HILBERT DÁVID

(1862. JAN. 23–1943. FEBRUÁR 14.)

Írta: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

Most 100 éve hogy született, és 19 éve hogy meghalt a modern matematika egyik legnagyobb alakja, HILBERT DÁVID. Munkássága mélyen rányomta bélyegét a matematika újabb fejlődésére s hatása örökké érezhető lesz a matematikai és általában az egzakt tudományok minden területén.

A magyar matematika sokat köszönhet neki külön, általános hatásán kívül is. A Göttingában köréje sereglő fiatal matematikusok között ott találunk számos magyar matematikust is, akik mesterüknek vallották később is őt. RIESZ FRIGYES, az integrálegyenletek és az ún. *Hilbert-tér* elméletének problémáit hozta magával HILBERTtől s vált e területeken végzett mélyreható munkássága révén maga is a modern matematika egyik nagy mesterévé. HAAR ALFRÉD HILBERTnek tanársegéde volt, mielőtt a kolozsvári egyetem tanára lett volna; 1909-ben HILBERTnél doktorált, s témaválasztásaiban élete végéig érezhető maradt közvetlen tanítómesterének hatása, akár az ortogonális függvényrendszerek, akár a variációszámítás, akár a csoportmérték problémáin dolgozott is. NEUMANN JÁNOS szintén HILBERT közvetlen tanítványai és munkatársai közé tartozott s nemcsak azt mondhatjuk el, hogy a matematika alapjai, a *Hilbert-tér* operátorai s más konkrét nagy elméletek továbbfejlesztésében volt HILBERT méltó tanítványa, hanem NEUMANN JÁNOS egész — méltán grandiózusnak nevezhető — tudományos munkásságában ott érezhető a nagy mester szellemének hatása. Folytathatnánk a névsort, hiszen még voltak hosszabb-rövidebb ideig hazai matematikusaink göttingai tanulmányúton, így az én édesapám is, s hozták onnan haza magukkal a nagy HILBERT előadásainak, szemináriumainak nagy és maradandó tudományos élményét.

Külön megemlítendő az a magyar szempontból jelentős tény, hogy HILBERTnek a geometria alapjairól szóló, nagyhatású művei az euklideszi és a nem-euklideszi geometriák alapjaira összpontosították a tudományos világ figyelmét a századforduló körül s ezen a réven a mi BOLYAI JÁNOSunk korszakalkotó tudományos felismerései újra — vagy talán igazában csak ekkor először — az érdeklődés előterébe kerültek.

A Magyar Tudományos Akadémia méltó módon fejezte ki elismerését HILBERT DÁVIDnak a *Bolyai*-díj odaítélésével. Ezt a díjat BOLYAI JÁNOS születésének 100. évfordulója alkalmával (1902) alapította akadémiánk. Először 1905-ben ítélték oda s azt követőleg 5 évenként szándékoztak odaítélni a közbeeső 5 év alatt megjelent legjobb matematikai mű szerzőjének, figyelembe véve az illető szerző egész megelőző munkásságát is. A díjat első ízben a nagy francia matematikus, POINCARÉ kapta meg 1905-ben, de a díjat odaítélő bizottság ugyanakkor a POINCARÉ munkásságával egyenlő részletességgel méltatta HILBERT munkásságát is, legnagyobb tiszteletét és elismerését fejezve ki ezzel HILBERT iránt is. Másodízben, 1910-ben HILBERTnek ítélték a díjat: a díj-bizottságnak magyar részről KÖNIG GYULA és RADOS GUSZTÁV volt a tagja, s mellettük még két kiváló külföldi tudós: a svéd MITTAG-LEFFLER és a francia POINCARÉ. A bizottság megállapítása szerint a megelőző 5 év során közölt matematikai művek közül HILBERT művei kitűnnek gondolataik mélységével, módszereik eredetiségével, bizonyításaik logikai szigorúságával. A díj-bizottság előadója az első ízben kitüntetett POINCARÉ volt, s az ő általa írt, HILBERT addigi munkásságát méltató nagyszabású jelentés a MITTAG-LEFFLER szerkesztette stockholmi *Acta Mathematica* folyóirat 35. kötetében jelent meg, 1912-ben. Sajnos, a világháború megszakította a *Bolyai*-díjak odaítélésének sorozatát, s ezt, a legkiválóbb matematikusok számára mintegy a *Nobel*-díjnak megfelelő nemzetközi díjat azóta sem adták ki többé.

HILBERT Königsbergben született. Atyja jogász volt, meglehetősen egyoldalú ember, aki fia pályaválasztását sokáig bizalmatlansággal nézte. Anyja egy königsbergi kereskedőcsalád lánya, aki szokatlanul élénken érdeklődött szellemi kérdések iránt: szívesen olvasott filozófiai és csillagászati írásokat és kedvét lelte abban, hogy primszámokat számított ki. Eltérően a német diákok szokásától, hogy egyetemről egyetemre vándorolnak, HILBERT nemcsak középiskoláit, hanem egyetemi tanulmányait is (egyetlen heidelbergi félévét leszámítva) szülővárosában végezte. A königsbergi egyetemen lett HILBERT doktor, majd egyetemi magántanár és 1892-ben nyilvános rendkívüli, majd rendes tanár.

Csak 1895-ben szakadt el szülővárosától, amikor FELIX KLEIN kezdeményezésére a göttingai egyetemre hívták meg. Élete végéig Göttingában is maradt. A törvényes korhatár elérésekor, 1930-ban vonult nyugalomba. Ott is halt meg 1943-ban s a göttingai temetőben van a sírja, a nagy fizikusok, PLANCK és LAUE sírjai közelében.

Életének utolsó 10 évét a náci uralom árnyékolta be. HILBERT különlegesen mentes volt minden nemzeti és faji előítélettől; minden közösségi kérdésben — legyen az politikai, szociális vagy szellemi vonatkozású — a szabadság oldalán állott, még ha gyakran elszigetelten maradt is e véleményével környezetében. Önálló ítéletét mindig megtartotta, nem úszott sohasem az árral. Nem volt véletlen az, hogy amikor a nácik 1933-ban elkezdték „tisztogatásukat" a német egyetemeken, legjobban a *Hilbert*-iskolára nehezedett a kezük s HILBERT legközvetlenebb munkatársai (COURANT, NEUMANN JÁNOS és mások) voltak kénytelenek önkéntesen vagy a náci üldözések elől elhagyni Németországot. HILBERT maga akkor már túlságosan idős volt erre és otthon maradt, de az 1933-at követő évek számára a mind elmélyülőbb tragikus magányosság évei lettek.

HILBERT tanárai a königsbergi egyetemen kiváló matematikusok voltak, HEINRICH WEBER, R. DEDEKIND és F. LINDEMANN, utóbbi éppen abban az időben érte el híres eredményét, a π szám trancendens voltának bizonyítását. LINDEMANN tanácsára kezdett el HILBERT doktori témájával, az invariánselmélettel foglalkozni. Igen erősen hatottak rá a berlini KRONECKER művei. HILBERTnek az algebra területén végzett munkássága a legszorosabban függ a KRONECKERétől. Alapfelfogása a matematikáról azonban gyökeresen különbözik amazétól. KRONECKER nagy tekintélye teljes súlyával azt az irányt képviselte, hogy a matematikai egzisztencia-tételeket mindig explicit megszerkesztés által, az egész számok segítségével kell bebizonyítani. (KRONECKER szerint: „Az egész számokat a Jóisten teremtette, minden más az ember műve".) HILBERT fellázadt az ellen, hogy KRONECKER — szerinte — a matematikát ilyen módon egy önkényes filozófiai elv Prokrusztesz-ágyába kívánja szorítani s elnyom minden olyan fejlődést, amely nem felel meg ennek az elvnek. Maga HILBERT korai bajnoka volt CANTOR általános, halmazelméleti eszméinek. KRONECKER tudományos „tilalmi diktatúrája" ellen érzett szenvedélyes ellenkezése visszhangzik HILBERTnek jóval későbbi írásaiban is, amikor pl. a BROUWER-féle intuicionizmus ellen folytat polémiát. BROUWER és H. WEYL ellen folytat harcot pl. az 1922-ben megjelent cikkében a „matematika újraalapozásáról", de csapásait KRONECKER szellemének szánja, amelyet sírjából feltámadni lát. De — különös és elkerülhetetlen kettősség — miközben hadakozik e szellem ellen, kénytelen követni őt: kénytelen szigorúan intuicionista módon érvelni avégből, hogy megvédje a nem-intuicionista matematikát.

De térjünk vissza az ifjú HILBERTre: minden másnál nagyobb hatással volt rá két matematikus barátja: ADOLF HURWITZ és HERMANN MINKOWSKI. MINKOWSKI két évvel fiatalabb volt HILBERTnél, de félévvel előbb iratkozott be az egyetemre. Berlinben hallgatta KUMMERt, KRONECKERt, WEIERSTRASSt és HELMHOLTZot s a saját úttörő számelméleti eredményeivel igen hamar nagy elismerést váltott ki: 19 éves korában a *Párisi Akadémia Nagydíját* nyerte el. A szünidőket töltötte Königsbergben s HILBERTet vele hamarosan szoros barátság fűzte össze. HURWITZ 3 évvel idősebb volt HILBERTnél s 1884-ben hívták meg rendkívüli tanárnak a königsbergi egyetemre. Róla mondta HILBERT: „MINKOWSKIt és engem egészen lenyűgözött a tudása és nem is reméltük, hogy valaha is annyira visszük". Számtalan séta közben, napról napra nyolc éven keresztül, HURWITZ, HILBERT — és nyaranként MINKOWSKI — megvitatták a matematika minden ágát. HILBERT szavaival: „. . . HURWITZ volt mindig a vezetőnk a maga éppen annyira kiterjedt és sokoldalú mint szilárdan megalapozott és jól elrendezett ismereteivel . . . ". Ez a königsbergi kör 1892-ben bomlott fel: HURWITZot Zürichbe hívták meg és rövidesen követte őt MINKOWSKI is. HILBERT először HURWITZ utóda lett Königsbergben, majd a göttingai egyetemre távozott maga is. 1902-ben azonban újra összekerült MINKOWSKIval, amikor HILBERT kezdeményezésére egy új matematikai tanszéket állítottak fel Göttingában MINKOWSKI számára. A két barát göttingai együttműködése a tudomány ragyogó korszakát nyitotta meg ebben a kis német egyetemi városban. MINKOWSKIt korai halála 1909-ben elragadta az élők sorából. A Göttingai Tudományos Társaság előtt HILBERT ilyen szavakkal emlékezett meg róla: „a tudomány, amelyet mindennél jobban szerettünk, hozott össze bennünket. Virágos kertnek tűnt ez nekünk. Ebben a kertben vannak kitaposott ösvények, amelyekről kellemesen körül lehet tekinteni és erőfeszítés nélkül gyönyörködni, különösen ha rokonszellemű társ áll az oldalunkon. De mi szívesen kutattunk fel rejtett utakat is és nem egy új kilátóhelyet fedeztünk fel s amikor ezeket egymásnak megmutattuk: örömünk teljes volt."

E szavak nemcsak egy kivételesen mély és termékeny, a közös tudományos érdeklődésen alapuló barátságról tanúskodnak, hanem mutatják azt is, milyen szuggesztív lelkesedéssel tudta magát HILBERT kifejezni, ha a tudományról szólt. Egy tudós hatása kortársaira nem csupán kutatási eredményeinek súlyától függ. HILBERT matematikai műve ugyan kivételesen mély és univerzális jelentőségű, azonban óriási hatását mégsem csak ennek köszönheti. GAUSS és RIEMANN, hogy két régebbi nagy göttingai matematikust említsünk, bizonyosan nem kisebb lángeszek a matematikában, de kevéssé mozgatták meg kortársaikat és nem alakult egyikük körül sem a lelkes követőkből „iskola". Nem kétséges, hogy ebben részben szerepük volt a megváltozott külső feltételeknek is, de az emberek különböző jelleme valószínűleg döntőbb tényező. A magány, sőt néha a homály kedvelése nem mindig összeegyeztethetetlen a nagy alkotó tehetséggel: erre GAUSS és NEWTON igen jó példák. HILBERT természete egész más volt: tele volt életkedvvel, kereste a másokkal való érintkezést, különösen a fiatal tudósokkal, és örömét lelte, ha kicserélhette velük gondolatait. Ahogy ő tanult HURWITZtól, úgy tanította ő is a saját tanítványait, hosszas sétákon a Göttingát körülvevő erdőkben vagy esős napokon kertjének fedett sétányán. Tudományos optimizmusa, szellemi szenvedélyessége, megrendíthetetlen bizalma a tudományban mint legmagasabb értékben, szilárd meggyőződése, hogy az ész erejével egyszerű és világos választ lehet adni minden egyszerű és világos kérdésre, ellenállhatatlanul átragadt tanítványaira is. Lelkesedése jól összefért a kritikus elmeéllel, de a szkepticizmussal nem. A közönbösség tettetése, vagy akár a tréfás cinizmus is, ismeretlen dolog volt az ő körében. Roppant szorgalmas volt a munkájában s szerette mondani: „A lángész: szorgalom". De mégis fény és jókedv volt körülötte. Nagy szuggesztív ereje volt, amivel néha egy-egy közepes tehetségű tanítványát is meglepően magas színvonalú teljesítményre késztette. Matematikai meglátó képessége és nagy tapasztalata alapján tanítványai mesterük minden megjegyzését, utasítását úgy fogadták, hogy biztosak voltak azok találó és termékeny voltában. HILBERT nem rejtette véka alá örömét, ha egy-egy szép vagy váratlan eredményre jutott, örömének és megelégedettségének olykor dolgozataiban is kifejezést adott. Ez azonban nem annyira a személyes teljesítmény felett érzett jogos büszkeség hangja, mint inkább az emberi ész alkotóerejének újabb megnyilvánulása, a tudás útján való újabb előrehaladás felett érzett általános emberi öröme.

Mielőtt részletesebben szólnék HILBERT munkájáról, jellemezni szeretném néhány szóban HILBERT matematikai gondolkodásmódját. Ez tükröződik irodalmi értékű stílusában, amely kitűnik *világosságával.* Témáját először mindig könnyedén megvilágítja, rámutat a nehézségekre, a probléma részletei közötti kapcsolatokra s csak miután így tökéletes előkészítést és tájékoztatást nyújtott, indul neki — képletesen szólva — a hegy megmászásának, de akkor aztán egyenesen tör felfelé, megállás és kitérők nélkül. Stílusa nem olyan szűkszavú, mint sok jelenkori matematikusé, akik nincsenek tekintettel az olvasóra.

HILBERT matematikájában az *egyszerűség* és a *szigorúság* kéz a kézben járnak. Az őt megelőző nemzedék matematikusai, sőt még az ő nemzedékének legtöbb analistája is nehéz járomnak érezték azokat a szigorúsági követelményeket, amelyekre az analízis a XIX. századbeli, WEIERSTRASSnál kulmináló kritikája kényszerítette őket; ez a járom fékezte és félszeggé tette lépéseiket. HILBERTnek nagy a szerepe abban, hogy ez a magatartás megváltozott s ma már az analízis szigorúsága éppen olyan magától értetődő mint pl. az algebráé. Az 1900. évi, Párizsban tartott nemzetközi matematikai kongresszuson elmondott híres előadásában HILBERT hangsúlyozza a konkrét, nagy és gyümölcsöző *problémák* jelentőségét. Így szól: „Mindaddig, amíg egy tudományág bővelkedik problémákban, addig tele van élettel; a problémák hiánya halált, vagy a független fejlődés megszűnését jelenti. Amint minden emberi vállalkozás végcélokat követ, a matematikai kutatásnak is problémákra van szüksége. Ezek megoldása megacélozza a kutató erejét, így fedez fel új módszereket, és szempontokat és tágítja látóhatárát". — „Ha valaki határozott probléma nélkül a szeme előtt keres módszereket, valószínűleg hiába keresi ezeket." A matematika *módszertani egysége* hit és tapasztalat dolga volt HILBERT számára. Saját szavait idézem: „. . . vajon a matematikának is szembe kell-e néznie azzal, ami más tudományoknak már régóta a sorsa, ti. hogy szétesik részekre, amelyek képviselői alig képesek egymást megérteni és amelyek kapcsolatai ennek folytán mind lazábbakká válnak? Én nem kívánom és nem is hiszem ezt. A matematikai tudomány, ahogyan én látom, oszthatatlan egész, olyan organizmus, amelynek életkérdése, hogy a részei közötti kölcsönhatások fennmaradjanak". HILBERT módszerére jellemző, hogy a problémákat *direkt* módon, algoritmusok bilincseitől megszabadítva támadja meg; mindig eredeti egyszerűségükben nyúl a kérdésekhez. Kitűnő példa erre az, ahogyan megmentette az ún. *Dirichlet*-féle elvet, amelyről pedig úgy látszott, hogy végleg áldozatává válik a WEIERSTRASS-féle kritikának; de hasonló példákat bőven találhatunk egész munkásságában. Ereje, mely egyaránt megveti a herkulesi erőfeszítéseket és a meglepő fortélyokat, meg nem alkuvó *tisztasággal* párosul.

A párizsi kongresszuson, 1900-ban tartott, előbb már említett előadása a matematika problémáiról átfogja tudományunk egész területét. Megkísérli fellebbenteni a fátylat a matematika jövőjéről s evégből 23 problémát sorol fel és diszkutál, amelyeket jórészt maga mondott ki először, s amelyek véleménye szerint a jövő kutatásokban jellemző szerepet fognak játszani. Ha visszatekintünk az azóta elmúlt időre, igazat kell adnunk HILBERTnek, mert e problémák valóban fontos szerepet játszottak a matematika azóta végbement fejlődésében. Ez mutatja, hogy HILBERT milyen világosan meglátta a legfőbb problémákat, bár azt sem lehet tagadni, hogy e problémák felsorolásából HILBERT a maga roppant nagy tudományos tekintélyével és szuggesztivitásával ezeknek külön is hangsúlyt adott. E problémák közül azóta többet megoldottak, néhányuk még azóta is nyitott vagy csak részlegesen van megoldva. Mindenesetre, ha egy-egy problémát valakinek sikerült megoldani, az illető beírta ezzel a nevét a matematika történetének aranykönyvébe. Rendszerint azonban nem egy-egy matematikus kizárólagos teljesítménye volt valamelyik nagy *Hilbert*-probléma megoldása, hanem a kutatók egymáséba kapcsolódó munkájának végeredményeként született meg a megoldás. Közben a probléma maga is fejlődött, általánosabb vagy jobban körülírttá vált.

Egyik nevezetes problémája az *ötödik*, amelyre HILBERT a geometria megalapozására irányuló munkájával kapcsolatban jutott. A mechanika szempontjából a geometria alapvető feladata az, hogy egy merev test mozgását leírja. Ez volt HELMHOLTZ álláspontja is, s sikerült is neki az euklideszi sík mozgáscsoportját néhány egyszerű axiomával jellemezni. A kérdést egy másik nagy matematikus, SOPHUS LIE a folytonos transzformációcsoportok általa kifejlesztett elméletének a keretében újra megvilágította. LIE elmélete feltételez a folytonosság mellett bizonyos differenciálhatósági tulajdonságokat is. Ezeknek a tulajdonságoknak az előre való feltételezése azonban idegen a geometria megalapozására vonatkozó eredeti probléma természetétől. HILBERTnek sikerült is ebben a speciális esetben megszabadítania a *Lie*-féle elméletet a differenciálhatósági feltételektől. A nagy probléma pedig, amit kitűzött, az, hogy lehetséges-e a *Lie*-féle folytonos transzformációcsoportok elméletét teljesen megszabadítani a differenciálhatósági feltételektől? E problémával sok kiváló matematikus foglalkozott azután, köztük PÓLYA GYÖRGY és KERÉKJÁRTÓ BÉLA, akiknek az ún. egy- és kéttagú folytonos transzformációcsoportok esetében sikerült is a problémát megoldaniok. Az általános megoldás azonban sokáig váratott magára, még sok „matematikai fegyvert" kellett megkovácsolni ahhoz, hogy e probléma várát teljes ostrom alá vehessék. E fegyverek között döntő jelentőségűnek bizonyult a mi HAAR ALFRÉDünknek, HILBERT volt tanítványának és asszisztensének, akkor a szegedi egyetem tanárának 1932-ben tett felfedezése, amely szerint a folytonos csoportokban a csoport-eltolásokkal szemben invariáns mértékfogalom vezethető be, az ún. *Haar-féle csoportmérték.* HAAR maga nem tudta már e felfedezését kihasználni, röviddel ezután elhunyt. De másik hazánkfia, NEUMANN JÁNOS, a *Haar*-mérték birtokában egyhamar megoldja a problémát — igenlően — az ún. kompakt csoportok esetében, PONTRJAGIN szovjet matematikus pedig, ugyancsak a *Haar*-mérték felhasználásával, a csak lokálisan kompakt, de kommutatív csoportok esetére. Csak néhány éve, 1952-ben sikerült három amerikai matematikusnak, GLEASONnak, MONTGOMERYnek és ZIPPINnek a *Hilbert*-féle 5. problémát tetszőleges, lokálisan kompakt csoportok esetére is megoldania, felhasználva a halmazelméleti topológia finom meggondolásait is. Ha csak erre az egy *Hilbert*-problémára tekintünk is vissza, amelynek, mint láttuk, erős magyar vonatkozásai is vannak, látnunk kell, hogy a megoldására irányuló hosszú és nemzetközi tudományos erőfeszítések révén mennyit fejlődött a matematika: a mértékelmélet, a halmazelméleti topológia stb. a matematikának egészen új fejezetei alakultak ki ennek kapcsán, pl. a topologikus algebrának az elmélete, és az ún. általános harmonikus analízis. Ez az egy példa is mutatja, milyen meghatározó szerepe volt tudományunk egész fejlődésére HILBERT iránymutatásának. Ennek az iránymutatásnak akkor sem kisebb az érdeme és jelentősége, ha valamelyik problémáról az idők során kiderült, hogy megoldása nem az, amit HILBERT sejtett. Ez volt a sorsa például a *Hilbert*-féle 13. problémának, amely a többváltozós függvényeknek a nomográfia módszereivel való ábrázolásából kiindulva azt kérdi, melyek azok a három vagy többváltozós föggvények, amelyek véges sok kétváltozós függvényből építhetők fel úgy, hogy veszünk egy kétváltozós függvényt, majd mindkét változója helyére egy-egy kétváltozós függvényt helyettesíthetünk és így tovább, véges sokszor. HILBERT sejtése szerint nem minden háromváltozós folytonos függvény állítható elő ilyen módon kétváltozósakból. Legújabban, az 50-es évek végén egy egészen fiatal szovjet matematikus, V. I. ARNOLD, KOLMOGOROV szovjet akadémikus tanítványa, mestere kutatási eredményeit továbbfejlesztve végre megoldotta HILBERTnek ezt a problémáját is, bár a megoldás nem az, amit HILBERT sejtett. Kiderült ugyanis, hogy igenis minden háromváltozós folytonos függvény kifejezhető kétváltozósak ilyen módon való egybeskatulyázásával.

HILBERT tudományos életművének időbeli lefolyása sajátságos képet ad. Élete meglehetősen élesen szakaszokra bontható, amelyekben majdnem kizárólag egy-egy problémacsoporttal foglalkozott. Pl. életének abban a szakaszában, amikor az integrálegyenletek érdekelték, csak ezekkel foglalkozott, minden mögött ezt a kérdést vélte felfedezni; ha pedig úgy érezte, hogy egy problémakörrel végzett, ezt a problémakört véglegesen otthagyta, s más problémakör felé fordult. Ezen a jellemző módon jutott tudása és alkotása az univerzalitásnak napjainkban már szinte elérhetetlen magas fokára.

Munkásságának a következő fő szakaszait lehet megkülönböztetni: 1) Invariánselmélet (1885—1893), 2) Algebrai számtestek elmélete (1893—1898). 3) A geometria alapjai (1898—1902). 4) Integrálegyenletek (1902—1912). 5) Fizika (1910—1922). 6) A matematika általános alapjai, bizonyításelmélet (1922 után). Ez a felosztás azonban durvább a kelleténél. Pl. variációszámítási dolgozatait egy kalap alá veszi az integrálegyenletekről szólókkal. És természetesen vannak átfedések is, továbbá néhány szórványos, a fenti időrendbe bele nem illő alkotása, utóbbiak közül talán a legmeglepőbb a *Waring*-féle probléma általa adott megoldása 1909-ből.

WARING még a XVIII. században azt a sejtését mondta ki, hogy minden pozitív egész szám előállítható legfeljebb K darab pozitív egész szám n-edik hatványának összegeként, ahol K csak az n-től függ, mint ahogy például minden pozitív egész szám kifejezhető 4 darab négyzetszám összegeként. A *Waring*-féle probléma a maga általánosságában hosszú ideig teljesen hozzáférhetetlennek tűnt s csak a XIX. század utolsó évtizedében kezdtek egyes matematikusok azon fáradozni, hogy legalább az n kitevő egyes értékeire bebizonyítsák WARING sejtését. HILBERT figyelmét különösen HURWITZnak egy 1908-ban közölt érdekes ez irányú részeredménye keltette fel, amely szerint, ha valamely n-re érvényes egy

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^n = Y_1^{2n}+Y_2^{2n}+\ldots+Y_k^{2n}$$

alakú azonosság, ahol az Y-ok az x_1, x_2, x_3, x_4 változók racionális együtthatós, lineáris kifejezései, és ha erre az n-re igaz WARING sejtése, akkor $2n$-re is igaz. HILBERTnek sikerült minden n esetében egy a HURWITZ-típusú azonosságot, négy helyett öt változó esetére is felállítania, mégpedig meglepő módon, egy bizonyos 25-szörös integrálra vonatkozó formulából kiindulva, és ennek segítségével, további meggondolások egy csodálatra méltó láncolatán át, sikerült WARING sejtését teljes általánosságban bebizonyítania. Ez a bizonyítás egyik legnagyszerűbb tanúsítója HILBERT matematikai erejének s egyben meglepő példa az analízis módszereinek a számelméletben való alkalmazhatóságára. De meglepő az is, hogy HURWITZ dolgozatának megismerése után HILBERTnek igen rövid idő elég volt ahhoz, hogy a teljes megoldáshoz eljusson, alig pár hónap. Dolgozatát, amely a matematikai irodalomnak örökre egyik fényes gyöngyszeme marad, 1909-ben már közölte, közben elhúnyt barátjának és kollégájának, MINKOWSKInak az emlékére ajánlva.

Egy ilyen előadás keretében természetesen nincsen mód arra, hogy végighaladjunk HILBERT teljes tudományos hagyatékán. HILBERT első két tudományos periódusának — az invariánselméletinek és az algebrainak — átugrásával térjünk ki egy kicsit részletesebben HILBERTnek a geometria megalapozására vonatkozó munkásságára, amely az addig csak a szűkebb szakkörökben méltányolt tudóst világhírűvé tette. Nagy meglepetést keltett hallgatói előtt, amikor az addig az invariánsokkal és algebrai számtestekkel foglalkozó tanáruk 1898/99 telén az „Euklidesi geometria elemei" címmel hirdetett egyetemi előadásokat s még 1899-ben megjelentette azóta klasszikussá vált könyvét, a „Grundlagen der Geometrie"-t.

Már a régi görögök geometriája deduktív tudomány, amely tisztán logikai eljárásokkal épül fel, ha egyszer néhány axiómát, alapmegállapítást elfogadunk. EUKLIDESZ és HILBERT egyaránt ezt a programot hajtja végre. Csakhogy míg EUKLIDESZ axioma-listája még távolról sem volt teljes, a HILBERTÉ az, és HILBERT levezetéseiben nem marad semmi hézag. EUKLIDESZnél és HILBERTnél is a pont, az egyenes és a sík az alapelemei a geometriai térnek, de míg EUKLIDESZ ezeket a tér-elemeket és a köztük fennálló, az axiómákban foglalt kapcsolatokat a szemléletre is hivatkozva próbálja értelmezni, addig HILBERT a szemléletre való minden nyílt vagy burkolt hivatkozástól távol tartja magát. HILBERT felfogása szerint mindannak, amit ezekről az alapelemekről tudnunk kell, benne kell foglaltatnia az axiómákban: maguk az axiómák szolgálnak tehát ezeknek az alapelemeknek (szükségszerűen nem teljes) definícióiul. EUKLIDESZ az axiómákat evidenseknek tartotta a valóságos fizikai térben alkotott szemléletünk alapján. De a geometria szigorúan deduktív rendszerében a szemléleti evidenciának nem lehet szerepe, sőt még annak a kérdésnek sincs értelme, hogy az axiómák „igazak"-e? Az axiómák csupán hipotézisekül szolgálnak s egyetlen feladatunk, hogy ezeknek a hipotéziseknek a logikai következményeit kifejtsük. Valóban, különböző realizációi lehetségesek a geometria alapelemeinek, amelyekre az axiómák — mind vagy részben — teljesülnek. Az n-dimenziós euklideszi vektortér axiómái teljesülnek például akkor is, ha egy bizonyos elektromos vezetőrendszert veszünk, amelynek *n* ága bizonyos elágazási pontokban érintkezik, s az ebben lefolyó elektromos áramot tekintjük vektornak, hosszúságát azzal a *Joule*-hővel mérve, amelyet ez az áram egységnyi idő alatt kelt. HILBERT a maga sajátságosan éles megfogalmazásában ezt egy beszélgetés alkalmával így fejezte ki: „kell, hogy *pont, egyenes, sík* helyett mindig mondhassunk *asztal*t, *szék*et, *söröskancsó*t."

A geometriának axiómákból való felépítésében, amennyire csak lehet, takarékoskodni kell az axiómákkal. Hiszen minél kevesebb az axióma, az alapfeltevés, annál könnyebb azok teljesültét egy-egy adott realizációban (mint az előbb említett, áramkörökre vonatkozó példában) megállapítani s így annál könnyebb a geometriánkat alkalmazni. De az axiómákkal való takarékosság fontossága abban is áll, hogy így az egyes axiómacsoportok közötti kapcsolatokat jobban meg tudjuk világítani. HILBERT a geometria axiómáit 5 csoportba szedve mondja ki; ezek a következők: az illeszkedés, a rendezés, az egybevágóság, a párhuzamosság és a folytonosság axiómái. A sorrend lényeges; úgy van megadva, hogy már az első egy-két axiómacsoport axiómái alapján, a többiek felhasználása nélkül is, számos következtetést vonhassunk le. Hiszen minden újabb axiómának az előzőkhöz való hozzávétele újabb megszorítást jelent s a cél az, hogy mielőtt újabb megszorítást tennénk, minden lehetőséget kiaknázzunk, amit az eddig tett megszorítások még megengednek. Ha, például, a geometriai egybevágóságok elmélete felépíthető a párhuzamossági axióma nélkül is, tehát függetlenül attól, hogy ezt az axiómát feltesszük-e vagy sem, vagy milyen formában tesszük fel, akkor a párhuzamossági axiómát az egybevágóság axiómái utánra kell helyezni. Ilyen módon tisztán látszik a geometria felépítése során, mi az, ami a *Bolyai*-féle abszolút — azaz párhuzamossági axiómát nem feltételező — geometriában is érvényes és mi az, ami csak az euklideszi párhuzamossági axióma alapján következik.

HILBERTnek természetesen voltak a nem-euklideszi geometria felfedezői, BOLYAI JÁNOS és LOBACSEVSZKIJ óta más előfutárai is, főként M. PASCH, aki a *rendezés* eddig rejtve maradt axiómáit fedte fel és módszeres világossággal vitte végbe a projektív geometria deduktív felépítésének a programját (1882). Olasz geométerek (PEANO, VERONESE) folytatták ezt a diszkussziót. HILBERT azonban nemcsak hogy betetőzte ezt a folyamatot a szemléletre való rejtett utólagos hivatkozásokat szükségtelenné tevő geometriai axiómarendszerének a felállításával, hanem ezt az axiómarendszert addig szokatlanul éles logikai analízisnek vetette alá. HILBERT, bár voltak előfutárai ebben is, az első, aki teljesen szabadon mozog ezen a „metageometriai" szinten: rendszeresen megvizsgálja az egyes axiómái, ill. axiómacsoportjai egymástól való függetlenségének és ellentmondástalanságának a kérdését azáltal, hogy megfelelő geometriai modelleket szerkeszt, amelyek — például amikor valamelyik axiómának a többiektől való függetlenségéről van szó — az illető axiómának nem tesznek eleget, de az összes többinek igen. A *Bolyai—Lobacsevszkij*-féle nem-euklideszi geometriára már ismeretes volt ilyen modell, a *Cayley—Klein*-féle körmodell, HILBERT elkészíti a „nem-archimédeszi", „nem-desarguesi", „nem-pappusi" geometriák modelljeit is, amelyekben a mérés ún. archimédeszi axiómája ill. a projektív geometria *Desargues*-féle, ill. *Pappus*-féle tételei nem érvényesek. Mindezekben a logikai ellenpéldákban az alapvető eszmék ma már természetesnek tűnnek nekünk, olyannyira mély hatással volt ez a *Hilbert*-féle „axiomatikus gondolkodás" a matematikáról való felfogásunkra. Nagy szerepe volt ebben annak a világos és félreérthetetlen nyelvnek, amellyel HILBERT magát ki tudta fejezni dolgozataiban s könyvében, a „*Grundlagen der Geometrie*”-ben, amely 1899 óta eddig 7 kiadásban fogyott el, fordításairól nem is beszélve. E könyv művészi kvalitásai kétségtelenül hozzájárultak sikeréhez és tették a tudomány egyik mesterművévé.

A „Grundlagen” megjelenése utáni időszak HILBERT életének legragyogóbb korszaka. 1902-ben régi barátját, MINKOWSKIt a göttingai egyetemre nevezik ki, két év múlva C. RUNGE kap ugyanoda kinevezést, mint az alkalmazott matematika művelője. A göttingai matematikai élet magasba lendül, s körülötte nagy virágzásnak indulnak alkalmazási területei is, a csillagászat, a mechanika és a fizika. Ez a *Hilbert*-iskola fénykora, 1901-től az I. világháború kitöréséig több mint 40 doktori disszertáció készül el HILBERT vezetése alatt, ezek közül számos maradandó értékű és néhány egészen híressé vált munka; a fiatal doktorok közül rekrutálódnak HILBERT asszisztensei, akik később maguk is majdnem mindannyian nagy tekintélyű professzorokká váltak. Fiatal és tapasztaltabb matematikusok egyaránt jönnek HILBERThez bel- és külföldről, hogy tanuljanak a mestertől s sok értékes indítékot is hoznak magukkal, amivel hozzájárulnak a göttingai matematikai élet még színesebbé válásához.

Maga HILBERT a „Grundlagen” után egy-két évig még folytatja geometriai kutatásait s megírja a „Matematikai problémákról” szóló előadását a párizsi kongresszus számára, amelyről már szóltunk, de ezután mindinkább a függvénytani analízis lép érdeklődésének előterébe. Munkái az analízist új, hatásos módszerekkel gazdagították, amelyek munkatársai kutatásaival kiegészítve, „*A matematikai fizika módszerei*” című híres, kétkötetes, *Courant—Hilbert*-féle tankönyvben nyertek összefoglalást.

HILBERTnek az analízis területén való kutatásai közben is bizonyos mértékig egy axiomatikus program lebeghetett a szeme előtt. Erre utal az 1908-as római nemzetközi matematikus-kongresszusra készített előadásának a következő részlete: „Kimagaslóan érdekesnek tartanám megvizsgálni azokat a konvergenciameggondolásokat, amelyek az analízis egy-egy meghatározott diszciplínájának a felépítésére szolgálnak, olyan módon, hogy összeállítjuk az illető diszciplína lehetőleg egyszerű alaptényeinek egy rendszerét, amelyek bizonyításához egy bizonyos konvergenciameggondolás szükséges, és amely egyszerű alaptényekből kiindulva azután, újabb konvergenciameggondolások nélkül bizonyíthatjuk be az illető analízis-diszciplína összes tételeit.”

Ilyen „egyszerű alaptényeket” HILBERT először a variációszámítás területén keresett, az ún. reguláris variációproblémák között. Vizsgálatainak mindjárt a kezdetén kiemelkedő sikert ért el az ún. *Dirichlet*-féle elvvel kapcsolatban. A matematikai fizika, közelebbről az elektrosztatika egyik alapfeladata az ún. *Dirichlet*-féle probléma, amely a kétdimenziós esetben így szól: Meg van adva az u elektromos potenciál értéke a síkbeli G tartomány peremén, keresendő u értéke a G tartomány belső pontjaiban, feltéve, hogy ott nincsenek elektromos töltések. Matematikailag kifejezve, u-nak a G tartomány belsejében a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ún. *Laplace*-féle differenciálegyenletet kell kielégítenie, ahol x, y derékszögű koordináták, G peremen pedig u-nak megadott értékeket kell felvennie. DIRICHLET ezt a feladatot egy minimumfeladatra vezette vissza. Kimutatta ugyanis, hogy a G tartományon értelmezett összes olyan, folytonosan differenciálható u függvények közül, amelyek G peremén az adott értékeket veszik fel (röviden mondva: az összes „megengedett" u függvények közül) az szolgáltatja a szóban forgó *Dirichlet*-probléma megoldását, amelyre a

$$D(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

ún. *Dirichlet*-integrál értéke a minimális. Régebbi kutatók, abból kiindulva, hogy ennek az integrálnak az értéke alulról korlátos, ti. nemnegatív, hallgatólagosan elfogadták azt, hogy *van* olyan függvény a megengedettek közül, amelyre a $D(u)$ integrál minimális értéket vesz fel. Ez az ún. *Dirichlet*-elv. WEIERSTRASS rámutatott arra, hogy ilyen minimalizáló megengedett függvény létezése egyáltalában nem nyilvánvaló. WEIERSTRASSnak ez a jogos kritikája egy időre elriasztotta a matematikusokat attól, hogy a *Dirichlet*-probléma megoldását ebben a — különben olyan természetesnek látszó — irányban keressék s más, kerülőbb utakon közelítették meg a problémát. HILBERT, teljes mértékben elismerve WEIERSTRASS kritikájának jogosságát, nem riadt vissza a kritikától, hanem merészen nekifogott annak, hogy az integrált minimalizáló függvény létezését bebizonyítsa. A nehézséget az okozza, hogy ha $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ megengedett függvényeknek egy olyan sorozata, amelyre a

$$D(u_1),\quad D(u_2), \dots,\quad D(u_n), \dots$$

integrálértékek sorozata a $D(u)$ integrál összes lehetséges értékei halmazának alsó határához tart, egyáltalában nem következik ebből, hogy az $u_1, u_2, \dots\ u_n, \dots$ függvénysorozat maga is konvergál. Pedig ha ez a sorozat konvergálna, nyilván a határértékfüggvény lenne a minimalizáló függvény. HILBERT a konvergenciát azzal kényszeríti ki, hogy az $u_n(x, y)$ minimalizáló függvénysorozatot előbb egy alkalmas „kisimító-eljárásnak" veti alá (FELIX KLEIN kifejezésével „HILBERT lenyírja a felületek szőreit") s azután az így kisimított, de még mindig megengedett és minimalizáló függvénysorozatból ki tud választani egy konvergens részsorozatot. A „kisimítás" úgy történik, hogy a függvények értékét bármely P pontban HILBERT helyettesíti a függvénynek a P pont körüli r sugarú körön vett integrálközepével.

HILBERTnek ez a módszere a *Dirichlet*-probléma megoldására, amelyet „direkt" módszernek nevezhetünk, még jobban alkalmazható olyan problémák megoldásában, amelyekben a tartomány pereme nem játszik olyan lényeges szerepet, mint a *Dirichlet*-féle peremértékproblémában. Csekély módosítással a módszer akkor is alkalmazható, ha pontszingularitásokat is megengedünk, és HILBERT így oldotta meg a *Riemann*-felületeken való áramlások problémáját, megadva ezzel a szükséges alátámasztást az *Abel*-féle integrálok *Riemann*-féle elméletének. Később, amikor a függvénytan egy új nagy feladata, az általános uniformizáció-probléma került az érdeklődés előterébe (főleg POINCARÉ és KOEBE munkássága révén), HILBERT megint csak az ő direkt módszeréhez nyúlt s ennek némi módosításával bebizonyította tetszés szerinti síktartomány konform leképezhetőségét a valós tengellyel párhuzamos metszetekkel felvágott síkra. Így a HILBERT által megmentett és kifinomított „*Dirichlet*-elv" a függvénytan számára valóban egy olyan „egyszerű alapténynek" bizonyult, amilyent HILBERT keresett. Ennek az elvnek a minimálfelületek elméletére való alkalmazhatóságát R. COURANT fedte fel, aki hosszú időn át HILBERT legszorosabb munkatársa volt a göttingai matematikai élet vezetésében s aki később a nácizmus elől Amerikába kényszerült s a New York-i egyetemen ma is virágzó „*Hilbert*-iskolát” alakított ki.

HILBERT eszméi mélyen befolyásolták a variációszámítás modern fejlődését. A direkt módszer a klasszikus *Euler—Legendre—Jacobi—Weierstrass*-féle „lokális” módszerekkel párosulva a variációszámításban új fellendülést hozott.

A variációszámítással szorosan kapcsolódnak az integrálegyenletek HILBERT analízis-tárgyú vizsgálataiban. 1900—01 telén egy fiatal svéd matematikus, HOLMGREN számolt be HILBERT szemináriumán az ugyancsak svéd IVAR FREDHOLM frissen megjelent, integrálegyenletekre vonatkozó első közleményeiről és HILBERT — úgy látszik — azonnal tüzet fogott. Kezdetét vette HILBERT alkotó munkásságának egy újabb és különösen jelentős szakasza.

FREDHOLM az ún. másodfajú integrálegyenleteket vizsgálta, amelyekre többek között a *Dirichlet*-problémának egy C. NEUMANN által javasolt átfogalmazása vezet. Ezek a következő alakúak:

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt=f(s)\qquad(a\leqq s\leqq b),$$

ahol $K(s,t)$ és $f(s)$ adott függvények, $x(t)$ a keresett függvény, λ pedig egy valós vagy komplex paraméter; a *Dirichlet*-problémára való alkalmazás speciális esetében λ értéke $+1$ vagy -1. POINCARÉ a múlt század végén az ilyen integrálegyenletek megoldásával kapcsolatban komplexfüggvénytani módszereket javasolt; FREDHOLM a *Poincaré*-féle utalásokat felhasználva és messzemenően továbbfejlesztve először adta meg a fenti integrálegyenlet általános megoldási módszerét. FREDHOLM ennek segítségével meg tudta oldani a potenciálelmélet peremérték-problémáját, a már említett *Dirichlet*-problémát. De nem ölelte fel FREDHOLM módszere a rezgő rendszerek (hur, membrán stb.) rezgései sajátrezgések szuperpozíciójaként való előállításának a problémáját, holott POINCARÉ éppen ezekből a problémákból kiindulva jutott el az integrálegyenletekre vonatkozó meggondolásaihoz. HILBERTnek sikerült az elméletet ez irányban kifejlesztenie. Míg FREDHOLM az integrálegyenlet tárgyalásánál párhuzamosan halad a lineáris algebrai egyenletrendszerek szokásos megoldási módjával, de nem hivatkozik az algebrai tételekre, HILBERT egy természetesen kínálkozó — és a rezgő húr problémájában már BERNOULLI által 1730-ban alkalmazott — módszerrel az integrálegyenlet megoldását a lineáris algebrai probléma megoldásából határátmenettel kapja. Az eljárás nem egyszerű és talán kevésbé elegáns a FREDHOLMénál, de lehetővé teszi HILBERTnek, hogy a lineáris és a kvadratikus algebra más, jól ismert tételeit is felhasználhassa, s ezzel a *Fredholm*-féle eredményeket lényegesen kiegészíthesse. A sajátrezgések problémái ugyanis olyan integrálegyenletekre vezetnek, amelyekben a $K(s,t)$ „magfüggvény” szimmetrikus a változóiban, azaz

$$K(s,t)=K(t,s),$$

és ennek következtében az integrálegyenletet megközelítő algebrai lineáris egyenletrendszerben az együtthatók szimmetrikus matrixot alkotnak. A véges szimmetrikus matrixokra és az ezekhez tartozó kvadratikus alakokra pedig jól ismeretes az algebrában a sajátértékprobléma megoldása és az ún. főtengelyekre való transzformáció tétele. HILBERT ezekből az algebrai tételekből kiindulva jut el határátmenettel a szimmetrikus magú integrálegyenletek sajátértékproblémájának és kifejtési problémájának a megoldásához. Fő eredménye, hogy szimmetrikus (és folytonos) $K(s, t)$ magfüggvény esetében található sajátfüggvényeknek egy $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ ortonormált rendszere, a hozzájuk tartozó $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ valós sajátértékekkel, úgy, hogy bármely $x(s)$ valós folytonos függvényre érvényes a következő összefüggés:

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) x(s) x(t)\, ds\, dt = \sum_n \lambda_n \xi_n^2,$$

ahol ξ_n az $x(s)$ függvény n-edik *Fourier*-együtthatója a sajátfüggvények ortonormált rendszerében, azaz

$$\xi_n = \int_a^b x(s) \varphi_n(s)\, ds.$$

A $\varphi_n(s)$ sajátfüggvény a λ_n sajátértékkel a következő összefüggésben van:

$$\int_a^b K(s, t) \varphi_n(t)\, dt = \lambda_n \varphi_n(s).$$

Egyébként $\lambda_n \to 0$. A fenti kettős integrál az algebrai kvadratikus alakok analogonja és ennek a ξ_n *Fourier*-együtthatók négyzeteivel való kifejezése megfelel az algebrai kvadratikus alakok főtengelyekre való transzformálásának. Ebből a tételből következik a „sorfejtési tétel" is, eszerint minden ún. „forrásszerűen" előállítható függvény a $\varphi_n(s)$ sajátfüggvények szerint egyenletesen konvergens sorba fejthető.

Továbbmenően HILBERT észreveszi azt is, hogy az algebrai lineáris egyenletrendszerekből és a véges kvadratikus alakokból kiindulva nemcsak az integrálegyenletekhez és a hozzájuk tartozó kvadratikus kifejezésekhez (kettős integrálokhoz) lehet eljutni, hanem — még természetesebben — a végtelen sok ismeretlenes lineáris egyenletrendszerekhez ill. az ezekhez tartozó végtelen sok változós

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}(x_m, x_n)$$

kvadratikus alakokhoz, feltéve, hogy csak olyan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

végtelen sorozatokat engedünk meg, amelyekre az

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots$$

négyzetösszeg véges értékű. Az ilyen számsorozatokat egy végtelen sok dimenziós „tér" egy x vektora komponenseinek foghatjuk fel; az x vektor hosszúságát az előbbi négyzetösszeg négyzetgyökével értelmezve.

Így jutott el HILBERT az azóta róla elnevezett végtelen sok dimenziójú térnek a fogalmához. Ennek a *Hilbert*-féle térnek megvan egy fontos tulajdonsága, ami a folytonos $x(s)$ függvények által alkotott „függvénytérnek" nincs meg, ti. a *Hilbert*-féle tér *teljes* abban az értelemben, hogy a *Hilbert*-térbeli vektorsorozatok konvergenciájára érvényes a *Cauchy*-féle belső konvergencia-kritérium. Ennek a tulajdonságnak a felhasználásával HILBERT bebizonyítja, hogy ha a fenti, végtelen sok változójú

$$\sum_n \sum_m K_{mn}(x_m, x_n)$$

kvadratikus alak egy bizonyos folytonossági feltételnek, az ún. „teljes folytonosságnak" is eleget tesz, akkor a véges kvadratikus alakokhoz hasonlóan a $\sum_n \lambda_n \xi_n^2$ négyzetösszeg alakra transzformálható.

Nemsokára ezután, HILBERT vizsgálatai által ösztönözve, RIESZ FRIGYES és a német ERNST FISCHER kimutatták, hogy az $x(s)$ függvények „tere" is teljesíti a teljesség feltételét, ha nemcsak a folytonos függvényeket engedjük meg, hanem az összes olyan függvényeket, amelyek a *Lebesgue*-féle értelemben négyzetesen integrálhatók, a távolságot ebben a térben négyzetösszeg helyett négyzetintegrál segítségével értelmezve.

A *Riesz—Fischer*-tétel szerint tehát a *Hilbert*-féle, végtelen sok dimenziójú vektortér bizonyos értelemben hasonló szerkezetű, mint a LEBESGUE szerint négyzetesen integrálható függvények tere. Mindketten felfoghatók mint egy ún. absztrakt *Hilbert*-térnek egy-egy realizációja.

HILBERT nem állt meg a teljesen folytonos kvadratikus alakok vizsgálatánál, hanem elméletét kiterjesztette az ezeknél jóval általánosabb, ún. *korlátos* kvadratikus alakokra is a *Hilbert*-térben. Ezekre bebizonyította az ún. spektrálfelbontás lehetőségét. Míg a teljesen folytonos kvadratikus alakok a tiszta négyzetes $\lambda_n \xi_n^2$ tagok *összegére* transzformálhatók, az általános esetben az ilyen tagok összege mellett egy analog szerkezetű *integrál* is felléphet, amit úgy fejezhetünk ki, hogy a „diszkrét spektrum" mellett „folytonos spektrum" is szerepelhet.

Nem részletezhetem tovább HILBERTnek az integrálegyenletekre és az azokkal kapcsolatos kérdésekre vonatkozó eredményeit. HILBERT gondolataiból kiindulva, tanítványai a modern matematika egyik legjelentősebb ágának, a funkcionálanalízisnek vetették meg az alapjait; ebben az új diszciplínában a *Hilbert*-féle végtelen dimenziós térnek és ún. operátorainak központi szerepük van. RIESZ FRIGYES mellett NEUMANN JÁNOS járt az élen a *Hilbert*-térre vonatkozó újabb vizsgálatokban és főként NEUMANN fejtette ki a *Hilbert*-tér elméletének a szerepét a kvantummechanika megalapozásában.

Maga HILBERT is egy sor fizikai problémára alkalmazta az integrálegyenletek elméletét, aminthogy általában jellemzi HILBERT matematikai munkásságát a fizikával való szoros kapcsolat fenntartása. Munkásságának egy egész szakaszát szentelte annak a célnak, hogy a fizika elméleteit is bizonyos mértékben axiomatizálja.

Szólnunk kellene még HILBERTnek azokról a vizsgálatairól, amelyeket életének későbbi szakaszában folytatott, s amelyek célja a matematika általános megalapozása, a halmazelméletben jelentkező ellentmondások kiküszöbölése, a matematikai logika. Sajnos, ezek ismertetése meghaladná ennek az előadásnak a kereteit.

Ehelyett befejezésül idézzünk néhány sort HILBERT egy írásából, amely a természet megismerésének és a logikának a kapcsolatait taglalja. E sorok mintegy HILBERT filozófiai hitvallását fejezik ki:

»A matematika számára nincs „ignorabimus", „megtudhatatlan", és véleményem szerint a természettudományok számára egyáltalában nincsen. A filozófus COMTE egyszer — hogy egy biztosan megoldhatatlan problémát nevezzen meg — azt mondta, hogy a tudománynak soha sem fog sikerülni az égitestek kémiai összetételének titkát megfejtenie. Néhány évre rá KIRCHHOFF és BUNSEN színképelemzéssel megoldották ezt a problémát, és ma elmondhatjuk, hogy a legtávolabbi csillagokat használjuk fel olyan fizikai és kémiai laboratóriumokul, amilyeneket a földön nem állíthatunk fel. Véleményem szerint annak, hogy COMTEnak nem sikerült megoldhatatlan problémára példát adnia, a valódi oka az, hogy megoldhatatlan probléma egyáltalán nincsen. A balga „ignorabimus" helyett, ellenkezőleg, jelszónk ez legyen:

„Tudnunk kell, tudni fogunk".
„Wir müssen wissen, wir werden wissen".«

IRODALOM

O. BLUMENTHAL, Lebensgeschichte, *Gesammelte Abhandlungen von D. Hilbert*, 3. kötet, 388—429 (Springer, Berlin, 1932—33).
H. POINCARÉ, Rapport sur le prix Bolyai, *Acta Math.*, **35** (1912), 1—28.
H. WEYL, David Hilbert and his mathematical work, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 612—654.