,} \\ 2G[u(t) + iv(t)] & \text{a 2. peremfeladatra.} \end{cases}$$

Ezt a feladatot Muskhelishvili [2, 398—402. old.] másodfajú, Fredholm típusú szinguláris integrál-egyenletrendszerre fogalmazta át:

$$p(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_\gamma [p(t)(\varkappa + \cos 2\vartheta) + q(t)\sin 2\vartheta]\, d\vartheta = -a(t_0)\,,$$

$$q(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_\gamma [p(t)\sin 2\vartheta + q(t)(\varkappa - \cos 2\vartheta)]\, d\vartheta = b(t_0), \tag{3}$$

ahol

$$p(t) = Re\varphi(t), \quad q(t) = Im\varphi(t),$$

$$\vartheta = \arg(t - t_0); \quad t, t_0 \in \gamma,$$

$$a(t) = Re\, A(t), \quad b(t) = Im\, A(t),$$

$$A(t) = -\frac{1}{2}\overline{f(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(t)}}{t - t_0}\, dt,$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

A (3) megoldása után a $\psi(t)$ az (2)-ből már számítható, a $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ holomorf fürggvények pedig Cauchy-integrállal számíthatók:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(t)}{t - z}\, dt. \tag{4}$$

Végül pedig a feszültségi koordináták és az elmozdulásmező:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= Re\,[2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \psi'(z)]\,,\\ \sigma_{22} &= Re\,[2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]\,,\\ \tau_{12} &= Im\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]\,,\\ 2Gu &= Re\,[\varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]\,,\\ 2Gv &= Im\,[\varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]\,.\end{aligned} \tag{5}$$

3. A Muskhelishvili-féle integrálegyenlet rendszer numerikus megoldása spline-approximációval

Vegyünk fel a γ görbe γ_j $(j = 1, \ldots, n)$ szegmensein $\{t_j\}_{j=1}^n$ belső pontokat. Tekintsük a $\varphi(t)$ függvényt a γ_j szegmenseken állandóknak, kössük ezen értékeket a $\{t_j\}_{j=1}^n$ pontokhoz. Bevezetve a $p(t_j) \equiv p_j$, $q(t_j) \equiv q_j$, $a(t_j) \equiv a_j$ és $b(t_j) = b_j$ jelöléseket és a (3) egyenleteket a $\{t_j\}_{j=1}^n$ pontokra felírva, az ismeretlen p_j és q_j diszkrét értékekre a következő algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{gathered} p_j - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[p_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}(\varkappa + \cos 2\vartheta)\,d\vartheta + q_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}\sin 2\vartheta\,d\vartheta\right] = -a_j\,,\\ q_j - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[p_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}\sin 2\vartheta\,d\vartheta + q_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}(\varkappa - \cos 2\vartheta)\,d\vartheta\right] = b_j\,,\\ \vartheta_{j,k} = \arg\,(\tau_k - t_j)\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Az integrálok kiszámítása és az egyenletrendszer megoldása után az $(x_{1j}, x_{2j}, p_j, q_j)$ számnégyesek által meghatározott alappontokon, mint a 4 dimenziós Euklidesi tér pontjain keresztül előállítjuk a $P_\Delta(t)$ harmadfokú paraméteres polinom-spline-t

$$P_\Delta(t){:}\left\{\underset{(j)}{p_k}(u) = \sum_{m=0}^{3}\underset{(j)}{A_{km}}\,u^m\right\}_{j=1}^{n}, \quad u \in [0, 1],\ k = 1, \ldots, 4. \tag{7}$$

Ebből a $\varphi(t)$ függvényt approximáló $\Phi_\Delta(t)$ spline

$$\Phi_\Delta(t):\left\{\underset{(j)}{\varphi}(u) = \sum_{m=0}^{3}[\underset{(j)}{A_{3m}} + i\underset{(j)}{A_{4m}}]\,u^m\right\}_{j=1}^{n} \tag{8}$$

Ezt az approximációt a következő iterációs eljárással javíthatjuk: a (3) egyenletekből a (8) felhasználásával újra számíthatjuk a p_j és q_j diszkrét értékeket, majd ezek segítségével állítjuk elő (7)-el a $P_\Delta(t)$ spline-függvényt. Az iterációs ciklust a kívánt pontosságig ismételhetjük.

Az (1) és (8) spline-függvényekkel a $\varphi(z)$ holomorf függvény (4) alapján paraméteres integrálok összegeként numerikusan számítható.

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{u=0}^{1} \frac{\left[\sum_{m=0}^{3} (\underset{(j)}{A_{3m}} + i\underset{(j)}{A_{4m}})\, u^m\right]\left[\sum_{m=1}^{3} m(\underset{(j)}{A_{1m}} + i\underset{(j)}{A_{2m}})\, u^{m-1}\right]}{\sum_{m=0}^{3} (\underset{(j)}{A_{1m}} + i\underset{(j)}{A_{2m}})\, u^m - z}\, du. \quad (9)$$

Hasonló módon számítható a $\psi(z)$ függvény, ha (2)-ből a $\psi(t)$ függvényt kifejezzük.

A feszültségek számításához a függvények deriváltjait a

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\, dt \quad \text{és} \quad \varphi''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^3}\, dt$$

összefüggések alapján (9)-hez hasonlóan paraméteres integrálok összegeként állíthatjuk elő. Végeredményben a feszültségmező (5) alakban történő előállításához az $\underset{(j)}{A_{km}}$ $(k = 1, \ldots, 4;\ m = 0, 1, \ldots, 3;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ együtthatókat kell kiszámítani és tárolni.

4. A rugalmasságtani síkfeladat megoldásának gépi programja

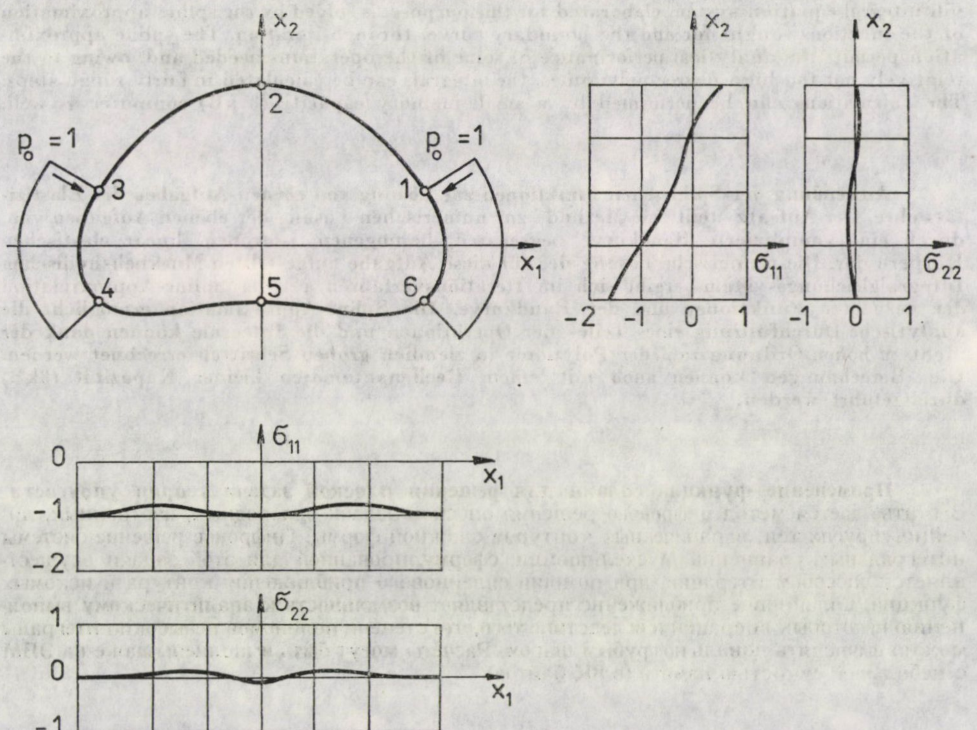
A rugalmasságtani 1. vagy 2. peremértékfeladat megoldásához az alábbi részprogramokat szerkesztettük:

- ADAT: Interaktív módon rögzíti a bemenő geometriai és terhelési adatokat, valamint a számítások pontosságát befolyásoló paraméterek értékeit.
- ZS 2: a kétdimenziós Euklidesi tér alappontjain definiált spline-függvény együtthatóit számítja.
- ZS 4: a 4 dimenziós Euklidesi tér alappontjain definiált spline-függvény együtthatóit számítja.
- AB: a (6) egyenletben szereplő p_j és q_j együtthatóit számítja.
- LINER: a (6) egyenletrendszert oldja meg Gauss-féle eliminációs eljárással.
- KOJA: a p_j, q_j diszkrét értékeket javító program, amely az $(x_{1j}, x_{2j}, p_j, q_j)$ alappontokon ZS 4-el számított 4 dimenziós spline felhasználásával újra számítja a p_j és q_j értékeit (az integrálás Simpson-formulával történik.).
- FEME: (5) alapján tetszőleges belső pontban számítja a feszültségi koordinátákat.

A gépi program WANG 2200 B típusú kis-számítógépre készült BASIC nyelven.

5. Alkalmazási példa

Az ábrán látható test peremgörbéjét $n = 6$ alapponton keresztülmenő zárt spline-görbével közelítettük. A test peremén a 3—4 és 6—1 szegmenseket állandó egységnyi intenzitású felületi nyomás terheli. A spline-approximációk során az előírt szögpontosság 1^0, integráláskor a paraméter lépése 0,1 volt. A $\varphi(t)$ potenciálfüggvény peremértékének előírt 4%-os közelítési pontosságát a 48. iterációs ciklusban érte el a számítás. A számított feszültségi koordinátákat az x_1 és x_2 tengelyek pontjaiban tüntettük fel.



1. ábra

6. Összefoglalás

A tanulmány bonyolult alakú peremgörbével határolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas testekre vonatkozó síkfeladatok egy numerikus megoldási módszerét mutatja be. Az e feladatra megfogalmazott Muskhelishvili-féle integrálegyenletrendszer numerikus megoldása a keresett függvények és a peremgörbe spline-approximációjával, iterációs eljárással történik. A spline-approximáció lehetővé teszi a műveletek egy részének analitikus elvégzését, és a viszonylag nem magas fokszámú polinomok miatt az integrálok elég durva lépésekkel számíthatók. A számítások kis memóriakapacitású (8kB) gépen is elvégezhetők.

IRODALOM

1. ÚJ J.: Spline-függvények alkalmazása a számítógépes geometriai tervezésben. Előadás a Fiatal Oktatók és Kutatók Tudományos Fórumán, BME, Budapest 1977 (nyomtatás alatt)
2. MUSKHELISHVILI N. I.: Some Basis problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1953

Application of spline functions to solve planar problems in the field of elasticity. The numerical solution method of planar problems involving homogeneous, isotropic, linearly elastic bodies enclosed by a sophisticated form boundary curve is presented. The Muskhelishvili integral equation system elaborated for this purpose, is solved by the spline approximation of the functions sought for and the boundary curve, through iteration. The spline approximation permits the analytical performance of some of the operations needed and, owing to the relatively not too high degree polynomes, the integrals can be calculated in fairly rough steps. The calculations can be performed by a small memory capacity (8 kB) computer as well.

Anwendung der Splineschen Funktionen zur Lösung von ebenen Aufgaben der Elastizitätslehre. Der Aufsatz stellt eine Methode zur numerischen Lösung der ebenen Aufgaben von, durch eine komplizierte Randkurve begrenzten, homogenen, isotropen, linear elastischen Körpern dar. Die numerische Lösung des für diese Aufgabe aufgestellten Muskhelishvilischen Integralgleichungssystems ergibt sich im Iterationsverfahren aus der Spline-Approximation der gesuchten Funktionen und der Randkurve. Die Spline-Approximation ermöglicht die analytische Durchführung eines Teiles der Operationen und die Integrale können dank der nicht zu hohen Ordnungszahl der Polynome in ziemlich groben Schritten errechnet werden. Die Berechnungen können auch mit einem Rechenautomaten kleiner Kapazität (8kB) durchgeführt werden.

Применение функций сплайн для решения плоской задачи теории упругости В статье дается метод цифрового решения плоской задачи однородных, изотропных, линейно упругих тел, ограниченных контуром сложной формы. Цифровое решение системы интегральных уравнений Мусхелишвили, сформулированной для этой задачи осуществляется способом итерации, при помощи сплайнового приближения контура и искомых функций. Сплайновое приближение представляет возмощность к аналитическому выполнению некоторых операций и вследствие того, что степени полиномов невысоки интегралы можно вычислять доволь но грубым шагом. Расчеты могут быть выполнены даже на ЭВМ с небольшой емкостью памяти (в 8К байтов).