A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SHANNON-FÉLE ALAPTÉTEL ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA AZ INFORMÁCIÓELMÉLETBEN (III)*

Írta: R. L. DOBRUSIN

5. §. AZ ALAPTÉTELEK BIZONYÍTÁSA

5. 1. Az 1. tétel bizonyítása. Az átvitel módszerének megkonstruálása

Tegyük fel, hogy adva vannak $\{W^t\}$ közlemények és $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezések sorozatai, amelyekre az 1. tétel minden feltétele teljesül. Rögzítsük a tétel állításaiban szereplő $\varepsilon > 0$ számot. Válasszuk meg $\delta > 0$-t úgy, hogy fennálljon

$$\delta \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.1.1}$$

valamint

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, V)} < \frac{1-\delta}{1+\delta} \tag{5.1.2}$$

(utóbbi a tétel II. feltétele folytán lehetséges). Akkor a (3. 1. 3), (4. 1. 3) jelölései mellett[1] fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_\delta^t}{L_\delta^t} = 0. \tag{5.1.3}$$

A tétel II. feltételéből következik, hogy minden elegendően nagy t-re a $H^t(W)$ entrópiára fennáll $H^t(W) < \infty$. — A tétel I., III., V. feltételeiből következik mármost a közleményekre vonatkozó alaplemma feltételeinek teljesülése (ε-t δ-val helyettesítjük). Tekintsük az ebben a lemmában bevezetett $q_i^t(x)$ $(i = 1, \ldots, K_\delta^t)$, $r^t(x)$ függvények rendszerét, és segítségükkel vezessünk be új — $s_{ij}^t(x)$ — függvényeket, amelyek ugyancsak mérhetők $x^t \in X^t$-re vonatkozólag. Az i, j indexek a következő értékeket fogják felvenni:

$$i = -2, -1, \;0, 1, \ldots, K_\delta^t; \qquad j = 1, \ldots, R_i^t,$$

ahol a függvények összes száma

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} R_i^t = L_\delta^t; \tag{5.1.4}$$

* Uszpehi Matematicseszkih Nauk XIV. (1959), vip. 6 (90) 3—104. — Jelen befejező közlemény az eredeti tanulmány 5—6. §-ának a fordítását, továbbá az irodalomjegyzéket tartalmazza. A tanulmány 1 §-ának a fordítása az MTA III. Oszt. Közl. XI/4 (1961) számában (427—456. oldal), a 2—4. § fordítása ugyanezen folyóirat XII/1 (1962) számában (51—103. oldal) jelent meg.

[1] Ha $C^t(Q, V) = \infty$, akkor a (3. 1. 3) képlet nem nyújt lehetőséget L_δ^t meghatározására. Ilyen t-k esetére L_δ^t-t oly nagynak fogjuk választani, hogy fennálljon (5. 1. 3), és hogy a (Q^t, V^t) csatornára $L = L_\delta^t$ mellett teljesüljön FEINSTEIN 3. 9 pontbeli lemmájának állítása.

az R_i^t számokat alább fogjuk meghatározni. Nevezetesen, írjuk a következőket (a jelöléseket illetőleg l. a 4. 1 pontot)

$$\left.\begin{aligned}\bar{q}_i^t &= \int_{X^t} q_i^t(x)p_\xi^t(dx) \qquad (i=1,\dots,K_\delta^t),\\ \bar{q}_0^t &= \int_{X^t} r_\delta^t(x)p_\xi^t(dx),\\ \bar{q}_{-1}^t &= 1-Q^t.\end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

A (4. 1. 6) definícióból, valamint (4. 1. 4), (4. 1. 5)-ből következik, hogy

$$0 \leqq \bar{q}_i^t \leqq 1, \quad \sum_{i=-1}^{K_\delta^t} \bar{q}_i^t = 1. \tag{5.1.6}$$

Legyen most

$$\begin{aligned} R_i^t &= \left[\frac{\bar{q}_i^t L_\delta^t}{2}\right]+1 \qquad (i=-1,0,1,\dots,K_\delta^t),\\ s_{ij}^t(x) &= \frac{1}{R_i^t} q_i^t(x) \qquad (i=1,\dots,K_\delta^t;\, j=1,\dots,R_i^t),\\ s_{0j}^t(x) &= \frac{1}{R_0^t} r_\delta^t(x) \qquad (j=1,\dots,R_0^t),\\ s_{-1j}^t(x) &= \frac{1}{R_{-1}^t}[1-Q^t(x)] \qquad (j=1,\dots,R_{-1}^t).\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

(5. 1. 6)-ból következik, hogy

$$\sum_{i=-1}^{K_\delta^t} R_i^t = \sum_{i=-1}^{K_\delta^t}\left[\frac{\bar{q}_i^t L_\delta^t}{2}\right]+K_\delta^t+2 \leqq \frac{L_\delta^t}{2}\sum_{i=-1}^{K_\delta^t}\bar{q}_i^t+K_\delta^t+2 \leqq \frac{L_\delta^t}{2}+K_\delta^t+2. \tag{5.1.8}$$

(5. 1. 3)-ból következik, hogy minden elegendően nagy t-re (a következőkben csak ilyen t értékeket fogunk tekinteni)

$$\sum_{i=-1}^{K_\delta^t} R_i^t \leqq L_\delta^t. \tag{5.1.9}$$

Ezért írhatjuk a következőket:

$$\left.\begin{aligned} R_{-2}^t &= L_\delta^t - \sum_{i=-1}^{K_\delta^t} R_i^t \leqq L_\delta^t,\\ s_{-2j}^t(x) &\equiv 0 \qquad (j=1,\dots,R_{-2}^t).\end{aligned}\right\} \tag{5.1.10}$$

Minthogy definíció szerint

$$\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t} s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx) = \begin{cases}\bar{q}_i^t & (i=-1,\dots,K_\delta^t),\\ 0 & (i=-2),\end{cases} \tag{5.1.11}$$

azért (5. 1. 6)-ból következik, hogy ha

$$p_{ij}^t = \int_{X^t} s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx), \tag{5. 1. 12}$$

akkor a következő összegre fennáll:

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t = 1. \tag{5. 1. 13}$$

Továbbá az (5. 1. 7), (5. 1. 10) definíciókból következik, hogy

$$p_{ij}^t = \begin{cases} \dfrac{1}{R_i^t} \bar{q}_i^t & (i = -1, \ldots, K_\delta^t) \\ 0 & (i = -2) \end{cases} \tag{5. 1. 14}$$

nem nagyobb, mint $\dfrac{2}{L_\delta^t}$. Az (5. 1. 13), (5. 1. 14) egyenlőségek azt mutatják, hogy a p_{ij}^t valószínűségek összessége eleget tesz FEINSTEIN lemmája (3. 1. 4), (3. 1. 5) (analóg módon (3. 9. 1), (3. 9. 2)) feltételeinek. Éppen ebből a célból helyettesítettük a $q_i^t(x)$ függvényeket az $s_{ij}^t(x)$ függvényekkel.

Tekintsük most a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés-sorozatot. A tétel IV. feltétele szerint létezik olyan $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ információ-stabilis sorozat, amely eleget tesz az (1. 7. 7), (1. 7. 8) feltételeknek. Az (1. 7. 7) feltétel — a $\frac{+\infty}{+\infty} = 1$ megállapodás felhasználásával — azt mutatja, hogy minden elegendően nagy t-re $C^t(Q, V) = \infty$-ből következik, hogy $I^t(\eta, \tilde{\eta}) = \infty$. Minthogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ párok sorozata információ-stabilis, ez azt jelenti, hogy minden elegendően nagy t-re, melyre $C^t(Q, V) = \infty$, a $p_{\eta\tilde{\eta}}^t$ eloszlás szinguláris a $p_\eta^t \times p_{\tilde{\eta}}$ eloszlásra vonatkozólag. A tétel I és II feltételéből következik, hogy

$$\lim_{t \to \infty} C^t(Q, V) = \infty. \tag{5. 1. 15}$$

A $\{Q^t, V^t\}$ sorozatot bontsuk fel két részsorozatra úgy, hogy az egyikre $C^t(Q, V) < \infty$, a másikra pedig $C^t(Q, V) = \infty$; a tétel III. és IV. feltételéből azt kapjuk, hogy az első sorozatra alkalmazható FEINSTEIN 3. 1 pontbeli lemmája, és hogy minden elegendően nagy t-re mindazon átviteli berendezésekre, amelyek a második részsorozatban fordulnak elő, alkalmazható FEINSTEIN 3. 9 pontbeli lemmája. Ez utóbbinak állítása erősebb, mint a 3. 1 pontbeli lemmáé ((3. 9. 3)-ból nyilvánvalóan következik a (3. 1. 6) egyenlőtlenség). Ezért állíthatjuk, hogy minden elegendően nagy t-re teljesül FEINSTEIN 3. 1 pontbeli lemmájának állítása. A p_{ij}^t valószínűségek általunk most használt kettős számozásának megfelelően, a (3. 1. 6) és (3. 1. 7) feltételeket a következő alakban írhatjuk (ismét δ-val helyettesítjük ε-t):

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t Q^t(y_{ij}, A_{ij}) \geq 1 - \delta, \tag{5. 1. 16}$$

illetőleg

$$\left(\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_1^t(y_{ij}, \tilde{y}) Q^t(y_{ij}, d\tilde{y}), \ldots, \sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_{N^t}^t(y_{ij}, \tilde{y}) Q^t(y_{ij}, d\tilde{y}) \right) \in [\tilde{V}^t]_\delta. \tag{5. 1. 17}$$

Most hozzáfoghatunk az átviteli módszer leírásához. Az 1. 7 pont elején adott definíciónak megfelelően olyan $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ valószínűségi változókat kell konstruálnunk melyek értékei rendre az (X^t, S_X^t), (Y^t, S_Y^t), $(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t)$, $(\tilde{X}^t, S_{\tilde{X}}^t)$ terekbe esnek, emellett Markov-láncot alkotnak. Úgy fogjuk tekinteni, hogy ezek a változók az $(\tilde{\Omega}^t, \tilde{\mathfrak{F}}^t, \tilde{P}^t)$ valószínűségi mezőn vannak megadva. Ismeretes (l. [9]), hogy tetszőleges előre megadott kezdeti valószínűségeloszlások és átmenet-függvények esetén létezik olyan Markov-lánc, amely ezekkel a kezdeti eloszlásokkal, illetve átmenet-függvényekkel rendelkezik. Következésképp a $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók megkonstruálásához elegendő megadni a $p_X(\cdot)$ kezdeti valószínűség-eloszlást és a $P_{XY}^t(\cdot,\cdot)$, $P_{Y\tilde{Y}}^t(\cdot,\cdot)$ és $P_{\tilde{Y}\tilde{X}}^t(\cdot,\cdot)$ átmenet-függvényeket. Az (X^t, S_X^t) téren megadott $p_X^t(\cdot)$ kezdeti valószínűség-eloszlásként vegyük a bemeneti közlemények $p_\xi^t(\cdot)$ eloszlását (l. az 1. 4 pontot); ekkor tetszőleges $A \in S_X^t$-re

$$\tilde{P}\{\xi_0^t \in A\} = p_\xi^t(A). \tag{5. 1. 18}$$

Továbbá, az $x^t \in X^t$, $B^t \in S_Y^t$-re definiált $P_{XY}^t\ (x, B)$ átmenet-függvényt a következő egyenlőség segítségével határozzuk meg:

$$P_{XY}^t(x, B) = \sum_{y_{ij}^t \in B^t} s_{ij}^t(x). \tag{5. 1. 19}$$

Ennek a függvénynek x^t szerint való mérhetősége az $s_{ij}^t(x)$ függvények mérhetőségéből következik. Az a tény, hogy rögzített x^t mellett ez valószínűségi mértéket ad, abból következik, hogy az (5. 1. 7), (5. 1. 10) és (4. 1. 5) definícióknak megfelelően $0 \leqq s_{ij}^t(x) \leqq 1$ és

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} s_{ij}^t(x) = \sum_{i=1}^{K_\delta^t} q_i^t(x) + r^t(x) + [1 - Q^t(x)] = 1. \tag{5. 1. 20}$$

(5. 1. 19)-ből következik, hogy bármely y_{ij}^t pontra és tetszőleges $A \in S_X^t$ halmazra fennáll

$$\tilde{P}^t\{\xi_0 \in A,\ \eta_0 = y_{ij}\} = \int_A s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx). \tag{5. 1. 21}$$

A $P_{Y\tilde{Y}}^t(y, \tilde{B})$ átmenet-függvénynek, amely $y^t \in Y^t$, $\tilde{B}^t \in S_{\tilde{Y}}^t$-re van értelmezve, vegyük egyszerűen a $Q^t(y, \tilde{B})$ függvényt, amelyet a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés megadásakor használtunk fel:

$$P_{Y\tilde{Y}}^t(y, \tilde{B}) = Q^t(y, \tilde{B}). \tag{5. 1. 22}$$

Ilyen definíció mellett a $\tilde{P}^t\{\tilde{\eta}_0 \in \tilde{B}/\eta_0\}$ feltételes valószínűségre 1 valószínűséggel fennáll:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\eta}_0 \in \tilde{B} \mid \eta_0\} = Q^t(\eta_0, \tilde{B}). \tag{5. 1. 23}$$

Végezetül adjuk meg a $P_{\tilde{Y}\tilde{X}}^t\ (\tilde{y}, \tilde{A})$ átmenet-függvényt, ahol $\tilde{y}^t \in \tilde{Y}^t$, $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{X}}^t$. E célból adjuk meg tetszőlegesen az $\tilde{x}_+^t \in \tilde{X}^t$ pontot. Kiegészítve a közleményekre vonatkozó lemmában közölt konstrukciót, legyen most $\tilde{x}_0^t = \tilde{x}_{-1}^t = \tilde{x}_{-2}^t = \tilde{x}_+^t$. Végül pedig legyen:

$$P^t_{\tilde{Y}\tilde{X}}(\tilde{y}, \tilde{A}) = \begin{cases} 0, & \tilde{x}^t_i \notin \tilde{A}^t, \\ 1, & \tilde{x}^t_i \in \tilde{A}^t, \end{cases} \quad \tilde{y}^t \in A^t_{ij} \quad \begin{pmatrix} i = -2, -1, \dots, K^t_\delta \\ j = 1, \dots, R^t_i \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 0, & \tilde{x}^t_+ \notin \tilde{A}^t, \\ 1, & \tilde{x}^t_+ \in \tilde{A}^t, \end{cases} \quad \tilde{y}^t \notin \bigcup_{i,j} A^t_{ij}. \tag{5. 1. 24}$$

Minthogy a FEINSTEIN-lemma állításának megfelelően az A^t_{ij} halmazok páronként idegenek, az (5. 1. 24) definíció ellentmondásmentes. Az A^t_{ij} halmazok mérhetőségéből következik, hogy az (5. 1. 24) függvény, mint $\tilde{y}^t$ függvénye, mérhető. Az, hogy rögzített $\tilde{y}^t$ mellett ez valószínűségi mérték, rögtön következik a definícióból. (5. 1. 24)-ből közvetlenül folyik, hogy a következő feltételes valószínűségekre fennáll:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = \tilde{x}_i/\tilde{\eta}_0\} = 1, \quad & \tilde{\eta}^t_0 \in A^t_{ij}, \\ \tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = \tilde{x}_+/\tilde{\eta}_0\} = 1, \quad & \tilde{\eta}^t_0 \notin \bigcup_{i,j} A^t_{ij} \end{aligned}\right\}. \tag{5. 1. 25}$$

5. 2. Az 1. tétel bizonyítása. A tétel feltételei teljesülésének igazolása

Az ε valószínűségű eseménytől eltekintve pontos átvitel definíciójának megfelelően, amelyet az 1. 7 pont elején adtuk meg, meg kell most konstruálnunk a $\tilde{\xi}'^t_0$ kiegészítő változót, s azután igazolnunk kell az ott megfogalmazott 1—4. követelmények teljesülését. Nekikezdve e program végrehajtásának, először is megjegyezzük, hogy az 1. feltétel — amely abból áll, hogy a $\xi^t_0, \eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0, \tilde{\xi}^t_0$ változók Markov-láncot képeznek — a konstrukció folytán közvetlenül teljesül. Igazoljuk most a 3. feltétel teljesülését; ez a feltételből abból állott, hogy az $\eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0$ változókat a $\{Q^t, V^t_\varepsilon\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze. Az (5. 1. 23) összefüggés az (1. 5. 1) egyenlőségnek a mi konkrét esetünkre való alkalmazása, és ezért csak azt kell még igazolnunk, hogy az $(\eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0)$ pár eloszlása olyan, hogy a következő vektorra fennáll

$$\left(M\pi^t_1(\eta_0, \tilde{\eta}_0), \dots, M\pi^t_{N^t}(\eta_0, \tilde{\eta}_0)\right) \in [\bar{V}^t]_\delta \subset [\bar{V}^t]_\varepsilon. \tag{5. 2. 1}$$

Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy (5. 1. 19)-ből következik, hogy az η^t változó 1 valószínűséggel csupán az y^t_{ij} értékeket veszi fel, és hogy (5. 1. 12) és (5. 1. 21)-nek megfelelően

$$\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{ij}\} = \int_{X^t} s^t_{ij}(x) p^t_\xi(dx) = p^t_{ij}. \tag{5. 2. 2}$$

Az (5. 1. 23) egyenlőség tehát azt mutatja, hogy tetszőleges k mellett

$$M\pi^t_k(\eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0) = \sum_{i=-2}^{K^t_\delta} \sum_{j=1}^{R^t_i} p^t_{ij} \int_{\tilde{Y}^t} \pi^t_k(y_{ij}, \tilde{y}) Q(y_{ij}, d\tilde{y}), \tag{5. 2. 3}$$

és az (5. 2. 1) állítás most az (5. 1. 17) feltétel következménye.

Kezdjünk most hozzá a $\tilde{\xi}'^t_0$ valószínűségi változó megadásához. E célból elegendő megadnunk a $\xi^t_0, \eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0, \tilde{\xi}^t_0, \tilde{\xi}'^t_0$ valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlását az $X^t \times Y^t \times \tilde{Y}^t \times \tilde{X}^t \times \tilde{X}^t$ téren. Minthogy a $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók együttes eloszlását már megadtuk az 5. 1 pontban, elegendő megadnunk tetszőleges $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{X}}^t$ halmazra a

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y, \tilde{\eta}_0 = \tilde{y}, \tilde{\xi}_0 = \tilde{x}\} \tag{5. 2. 4}$$

feltételes valószínűségeket. Minthogy az η_0^t változók értékkészlete az

$$y_{ij}^t \qquad (i = -2, \ldots, K_\delta^t;\ j = 1, \ldots, R_i^t),$$

diszkrét érték-összesség, azért az (5. 2. 4) kifejezést csupán $y^t = y_{ij}^t$ esetében vizsgálhatjuk. Legyen mármost

$$\begin{aligned} &\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y_{ij}, \tilde{\eta}_0 = \tilde{y}, \tilde{\xi}_0 = \tilde{x}\} = \\ &= \begin{cases} 1, & \tilde{x}_i^t \in \tilde{A}^t, \\ 0, & \tilde{x}_i^t \notin \tilde{A}^t, \end{cases} \quad \text{ha} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, K_\delta^t \\ j = 1, 2, \ldots, R_i^t \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5. 2. 5}$$

továbbá

$$\begin{aligned} &\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y_{0j}, \tilde{\eta}_0 = \tilde{y}, \tilde{\xi}_0 = \tilde{x}\} = \\ &\qquad P^t\{\tilde{\xi} \in \tilde{A}/(\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\delta^t, \xi = x\} \qquad (j = 1, \ldots, R_0^t), \end{aligned} \tag{5. 2. 6}$$

ahol az egyenlőség jobb oldalán álló feltételes valószínűséget a tétel V. feltételében felhasznált $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ pár együttes eloszlása alapján számítjuk ki, az F_δ^t halmazt pedig a (4. 1. 1) egyenlőség definiálja. Végezetül írjuk a következőt:

$$\begin{aligned} &\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y_{-1j}, \tilde{\eta}_0 = \tilde{y}, \tilde{\xi}_0 = \tilde{x}\} = \\ &\qquad P^t\{\tilde{\xi} \in \tilde{A}/\xi = x\} \qquad (j = 1, \ldots, R_{-1}^t). \end{aligned} \tag{5. 2. 7}$$

Ami a

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y_{-2j}, \tilde{\eta}_0 = \tilde{y}, \tilde{\xi}_0 = \tilde{x}\} \qquad (j = 1, \ldots, R_{-2}^t)$$

feltételes valószínűségeket illeti, megadásuk módja lényegtelen, minthogy az (5. 2. 2) és (5. 1. 14) egyenlőségek azt mutatják, hogy

$$\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{-2j}\} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, R_{-2}^t). \tag{5. 2. 8}$$

Tanulmányozzuk most a $\tilde{\xi}_0'^t$ változó tulajdonságait. Mindenekelőtt igazoljuk a 4. feltételt, amely az ε valószínűségű eseménytől eltekintve pontos közleményátvitel definíciójában szerepel. E célból vegyük észre (5. 2. 5)-ből kiindulva, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' = \tilde{x}_i/\eta_0 = y_{ij}\} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, K_\delta^t; j = 1, \ldots, R_i^t). \tag{5. 2. 9}$$

Továbbá (5. 1. 25)-ből következik, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = \tilde{x}_i/\eta_0 = y_{ij}\} \geqq \tilde{P}^t\{\tilde{\eta}_0 \in A_{ij}/\eta_0 = y_{ij}\}. \tag{5. 2. 10}$$

(5. 1. 23) felhasználásával (5. 2. 9) és (5. 2. 10)-ből levezethető, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'/\eta_0 = y_{ij}\} \leqq 1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij}) \qquad (i = 1, \ldots, K_\delta^t; j = 1, \ldots, R_i^t). \tag{5. 2. 11}$$

(5. 2. 11) és (5. 2. 8)-ból mármost következik, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'\} \leqq \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{ij}\}[1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij})] + \sum_{j=1}^{R_0^t} \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{0j}\} + \sum_{j=1}^{R_{-1}^t} \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{-1j}\}. \tag{5.2.12}$$

(5. 2. 2) és (5. 1. 14)-ből következik, hogy (5. 2. 12) maga után vonja a

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'\} \leqq \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t[1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij})] + \bar{q}_0^t + \bar{q}_{-1}^t \tag{5.2.13}$$

egyenlőtlenséget.

Az (5. 1. 16) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy elegendően nagy t értékekre az (5. 2. 13) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kettős összeg nem lépi túl a δ számot. (5. 1. 5)-ből és a (4. 1. 2) definícióból következik, hogy

$$\bar{q}_0^t = 1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(F_\delta). \tag{5.2.14}$$

Minthogy a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ párok sorozata információ-stabilis, az (5. 2. 14) egyenlőség jobb oldala zérushoz tart, ha $t \to \infty$, vagyis elegendően nagy t-kre a $\bar{q}_0^t$ számra fennáll: $\bar{q}_0^t \leqq \delta$. Végül (5. 1. 5) és (4. 1. 6) azt fejezik ki, hogy

$$\bar{q}_{-1}^t = 1 - \bar{Q}^t \to 0 \qquad (t \to \infty), \tag{5.2.15}$$

és azért minden elegendően nagy t-re $\bar{q}_{-1}^t \leqq \delta$. Tehát (5. 2. 13) azt mutatja, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'\} \leqq \varepsilon, \tag{5.2.16}$$

amiből következik, hogy a számunkra szükséges 4. feltétel minden elegendően nagy t-re teljesül.

Igazoljuk most a 2. feltétel teljesülését; e feltétel abból áll, hogy a $\xi_0^t, \tilde{\xi}_0'^t$ pár minden elegendően nagy t-re tegyen eleget $\{W_\varepsilon^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek. Ki akarjuk számítani az $M\varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0')$ várható értéket. (5. 2. 5) és (5. 1. 21)-ből következik, hogy a $p_{\xi_0}^t = p_\xi^t$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő feltételes valószínűségre:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' = \tilde{x}_i, \eta_0 = y_{ij}/\xi_0 = x\} = \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{ij}/\xi_0 = x\} = s_{ij}^t(x) \qquad (i = 1, \ldots, K_\delta^t;\ j = 1, \ldots, R_i^t). \tag{5.2.17}$$

Továbbá, tetszőleges $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{X}}^t$ halmazra a $p_{\xi_0}^t = p_\xi^t$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő összefüggés:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}, \eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\} = \tilde{P}\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y_{0j}\}\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\}. \tag{5.2.18}$$

(5. 1. 21)-ből következik, hogy majdnem minden x-re

$$\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\} = s_{0j}^t(x). \tag{5.2.19}$$

(5. 2. 6), (5. 2. 18) és (5. 2. 19)-ből mármost levezethető, hogy majdnem minden x-re

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A},\ \eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\} = P^t\{\tilde{\xi} \in A/(\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\delta,\ \xi = x\} s_{0j}^t(x). \tag{5.2.20}$$

Felhasználva (5. 1. 7)-et és a (4. 1. 2) definíciót, (5. 2. 20)-ból azt kapjuk, hogy majdnem minden x-re

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{R_0} \tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A},\ \eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\} = \\ &= P^t\{\tilde{\xi} \in \tilde{A}/(\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\delta,\ \xi = x\} P^t\{(\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\delta/\xi = x\} = \\ &= P^t\{(\tilde{\xi} \in \tilde{A}) \cap (\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\delta/\xi = x\}. \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Végül, (5. 2. 20) analogonjaként, (5. 2. 7)-ből levezethető, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem mindenütt

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A},\ \eta_0 = y_{-1,j}/\xi_0 = x\} = P^t\{\tilde{\xi} \in \tilde{A}/\xi = x\} s_{-1,j}^t(x). \tag{5.2.22}$$

Számítsuk most ki a következő várható értéket:

$$M\varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0') = \sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \int\limits_{\{\eta_0^t(\tilde{\omega}) = y_{ij}^t\}} \varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0') \tilde{P}(d\tilde{\omega}). \tag{5.2.23}$$

(5. 2. 17)-ből következik, hogy

$$\int\limits_{\{\eta_0^t(\tilde{\omega}) = y_{ij}^t\}} \varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0') \tilde{P}(d\tilde{\omega}) = \int\limits_{X^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}_i) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \qquad (i = 1, \dots, K_\delta^t;\ j = 1, \dots, R_i^t). \tag{5.2.24}$$

Továbbá, (5. 2. 21)-ből adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{R_0^t} \int\limits_{\{\eta_0(\tilde{\omega}) = y_{0j}\}} \varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0') \tilde{P}(d\tilde{\omega}) = \iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus F_\delta^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}). \tag{5.2.25}$$

Végül (5. 2. 22)-ből következik, hogy

$$\int\limits_{\{\eta_0^t(\tilde{\omega}) = y_{-1j}^t\}} \varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0') \tilde{P}(d\tilde{\omega}) = \iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t} s_{-1j}^t(x) \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) \qquad (j = 1, \dots, R_{-1}^t). \tag{5.2.26}$$

Figyelembe véve (5. 2. 23), (5. 2. 24), (5. 2. 25), (5. 2. 26)-ot, valamint azt az (5. 2. 8)-ból következő tényt, hogy (5. 2. 23) $i = -2$-nek megfelelő összeadandói zérussal egyenlők, s figyelembe véve (5. 1. 7)-et is, nyerjük:

$$\begin{aligned} M\varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0') = &\sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int\limits_{X^t} q_i^t(x) \varrho_k^t(x, \tilde{x}_i) p_\xi^t(dx) + \\ &+ \iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus F_\delta^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + \iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t} [1 - Q^t(x)] \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}). \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

Összehasonlítva az (5. 2. 27) összeget a (4. 1. 7′) összeggel, látjuk, hogy a következő különbséget kell még becsülnünk:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})-[1-Q^t]M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})=\\
(5.\,2.\,28)\qquad &=\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)][\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})]p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

(Itt figyelembe vettük Q^t definícióját; l. (4. 1. 6)-ot.)

E célból fel fogjuk használni a következő általános egyenlőtlenséget: tetszés szerinti, (z, S_Z) mérhető téren értelmezett $p(\cdot)$ mérték és tetszőleges mérhető $\varphi(z)$ és $0\leqq f(z)\leqq 1$ függvények esetén $b>0$-ra fennáll:

$$
(5.\,2.\,29)\qquad \left[\int\limits_Z|\varphi(z)|f(z)p(dz)\right]^{1+b}\leqq\int\limits_Z|\varphi(z)|^{1+b}p(dz)\left[\int\limits_Z f(z)p(dz)\right]^b.
$$

Az (5. 2. 29) egyenlőtlenség az $|x|^{1+b}$ függvény konvex voltának következménye. Alkalmazva (5. 2. 29)-et, látjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&\left|\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})-[1-Q^t]M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})\right|\leqq\\
&\leqq\left|\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]|\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})\right|\leqq\\
(5.\,2.\,30)\qquad &\leqq\left[\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+b}p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})\right]^{\frac{1}{1+b}}\times\\
&\times\left[\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]p_{\xi\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x})\right]^{\frac{b}{1+b}}\leqq[c^t]^{\frac{1}{1+b}}[1-Q^t]^{\frac{b}{1+b}}.
\end{aligned}
$$

Az (1. 7. 12) és (4. 1. 6) feltételek azt mutatják, hogy az (5. 2. 30) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés zérushoz tart, ha $t\to\infty$. Ebből következik, hogy minden elegendően nagy t-re az (5. 2. 28) különbség abszolút értékben nem fogja túllépni a δ számot. Alkalmazva a közleményekre vonatkozó alaplemma (4. 1. 7′) állítását és az (5. 1. 1) feltételt, látjuk, hogy minden elegendően nagy t-re fennáll a következő vektorra:

$$
(5.\,2.\,31)\qquad (M\varrho_1^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0'),\ldots,M\varrho_{M^t}^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0'))\in[\tilde{W}^t]_\varepsilon,
$$

amit bizonyítanunk kellett, hogy igazoljuk a 2. feltételt. Ezzel be is fejeztük az 1. tétel bizonyítását.

5. 3. A 2. tétel bizonyítása

Tekintettel arra, hogy a 2. tétel mindhárom állítása — A, B és C — analóg meggondolások segítségével bizonyítható, ez állítások közül csupán az utolsó bizonyítását közöljük. Jelöljük $\gamma > 0$-val a következő határértéket (l. (1. 7. 4)-et):

$$\gamma = 1 - \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, V)}. \tag{5. 3. 1}$$

A VI., illetve VII. feltételek azt mutatják, hogy megválasztható egy $\varepsilon > 0$ szám úgy, hogy $\varepsilon \leqq \delta$ legyen (ahol δ a IV', V' feltételekben szereplő δ), és hogy minden elegendően nagy t-re fennálljon

$$\left| \frac{H^t(W_{-\varepsilon})}{H^t(W)} - 1 \right| < \alpha, \tag{5. 3. 2}$$

és

$$\left| \frac{C^t(Q, V_{-\varepsilon})}{C^t(Q, V)} - 1 \right| < \alpha, \tag{5. 3. 3}$$

ahol α-t oly kicsinyre választottuk, hogy fennálljon

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 1 - \gamma. \tag{5. 3. 4}$$

Akkor (5. 3. 1)-ből következik, hogy ilyen ε mellett

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W_{-\varepsilon})}{C^t(Q, V_{-\varepsilon})} < 1. \tag{5. 3. 5}$$

(5. 3. 2)-ből és az I. feltételből az is következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} H^t(W_{-\varepsilon}) = \infty. \tag{5. 3. 6}$$

Az (5. 3. 6), (5. 3. 5) és IV', V' feltételek azt fejezik ki, hogy a $\{W^t_{-\varepsilon}\}$ közleménysorozatra és a $\{Q^t, V^t_{-\varepsilon}\}$ átviteli berendezés-sorozatra teljesülnek a már bebizonyított 1. tétel összes feltételei. Következésképp, alkalmazva ezt a tételt (ε helyett $\frac{\varepsilon}{2}$-t írva) és figyelembe véve, hogy a $[[\overline{W}]_{-\varepsilon}]_{\frac{\varepsilon}{2}}$ halmazra fennáll $[[\overline{W}]_{-\varepsilon}]_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \overline{W}$ valamint, hogy $[[\overline{V}]_{-\varepsilon}]_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \overline{V}$, megkapjuk a minket érdeklő 2. tételt.

5. 4. A 3. tétel bizonyítása. Az alaplemmák élesítése

Ennek a tételnek a bizonyítása szükségessé teszi, hogy kissé élesítsük a közleményekre és átviteli berendezésekre vonatkozó alaplemmák eredményeit — egyébként majdnem semmit se változtatva bizonyításaik menetén. Mindenekelőtt fogalmazzuk meg a közleményekre vonatkozó alaplemma következő általánosítását.

ÉLESÍTETT LEMMA A KÖZLEMÉNYEKRŐL. *Tegyük fel, hogy a közleményekre vonatkozó alaplemma (4. §) feltételein kívül teljesül a 3. tétel VIII. feltétele is. Akkor az* $\tilde{x}_i^t$ *pontok és* $q_i^t(x)$ *függvények megválaszthatók úgy, hogy a lemma I. és III. állításai mellett teljesüljenek még a következő állítások is.*

II'. *tetszőleges* $a > 0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty} [1 - Q^t](v^t)^a = 0. \tag{4.1.6'}$$

IV. *minden* $t \geqq T$, $i = 1, \ldots, K_\varepsilon^t$, $x^t \in X^t$ *és* $k = 1, \ldots, M^t$*-re*

$$\int_{X^t} |\varrho_k^t(x, \tilde{x}_i) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| q_i^t(x) p_\xi^t(dx) \leqq J^t_{\frac{\varepsilon}{1000}} \int_{X^t} q_i^t(x) p_\xi^t(dx). \tag{5.4.1}$$

V. *minden olyan* $t \geqq T$, $k = 1, \ldots, M^t$*-re és minden* $i = 1, \ldots, K_\varepsilon^t$*-re, amelyekre fennáll*

$$\bar{q}_i^t = \int_{X^t} q_i^t(x) p_\xi^t(dx) > 0, \tag{5.4.2}$$

igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\int_{X^t} |\varrho_k^t(x^t, \tilde{x}_i) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| p_\xi^t(dx) \leqq 2^{\frac{\varepsilon}{100} H^t(W)}. \tag{5.4.3}$$

Ennek az állításnak a bizonyításához a 4. §-beli konstrukción csupán a következő változtatásokat kell elvégeznünk. Írjunk a rövidség kedvéért $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1000}$-et. A 4.4. pont tárgyalását úgy módosítjuk, hogy bevezetünk egy θ tetszőleges konstansot. U_k-val fogjuk jelölni az $(x, \tilde{x})$ pontoknak azt a halmazát, melyekben $\tilde{x}$ olyan, hogy fennáll:

$$\int_X |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M\varrho_k(\xi, \tilde{\xi})| \varrho_\xi(dx) > \theta. \tag{5.4.4}$$

Megjegyezzük, hogy mivel (1. 7. 23)-ból következik

$$\int_{\tilde{X}} \left[\int_X |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M\varrho_k(\xi, \tilde{\xi})| p_\xi(dx) \right]^{1+\hat{b}} p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) \leqq \hat{c}, \tag{5.4.5}$$

azért a Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(U_k) \leqq \frac{\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}}. \tag{5.4.6}$$

Felhasználva most a $B_{\bar{\varepsilon}}$ halmazt, amelyet a VIIId. feltételben vezettünk be, vezessük be — eltérően attól, ahogy azt a 4. 4 pontban tettük — a következő halmazt:

$$G = (D_1 \cup \ldots \cup D_M) \cup (U_1 \cup \ldots \cup U_M) \cup (X \times \tilde{X} \setminus B_{\bar{\varepsilon}}) \cap F. \tag{4.4.4'}$$

A (4. 4. 5) egyenlőtlenséget most az (5. 4. 6) és (4. 4. 2)-ből levezetett következő egyenlőtlenség fogja helyettesíteni:

(4. 4. 5′)
$$p_{\xi\tilde{\xi}}(G) \leqq \frac{Mc}{\beta^{1+b}} + \frac{M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} + [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})].$$

A (4. 4. 6) egyenlőtlenséget a következő egyenlőtlenség fogja helyettesíteni:

(4. 4. 6′)
$$\int\int_G |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M\varrho_k(\xi, \tilde{\xi})| p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leqq$$
$$\leqq \frac{c(M+1)}{\beta^b} + \frac{\beta M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} + [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]\beta.$$

A további konstrukciókat változatlanul hagyjuk, csupán a (4. 4. 11) egyenlőtlenséget kell kicserélni a

(4. 4. 11′)
$$\int_X (\bar{r}(x) - r(x)) p_\xi(dx) \leqq \frac{Mc}{\beta^{1+b}} + \frac{M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} + [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]$$

-vel, és a (4. 4. 29) egyenlőtlenséget

(4. 4. 29′)
$$MQ(\tilde{\omega}) \geqq (1 - 2\gamma)\left[1 - \frac{2^{H(W)\left(1 + \frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2}\right] - \frac{Mc}{\beta^{1+b}} - \frac{M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} - [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]$$

-vel. A 4. 5 pont konstrukcióit változatlanul hagyjuk.

A 4. 6 pontot illetőleg a (4. 6. 1) definíciókat a következőképpen választjuk meg, ill. egészítjük ki:

(4. 6. 1′)
$$\theta^t = 2^{H^t(W)\frac{\varepsilon}{100}}, \quad \beta^t = \min\left(2^{H^t(W)\frac{\varepsilon}{200}}, [1 - p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Akkor az (1. 7. 5) és (1. 7. 24) feltételekből az fog következni, hogy elegendően nagy t-kre

(5. 4. 7)
$$\frac{M^t\hat{c}^t}{(\theta^t)^{1+\hat{b}}} \leqq 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{500}}.$$

Figyelembe véve azokat a meggondolásokat, amelyeket a 4. 6 pontban a (4. 6. 3) egyenlőtlenség levezetéséhez felhasználtunk, figyelembe véve továbbá kiegészítőleg (5. 4. 7) és (4. 6. 1′)-t, levezethetjük (4. 4. 29′)-ből a következő (4. 6. 3′) egyenlőtlenséget, amely fenn fog állni minden elegendően nagy t-re:

(4. 6. 3′)
$$MQ^t(\tilde{\omega}) \geqq 1 - \varphi^t_\varepsilon,$$

ahol

(5. 4. 8)
$$\varphi^t_\varepsilon = 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{1000}} + [1 - p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})] + [1 - p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]^{\frac{1+b}{2}} M^t c^t.$$

Az (1. 7. 5), (1. 7. 27) és (1. 7. 31) feltételekből következik, hogy tetszőleges $a > 0$-ra

(5. 4. 9)
$$\lim_{t\to\infty} \varphi^t_\varepsilon (v^t)^a = 0.$$

A (4. 6. 4), (4. 6. 5), (4. 6. 6), (4. 6. 7) egyenlőségek levezetésében felhasznált meggondolások nem változnak meg. Csupán a (4. 6. 8) egyenlőtlenség levezetésében kell (4. 4. 6) helyett ennek az egyenlőtlenségnek új, (4. 4. 6′) variánsát felhasználni, és ennek következtében (4. 6. 8)-at a

$$\left| \iint\limits_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) - [Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) \right| \leqq \tag{4. 6, 8′}$$
$$\leqq \frac{c^t(M^t+1)}{(\beta^t)^b} + \frac{\beta^t M^t \hat{c}^t}{(\theta^t)^{1+\hat{b}}} + \beta^t[1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_{\bar{\varepsilon}})]$$

egyenlőtlenséggel helyettesíteni. Megjegyezzük, hogy (4. 6. 1), (4. 6. 1′), és az (1. 7. 5) és (1. 7. 24) feltételekből következik, hogy elegendően nagy t-kre

$$\frac{\beta^t M^t \hat{c}^t}{(\theta^t)^{1+\hat{b}}} \leqq 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{500}}; \tag{5. 4. 10}$$

a (4. 6. 10) 4. 6 pontbeli levezetésében felhasznált meggondolásokból, valamint (5. 4. 10)-ből és az (1. 7. 31) és (4. 6. 1′)-ből folyó

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t[1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_{\bar{\varepsilon}})] = 0 \tag{5. 4. 11}$$

állításból következik, hogy minden elegendően nagy t-re

$$M|S_k^t(\tilde{\omega}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leqq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4. 6. 10′}$$

(4. 6. 10′)-ből következik (4. 6. 11), továbbá (4. 6. 12) is. A (4. 6. 14) egyenlőtlenség helyett most a következő fog állni

$$\tilde{P}^t\{Q(\tilde{\omega}) \geqq 1 - 4\varphi_\varepsilon^t\} \geqq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4. 6. 13′}$$

A (4. 6. 15) egyenlőtlenségek közül a második helyett a következő fog állni:

$$Q^t(\tilde{\omega}_0) \geqq 1 - 4\varphi_\varepsilon^t. \tag{4. 6. 14′}$$

A (4. 1. 6′) feltétel (4. 6. 14′) és (5. 4. 9)-ből következik.

Igazoljuk most, hogy teljesülnek a közleményekre vonatkozó általánosított lemma IV. és V. állításai. E célból megjegyezzük, hogy a (4. 4. 13), (4. 4. 8), (4. 4. 7) és (4. 4. 4′) definíciók mutatják, hogy

$$q_i^t(x, \tilde{\omega}) = 0, \quad \text{ha} \quad (x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \notin B_\varepsilon. \tag{5. 4. 12}$$

Ezért (1. 7. 29) és (4. 6. 16)-ból következik, hogy ha $q_i^t(x^t) > 0$, akkor

$$|\varrho_k^t(x^t, \tilde{x}_i^t) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leqq J_\varepsilon^t$$

Ebből közvetlenül következik a keresett (5. 4. 1) egyenlőtlenség. Továbbá (5. 4. 12) analógiájára megállapítjuk, hogy

$$q_i^t(x, \tilde{\omega}) = 0, \quad \text{ha} \quad (x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \in U_k, \tag{5. 4. 13}$$

úgyhogy vagy $q_i^t(x)=0$, vagy pedig ((4. 6. 1')-nek megfelelően) teljesül az (5. 4. 3) egyenlőtlenség, amit bizonyítanunk kellett.

Fogalmazzuk most meg FEINSTEIN átviteli berendezésekről szóló lemmájának következő általánosítását.

FEINSTEIN ÉLESÍTETT LEMMÁJA. *Tegyük fel, hogy teljesülnek Feinstein lemmájának összes feltételei, melyeket a 3. 1 pontban fogalmaztunk meg. Tegyük fel továbbá, hogy az M^t szám olyan, hogy tetszőleges $\delta>0$ mellett*

(5. 4. 14) $$\lim_{t\to\infty} M^t \cdot 2^{-\delta C^t(Q,V)}=0.$$

Tetszőleges $k=1, \ldots, M^t$ mellett legyen adva a ${}_k\varrho_{ij}^t$, $i=1, \ldots, L_\varepsilon^t$, $j=1, \ldots, L_\varepsilon^t$ $(i\neq j)$ nemnegatív számok olyan összessége, hogy minden $j=1, \ldots, L_\varepsilon^t$-re

(5. 4. 15) $$\sum_{i(i\neq j)} {}_k\varrho_{ij}^t \leqq 2^{\frac{\varepsilon}{100}C^t(Q,V)} \text{ legyen.}$$

Akkor az y_i^t pontokat és A_i^t halmazokat meg lehet úgy választani, hogy az I, II, III. állításokon kívül még a következő állítások is teljesüljenek:

IV. *tetszőleges $t \geqq T$-re és tetszőleges $i=1,\ldots, L_\varepsilon^t$-re*

(5. 4. 16) $$Q^t(y_i, A_i)\geqq 1-p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)-2^{-\frac{\varepsilon}{200}C^t(Q,V)},$$

V. *tetszőleges $k=1, \ldots, M^t$ mellett és minden $t\geqq T$-re*

(5. 4. 17) $$\sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t}\sum_{j=1}^{L_\varepsilon^t} {}_k\varrho_{ij}^t Q^t(y_i, A_j)\leqq\frac{\varepsilon}{3}.$$

Ennek az állításnak a bizonyításánál változatlanul megtartjuk a 3. 2—3. 8 pontok minden meggondolásait, csupán a következő vonatkozásban egészítjük ki azokat.

Megjegyezzük, hogy (3. 5. 16) és (3. 5. 5)-ből következik, hogy tetszőleges $i=1, \ldots, L$-re

(5. 4. 18) $$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_i(\tilde{\omega}))\geqq p_{\eta\tilde{\eta}}(F)-L\cdot 2^{-C(Q,V)(1-3\delta)};$$

Továbbá megjegyezzük, hogy (3. 5. 4)-ből következik, hogy minden i és j-re $(i\neq j)$

(5. 4. 19) $$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega}))\leqq MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j(\tilde{\omega})}).$$

Hogy az (5. 4. 19) egyenlőtlenségnek értelme legyen, igazolnunk kell, hogy $Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j(\tilde{\omega})})$ mérhető függvény lesz a $\mathfrak{B}$ σ-algebrára vonatkozólag. Ez a (3. 4. 2) függvény már bizonyított mérhetőségéből következik, hogyha abba $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}_j$, $G(\tilde{\omega})=F_{\zeta_j(\tilde{\omega})}$-ot helyettesítünk (l. (3. 5. 1)). Minthogy a $\zeta_i(\tilde{\omega})$ és $\zeta_j(\tilde{\omega})$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiküknek $p_\eta(\cdot)$ az eloszlása, azért

(5. 4. 20) $$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j(\tilde{\omega})})=\int_Y\int_Y Q(y_1, F_{y_2}(p_\eta\times p_\eta(dy_1, dy_2)).$$

(Szigorúan véve, még be kell bizonyítani azt is, hogy $Q(y_1, F_{y_2})$ az (y_1, y_2) változópárnak az $S_Y \times S_Y$ σ-algebrára vonatkozólag mérhető függvénye. Az erre vonatkozó meggondolást nem közöljük, minthogy az analogonja a 3. 4 pontban közölt meggondolásnak.) Minthogy az $\eta, \tilde{\eta}$ változókat a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze, azért (l. (1. 5. 1)-et)

$$\int_Y Q(y_1, F_{y_2}) p_\eta(dy_1) = p_{\tilde{\eta}}(F_{y_2}). \tag{5. 4. 21}$$

Alkalmazva Fubini tételét és ezt a tényt, (5. 4. 20)-ból levezethető, hogy

$$MQ(\zeta_i, (\tilde{\omega}), F_{\zeta_j(\tilde{\omega})}) = \int_Y p_{\tilde{\eta}}(F_y) p_\eta(dy). \tag{5. 4. 22}$$

A (3. 2. 2) és (5. 4. 19) egyenlőtlenségekből a következő végső becslést vezethetjük le:

$$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega})) \leqq 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}. \tag{5. 4. 23}$$

Ekkor (5. 4. 15)-ből következik, hogy tetszőleges k-ra

$$M\left\{\sum_{i=1}^{L} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{L} {}_k\varrho_{ij} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega}))\right\} \leqq L 2^{\frac{\varepsilon}{100}C(Q,V)} 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}. \tag{5. 4. 24}$$

Most még kissé kiegészítjük a 3. 8 pont meggondolásait. E pont jelölései mellett (5. 4. 18) és (5. 4. 24) a következő alakra írhatók át:

$$MQ^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_i(\tilde{\omega})) \geqq p^t_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L^t_\varepsilon \cdot 2^{-(1-3\delta)C^t(Q,V)} \tag{5. 4. 25}$$

és minden $k = 1, \ldots, M^t$-re

$$M\left\{\sum_{i=1}^{L^t_\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{L^t_\varepsilon} {}_k\varrho^t_{ij} Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega}))\right\} \leqq L^t_\varepsilon \cdot 2^{\frac{\varepsilon}{100}C^t(Q,V)} \cdot 2^{-(1-\delta)C^t(Q,V)}. \tag{5. 4. 26}$$

Az L^t_ε szám és a δ szám meghatározásából következik, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\begin{gathered} L^t_\varepsilon \cdot 2^{-C^t(Q,V)(1-3\delta)} \leqq 2^{-\frac{\varepsilon}{200}C^t(Q,V)}, \\ L^t_\varepsilon \cdot 2^{-C^t(Q,V)(1-\delta)} \cdot 2^{\frac{\varepsilon}{100}C^t(Q,V)} \leqq 2^{-\frac{\varepsilon}{200}C^t(Q,V)}. \end{gathered} \tag{5. 4. 27}$$

Ezért a (3. 8. 9), (5. 4. 25), (5. 4. 26) és (5. 4. 14) összefüggésekből levezethető, hogy létezik oly $\tilde{\omega}^t_0 \in \tilde{\Omega}^t$ elemi esemény, hogy (3. 8. 10)-en kívül még a következő egyenlőtlenségek is teljesülnek,

$$Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \overline{F}_i(\tilde{\omega}_0)) \geqq p^t_{\eta\tilde{\eta}}(F) - 2^{-\frac{\varepsilon}{200}C^t(Q,V)}, \tag{5. 4. 28}$$

és minden $k = 1, \ldots, M^t$-re

$$\sum_{i=1}^{L^t_\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{L^t_\varepsilon} {}_k\varrho^t_{ij} Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}^t_0), \overline{F}^t_j(\tilde{\omega}^t_0)) \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5. 4. 29}$$

Ha most

$$y_i^t = \zeta_i^t(\tilde{\omega}_0^t),$$

$$A_i^t = \overline{F}_i^t(\tilde{\omega}_0^t),$$

olyan pontok rendszerét kapjuk, amely eleget tesz FEINSTEIN élesített lemmája I—V. állításainak.

5. 5. A 3. tétel bizonyítása. Az átvitel módszerének megkonstruálása

Be fogjuk bizonyítani, hogy a 3. tétel (1. 7. 32) feltételéből következik annak VIIId. feltétele. E célból vezessük be a következő jelölést:

$$J_\delta^t = \min\left(\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1\right| > \delta\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, 2^{\frac{\delta}{100}H^t(W)}\right) \tag{5. 5. 1}$$

és a B_δ^t halmaznak vegyük a következőt:

$$B_\delta^t = \{|\varrho_k^t(x, \tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leqq J_\delta^t, k = 1, \dots, M^t\}. \tag{5. 5. 2}$$

Ekkor az (1. 7. 29) feltétel konstrukciónk alapján igaz. Az (1. 7. 30) feltétel egyrészt abból következik, hogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ sorozat információ-stabilitása folytán

$$\lim_{t\to\infty}\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1\right| > \delta\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

— másrészt pedig az (5. 5. 1) definícióból. Hogy igazoljuk az (1. 7. 31) feltétel teljesülését, először is megjegyezzük, hogy (1. 7. 11)-ből a Csebisev-féle egyenlőtlenség segítségével következik, hogy

$$1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_\delta) \leqq \frac{c^t M^t}{(J_\delta^t)^{1+b}}, \tag{5. 5. 3}$$

az (5. 5. 1) definícióból pedig az következik, hogy

$$1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_\delta) \leqq c^t M^t p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1\right| > \delta\right)^{\frac{1+b}{2}} + c^t M^t \cdot 2^{-\frac{\delta(1+b)}{100}H^t(W)}. \tag{5. 5. 4}$$

Az (1. 7. 31) feltétel mármost (1. 7. 32), (1. 7. 12) és (1. 7. 5)-ből következik. Most megmutatjuk, hogy (1. 7. 28) és VIIIa.-ból következik a VIIIc. feltétel. E célból megjegyezzük, hogy (1. 7. 23)-ból és a Csebisev-féle egyenlőtlenségből következik, hogy tetszőleges $k = 1, \dots, M^t$ mellett

$$p_{\tilde{\xi}}\left(\int_{X^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})|^{1+\hat{b}} p(dx) \geqq 2\hat{c}^t M^t\right) \leqq \frac{\hat{c}^t}{2\hat{c}^t M^t} = \frac{1}{2M^t}. \tag{5. 5. 5}$$

Ebből következik, hogy létezik egy olyan $\tilde{x}_+$ pont, amelyre

$$\max_{k=1,\dots,M^t} \int_{X^t} |\varrho_k^t(x, \tilde{x}_+) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})|^{1+\hat{b}} p(dx) \leqq 2\hat{c}^t M^t. \tag{5. 5. 6}$$

(1. 7. 24) és (1. 7. 28)-ból következik, hogy $v^t \leqq 2\hat{c}^t M^t$ esetén fennáll az (1. 7. 27) egyenlőség.

Ennek a tételnek a bizonyításában megtartjuk az 5. 1 pont minden konstrukcióját; csak azokat a kiegészítéseket említjük meg külön, amelyeket hozzá kell fűzni az ott elvégzett konstrukciókhoz. Tegyük fel, hogy teljesülnek a 3. tétel feltételei. Annak analógiájára, ahogy az az 5. 1 pontban történt, kapjuk, hogy olyan δ-kra, melyek eleget tesznek az (5. 1. 1) feltételnek, teljesülnek, az 5. 4 pontban közölt, a közleményekre vonatkozó élesített lemma feltételei, ha azokban ε-t δ-val helyettesítjük. Tekintsük most ebben az élesített lemmában bevezetett $q_i^t(x)$ és $r^t(x)$ függvényeket, és végezzük el velük ugyanazokat a konstrukciókat, amelyek az 5. 4 pontban szerepeltek.

Áttérve a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés-sorozat tanulmányozására, mindenekelőtt megjegyezzük, hogy Feinstein végtelen kapacitású átviteli berendezésekre vonatkozó lemmájának állítása (l. a 3. 9 pontot) erősebb, mint Feinstein élesített lemmájának állítása (5. 4. pont). Ennek folytán — ugyanúgy okoskodva, mint az 5. 1 pontban is — észrevehetjük, hogy a 3. tétel feltételeinek teljesüléséből következik, hogy minden elegendően nagy t-re teljesül FEINSTEIN élesített lemmájának állítása. A p_{ij}^t valószínűségek általunk használt kettős számozásának megfelelően e lemma (3. 1. 7) (5. 4. 16), (5. 4. 17) állításai (5. 1. 17) alakban, illetve a következő alakokban írhatók:

$$Q^t(y_{ij}, A_{ij}) \geqq 1 - p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \hat{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1\right| > \frac{\delta}{6}\right) - 2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}, \tag{5. 5. 7}$$

és

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j)\neq(l,m)}}^{R_i^t} \sum_{l=-2}^{K_\delta^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} {}_k\varrho_{ij;lm}^t Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \leqq \frac{\delta}{3}, \tag{5. 5. 8}$$

(ε-t újból δ-val helyettesítettük; a ϱ számok most négy indextől függenek).

A $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók megkonstruálása ugyanúgy történik, mint az 5. 1 pontban. A különbség csupán abból áll, hogy az $\tilde{x}^t_+$ pont, amelyet a $p_{\tilde{Y}\tilde{X}}^t$ $(\tilde{y}, \tilde{A})$ átmenet-függvény megkonstruálásánál használtunk fel, nem választható meg tetszőlegesen, hanem úgy, hogy fennálljon:

$$\int_{X^t} |\varrho_k^t(x, \tilde{x}_+) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})|^{1+\hat{b}} p_\xi^t(dx) \leqq v^t. \tag{5. 5. 9}$$

Egy ilyen megválasztás lehetősége az (1. 7. 26) feltételből következik.

5. 6. A 3. tétel bizonyítása. A tétel feltételei teljesülésének igazolása

Az a tény, hogy a $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók Markov-láncot képeznek, közvetlenül folyik magából a konstrukcióból. Az a tény, hogy az $\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t$ változókat a $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze, pontosan ugyanúgy bizonyítható, mint az 5. 2 pontban. A tétel bizonyításához igazolnunk kell, hogy elegendően nagy t-re a $\xi_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változó-pár eleget tesz a $\{W_\varepsilon^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek. Abból a tényből, hogy a $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók Markov-láncot képeznek, és az (5. 1. 25),

(5. 1. 23), (5. 1. 21) feltételekből levezethető, hogy a következő feltételes valószínűségre majdnem mindenütt fennáll:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0=x_l|\xi_0=x\}=\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\sum_{m=1}^{R_l^t}s_{ij}^t(x)Q^t(y_{ij},A_{lm})\qquad (l=1,\ldots,K_\delta^t)\tag{5.6.1}$$

és (számításba véve, hogy definíció szerint $\tilde{x}_{-2}^t=\tilde{x}_{-1}^t=\tilde{x}_0^t=\tilde{x}_+^t$)

$$\begin{aligned}&\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0=\tilde{x}_+|\xi_0=x\}=\\&=\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left(\sum_{l=-2}^{l=0}\sum_{m=1}^{R_l^t}s_{ij}^t(x)Q^t(y_{ij},A_{lm})+s_{ij}^t(x)Q^t(y_{ij},\tilde{X}\setminus\bigcup A_{lm})\right).\end{aligned}\tag{5.6.2}$$

Rögzítsünk most valamilyen $k=1,\ldots,M^t$, számokat, és írjuk a rövidség kedvéért a következőt:

$$\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x})=\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi}).\tag{5.6.3}$$

(5. 1. 18)-ból most levezethető, hogy a következő várható értékre fennáll:

$$\begin{aligned}M\bar{\varrho}_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0)=\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\Bigg\{&\sum_{l=1}^{K_\delta^t}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij},A_{lm})\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)+\\&+\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij},A_{lm})+Q^t(y_{ij},\tilde{X}\setminus\bigcup_{l,m}A_{lm}\right]\cdot\\&\cdot\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_+)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{5.6.4}$$

Foglalkozzunk most az (5. 6. 4) összeg egyes részeinek tanulmányozásával. Rögzítsük az $i=1,\ldots,K_\delta^t$; $j=1,\ldots,R_i^t$ indexeket, és jegyezzük meg, hogy

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{K_\delta^t}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij},A_{lm})\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)=\\&=\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)+[1-Q^t(y_{ij},A_{ij})]\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)+\\&+\sum_{\substack{l=1\\(l,m)\neq(i,j)}}^{K_\delta^t}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij},A_{lm})\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx).\end{aligned}\tag{5.6.5}$$

Az (5. 1. 7) definícióból következik, hogy

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{R_i^t}\left|\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq\\&\int_{X^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x}_i)-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|q_i^t(x)p_\xi^t(dx).\end{aligned}\tag{5.6.6}$$

Ezért (5. 4. 1) és (5. 5. 7)-ből következik, hogy az (5. 6. 5) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő második tagok összegének abszolút értékére fennáll:

$$\left|\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}[1-Q^t(y_{ij},A_{ij})]\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leq$$
$$\leq J^t_{\frac{\delta}{1000}}\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\frac{\delta}{6}\right)+2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}\right]\cdot\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\int_{X^t}q_i^t(x)p_\xi^t(dx). \tag{5. 6. 7}$$

A tétel (1. 7. 30) feltételéből, valamint abból, hogy $\sum_{i=1}^{K_\delta^t}q_i^t(x)\leq 1$, következik, hogy az (5. 6. 7) egyenlőtlenség jobb oldala 0-hoz tart, ha $t\to\infty$. Ezért minden elegendően nagy t-re

$$\left|\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}[1-Q^t(y_{ij},A_{ij})]\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)p_\xi^t(dx)\right|\leq\frac{\delta}{3}. \tag{5. 6. 8}$$

Hogy becslést adjunk a harmadik összeadandókra (5. 6. 5)-ben, először is jegyezzük meg, hogy (5. 4. 3), (5. 1. 7) és (4. 1. 5)-ből következik, hogy tetszőleges $l=1,\ldots,K_\delta^t$-re és elegendően nagy t-kre

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)=\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|q_i^t(x)p_\xi^t(dx)\leq$$
$$\leq\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|p_\xi^t(dx)\leq 2^{\frac{\delta}{100}H^t(W)}. \tag{5. 6. 9}$$

Legyen most

$${}_k\varrho_{ij;lm}^t=\begin{cases}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx), & l=1,\ldots,K_\delta^t\\ 0 & l=-2,-1,0.\end{cases} \tag{5. 6. 10}$$

Az így definiált ${}_k\varrho_{ij;lm}^t$ állandókra teljesül Feinstein élesített lemmájának (5. 4. 15) feltétele. Felhasználva e lemma állítását ((5. 5. 8) alakjában) levezethető, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\sum_{\substack{i=-2,\,j=1,\,l=1,\,m=1\\(i,j)\neq(l,m)}}^{K_\delta^t\;\;R_i^t\;\;K_\delta^t\;\;R_l^t}Q^t(y_{ij},A_{lm})\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\leq\frac{\delta}{3}. \tag{5. 6. 11}$$

Megjegyezzük, hogy (5. 1. 7)-ből következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)=\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)q_i(x)p_\xi^t(dx). \tag{5. 6. 12}$$

Ezért (5. 6. 5), (5. 6. 8), (5. 6. 11) és (5. 6. 12)-ből következik, hogy minden elegendően nagy t-re:

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\sum_{l=1}^{K_\delta^t}\sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm})\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_l)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)= \tag{5. 6. 13}$$
$$=\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i)q_i(x)p_\xi^t(dx)+\frac{2}{3}\delta\theta_k^t,$$

ahol $|\Theta_k^t|\leqq 1$. Vizsgáljuk most az (5. 6. 4) összeg második tagját. E célból megjegyezzük, hogy $i=1, \ldots, K_\delta^t$-re

$$\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm})+Q^t(y_{ij}, \tilde{X}\setminus\bigcup_{l,m}A_{lm})\leqq 1-Q^t(y_{ij}, A_{ij}). \tag{5. 6. 14}$$

(5. 5. 7) és (5. 5. 9)-ből mármost azt kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij}, A_{lm})+Q^t(y_{ij}, \tilde{X}\setminus\bigcup_{l,m}A_{lm})\right]\cdot\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq$$
$$\leqq\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})}-1\right|>\frac{\delta}{6}\right)+2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}\right]\cdot\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\leqq \tag{5. 6. 15}$$
$$\leqq\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})}-1\right|>\frac{\delta}{6}\right)+2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}\right]\cdot\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|p_\xi^t(dx)\leqq$$
$$\leqq\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})}-1\right|>\frac{\delta}{6}+2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}\right]\cdot(v^t)^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

A tétel (1. 7. 4) és (1. 7. 27) feltételeiből következik, hogy az (5. 6. 15) egyenlőtlenség jobb oldala zérushoz tart, ha $t\to\infty$, és ezért minden elegendően nagy t-re

$$\left|\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij}, A_{lm})+Q^t(y_{ij}, \tilde{X}\setminus\bigcup_{l,m}A_{lm})\right]\times\right. \tag{5. 6. 16}$$
$$\left.\times\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq\frac{\delta}{6}.$$

Hogy becslést adhassunk az utolsó fennmaradt tagokra, vegyük észre először is, hogy mindig fennáll

$$\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t}Q^t(y_{ij}, A_{lm})+Q^t(y_{ij}, \tilde{X}^t\setminus\bigcup_{l,m}A_{lm})\leqq 1, \tag{5. 6. 17}$$

és hogy ezért (5. 1. 7) és (5. 1. 10)-ből következik, hogy

$$\sum_{i=-2}^{0}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm})+Q(y_{ij}, \tilde{X}^t\setminus\bigcup_{l,m} A_{lm})\right]\times$$
$$\times\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\leqq \tag{5.6.18}$$
$$\leqq\sum_{i=-2}^{0}{}'\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)=$$
$$=\int_{X^t}[(1-Q^t(x)+r_\delta^t(x)]\,|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|p_\xi^t(dx).$$

A közleményekre vonatkozó élesített lemma (4. 1. 6′) állításából és a (4. 1. 2) definícióból következik, hogy tetszőleges $a>0$ mellett

$$\int_{X^t}[(1-Q^t(x)+r_\delta^t(x)]p_\xi^t(dx)=p_{\xi\tilde{\xi}}^t\left\{\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})}{I(\xi, \tilde{\xi})}-1\right|>\frac{\delta}{4}\right\}+o_m((v^t)^{-a}). \tag{5.6.19}$$

(5. 6. 19)-ből, a tétel (1. 7. 27) feltételéből és (5. 5. 9)-ből kapjuk, ha alkalmazzuk (5. 2. 29)-et, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\int_{X^t}[1-Q^t(x)+r_\delta^t(x)]\,|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|\,p_\xi^t(dx)=0. \tag{5.6.20}$$

(5. 6. 20) és (5. 6. 18)-ból következik mármost, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\left|\sum_{i=-2}^{0}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm})+Q^t(y_{ij}, \tilde{X}\setminus\bigcup_{l,m} A_{l,m})\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq\frac{\delta}{6}. \tag{5.6.21}$$

Egybevetve az (5. 6. 4), (5. 6. 5), (5. 6. 8), (5. 6. 11), (5. 6. 16) és (5. 6. 21) összefüggéseket, azt kapjuk, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\left|M\bar{\varrho}_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0)-\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq\delta. \tag{5.6.22}$$

Felhasználva (5. 1. 7)-et, az (5. 6. 22) egyenlőtlenség a következő alakra írható át:

$$\left|M\bar{\varrho}_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0)-\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i)q_i(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq\delta. \tag{5.6.23}$$

Megjegyezzük, hogy alkalmazva az (5. 2. 29) általános egyenlőtlenséget a $p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x})$ mértékre és $f(x, \tilde{x})$-nek az $A^t\in S_X^t\times S_{\tilde{X}}^t$ halmaz indikátor-függvényét véve, (1. 7. 11)-

ből levezethető, hogy

$$\left|\iint_A \bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})\right| \leq (p_{\xi\tilde{\xi}}^t(A))^{\frac{b}{1+b}}(c^t)^{\frac{1}{1+b}}. \tag{5.6.24}$$

Alkalmazva az (5. 6. 24) képletet és figyelembe véve a tétel (1. 7. 25) feltételét, kapjuk,

$$\lim_{t\to\infty} \iint_{X^t\times\tilde{X}^t\setminus F_\delta^t} \bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}) = 0. \tag{5.6.25}$$

Ezért a közleményekre vonatkozó lemma (4. 1. 7) állításából és abból, hogy

$$\begin{aligned} S_k^t = \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)q_i^t(x)p_\xi^t(dx) + \\ + \iint_{X^t\times\tilde{X}^t\setminus F_\delta^t} \bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}) + M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi}), \end{aligned} \tag{5.6.26}$$

következik, hogy minden elegendően nagy t-re a következő vektorra fennáll:

$$\begin{aligned} \Bigg(\sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_1^t(x,\tilde{x}_i)q_i^t(x)p_\zeta^t(dx) + M\varrho_1^t(\xi,\tilde{\xi}), \dots \\ \dots, \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_M^t(x,\tilde{x}_i)q_i(x)p_\xi^t(dx) + M\varrho_M(\xi,\tilde{\xi})\Bigg) \in [\overline{W}^t]_\delta. \end{aligned} \tag{5.6.27}$$

(5. 6. 27) és (5. 6. 22)-ből következik végül, hogy minden elegendően nagy t-re a következő vektorra fennáll

$$(M\varrho_1^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0), \dots, M\varrho_M^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0)) \in [\overline{W}^t]_\varepsilon, \tag{5.6.28}$$

ez azonban azonos a 3. tétel állításával.

6. §. MEMÓRIA NÉLKÜLI ÁTVITELI BERENDEZÉS ÉS FÜGGETLEN KOMPONENSŰ KÖZLEMÉNYEK

6. 1. Független komponensű közlemények

Tekintsünk egy független komponensű közleményt, amelyet az 1. 4 pont végén definiáltunk. Az ott bevezetett jelöléseket fogjuk használni. Mindenekelőtt bebizonyítjuk a következő fontos állítást. Legyen a $\xi^t = (\zeta_1, \dots, \zeta_t)$ és $\tilde{\xi}^t = (\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_t)$ változókból álló pár a független komponensű közlemények reprodukálás-pontossági feltételével összekapcsolva. Akkor fennáll

$$I^t(\xi,\tilde{\xi}) \geq \sum_{i=1}^{t} (\zeta_i, \tilde{\zeta}_i). \tag{6.1.1}$$

A (6. 1. 1) állítást t-re vonatkozó indukcióval fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy már ismeretes a következő:

$$I^{t-1}(\xi,\tilde{\xi}) \geqq \sum_{i=1}^{t-1} I(\zeta_i,\tilde{\zeta}_i). \tag{6.1.2}$$

Fel fogjuk használni a három változó információira vonatkozó azonosságot, amelyet a 2. 6 pontban bizonyítottunk be. Ennek megfelelően fennáll a következő azonosság:

$$\begin{aligned} I^t(\xi,\tilde{\xi}) &= I((\xi^{t-1},\zeta_t),(\tilde{\xi}^{t-1},\zeta_t)) = \\ &= I(\xi^{t-1},(\zeta_t,\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) + I(\zeta_t,(\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) - I(\xi^{t-1},\zeta_t). \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Minthogy ξ^{t-1} és ζ^t függetlenek, azért (l. (1. 2. 4)-et)

$$I(\xi^{t-1},\zeta_t)=0.$$

A 2. 5 pont eredményéből következik, hogy

$$\left.\begin{aligned} I(\xi^{t-1},(\zeta_t\,\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) &\geqq I(\xi^{t-1},\tilde{\xi}^{t-1}), \\ I(\zeta_t,(\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) &\geqq I(\zeta_t,\tilde{\zeta}_t). \end{aligned}\right\} \tag{6.1.4}$$

Ezért (6. 1. 3)-ból adódik:

$$I^t(\xi,\tilde{\xi}) \geqq I(\xi^{t-1},\tilde{\xi}^{t-1}) + I(\zeta_t,\tilde{\zeta}_t). \tag{6.1.5}$$

(1. 6. 2) és (6. 1. 5)-ből folyik a (6. 1. 1) állítás.

Most megjegyezzük, hogy ha a $(\xi^t,\tilde{\xi}^t)$ pár eleget tesz $\{W^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, akkor tetszőleges $(\zeta_k,\tilde{\zeta}_k)$ pár is eleget tesz $\{W^1\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, tehát

$$I(\zeta^k,\tilde{\zeta}^k) \geqq H(W^1). \tag{6.1.6}$$

(6. 1. 1) és (6. 1. 6)-ból következik, hogy

$$I^t(\xi,\tilde{\xi}) \geqq t\,H(W^1). \tag{6.1.7}$$

Másrészről, jelöljük $p^{\varepsilon}_{\zeta\tilde{\zeta}}$-val azon $(\zeta_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon)$ változók együttes eloszlását, amelyek eleget tesznek $\{W^1\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, amellett fennáll rájuk

$$I(\zeta_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon) \leqq H(W^1)+\varepsilon. \tag{6.1.8}$$

Legyen $(\xi^t_\varepsilon,\tilde{\xi}^t_\varepsilon)$ olyan, hogy a

$$(\zeta_i,\tilde{\zeta}_i) \qquad (i=1,\ldots,t)$$

párok kölcsönösen függetlenek és mindegyik eloszlása $p^{\varepsilon}_{\zeta\tilde{\zeta}}$. Akkor a $(\xi^t_\varepsilon,\tilde{\xi}^t_\varepsilon)$ változók eleget tesznek $\{W^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek. A (2. 9. 1) képletből következik, hogy

$$I(\xi^t_\varepsilon,\tilde{\xi}^t_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{t} I(\zeta_i,\tilde{\zeta}_i) = tI(\zeta_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon) \leqq t(H(W_1)+\varepsilon); \tag{6.1.9}$$

minthogy $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi, azért (6. 1. 7) és (6. 1. 9)-ből következik az (1. 4. 11) egyenlőség.

Bizonyítsuk most be független komponensű közlemények sorozatának információ-stabilitását $t \to \infty$ esetén. E célból rögzítsük a véges információjú $(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0)$ változó-pár valamilyen $p_{\zeta^0, \tilde{\zeta}^0}$ eloszlását, és tekintsük a t számú független $(\zeta_1^0, \tilde{\zeta}_1^0), \ldots, (\zeta_t^0, \tilde{\zeta}_t^0)$ pár összességét, ahol mindegyiknek az eloszlása $p_{\zeta^0, \tilde{\zeta}^0}$. Legyen

$$\xi_0^t = \zeta_1^0, \ldots, \zeta_t^0), \; \tilde{\xi}_0^t = (\tilde{\zeta}_1^0, \ldots, \tilde{\zeta}_t^0).$$

A (2. 9. 2) képlet szerint

$$i^t_{\xi_0 \tilde{\xi}_0} = \sum_{k=1}^{n} i_{\zeta_k^0 \tilde{\zeta}_k}(\zeta_k^0, \tilde{\zeta}_k^0). \tag{6. 1. 10}$$

Az $i_{\zeta_k^0 \tilde{\zeta}_k^0}(\zeta_k^0, \tilde{\zeta}_k)$ összeadandók független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értékeire fennáll:

$$M i_{\zeta_k^0 \tilde{\zeta}_k^0}(\zeta_k^0, \tilde{\zeta}_k^0) = I(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0). \tag{6. 1. 11}$$

Ezt tekintetbe véve, alkalmazva a (6. 1. 10) sorozatra a nagy számok szokásos törvényét, azt kapjuk, hogy minden elegendően nagy t-re és tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$P^t \left\{ \left| \frac{i_{\xi^0 \tilde{\xi}^0}(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0)}{t I(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} < \varepsilon. \tag{6. 1. 12}$$

Ezért a $p^t_{\zeta \tilde{\zeta}}$ eloszlások sorozata megválasztható úgy, hogy ha

$$(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

-vel jelöljük t számú olyan független változópár összességét, melyek mindegyikének $p^t_{\varrho \varrho}$ az eloszlása, akkor a $(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t)$ párok eleget tesznek W^1 reprodukálás-pontossági feltételnek (és ezért a

$$\xi^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_t^t), \; \tilde{\xi}^t = (\tilde{\zeta}_1^t, \ldots, \tilde{\zeta}_t^t)$$

párok eleget tesznek $\{W^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek), úgyhogy

$$I(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \to H(W^1),$$

és ezért

$$I^t(\xi, \tilde{\xi}) \sim H^t(W) \qquad (t \to \infty), \tag{6. 1. 13}$$

továbbá úgy, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t \to \infty} P^t \left\{ \left| \frac{i_{\xi \tilde{\xi}}(\xi, \tilde{\xi})}{I(\xi, \tilde{\xi})} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0. \tag{6. 1. 14}$$

(6. 1. 13) és (6. 1. 14)-ből következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t \to \infty} P \left\{ \left| \frac{i^t_{\xi \tilde{\xi}}(\xi, \tilde{\xi})}{H^t(W)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0, \tag{6. 1. 15}$$

és ezért a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ változók sorozata eleget fog tenni azoknak a feltételeknek, melyeket a közlemény-sorozat információ-stabilitásának definíciójában felhasználtunk.

Az 1. 7 pontnak azon állítása, hogy az (1. 7. 17) feltételek elegendők az 1. tétel V. feltételének teljesüléséhez, nyilvánvalóan következik a fentebb végzett konstrukciókból.

6. 2. Memória nélküli átviteli berendezés

Egy memória nélküli átviteli berendezés tulajdonságainak vizsgálatához szükséges meggondolások sokban analogonjai a 6. 1 pontban felhasznált meggondolásoknak.

Ennek folytán csak arra szorítkoztunk, ami lényeges változtatásokkal jár. Tekintsük az

$$\eta^t = (\zeta_1, \ldots, \zeta_t) \quad \text{és} \quad \tilde{\eta}^t = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_t)$$

változókból álló párt, amelyeket memória nélküli átviteli berendezés kapcsol össze (l. az 1. 5 pontot). Be akarjuk bizonyítani (l. (6. 1. 1)-et), hogy

$$I^t(\eta, \tilde{\eta}) \leqq \sum_{k=1}^{t} I(\zeta_k, \tilde{\zeta}_k). \tag{6. 2. 1}$$

Ugyanúgy, mint a (6. 1. 1) egyenlőtlenség esetében is, a bizonyítás teljes indukció segítségével fog történni. Legyen (6. 2. 1) már bizonyított $t-1$ összeadandó esetére. (6. 1. 3)-mal analóg módon azt kapjuk, hogy

$$I^t(\eta, \tilde{\eta}) = I(\tilde{\eta}^{t-1}, (\zeta_t, \eta^{t-1}, \tilde{\zeta}_t)) + I(\tilde{\zeta}_t, (\eta^{t-1}, \zeta^t)) - I(\tilde{\zeta}^t, \tilde{\eta}^{t-1}). \tag{6. 2. 2}$$

A memória nélküli átviteli berendezés definíciója azt mutatja, hogy azon feltétel mellett, hogy az η^{t-1}, ζ^t változók rögzítve vannak, az $\tilde{\eta}^{t-1}$ és $\tilde{\zeta}^t$ változók függetlenek és hogy $\tilde{\eta}^{t-1}$ azon feltétel mellett vett feltételes eloszlása, hogy η^{t-1} és ζ^t rögzítettek, csupán η^{t-1} értékétől függ, ζ^t értékétől azonban nem. Ebből következik, hogy az $\tilde{\eta}^{t-1}$, η^{t-1} és $(\zeta_t, \tilde{\zeta}_t)$ változók Markov-láncot képeznek, és ezért a (2. 8. 1) képlet azt adja, hogy

$$I(\tilde{\eta}^{t-1}, (\zeta_t, \eta^{t-1}, \tilde{\zeta}_t)) = I(\tilde{\eta}^{t-1} \eta^{t-1}). \tag{6. 2. 3}$$

Továbbá hasonló okokból

$$I(\tilde{\zeta}_t, (\eta^{t-1}, \zeta_t)) = I(\zeta, \tilde{\zeta}). \tag{6. 2. 4}$$

Minthogy $I(\zeta_t, \eta^{t-1}) > 0$, azért (6. 2. 2), (6. 2. 3) és (6. 2. 4)-ből következik, hogy

$$I^t(\eta, \tilde{\eta}) \leqq I^{t-1}(\eta, \tilde{\eta}) + I(\zeta_t, \tilde{\zeta}_t), \tag{6. 2. 5}$$

ahonnan a (6. 2. 1) egyenlőtlenség már következik. Ezt a meggondolást a diszkrét esetre részletesebben végigvezettük [8] munkánkban.

A további konstrukciók, amelyek a kapacitásra vonatkozó (1. 5. 7) képlet levezetéséhez szükségesek, a memória nélküli átviteli berendezés információ-stabilitásának a bizonyítása, valamint annak bizonyítása, hogy az (1. 7. 14), (1. 7. 15) feltételek elegendők az 1. tétel IV. feltételének teljesüléséhez, teljesen analogonjai a 6. 1 pont megfelelő konstrukcióinak. Épp ezért itt ezeket nem részletezzük.

IDÉZETT IRODALOM

[1] С. Н. Бернштейн: Теория вероятностей: М.—Л., Гостехиздат, 1946.

[2] J. Wolfowitz: The coding of message subject to chance errors, *Illinois Journ. Math.* **1**, No 4 (1957) 591–606.

[3] J. Wolfowitz: Information theory for mathematicians, *Ann. Math. Stat.* **29**, No 2 (1958) 351–356.

[4] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом: К общему определению количества информации, ДАН **111**, № 4 (1956), 745—748.

[5] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом: О вычислении количества информации о случайной функции, содержащемся в другой такой функции, УМН **XII**, вып. 3 (1957), 3–52.

[6] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров: Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.

[7] S. Goldman: *Information theory*, Constable and Company, London, 1953; orosz ford. С. Гольдман: Теория информации, М., ИЛ, 1957.

[8] Р. Л. Добрушин: Передача информации по каналу с обратной связвю, Теория вероятн. и ее применения **3**, № 4 (1958).

[9] J. L. Doob: *Stochastic processes*, N. Y., John Wiley & Sons, London, Chapman and Hall, 1953; orosz ford. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.

[10] А. Н. Колмогоров: Untersuchungen über Integralbegriff, *Math. Ann.* **103** (1930) 654–696.

[11] А. Н. Колмогоров: Теория передачи информации Сессия Акад. наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, Пленарн. засед., Изд. АН СССР, М., 1957, 66—99; angol változata: A. N. Kolmogorov: To the Shannon theory of information transmission in the continuous signal case, *Trans. IRE, Sect. Inf. Theor.* **2**, No 4 (1956) 102–108.

[12] А. Н. Колмогоров: Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, ДАН **119**, № 5 (1958).

[13] K. Krickeberg: Convergence of martingales with a direct index set, Trans, *Amer. Math. Soc.* **83**, No 2 (1956) 313–337.

[14] Л. Я. Лейфман: Об условиях существования интеграла Колмогорова и поняатии дифференциальной эквивалентности, УМН **XII**, вып. 3 (1957), 343—352.

[15] B. Mac-Millan: The basic theorems of information theory, *Ann. Math. Statist.* **24**, No 2 (1953) 196–219.

[16] S. Muroga: On the capacity of a noisy continuous channels, *Trans. IRE, Sect. Inf. Theory* **3**, No 1 (1957) 44–51.

[17] A. Perez: Notions généralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue la théorie de martingales, *Trans. of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes*, Publ. House of the Czechoslovac. Acad. of Sci., Prague (1957) 183–208.

[18] A. Perez: Sur la théorie de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait, *Trans. of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes*, Publ. House of the Czechoslovac. Acad. of Sci., Prague (1957) 209–244.

[19] A. Perez: Sur la convergence des incertitudes, entropies et informations échantillon vers leurs valeurs vraies, *Trans. of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes*, Publ. House of the Czechoslovak Acad. of Sci., Prague (1957) 245–252.

[20] М. Розенблат—Рот: Энтропия стохастических процессов, ДАН **112**, № 1 (1957), 16–19.

[21] М. Розенблат—Рот: Теория передачи информации через стохастические каналы, ДАН **112**, № 2 (1957), 202 205.

[22] A. Feinstein: A new basic theorem of information theory, *Trans. IRE, Sect. Inf. Theory*, No 4 (1954) 2–22.

[23] A. Feinstein: *Foundations of information theory*, Mc. Graw Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1958.

[24] P. Halmos: *Measure Theory*, New York, 1950; orosz ford. П. Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953.

[25] А. Я. Хинчин: Понятие энтропии в теории вероятностей, УМН **VIII**, вып. 3 (1953), 3—20.

[26] А. Я. Хинчин: Об основных теоремах теории информации, УМН XI, вып. 1 (1956), 17—75

[27] И. П. Цареградский Замечание о пропускной способности стационарного канала с конечной памятью, Теория вероятн. и ее применения 3, № 1 (1958), 84—96.

[28] Цзян Цзы-пей, Замечание об определении количества информации, Теория вероятн. и ее применения 3 № I (1958), 99—102.

[29] C. E. Shannon: Certain results in coding theory for noisy channels, *Inform. and Control* **1**, No 1 (1957) 6—25.

[30] C. E. Shannon and W. Weaver: *The mathematical theory of Communication*, University of Illinois Press, Urbana, Ill., 1949; orosz ford. (nem teljes) К. Шеннон, Статистическая теория передачи электрических сигналов, a Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, М., ИЛ, 1953, c. könyvben. 7—87.

[31] D. Blackwell—L. Breiman—A. J. Thomasian: Proof of Shannon's transmission theorem for finite state indecomposable channels, *Ann. Math. Stat.* **29**, No 4 (1958) 1209—1220.

[32] Р. Л Добрушин: По поводу формулировки основной теоремы Шеннона (Резюме доклада на заседании научн.-исслед. семинара по теории вероятностей 19/III 1957 г., Теор. вероятн. и ее прилож **2**, № 4 (·958).

[33] Р. Л Добрушин, Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации, ДАН (1959).

[34] K. Jacobs: Die Übertragung diskreter Informationen durch periodische und fast periodische Kanäle, *Math. Ann.*, **137**, No 2 (1959) 125—135.

Fordította: MEDGYESSY PÁL