

KÖRELHELYEZÉSEK ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ FELÜLETEKEN¹

Írta: MOLNÁR JÓZSEF

Bevezetés

A diszkrét geometriában² a legutóbbi időben előtérbe kerültek tartományok kitöltésével, ill. lefedésével kapcsolatos problémák, melyeket gyakran a műszaki-, vagy természettudományok vetnek fel. Ilyen pl. a következő kitöltési probléma:³ Egy kidolgozott borjúbőrből, hogyan lehet adott méretű cipőfelsőrészeket kivágni úgy, hogy a selejt minimális legyen?

Dolgozatunkban ennek az alapproblémának csupán azzal a speciális esetével foglalkozunk, amikor az elhelyezendő $\{K\}$ tartományok véges sok kör egyesített halmazából állanak.⁴ Vizsgálatainkban a kitöltendő T „tartomány” vagy egy állandó görbületű felület, pontosabban a gömbfelület, az euklideszi sík, vagy a hiperbolikus sík, vagy ennek egy bizonyos résztartománya.

Mielőtt röviden vázolnánk dolgozatunk eredményeit, vessünk egy pillantást az eddigi körelhelyezési eredményekre!⁵

• Az euklideszi sík kongruens körökkel való legsűrűbb kitöltésének problémáját A. THUE,⁶ a számelméletben elért alapvető eredményeiről ismert nagy norvég matematikus oldotta meg 1892-ben.

Eltekintve H. MINKOWSKI, LORD KELVIN és W. BARLOW vizsgálataitól, melyek csupán szabályos elhelyezésekre vonatkoztak, a körelhelyezési vizsgálatokban hosszabb szünet következett be. Az euklideszi sík kongruens körökkel való legritkább lefedésének problémáját R. KERSHNER [45] oldotta meg 1939-ben. További bizonyítások, ill. élesítések a sík kongruens körökkel való kitöltésére, ill. lefedésére található pl. FEJES TÓTH L. [13], [14], H. HADWIGER [40], B. SEGRE—K. MAHLER [64] és S. VERBLUNSKY [67] dolgozataiban.

A körelhelyezési problémák rendszeres vizsgálatát FEJES TÓTH kezdte, aki kutatásait kiterjesztette a diszkrét geometria különböző területeire. Gondolunk pl.

¹ A matematikai tudományok doktora fokozat elnyeréséhez készített disszertáció.

² A „diszkrét geometria” elnevezést a szovjet matematikusok adták (I. FEJES TÓTH [29]) a geometria azon ágának, amelynek tárgyát diszkrét elemekből álló halmazok képezik. Ez felöleli pl. a nem-folytonos mozgáscsoportok elméletét, a szabályos térfelbontás- és pontrácsok elméletét és ennél fogva szoros kapcsolatban van a csoportelmélettel, a számelmélettel, a függvénytanal és a matematika más ágaival (I. FEJES TÓTH [31]). (A szögletes zárójelben levő számok, a dolgozatunk végén szereplő irodalomjegyzékre vonatkoznak).

³ Ezzel a problémával rokon a következő lefedési probléma: Hogyan lehet egy tartományt egy adott tartomány kongruens példányaival legritkábban lefedni?

⁴ Dolgozatunkban a tartomány zárt ponthalmaz. Egy tartományt és annak területét ugyanazzal a betűvel jelöljük.

⁵ Dolgozatunkban nem szerepelnek olyan körelhelyezési problémák mint pl. többszörös kitöltés, többszörös lefedés, körfelhők.

⁶ THUE [66].

a következőkre:⁷ 1. $T \equiv$ euklideszi sík, $\{K\} \equiv$ inkongruens körrendszer, 2. $T \equiv$ konvex tartomány, $\{K\} \equiv$ kongruens körrendszer, 3. $T \equiv$ konvex tartomány, $\{K\}$ inkongruens körrendszer, 4. $T \equiv$ állandó görbületű felület, $\{K\} \equiv$ kongruens körrendszer.⁸

A körelhelyezési problémák gazdag irodalmából említsük még meg a következőket: M. AGENO [1], [2],⁹ BALÁZS J.¹⁰, W. J. BLUNDON [7], A. H. BOERDIJK [9], L. DANZER [11], ERDŐS P.¹¹, FEJES TÓTH L. [26], [27], [28], [32], L. FEW [33], S. FINSTERWALDER [34], A. FLORIAN [36], H. GROEMER [37], W. HABICHT [38], HEPPES A. [41], [42], [43], H. MESCHKOWSKI [48], [49], MOLNÁR J. [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], R. RADO [59], H. RUTISHAUSER [61], B. L. VAN DER WAERDEN [68], L. L. WHITE [69].¹²

Az eddigi vizsgálatok főként konvex tartományoknak konvex tartományokban való elhelyezésére vonatkoztak. A gyakorlat által felvetett problémák azonban többnyire nem konvex tartományok vizsgálatát igénylik. E területen elért eredmények száma igen csekély.

Dolgozatunk kiindulási pontját az elhelyezési problémák vizsgálatának kiterjesztése képezte bizonyos nem konvex tartományokra. Ezek a vizsgálatok vezettek a körkonvexitás fogalmához,¹³ amely általánosítása a MAYER-féle [47] r -hiperkonvexitásnak, a HADWIGER [39] α -rendű konvexitásnak, a PERKAL-féle [58] ε -konvexitásnak és igen szoros kapcsolatban áll az A. D. ALEXANDROV [4], [5], [6]¹⁴, ill. J. G. RESETNYÁK [60] által értelmezett PRV , ill. O_s halmaz fogalmával.

A nem konvex tartományok vizsgálataiban alkalmazott egyik segédétel (HAJÓS-féle lemma) lehetőséget adott az egész síkra (vagy annak konvex tartományaira) vonatkozó ismert sűrűségbecslések messzemenő élesítéseire és általánosításaira.

A disszertáció két részből áll. Az I. részben klasszikus értelemben konvex „tartományokban” vizsgáljuk a körelhelyezéseket, míg a II. részben körkonvex tartományokban. A tárgyalás java része szintetikus. Az eredmények egyszerű elemi megfontolások révén adódnak.

I. KÖRELHELYEZÉSEK KONVEX „TARTOMÁNYOKBAN”

1. §. Körrendszerek sűrűsége

Dolgozatunkban állandó görbületű felület alatt a gömbfelületet, az euklideszi síkot, ill. a hiperbolikus síkot értjük.

Egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek egy állandó görbületű felület T tartományára vonatkozó sűrűségén a $\frac{\sum K_i \cap T}{T}$ hányadost értjük. Hason-

⁷ Rövidség kedvéért csupán az alapproblémákban szereplő T és $\{K\}$ tartományokat jeleztük.

⁸ FEJES TÓTH 1953-ig elért eredményei megtalálhatók monográfiájában [25], amely 1958-ban orosz nyelven is megjelent [29] I. M. JAGLOM kiegészítéseivel.

⁹ Ageno vizsgálataiban a poliéder alakú vírusok „krisztallográfiájával” foglalkozik.

¹⁰ BALÁZS J. eredménye még nincs publikálva (l. pl. FEJES TÓTH [30]).

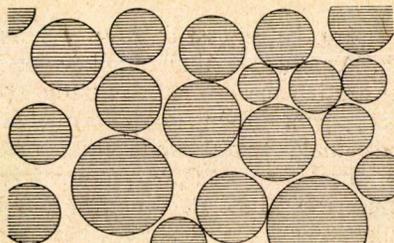
¹¹ l. FEJES TÓTH [25], 96. o.

¹² A [32] és [43] MOLNÁRRAL írt közös dolgozat, a [38] és [63] VAN DER WAERDENNEL írt közös dolgozat.

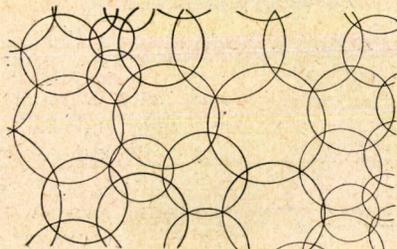
¹³ A körkonvex tartományokra vonatkozó vizsgálatainkba bekapcsolódott HEPPES is, aki e területen szép eredményeket ért el.

¹⁴ ZALGALLERREL írt közös könyv.

lőan értelmezzük egy körrendszernek a gömbfelületre vonatkozó sűrűségét is. Különösen érdekesek az olyan körrendszerek, amelyeknél a T „tartomány” minden pontja legfeljebb egy kör belső pontja (1. ábra), ill. legalább egy körhöz tartozik (2. ábra). Az első esetben kitöltési, a másodikban lefedési sűrűségről beszélünk.



1. ábra



2. ábra

Értelmezhető egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek az egész euklideszi síkra vonatkozó δ kitöltési, ill. Δ lefedési sűrűsége, mégpedig a következőképpen:

$$\delta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum K_i \cap K(R)}{K(R)} \quad \text{és} \quad \Delta = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum K_i \cap K(R)}{K(R)},$$

ahol $K(R)$ egy R sugarú kör, amelynek középpontja a sík egy rögzített O pontja. Hasonlóan értelmezhető általánosabb tartományok valamilyen rendszerének sűrűsége is.¹⁵ Bizonyítható, hogy δ , ill. Δ független az O megválasztásától. Ez egyszerűen következik abból, hogy

$$\frac{K(R+c) - K(R)}{K(R)} = \frac{2Rc + c^2}{R^2},$$

hányados konstans c érték mellett nullához tart, ha $R \rightarrow \infty$.

Egy κ görbületű hiperbolikus síkon

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K(R+c) - K(R)}{K(R)} = e^{\sqrt{\kappa}c} - 1 \neq 0.$$

Ezért egy körrendszernek az egész hiperbolikus síkra vonatkozó sűrűségének definíciója nehezebbnek látszik. Ezt a nehézséget azáltal fogjuk megkerülni, hogy a hiperbolikus síkot bizonyos cellákra bontjuk és megmutatjuk, hogy minden cellában a kitöltési, ill. lefedési sűrűség $\leq d < 1$, ill. $\geq D > 1$.¹⁶ Ez annyit jelent, hogy δ , ill. Δ bármely „értelmes” definíciója mellett $\delta \leq d$, ill. $\Delta \geq D$.

2. §. Segédtelemek

Dolgozatunkban jelentős szerepet tölt be a következő

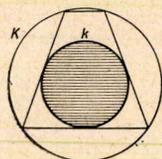
HAJÓS-FÉLE LEMMA:¹⁷ Legyen k és K egy állandó görbületű felület két r , ill. R

¹⁵ I. FEJES TÓTH [25], 55–57. o.

¹⁶ I. FEJES TÓTH [26], [27], [28], ill. dolgozatunkban az I–V. tételt (MOLNÁR [56]).

¹⁷ Ez a lemma HAJÓS egy észrevételéből született, amelyet egy 1960 tavaszán tartott előadásomhoz fűzött.

($r < R$) sugarú koncentrikus köre. Legyen továbbá a K körben véges sok olyan kör-szelet, melyek közül egyiknek sincs közös belső pontja sem más kör-szelettel sem a k körrel. Állítás: A kör-szeletek összterülete akkor maximális, ha a szeletek olyan K -ba írt sokszöget határolnak, melynek oldalai — legfeljebb egy kivételével — a K kört érintik (3. ábra).



3. ábra

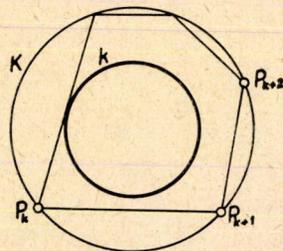
Bizonyítás. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy a kör-szeletek egy K -ba írt $P_1 \dots P_n$ sokszöget alkotnak. Az oldalak által K -ból lemetsett kör-szeletek Σ összterülete változatlan marad, ha a sokszög oldalait úgy rendezzük, hogy az egymás után csatlakozó oldalak nem növekvő sorozatot alkotnak. Ezért feltehetjük, hogy $P_1 P_2 \cong P_2 P_3 \cong \dots \cong P_n P_1$ (4. ábra). Legyen $P_k P_{k+1}$ ($k \leq n-1$) az első oldal, mely a k kört nem érinti. Ha a P_{k+1} pontot a K körön P_{k+2} irányába mozgatjuk, akkor a $P_k P_{k+1} P_{k+2}$ háromszög területe csökken,¹⁸ s így Σ növekszik. A P_{k+1} pontot addig mozgatjuk P_{k+2} irányába míg vagy $P_k P_{k+1}$ érinti a k kört, vagy a P_{k+1} pont összeesik a P_{k+2} ponttal. Az utóbbi esetben a $P_{k+1} \equiv P_{k+2}$ pontot mozgatjuk a K körön P_{k+3} irányába míg a $P_k P_{k+1}$ oldal a k kört nem érinti, vagy nem esik össze a P_{k+3} ponttal. Ilyen eljárással a $P_k P_{k+1}$ oldal mindig olyan helyzetbe hozható, hogy a k kört érintse. Ha közben az oldalak nem növekvő sorozata megváltozott volna, akkor egy újabb rendezéssel nem növekvő sorozatot létesítünk és az előbbi eljárást tovább folytatjuk. Ezáltal véges sok lépésben eljutunk a segédállításban említett sokszöghöz.

E bizonyításnál alkalmazott gondolatmenettel könnyen bizonyítható az

1. SEGÉDTÉTEL.: Legyen k és K ($k < K$) egy állandó görbületű felület két koncentrikus köre és S a K körbe beírt olyan sokszög, melynek egyik oldala sem metsz bele a k körbe. Állítás: S kerülete akkor minimális, ha oldalai legfeljebb egy kivételével érintik a k kört.

A HAJÓS-féle lemmában, valamint az 1. segédállításban szereplő extrémális sokszöget HAJÓS-féle sokszögnek nevezzük és röviden $H(r, R)$ -rel jelöljük, ahol r és R ($r < R$) a két koncentrikus kör sugara.

A HAJÓS-féle lemma bizonyításánál alkalmazott gondolatmenet felhasználható azonban általánosabb állítások bizonyítására is. Gondolunk pl. arra az egyszerű általánosításra, melynél a K körben szereplő kör-szeletek közül az egyiket rögzítettnek tekintjük. Pontosabban szólva nyilván igaz a



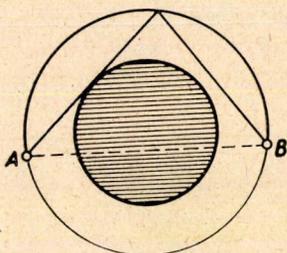
4. ábra

2. SEGÉDTÉTEL.: Legyen k és K egy állandó görbületű felület két r , ill. R ($r < R$) sugarú koncentrikus köre, AB pedig a K kör egy tetszőleges kör-szeletének határoló húra. Legyen továbbá a K körben véges sok olyan kör-szelet, melyek közül egyiknek sincs közös belső pontja sem más kör-szelettel, sem pedig az AB húrral határolt kör-szelettel. Állítás: A K körből lemetsett kör-szeletek összterülete akkor maximális, ha a kör-szeletek olyan K körbe beírt sokszöget határolnak, melynek oldalai — az AB oldaltól eltekintve — legfeljebb egy kivételével a k kört érintik (5. ábra).

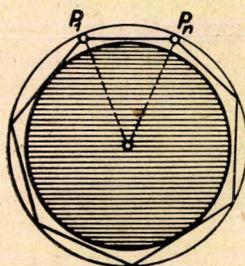
¹⁸ Uj. azon pontok mértani helye, melyekre a $P_k P_{k+1} P_{k+2}$ háromszög területe állandó, rögzített P_k, P_{k+2} mellett a $P_{k+1} P_{k+2}$ körív „fölkött” van.

Ehhez a segédételhez hasonló segédétel mondható kerületre vonatkozólag is, pontosabban igaz a

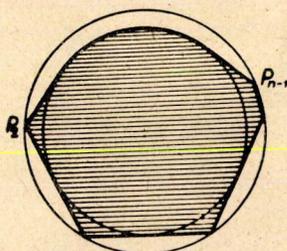
3. SEGÉDTÉTEL: Legyen k és K ($k < K$) az állandó görbületű felület két koncentrikus köre, továbbá S a K körbe beírt olyan sokszög, amelynek egyik AB oldala rö-



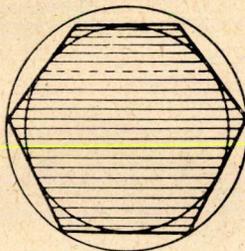
5. ábra



6. ábra



7. ábra

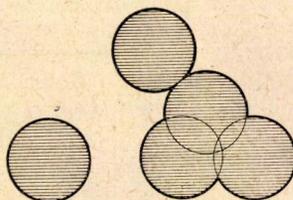


8. ábra

zített, a többi oldala nem metsz bele a k körbe. Állítás: S kerülete akkor minimális, ha oldalai — az AB oldaltól eltekintve — legfeljebb egy kivételével érintik a k kört (5. ábra).

4. SEGÉDTÉTEL:¹⁹ Legyen k és K egy κ görbületű felület két r és R ($\sin \sqrt{\kappa}R = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{\kappa}r$) sugarú koncentrikus köre, továbbá legyen $\Pi \equiv P_1P_2\dots P_n$ a körgyűrűben elhelyezkedő és a k kört tartalmazó olyan konvex sokszög, amelynek P_2, P_3, \dots, P_{n-1} pontja a K körön van (6. ábra). Állítás: Ha $a \geq 5 \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\kappa}r \right)$, akkor

$$\Pi > k + \nabla,$$



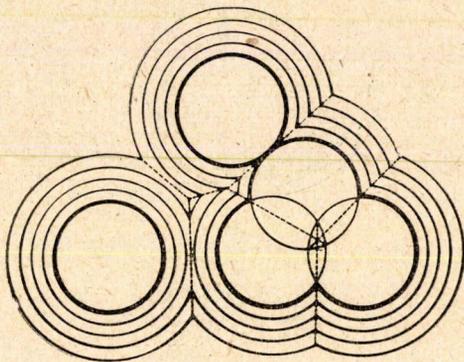
9. ábra

¹⁹ HAJÓS a disszertációmhoz fűzött opponensi véleményében a következő erősebb segédételt említi meg: Ha az állandó görbületű felületen egy sokszög egy körgyűrűben helyezkedik el és csúcsai két szomszédosnak esetleges kivételével a külső peremkörön vannak, akkor területének minimumát egy olyan sokszög adja, amelynek oldalai mindannyian érintik a belső kört, s a kivételes csúcsok a csatlakozó oldalak érintési pontjait összekötő egyenestől egyenlő távolságra vannak (8. ábra).

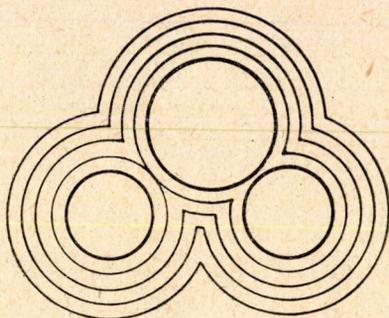
ahol ∇ olyan körívháromszög területe, amit három egymást érintő r sugarú kör határol.²⁰

R - és r -re vonatkozó kikötés annyit jelent, hogy R , három egymást érintő kör hatványpontjának távolsága valamely r sugarú kör középpontjától.

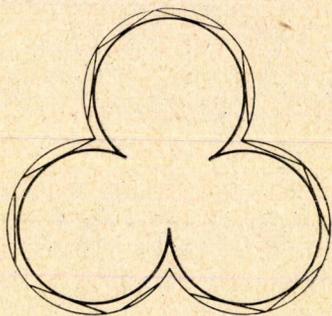
Bizonyítás. Ha P_2P_{n-1} -nek nincs közös belső pontja a k körrel, akkor a segéd-tétel — a HAJÓS-féle lemma értelmében — már magára a $P_2 \dots P_{n-1}$ sokszögre is teljesül. Ha P_2P_{n-1} -nek van közös belső pontja a k körrel, akkor a következőképpen



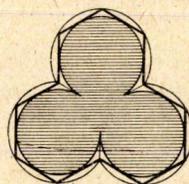
10. ábra



11. ábra



12. ábra



13. ábra

járunk el. A HAJÓS-féle lemma bizonyításában alkalmazott gondolatmenettel elérhetjük, hogy a $P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{n-2}P_{n-1}$ oldalak, legfeljebb egy kivétellel, érintsék k -t és Π területe e változás közben ne növekedjék. Ugyancsak nem nő Π területe, ha a P_1P_2 és $P_{n-1}P_n$ oldalakat is a P_2 és P_{n-1} pontból a k körhöz húzott érintőkkel pótoljuk (7. ábra). Mivel az így kapott Π sokszög bármely oldala a k kör középpontjától legfeljebb $\frac{2\pi}{a}$ szög alatt látszik²¹ és $a \geq 5$, azért a Π sokszögnek van lega-

²⁰ Gömbön három egymást érintő egybevágó kör két körívháromszöget határol. Segéd-tételünkben a nem nagyobb körívháromszögre gondolunk. $a=6$ esetén, vagyis euklideszi síkon,

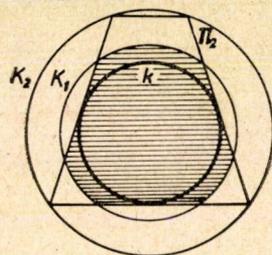
$$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}r \text{ és } \nabla = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)r^2.$$

²¹ Egyenlőség akkor következik be, ha az oldal a k kört érinti.

lább négy pontja a K körön, amiből könnyen adódik a $\Pi > k + \nabla$ egyenlőtlenség. Ezzel 4. segédteélünk be van bizonyítva.

Dolgozatunkban körívsokszög alatt véges sok — nem szükségképpen összefüggő — kör egyesített halmazát értjük (9. ábra). A körívsokszög határát képező véges sok körívet a körívsokszög oldalainak nevezzük. Két körívsokszög „koncentrikus”, ha a megfelelő oldalakat szolgáltatató körök koncentrikusak, a megfelelő hatványvonalrendszerük pedig azonos (10., 11. ábra).

Megjegyzések. 1. A 2. és 3. segédteél birtokában további általánosításokhoz jutunk, ha a k és K ($k < K$) kör szerepét „koncentrikus” körívsokszögek veszik át. Ebben az esetben a K körívsokszögben szereplő körszeletekre a következő kikötéseket tesszük: 1. egyik szeletnek se legyen belső pontja sem más szelettel, sem pedig a k körívsokszöggel, 2. bármely körszeletet határoló húr végpontjai a K azonos oldalához illeszkedjék (12. ábra). A 13. ábra két „koncentrikus” körívsokszöghöz tartozó extrémális területű, ill. kerületű sokszöget illusztrál.



14. ábra

2. $R_1 < R_2$ és $r < \min(R_1, R_2)$ esetén $H(r, R_2) > H(r, R_1)$. Ui. $H(r, R_2) > H(r, R_2) \cap K_1 > H(r, R_1)$, ahol K_1 jelenti az R_1 sugarú kört (14. ábra).

3. §. Mozaikok

Mozaikon a gömböt vagy a síkot teljesen kitöltő, egymásba nem nyúló sokszögeknek olyan halmazát értjük, amelyben minden sokszög oldalához egyetlen további sokszög oldala csatlakozik. Ha egy csúcspontba futó élek középpontjait az élek ciklikus sorrendjének megfelelően összekötjük, akkor egy sokszöget nyerünk, melyet a csúcsponthoz tartozó csúcsalakzatnak nevezünk.

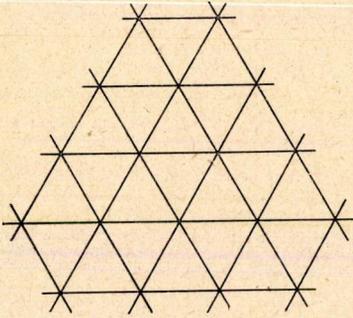
Dolgozatunkban szerepelni fognak a szabályos mozaikok, az ARCHIMÉDESZ-féle félig szabályos mozaikok és bizonyos szabálytalan mozaikok, amelyeket HAJÓS-féle mozaikoknak fogunk nevezni. Ezeket a mozaikokat a következőkben röviden ismeretjük.

Egy mozaik szabályos, ha mind lapjai, mind csúcsalakzatai szabályosak.²² Ha a lapok p -szögek és a csúcsalakzata q -szögek, akkor a mozaikot a $\{p, q\}$ SCHLÄFLI-féle szimbólummal jelöljük. A 15., 16., ill. 17. ábra az euklideszi sík $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ ill. $\{6, 3\}$ szimbólumú szabályos mozaikjait ábrázolja. A gömbfelület, ill. hiperbolikus sík szabályos mozaikjai közül csupán az $\{5, 3\}$ -at és a $\{7, 3\}$ -at illusztráljuk (18., 19. ábra).

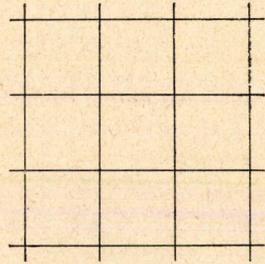
Egy mozaikot ARCHIMÉDESZ-féle félig szabályosnak mondunk, ha szabályos sokszögekből tevődik össze, csúcsalakzatai egybevágóak azonban nem szabályosak. Az archimédeszi mozaikok jelölésére az (a_1, a_2, \dots, a_n) szimbólumot használjuk, ahol a_1, a_2, \dots, a_n jelenti az egy csúcspontban találkozó sokszögek oldalszámát a sokszögek ciklikus sorrendjében. Így pl. a 20., 21., 22., 23. és 24. ábra az euklideszi síkon a $(3, 6, 3, 6)$, $(4, 8, 8)$, $(3, 12, 12)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ és a $(3, 3, 4, 3, 4)$ mozaikot ábrázolja.²³

²² Nem nehéz kimutatni, hogy egy szabályos mozaik lapjai és csúcsalakzatai is egybevágók.

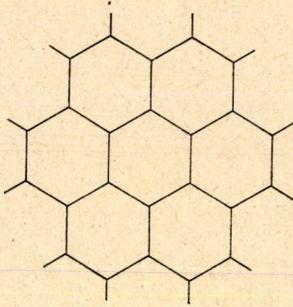
²³ Minden félig szabályos archimédeszi mozaikhoz hozzá lehet rendelni a duálját, amelynek csúcsalakzatai szabályosak és egybevágóak, de nem szabályos sokszögekből tevődik össze. Az archimédeszi félig szabályos mozaikok valamint duáljai képezik a félig szabályos mozaikokat.



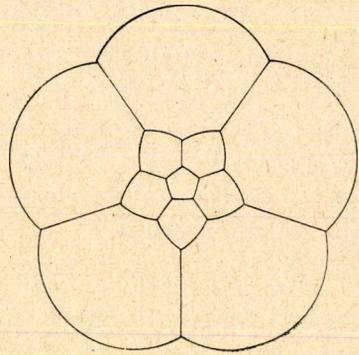
15. ábra



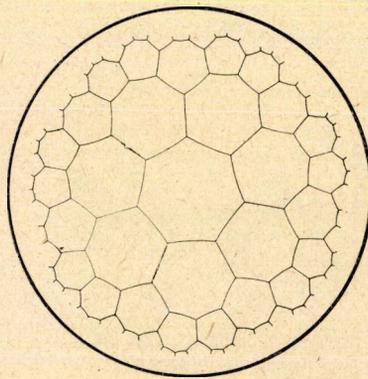
16. ábra



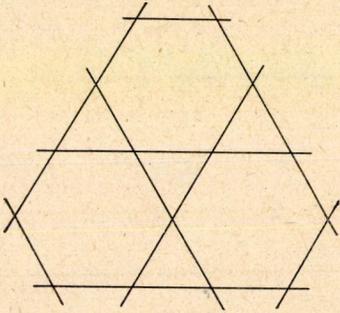
17. ábra



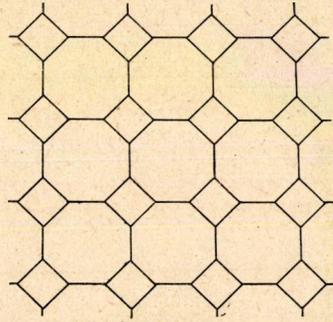
18. ábra



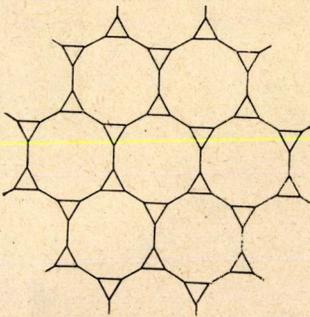
19. ábra



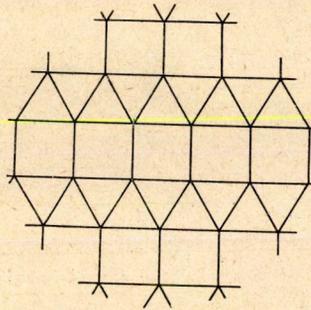
20. ábra



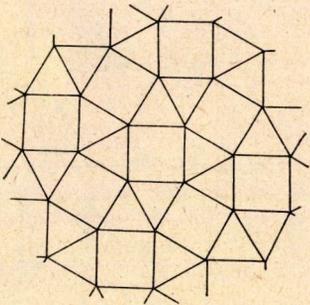
21. ábra



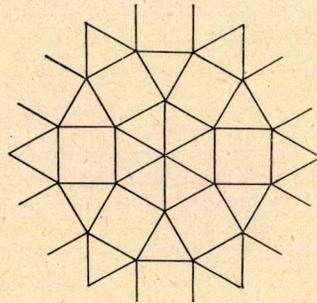
22. ábra



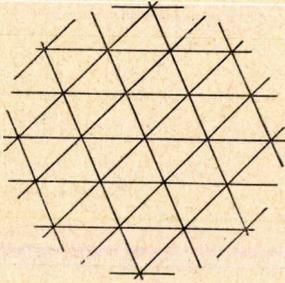
23. ábra



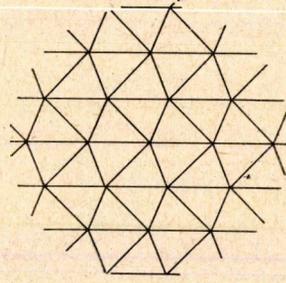
24. ábra



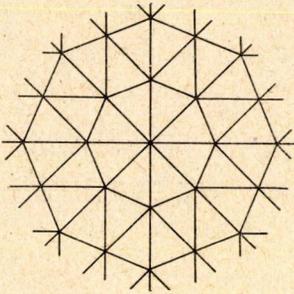
25. ábra



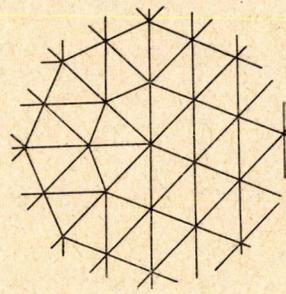
26. ábra



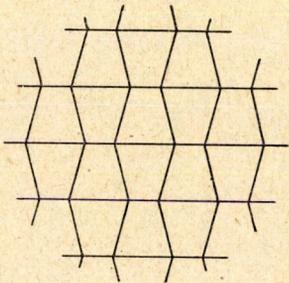
27. ábra



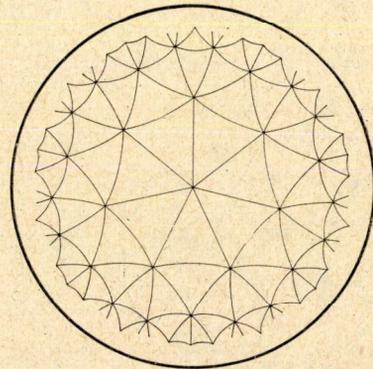
28. ábra



29. ábra

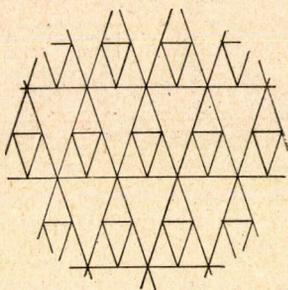


30. ábra

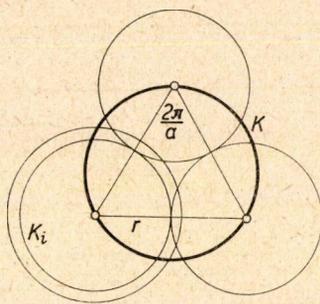


31. ábra

HAJÓS-féle mozaiknak nevezzünk olyan mozaikot, amely HAJÓS-féle sokszögek-ből tevődik össze.²⁴ Ilyen mozaikokat mutat a 25., 26., 27., 28., 29., 30. ábra az euklideszi síkon és a 31. ábra a hiperbolikus síkon.²⁵ A 25. ábra érdekessége, hogy a félig szabályos 24. ábránál szabályosabbnak tűnik. A 26—29. ábra ugyanazon egybevágó egyenlőszárú háromszögekből tevődik össze. A 30. ábra egybevágó négyszögekből áll.²⁶



32. ábra



33. ábra

4. §. Tételek

A következőkben áttérünk a már szerepeltetett segédtételek alkalmazására,

A diszkrét geometriában jól ismeretes THUE ([66], 1892), ill. KERSHNER ([45]. 1939) eredménye, mely szerint az euklideszi síkon — egymásba nem nyúló — egybevágó körök sűrűsége mindig $\leq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9069\dots$, ill. a síkot lefedő egybevágó körök

sűrűsége $\geq \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1,209\dots$. FEJES TÓTH [26], [27] 1953-ban — egybevágó körök kitöltési, ill. lefedési sűrűségére vonatkozó — analóg korlátokat adott gömbön és hiperbolikus síkon. FEJES TÓTH ezen eredményeit pontosan is megfogalmazzuk.

Az euklideszi-, ill. hiperbolikus síkot nulla, ill. negatív állandó görbületű felületnek nevezve, a körkitöltésre a következőképpen fogalmazható meg

FEJES TÓTH TÉTELE:²⁷ *Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba*

²⁴ Mivel minden szabályos sokszög egyben HAJÓS-féle sokszög is, ezért a HAJÓS-féle mozaikok magukba ölelik a szabályos-, az archimédeszi féle félig szabályos-, valamint a szabályos sokszögekből álló nem szabályos mozaikokat is (25. ábra).

²⁵ Minden egyenlőszárú síkbeli háromszög nyilván HAJÓS-féle sokszög. A 32. ábra érdekessége, hogy csak látszólag HAJÓS-féle mozaik. Uí. az ábra nagy „háromszögei” lényegében hatszögek.

²⁶ Egybevágó HAJÓS-féle ötszögekből az euklideszi síkon nem lehet mozaikot készíteni. Uí. a HAJÓS-féle ötszög valamennyi szöge tompaszög és egybevágó tompaszögű ötszögekből nem lehet mozaikot készíteni (ld. pl. BOLLOBÁS [8]).

²⁷ A lefedésre vonatkozó FEJES TÓTH-féle tétel a következő: Ha egy görbületű felületet legalább három r sugarú kör lefed, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó sűrűsége $\geq D^*(A) =$

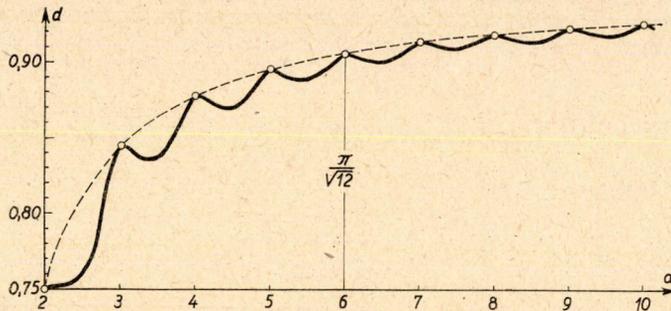
$$= \left(\sqrt{12} \cotg \frac{\pi}{A} - 6 \right) / (A - 6), \quad D^*(6) = \lim_{A \rightarrow 6} D^*(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}}, \quad \text{ahol } \cotg \frac{\pi}{A} = \sqrt{3} \cos \sqrt{\kappa} r.$$

nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \cong d^*(a) = \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{a - 6}, \quad d^*(6) = \lim_{A \rightarrow 6} d^*(a) = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\kappa} r$.²⁸

Ez a tétel pontos korlátot ad egybevágó körök kitöltési sűrűségére, ha a egész szám. A $d^*(a)$ korlát az a -nak monoton növekvő függvénye²⁹ (34. ábra).³⁰ Egybevágó körök kitöltési sűrűségére — a nem egész értékeire — élesebb felső korlátot ad az



34. ábra

I. TÉTEL: Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \cong d(a) = \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \operatorname{cotg} \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\}}, \quad d(6) = \lim_{a \rightarrow 6} d(a) = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\kappa} r$.

$d(a)$ szemléletes jelentése: Jelölje h_{r-p-q} három, r, p, q sugarú egymást kívülről érintő kör hatványpontjának távolságát az r sugarú $K(r)$ kör középpontjától. Ekkor

$$d(a) = \frac{K(r)}{H(r, h_{r-p-q})}.$$

²⁸ $d^*(a)$ szemléletes jelentése: Három egymást érintő r sugarú kör sűrűsége a három kör centrumai által meghatározott egyenlő oldalú háromszögben (33. ábra). $\frac{2\pi}{a}$ jelenti ezen egyenlő oldalú háromszög egyik szögét, s így a interpretálható mint azon egybevágó egymásba nem nyúló körök száma, melyek egy ezekkel egybevágó körhöz illeszthetők. Az euklideszi síkon $a=6$, gömbfelületen $a < 6$, hiperbolikus síkon $a > 6$.

Itt említjük meg, hogy tételünkben a körök számára tett kikötés lényeges. Uí. gömbön pl. két egymásba nem nyúló főkör sűrűsége $1 (> d^*(a))$.

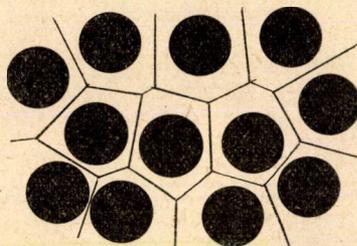
²⁹ KRAMMER [46].

³⁰ A $d(a)$ korlát grafikonunkban a vékonyan megrajzolt szaggatott görbe vonal.

Bizonyítás. Legyen $\{K_i\}$ a κ görbületű felületen r sugarú, egymásba nem nyúló köröknek egy telített rendszere.³¹ Jelentse D_i a felület azon pontjainak halmazát, melyek a K_i kör középpontjától nincsenek távolabb mint a többi körközépponttól. Könnyen belátható, hogy a K_i körhöz ilyen módon hozzárendelt ún. DIRICHLET cella³² („VORONOI-féle poligon”³³) konvex sokszög.³⁴ Ezek összessége $\{D_i\}$, a felületet — a sokszögek határától eltekintve — egyrétűen és hézagmentesen lefedi (35. ábra).

Tételünk bizonyításához elegendő kimutatni, hogy a $\{K_i\}$ körrendszer sűrűsége bármely D_i DIRICHLET cellában $\leq d(a)$, azaz $\frac{K_i}{D_i} \leq d(a)$. Nyilván $D_i \subseteq D_i \cap K$, ahol K egy a K_i körrel koncentrikus kör, amelynek pontjaiból K_i 120° alatt látszik. A HAJÓS-féle lemma értelmében $D_i \cap K \cong H(r, h_{r-r-r})$ ³⁵. Ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

Megjegyzések: 1. Azt állítottuk, hogy az I. tétel a FEJES TÓTH tételben szereplő $d^*(a)$ korlátot élesíti. Valóban bizonyítani fogjuk, hogy $d(a) \leq d^*(a)$, ahol egyenlőség csupán egész számú a értékeire lép fel. A bizonyításhoz felhasználjuk $d^*(a)$, ill. $d(a)$ szemléletes jelentését. Ha a egész szám, akkor mint már említettük, nyilvánvaló az egyenlőség. Ha viszont a nem egész, akkor mint már említettük, nyilvánvaló az egyenlőség. Ha viszont a nem egész, akkor (HAJÓS-féle sokszögnek van olyan AB oldala, mely nem érinti az r sugarú kört (36. ábra). Ebben az esetben elég bizonyítani, hogy a K_i kör sűrűsége az ABO háromszögben kisebb mint ACO -ban, ahol O és AC a K_i kör középpontja, ill. egy érintője. Mivel az ACO háromszögben K_i sűrűsége éppen $d^*(a)$, nyilván elég bizonyítani, hogy a K_i kör sűrűsége AMO -ban kisebb, mint ANO -ban, ahol M és N jelöli AB , ill. AC felezőpontját. Legyen M^* az M pont tükörképe az AB egyenesre nézve, továbbá S az M^*O és AC egyenes metszéspontja. Világos, hogy az AM^*O háromszögben kisebb a K_i kör sűrűsége mint az ASO háromszögben. Másrésztől könnyen belátható, hogy ASO -ban K_i sűrűsége kisebb, mint ANO -ban. Ezzel állításunkat igazoltuk.



35. ábra

2. Érdekes megjegyezni, hogy $d(a) - a d^*(a)$ függvényvel ellentétben — a -nak nem monoton függvénye (34. ábra, vastag vonal).

3. Az I. tétel bizonyításában nem használtuk ki, hogy a $K(h_{r-r-r})$ körben (röviden K) fellépő, D által meghatározott húrok felezőpontjai nem kerülhetnek

³¹ Nyilván nem megy az általánosság rovására, ha bizonyításunkban telített körrendszerre szorítkozunk.

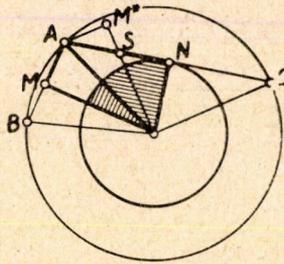
³² DIRICHLET [12].

³³ I. pl. COXETER [10].

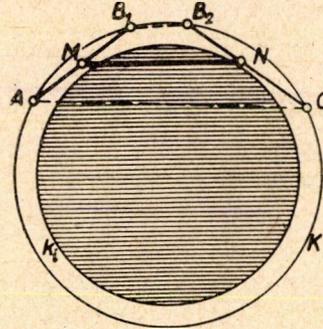
³⁴ Ahhoz, hogy D_i konvex sokszög elég belátni egyrészt végességét, másrészt, hogy véges sok oldala van. Valóban D_i minden pontja benne van a K_i körrel koncentrikus $2r$ sugarú K körben, különben $\{K_i\}$ nem lenne telített. Másrészt a K kört a D_i cellának csak véges sok oldala metszheti, mert ellentétes esetben megadható egy a K_i körrel koncentrikus véges sugarú kör, amelyben a sűrűség > 1 , ami viszont lehetetlen.

³⁵ Könnyen belátható, hogy a D_i szögpontjai a K körön kívül vannak. A tétel bizonyításának alapdöntője, vagyis hogy D_i helyett elegendő a $D_i \cap K$ metszetet tekinteni FEJES TÓTH-tól ered (I. pl. [13], 1940, [15], 1943).

egymáshoz egy adott távolságnál közelebb.³⁶ Ennek a feltételnek a felhasználásával bizonyos esetekben elérhető, hogy a HAJÓS-féle $H(r, h_{r-r-r})$ sokszöget, röviden H egy nagyobb területű $H^* < D \cap K$ sokszöggel helyettesítsük, s így kisebb sűrűségkorláthoz jussunk. Tegyük fel először, hogy a $D \cap K$ metszet egyenesvonalú oldalainak száma kisebb, mint a HAJÓS-féle sokszög oldalainak n száma. Ekkor nyilván



36. ábra



37. ábra

fellép K -n olyan „szabad körív”, mely legalább akkora mint H legkisebb oldalához tartozó körív. Ha viszont $D \cap K$ „oldalainak” száma legalább n , akkor van a K körön három A, B, C csúcspont, mely $\frac{4\pi}{n}$ -nél nem nagyobb köríven fekszik. Ekkor viszont felhasználva, hogy AB és BC felezőpontjai egymástól egy bizonyos távolságnál nagyobb távolságra vannak, adódik, hogy — amennyiben a HAJÓS-féle H sokszög nem szabályos — a B pont szerepét a K körön fekvő két B_1 és B_2 pont veszi át. Fel kell tehát lépnie egy $\widehat{B_1B_2}$ szabad körívnek, amelynek hossza alulról megbecsülhető. A következő bekezdésben az euklideszi síkon ezt meg is tesszük. Miután szabad körívet biztosítottunk, alkalmazzuk 2. segédtételünket. Ezáltal olyan $H^*(r, h_{r-r-r}) \equiv H^*$ „sokszöghöz” jutunk, melynek egyik oldala a K körnek $\widehat{B_1B_2}$ íve, s így $H^* > H$.

Most pedig megvizsgáljuk az euklideszi síkon a $\widehat{B_1B_2}$ körív nagyságát. Legyen $B_1B_2 = a$, $AC = b$, s jelölje M és N az AB , ill. CB húr felezőpontját (37. ábra). Az általánosság kedvéért tételezzük fel, hogy az AB_1 , ill. CB_2 hatványvonalakat az r_i sugarú K_i kör, valamint az r_1 sugarú körök szolgáltatják. Ekkor könnyen belátható, hogy $MN \geq \frac{2r_1r_i}{r_1+r_i}$, s így az ACB_2B_1 négyszögben $\frac{2r_1r_i}{r_1+r_i} \leq \frac{a+b}{2}$. Mivel $\widehat{AC} \leq \frac{4\pi}{n}$, azért $AC = b \leq 2R \sin \frac{2\pi}{n}$, ahol $R \equiv h_{r-r-r}$; azért $a \geq \frac{4r_1r_i}{r_1+r_i} - 2R \sin \frac{2\pi}{n}$, ahol egyenlőség csak szabályos HAJÓS-féle sokszög esetén lép fel.

Az I. tétel általánosítása a

II. TÉTEL: Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló kör van, melyek sugarai egy adott (a, b) intervallumba esnek, akkor a köröknek a

³⁶ Ez a távolság euklideszi síkon kongruens r sugarú körök esetén éppen r .

felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \cong \sup_{a \cong r \cong b} d(a, r),$$

$$d(a, r) = \frac{2\pi(1 - \cos \sqrt{\kappa} r)}{2 \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \beta + \left(1 - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \right) \pi + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \alpha \right) \right\}},$$

$$\text{ahol } \sin \alpha = \frac{\sin \sqrt{\kappa} a}{\sin \sqrt{\kappa}(a+r)}, \quad \cos \beta = \frac{\sin \sqrt{\kappa} a \cos \sqrt{\kappa} r}{\sin \sqrt{\kappa}(a+r)}.$$

$d(a, r)$ szemléletes jelentése:

$$d(a, r) = \frac{K(r)}{H(r, h_{r-a-a})}.$$

Bizonyítás. Az I. tétel bizonyításához hasonlóan járunk el. Legyen a κ görbületű felületen $\{K\}$ egy — legalább három egymásba nem nyúló körből álló — telített körrendszer, melynek sugarai egy adott (a, b) intervallumba esnek. Jelentse D a felület azon pontjainak halmazát, amelyekből a K körhöz nem húzható hosszabb érintő, mint a körrendszer többi köréhez.³⁷ Könnyen belátható, hogy a K körhöz ilyen módon hozzárendelt cella „Dirichlet cella” konvex sokszög.³⁸ Ezek összessége $\{D\}$, a felületet — a sokszögek határától eltekintve — egyrétűen és hézagmentesen lefedi. Tételünk egyszerű következménye annak, hogy a D cellában a K kör sűrűsége

$$\frac{K}{D} \cong \frac{K}{K \cap K(h_{r-a-a})}.$$

Megjegyzések. 1. A HAJÓS-féle lemmához fűzött 2. megjegyzésünk értelmében, az euklideszi síkon a II. tételben szereplő korlát a $d(a, b)$ értéket veszi fel. Uí. ennek belátására alkalmazunk egy olyan hasonlósági transzformációt, mely egy $r \in (a, b)$ sugarú kört b sugarú körbe visz át és vegyük figyelembe, hogy a körhöz tartozó cellában a körsűrűség hasonlósági transzformációval szemben nem változik.

2. A II. tétel különösen gömbön, ill. hiperbolikus síkon érdemel figyelmet, ahol eddig — inkongruens körök sűrűségére vonatkozólag — semmilyen eredmény sem volt ismeretes. Az euklideszi síkon e tétel kevesebbet mond, mint a FEJES TÓTH—

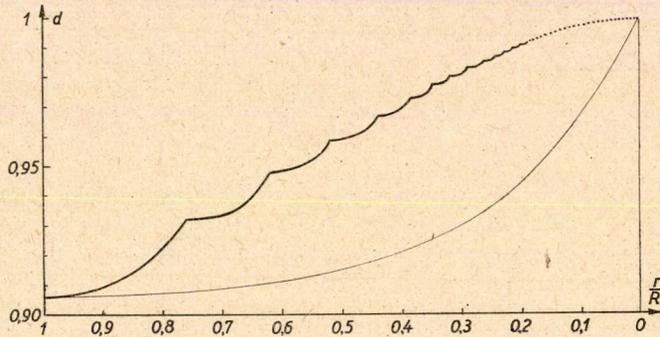
³⁷ Azon pontok, amelyekből két egymásba nem nyúló körhöz egyenlő érintők húzhatók „egyenesen” (gömbön főkör) vannak (I. pl. Н. М. Несторович, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, Москва—Ленинград,) 1951, 108—109.

³⁸ Megemlítjük, hogy az $r \in (a, b)$ sugarú O középpontú K körhöz tartozó D „DIRICHLET cella” bármely H szögpontjára teljesül $h_{r-a-a} < OH$. Uí. legyenek a H szögpontot hatványpont szolgáló K, K_1, K_2 körök sugarai r, r_1, r_2 . Ha a K_1, K_2 kör közül valamelyik nem érinti a K kört, akkor e körnek a H pont körüli elforgatásával elérhető, hogy e kör érintse a K kört, a három kör pedig továbbra is egymásba nem nyúló körhármas alkosson. E közben a három kör hatványpontja H változatlanul marad. Feltehetjük tehát, hogy K_1 és K_2 érintik a K kört. Ugyancsak nem változik H , ha a K_1, K_2 köröket olyan a sugarú körökkel pótoljuk, melyek a K_1, K_2 körökben helyezkednek el és a K kört érintik. Jelöljük ezeket a köröket továbbra is K_1, K_2 -vel. Elegendő tehát arra az esetre szorítkozni, midőn az r sugarú K kört két a sugarú K_1, K_2 kör érinti. Ha K_1, K_2 nem érintik egymást, akkor ezeket a köröket az O pont körül elforgatva elérhető, hogy OH csökkenjen. OH legkisebb értékét akkor kapjuk, ha K_1, K_2 érinti egymást és ekkor $OH = h_{r-a-a}$.

MOLNÁR—FLORIAN-féle tétel,³⁹ mely igen jó felső korlátot ad δ sűrűségre.⁴⁰ A 38. ábrán látjuk a II. tételünk által szolgáltatott korlátot az euklideszi síkra vonatkozólag vastag vonal, valamint a FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle korlátot (vékony vonal).

Az előbbi két tétel bizonyításának mintájára könnyen bizonyítható a következő két tétel is.

III. TÉTEL⁴¹: *Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló kör van, melyek sugarai r_1, r_2, \dots, r_m és az ezekhez tartozó körök $n_1:n_2:\dots:n_m$*



38. ábra

arányban vannak, akkor ezeknek a köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \leq \frac{2\pi \sum_{i=1}^m n_i (1 - \cos \sqrt{\kappa} r_i)}{\sum_{i=1}^m \left(n_i \left(2 \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \beta + \left(1 - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \right) \pi + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \alpha \right) \right\} \right) \right)},$$

ahol $\sin \alpha = \frac{\sin \sqrt{\kappa} r_1}{\sin \sqrt{\kappa} (r_1 + r_i)}$, $\cos \beta = \frac{\sin \sqrt{\kappa} r_1 \cos \sqrt{\kappa} r_i}{\sin \sqrt{\kappa} (r_1 + r_i)}$, és $r_1 \leq r_i$ ($i = 2, 3, \dots, m$).

Bizonyos esetekben ez a III. tétel a körsűrűségre jobb felsőkorlátot ad, mint a már említett FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle tétel. Ilyen eset pl. a következő:

³⁹ I. FEJES TÓTH—MOLNÁR [32] és FLORIAN [36].

⁴⁰ MOLNÁR [55], ill. HEPPES—MOLNÁR [43].

⁴¹ Ebben a tételben, valamint az V. tételben, a körsűrűségre a következő definíciót használjuk. Legyen O az euklideszi-, ill. hiperbolikus sík egy rögzített pontja és $K(R)$ egy R sugarú O középpontú köre. Ekkor

$$\delta = \overline{\lim} \frac{\sum_R K}{\sum_R D},$$

ahol D jelenti a $\{K\}$ körrendszer K köréhez tartozó „Dirichlet cellát”, az összegezést pedig a $K(R)$ körben levő K körökre kell kiterjeszteni. A körök aránya alatt a $K(R)$ körben levő körök arányának limesze értendő.

Tekintsük az euklideszi síkon azon körrendszert, amelynek hatványvonalas hálózata a félig szabályos (4,8,8) szimbólumú archimédeszi mozaikot szolgáltatja (52. ábra). Ebben a körrendszerben a körök r , ill. $(\sqrt{2}-1)r$ sugarúak és kitöltési sűrűségük $0,92015\dots$ ⁴². Erre a körrendszerre vonatkozó FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle korlát $0,9208\dots$. Ha viszont tudjuk, hogy a fenti körök nem egyenlő arányban vannak, hanem a $(\sqrt{2}-1)r$ sugarú körökből legalább 18-szor több van, mint az r sugarúakból, akkor a III. tételünk szerint e körrendszer sűrűsége $\cong 0,9200\dots$, azaz még $0,92015\dots$ -nél is kisebb.

Érdekes problémákhoz és változatos extrémális alakzatokhoz jutunk, ha úgy igyekszünk a síkon mennél több kört elhelyezni, hogy a körrendszer bizonyos értelemben elég tágas legyen. Válasszuk ki a körrendszer egy O középpontú K körét és tekintsük DIRICHLET cellájának az O -hoz legközelebb eső C csúcspontját. Az OC távolságot a K kör tágasságának nevezzük.⁴³

IV. TÉTEL: *Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló kör van, melyek sugarai az (a, b) intervallum értékei, és ha a körrendszer egy tetszőleges $r \in (a, b)$ sugarú körének tágassága legalább $\tau = \tau(r)$, akkor a körrendszernek a felületre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong \sup_{a \leq r \leq b} \frac{2\pi(1 - \cos \sqrt{\kappa}r)}{H(r, \tau)}.$$

Ebben a tételben szélső értéket képviselnek pl. az összes egybevágó körökből álló körrendszerek, melyeknek hatványvonalas hálózata szabályos (pl. 39., 40., 41., 42., 43. ábra) vagy HAJÓS-féle mozaikot szolgáltat (pl. 44., 45., 46., 47., 48., 49. ábra). A 46., 47., 48. és 49. ábra egyben illusztrálja, hogy a maximális sűrűséget több különböző körelhelyezés is elérheti.⁴⁴

Képzeld el, hogy rendelkezésünkre áll az euklideszi síkon egynél nem nagyobb sugarú köröknek egy kimeríthetetlen készlete. Ilyen körök segítségével ki kell tölteni a síkot legsűrűbben úgy, hogy a körök tágassága legalább $\sqrt{2}$ legyen. Az előbbi tételünk, valamint HAJÓS-féle lemmához fűzött 2. megjegyzésünk segítségével könnyen belátható, hogy a legjobb körrendszer csupán egység sugarú körökből áll, melyek középpontjai négyzetes rácsot alkotnak (40. ábra). Tehát hiába állt rendelkezésünkre a sugaraknak egy egész intervalluma, a legjobb elrendezésben csak egyetlen sugárérték jut szerephez.

Az utolsó 11 ábra (39—49. ábra) extrémális körrendszereket képvisel a következő korolláriumban is.

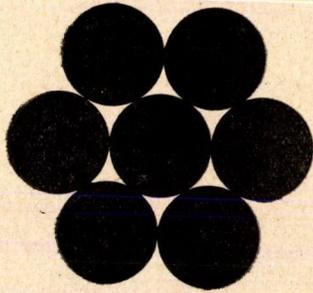
1. KOROLLÁRIUM: *Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, úgy hogy bármely három kör középpontján átmenő kör sugara legalább a , akkor a körrendszernek a felületre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong \frac{2\pi(1 - \cos \sqrt{\kappa}r)}{H(r, a)}.$$

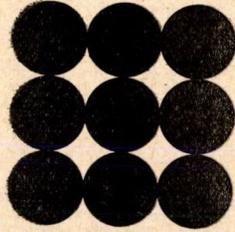
⁴² Sejthető, hogy a kétfajta kör mellett ez a legnagyobb elérhető kitöltési sűrűség (I. FEJES TÓTH [25], 78. o.).

⁴³ A tágasság elnevezés FEJES TÓTH-tól ered.

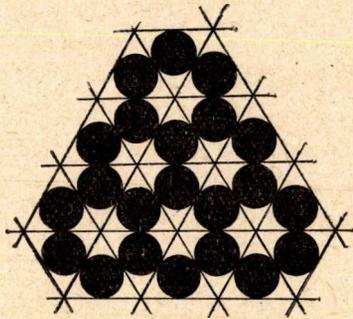
⁴⁴ Az itt szereplő négy ábra csak érzékelteti a többértelműséget de nem meríti ki. Uí. már az első két ábrából (45., 46. ábra) végtelen sok további extrémális körrendszer rakható össze.



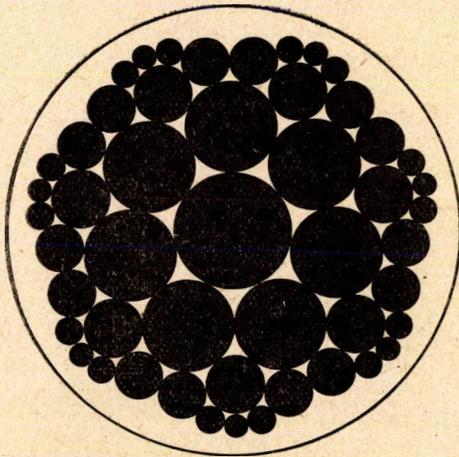
39. ábra



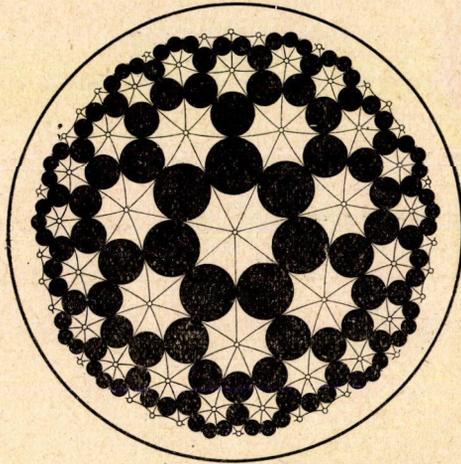
40. ábra



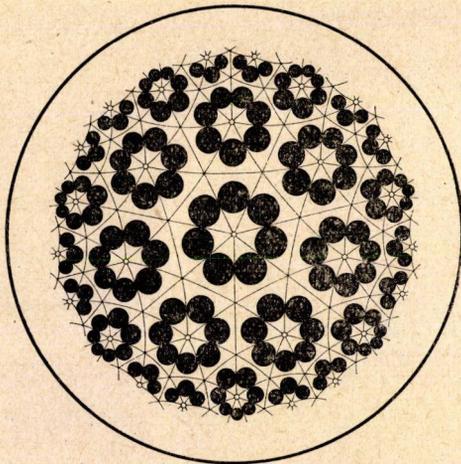
41. ábra



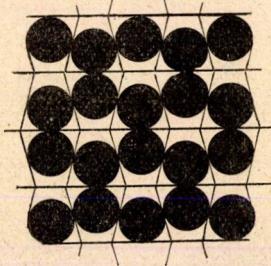
42. ábra



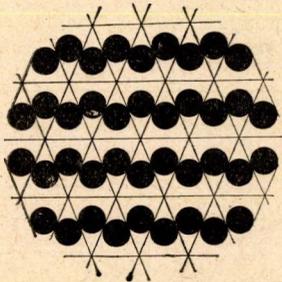
43. ábra



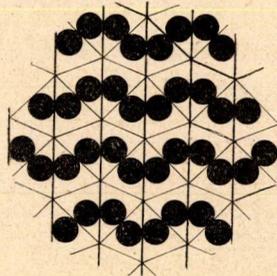
44. ábra



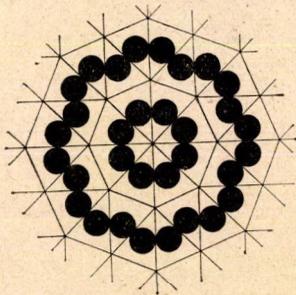
45. ábra



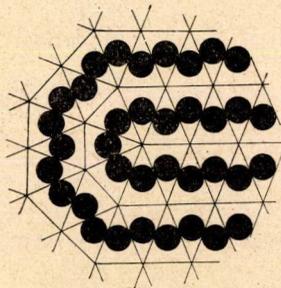
46. ábra



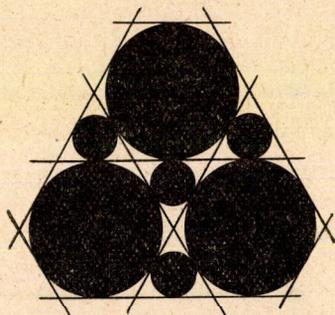
47. ábra



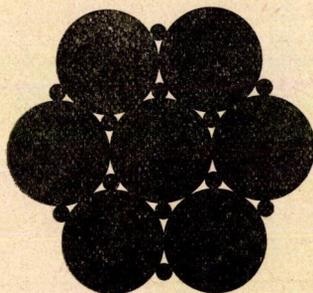
48. ábra



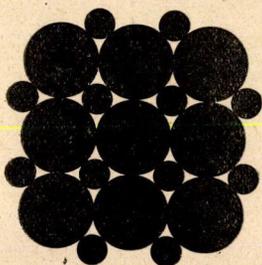
49. ábra



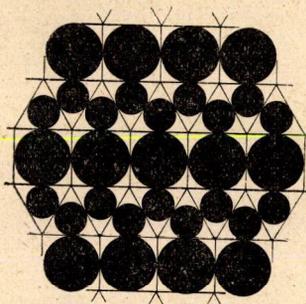
50. ábra



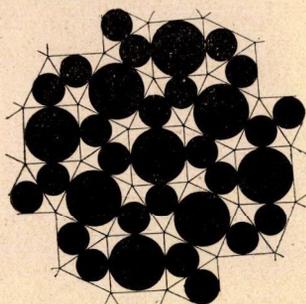
51. ábra



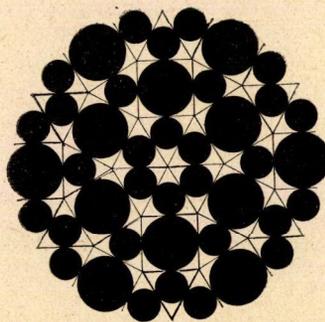
52. ábra



53. ábra



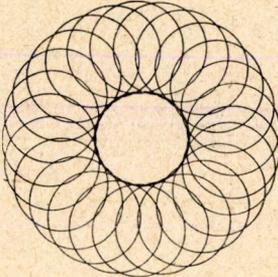
54. ábra



55. ábra

Ugyancsak könnyen belátható a következő

V. TÉTEL: Ha egy κ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r_1, r_2, \dots, r_m sugarú kör van $n_1:n_2:\dots:n_m$ arányban és ha a körrendszer r_i sugarú körének tágassága legalább τ_i , akkor a körrendszernek a felületre vonatkozó δ sűrűsége



56. ábra

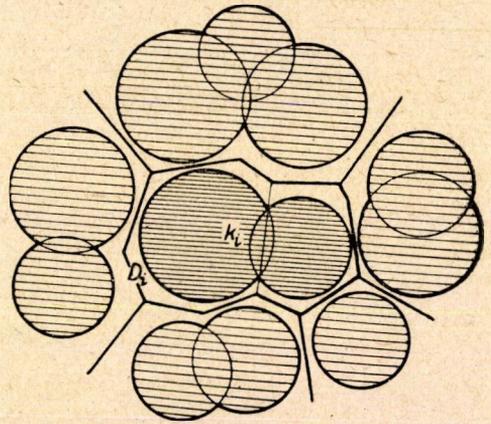
$$\delta \cong \frac{2\pi \sum_{i=1}^m n_i (1 - \cos \sqrt{\kappa} r_i)}{\sum_{i=1}^m n_i H(r_i, \tau_i)}$$

Nyilván ez a tétel pontos korlátot szolgáltat a sűrűsége abban az esetben, ha a körrendszerhez tartozó hatványvonalas hálózat szabályos- vagy féligszabályos mozaikot szolgáltat (az 50., 51., 52., 53. és 54. ábra félig szabályos hálózattal rendelkező körrendszereket ábrázol). Az 55. ábra olyan szélső értéket képviselő kör-

rendszert ábrázol az euklideszi síkon, amelynek hatványvonalas hálózata HAJÓS-féle mozaikot alkot.⁴⁵

Megjegyzések: 1. A körkitöltések esetén alkalmazott módszerek, körlefedések-nél nem vezetnek eredményhez, hiszen itt a hatványvonalas felbontás révén adódott DIRICHLET cellában a lefedési sűrűség 1-hez tetszőleges közeli értéket vehet fel (56. ábra).

2. Az I—V. tételhez hasonló további tételek mondhatók ki, ha a $\{K\}$ körrendszert körívsockszögrendszer váltja fel.⁴⁶ Egy $\{K\}$ körívsockszögrendszer kitöltési sűrűségére vonatkozó eredményekhez a következőképpen juthatunk el. Tekintsük a $\{K\}$ körívsockszögrendszer helyett azt a $\{K^*\}$ körrendszert, mely tartalmazza mindazokat a köröket, melyek ívet szolgáltatnak a $\{K\}$ rendszerben. Bontsuk fel az állandó görbületű felületet a $\{K^*\}$ körrendszer hatványvonalai segítségével $\{D^*\}$ „DIRICHLET cellákra”. Egy K körívsockszöghöz tartozó D cellát a K körívsockszög határát képező K^* körökhöz tartozó D^* cellák egyesítése adja (57. ábra). Az így nyert D „Dirichlet cella” általában nem összefüggő, sőt a komponensek többszörösen összefüggő tartományok lehetnek. D területének megbecslésére a HAJÓS-féle lemmához fűzött 1. megjegyzésünket használjuk fel. Tekintsük pl. az euklideszi

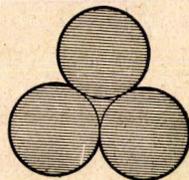


57. ábra

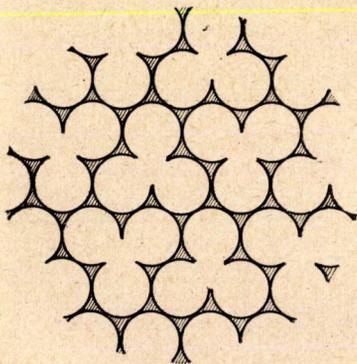
⁴⁵ Könnyen belátható, hogy az 53., 54. és 55. ábrán szereplő körrendszerek sűrűsége azonos.

⁴⁶ B. SEGRE egy — M. ROSATTI által felvetett problémához fűzött — észrevétele vezetett a körívsockszögekre vonatkozó eredményeimhez.

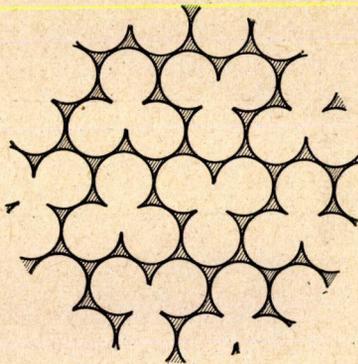
síkon egybevágó egymásba nem nyúló szabályos körívháromszögekből álló $\{K\}$ rendszert. Ha a K körívháromszög oldala $\frac{4\pi}{3}$ (58. ábra, „lóhere”), akkor — könnyen belátható, hogy — az ehhez tartozó D cella területe, egy r sugarú kör köré írt szabályos hatszög területének legalább háromszorosa (13. ábra). Így tehát a D cellában K sűrűsége $\cong \frac{5\pi\sqrt{3}+6}{36} = 0,924\dots$. Az 59. és 60. ábránk ilyen sűrűséget szolgáltató extrémális körívháromszögrendszereket illusztrál. Hasonló módon adható bármely $\{K\}$ körív sokszögrendszer esetén a δ kitöltési sűrűségre egy felső korlát, mely sok esetben pontos. Így pl. ha az I. tétel körív sokszögekre vonatkozó analogonját tekintjük, akkor ez pontos sűrűségbecslést ad pl. a következő esetekben: Tekintsük az állandó görbületű felületen valamilyen kongruens körökből álló legsűrűbb elhelyezést. Ebből ragadjunk ki olyan K körív sokszöget alkotó körhalmazt — pontosabban egy körhalmazt, melyhez hozzávesszük még bármely érintő körhármast által alkotott körívháromszöget — melyhez tartozó általánosított HAJÓS-féle sokszöggel a felület hézagmentesen kirakható (pl. 61., 62., 63. és 64. ábra).⁴⁷ Ilyen típusú — egybevágó K körív sokszögekből álló — rendszerek mind extrémális körív sokszögrendszerekhez vezetnek. Egy más típusú extrémális alakzathoz jutunk, ha pl. olyan körszisztemekből indulunk ki, mely középpontjai félig szabályos mozaiknak



58. ábra



59. ábra



60. ábra

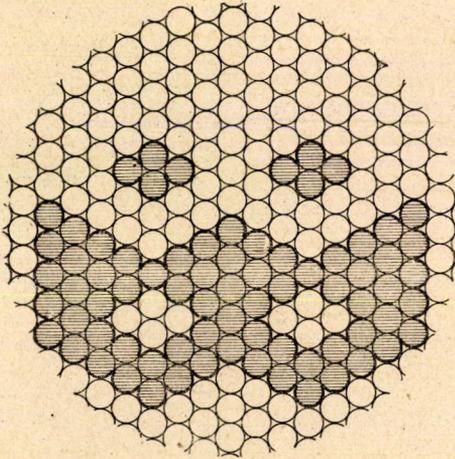
csúcspontjai és van a köröknek olyan részhalmaza, amelyhez tartozó általánosított HAJÓS-féle sokszöggel a felület hézagmentesen kirakható.⁴⁸ Gömbfelületen pl. ilyen körszisztemhez vezet a $(3,3,3,3,4)$ (65. ábra), ill. a $(3,3,3,3,5)$ (66. ábra) mozaik, mely esetben — megfelelő nagyságú egybevágó — szabályos körív négyzöggel (67. ábra), ill. szabályos körív ötszöggel (68. ábra) úgy tölthető ki a gömbfelület legsűrűb-

⁴⁷ A 62. és 63. ábrához tartozó extrémális alakzatok sűrűsége azonos. Az ezekhez tartozó HAJÓS-féle sokszögek vegyes kombinációiból újabb, azonos sűrűségű, extrémális alakzatokhoz lehet jutni.

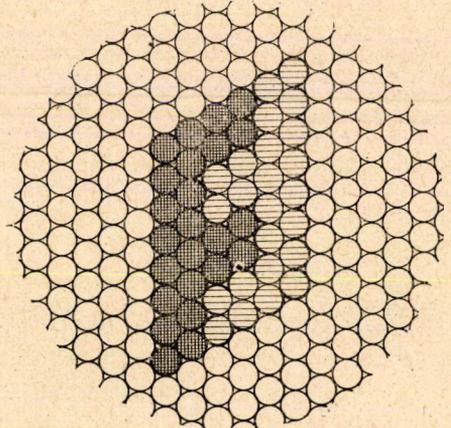
⁴⁸ Pontosabban a körökhöz hozzá kell még venni az érintő körök által határolt körív sokszöget (pl. 67., 68. ábra).

ben, hogy a körívsockszögek területét szolgáltató körök középpontjai a már említett szimbólumú félig szabályos mozaik csúcspontjai.

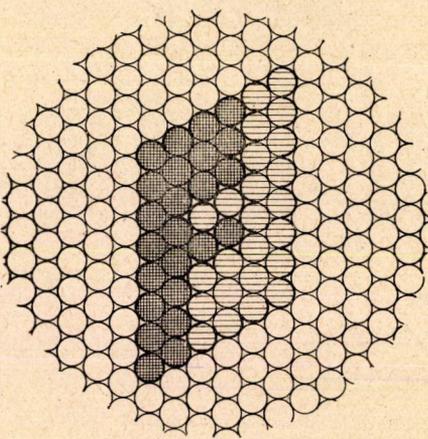
Érdeemes megjegyezni, hogy a körívsockszögek szerepét — bizonyos feltételeknek eleget tevő — sokszögek vehetik át. A 69., ill. 70. ábrán egyenlőoldalú háromszögrendszer váltja fel az 59., ill. 60. ábrán szereplő „lóhere” rendszert. A 69. és 70.



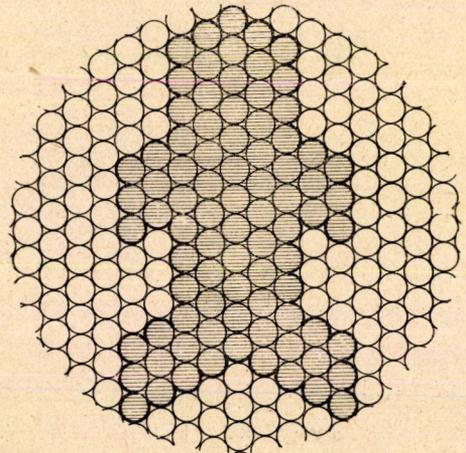
61. ábra



62. ábra



63. ábra



64. ábra

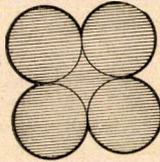
ábra ugyancsak extrémális alakzatot képviselnek, ha az egymásba nem nyúló háromszögekre még azt a kikötést tesszük, hogy a csúcspontok egymástól oldalmi távolságnál kisebb távolságra nem kerülhetnek.⁴⁹

⁴⁹ A háromszögrendszer csúcspontjaira tett további kikötéssel elérhető, hogy az extrémális alakzatban a háromszögek a (3,12,12) mozaik háromszögeit alkossák (71. ábra).

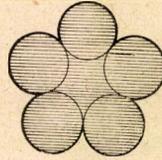
Most pedig áttérünk a SEGRE—MAHLER-féle tétel általánosításaira.⁵⁰

B. SEGRE és K. MAHLER-től származik a következő tétel:

Ha egy euklideszi sokszögben, melynek szögei $\frac{2\pi}{3}$ -nál nem nagyobbak, egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a köröknek a sokszögre vonatkozó sűrűsége $\leq \frac{2}{\sqrt{12}} = 0,9069\dots$



65. ábra

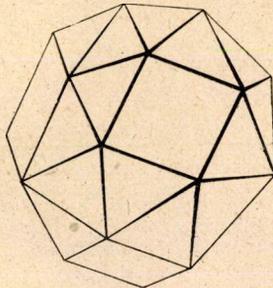


66. ábra

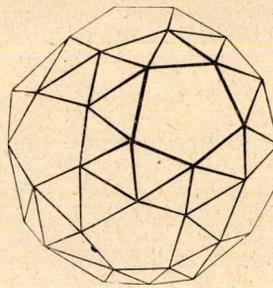
E tétel eddigi általánosításai közül csupán a következőt említjük: Helyezzünk el egy konvex euklideszi vagy gömbi tartományban legalább két egymásba nem nyúló kongruens kört. Akkor a körök sűrűsége a tartományra vonatkozóan mindig

$$< \frac{\pi}{\sqrt{12}}. \quad 51$$

Az ebben a tételben felvetett kérdés a hiperbolikus síkon érdektelen. Valóban a hiperbolikus síkon két egymást érintő r sugarú kör konvex burkában a két kör sűrűsége 1-hez tart, ha $r \rightarrow \infty$ (72. ábra).



67. ábra



68. ábra

A következő négy tétel (VI., VII., VIII., IX.) a SEGRE—MAHLER-féle tétel olyan általánosításai, melyek hiperbolikus síkon is érvényesek.⁵² A tartomány, amelyben a köröket elhelyezzük, az állandó görbületű felület olyan S sokszöge, amelynek minden szöge $\leq \frac{2\pi}{3}$. A körrendszer sűrűségére felső korlátot adunk abban az esetben, ha 1. a körök egybevágóak, 2. a körök sugarai egyenként ismertek, 3. a sugarak egy adott intervallumba esnek, 4. n fajta adott sugarú kör van.

⁵⁰ SEGRE—MAHLER [64].

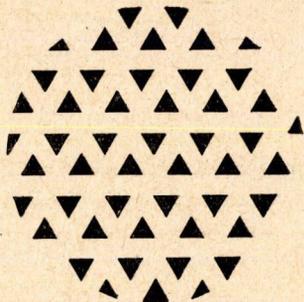
⁵¹ I. FEJES TÓTH [25], ill. MOLNÁR [50].

⁵² Hiperbolikus síkon ezek az első tételek, melyek körelhelyezési sűrűsége vonatkoznak korlátos tartományok esetén (I. MOLNÁR [57]).

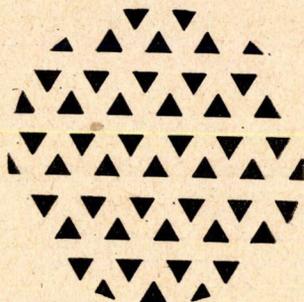
VI. TÉTEL: Ha egy κ görbületű felület egy sokszögében, melynek minden szöge $\cong \frac{2\pi}{3}$, egymásba nem nyúló r sugarú körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszer δ sűrűsége

$$\delta \cong d(a) = \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \cotg \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\}},$$

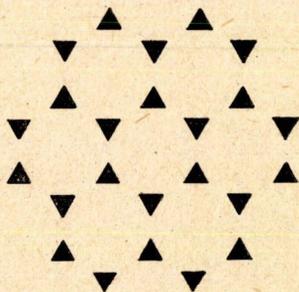
ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\kappa r}$.⁵³



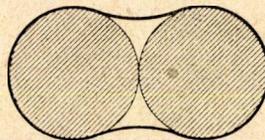
69. ábra



70. ábra



71. ábra

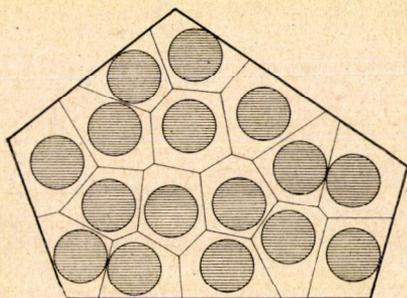


72. ábra

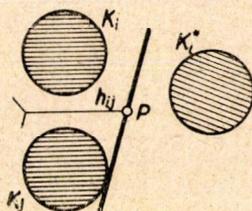
Bizonyítás. Legyen S a tételben szereplő sokszög, $\{K_i\}$ a benne elhelyezett körök rendszere és D_i a K_i körhöz tartozó DIRICHLET cellának S -sel való metszete. A $\{K_i\}$ körrendszerhez ilyen módon rendelt $\{D_i\}$ sokszögek az S sokszöget hézagmentesen és átfedés nélkül lefedik (73. ábra). Tételünk bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges D_i sokszög esetén $\frac{K_i}{D_i} \cong d(a)$. Először belátjuk, hogy egy D_i sokszög tetszőleges P csúcspontja nincsen a K_i körrel koncentrikus $h_{r,-r}$ sugarú

⁵³ Ebben a tételben ugyanazon $d(a)$ korlát szerepel, mint az I. tételben.

K kör belsejében. Ha P az S sokszögnek egy csúcspontja, akkor — a sokszögre tett kikötésünk miatt — nyilván nem lehet a K kör belső pontja. Előfordulhat azonban, hogy P a K_i, K_j körök egy h_{ij} hatványvonalának metszése az S sokszög egy



73. ábra



74. ábra

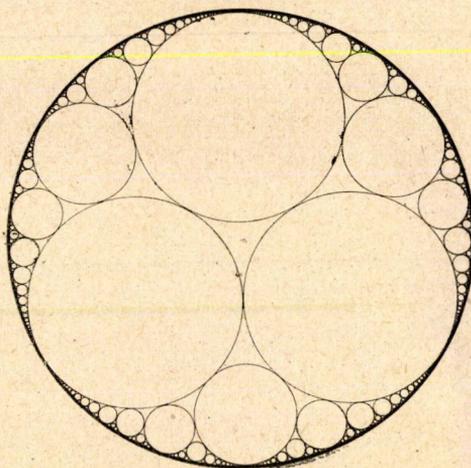
oldalával (74. ábra). Ebben az esetben tekintjük a K_i kör K_i^* tükörképét az S sokszögnek azon oldalára, mely tartalmazza a P pontot. Ekkor P nyilván a K_i, K_i^*, K_j körök hatványpontja, azaz P a K körnek nyilván nem belső pontja. Triviális az is, hogy $D_i \supseteq D_i \cap K$. Másrészt a HAJÓS-féle lemma értelmében $D_i \cap K \cong H$, ahol H jelenti a K_i, K koncentrikus körökhöz tartozó HAJÓS-féle sokszöget. Így tehát $\frac{K_i}{D_i} \cong \frac{K_i}{H} = d(a)$. Ezzel tételünket bizonyítottuk.

Minthogy $d(a) \cong d^*(a) \cong \frac{3}{\pi}$,⁵⁴ adódik a következő két korollárium.

2. KOROLLÁRIUM: Ha egy κ görbületű felületnek egy sokszögében, melynek minden szöge $\cong \frac{2\pi}{3}$, egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó sűrűsége $< \frac{3}{\pi}$.

3. KOROLLÁRIUM: Ha a hiperbolikus sík egy aszimptotikus sokszögében egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó sűrűsége $< \frac{3}{\pi}$.

A VI. tételhez hasonlóan bizonyítható a következő két tétel is.



75. ábra

⁵⁴ $\frac{3}{\pi}$ a paraciklusoknak legnagyobb kitöltési sűrűsége (75. ábra, I. FEJES TÓTH [28]).

VII. TÉTEL:⁵⁵ *Ha egy κ görbületű felületnek egy sokszöge, melynek minden szöge $\cong \frac{2\pi}{3}$, tartalmaz n egymásba nem nyúló r_1, r_2, \dots, r_n sugarú kört, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong \frac{2\pi \sum_{i=1}^n (1 - \cos \sqrt{\kappa} r_i)}{\sum_{i=1}^n \left(2 \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \beta + \left(1 - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \right) \pi + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \alpha \right) \right\} \right)},$$

ahol $\sin \alpha = \frac{\sin \sqrt{\kappa} r}{\sin \sqrt{\kappa}(r+r_i)}$, $\cos \beta = \frac{\sin \sqrt{\kappa} r \cos \sqrt{\kappa} r_i}{\sin \sqrt{\kappa}(r+r_i)}$, és $r = \min(r_1, \dots, r_n)$.

VIII. TÉTEL: *Ha egy κ görbületű felületnek egy sokszögében, melynek minden szöge $\cong \frac{2\pi}{3}$, egymásba nem nyúló körök vannak elhelyezve, melyek sugarai az (a, b) intervallumba esnek, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong \sup_{a \leq r \leq b} \frac{2\pi(1 - \cos \sqrt{\kappa} r)}{2 \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \beta + \left(1 - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \right) \pi + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] \alpha \right) \right\}},$$

ahol $\sin \alpha = \frac{\sin \sqrt{\kappa} a}{\sin \sqrt{\kappa}(a+r)}$, $\cos \beta = \frac{\sin \sqrt{\kappa} a \cos \sqrt{\kappa} r}{\sin \sqrt{\kappa}(a+r)}$.

A VI. tétel birtokában — követve FEJES TÓTH egy tételének indukciós bizonyításában alkalmazott gondolatmenetét⁵⁶ — könnyen bizonyítható a

IX. TÉTEL: *Ha egy κ görbületű felület egy sokszögében, melynek minden szöge $\cong \frac{2\pi}{3}$, n fajta r_1, r_2, \dots, r_n sugarú egymásba nem nyúló kör fekszik, akkor a köröknek a sokszögre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a_i} - 6}{[a_i] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a_i} \operatorname{cotg} \left(1 - \frac{[a_i]}{a_i} \right) \pi \right\}} \right),$$

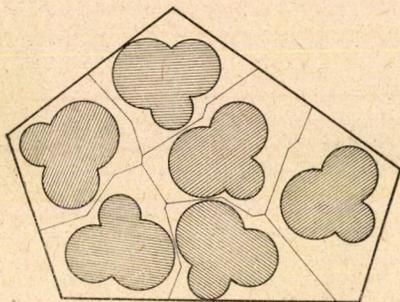
ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a_i} = 2 \cos \sqrt{\kappa} r_i$.

⁵⁵ E tétel bizonyításával kapcsolatban megjegyezzük, hogy az S sokszög cellákra való bontása ugyancsak hatványvonalak segítségével történik. Legyen $H \equiv H(r, h, r-a)$. Ekkor a körrendszernek az S sokszögre vonatkozó sűrűsége $\cong \frac{\sum K_i}{\sum H_i}$.

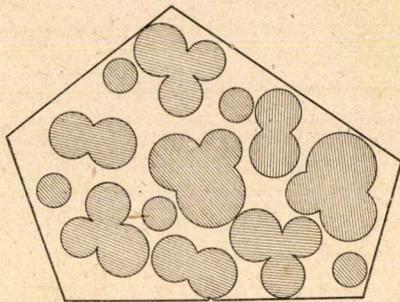
⁵⁶ I. FEJES TÓTH [25], 72–73. o.

Megjegyzés: A VI., VII., VIII. és IX. tételhez hasonló tételek mondhatók ki arra az esetre is, ha a körök helyett körívsokszögeket tekintünk (76., 77. ábra). Ezek bizonyítása ugyanúgy történhet, mint azt már — az V. tétel után tett 2. megjegyzésünkben — vázoltuk.

Eddigi eredményeink a „DIRICHLET cella” területének megbecslésén alapultak. Most még két tételt említünk a „DIRICHLET cella” kerületére vonatkozólag.



76. ábra



77. ábra

X. TÉTEL: Ha egy κ görbületű felületen levő — legalább három pontból álló — pontrendszer pontjai egymástól legalább $2r$ távolságra vannak, akkor a pontrendszer bármely pontjához tartozó DIRICHLET cella kerülete $\geq k(a)$

$$k(a) = \frac{2[a]}{\sqrt{\kappa}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \sqrt{\kappa} r \right) + \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \arcsin \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{\kappa} r \sin \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\},$$

ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\kappa} r$.

$k(a)$ egy olyan HAJÓS-féle $H(r, h_{r-r}, r)$ sokszög kerülete, mely az I. tételünkben a $d(a)$ értéket szolgáltatta.

Tételünkben egyenlőség áll, ha a pontok egy olyan szabályos mozaik csúcsai, amelynek lapjai $2r$ oldalú háromszögek.

Következő tételünk lényegében az I. korollárium analogonja.

XI. TÉTEL: Ha egy állandó görbületű felületen levő — legalább három pontból álló — pontrendszer pontjai egymástól legalább t távolságra vannak, és bármely három ponton átmenő kör sugara legalább r , akkor bármely ponthoz tartozó DIRICHLET cella kerülete $\geq H\left(\frac{t}{2}, r\right)$, ahol $H\left(\frac{t}{2}, r\right)$ jelöli egy olyan HAJÓS-féle sokszög kerületét,

mely $\frac{t}{2}, r$ sugarú koncentrikus körközébe tartozik.

Ebben a tételben szélső értéket szolgáltatnak pl. az összes olyan pontrendszerek, melyeknek DIRICHLET cellái szabályos (pl. 39., 40., 41., 42., és 43. ábra) vagy HAJÓS-féle mozaikot (pl. 44., 45., 46., 47., 48. és 49. ábra) alkotnak.

II. KÖRELHELYEZÉSEK KÖRKONVEX TARTOMÁNYOKBAN

1. §. Körkonvex ponthalmazokról⁵⁷

A klasszikus értelemben vett konvex ponthalmaz⁵⁸ értelmezésére a következő két definíciót szokás használni:

1. Egy zárt ponthalmaz konvex, ha bármely két pontját összekötő szakasz a ponthalmazhoz tartozik,

2. Egy zárt ponthalmaz konvex, ha bármely határpontjához tartozik támasz-egyenes.⁵⁹

A konvexitás fogalmának különböző általánosításai ismeretesek (pl. pontra konvex, irányra konvex, L -konvex, hiperkonvex, α -rendű konvex, ε -konvex), amelyek számos matematikust (pl. A. D. ALEXANDROV, H. BRUNN, J. G. VAN DER CORPUT, W. FENCHEL, H. HADWIGER, A. HORN, V. KLEE, A. E. MAYER, K. MENGER, H. MINKOWSKI, J. PERKAL, K. REINHARDT, J. G. RESETNYÁK, L. A. SANTALÓ, F. A. VALENTINE, P. VINCENSINI) foglalkoztattak. Ezeknek az általánosításoknak kiindulópontját lényegében a fenti értelmezések képezték.

J. PERKAL 1956-ban⁶⁰ — az ε -konvex ponthalmaz értelmezésével — olyan ponthalmaz osztályhoz jutott, amely az euklideszi térben átmenetet képez egy adott ponthalmaz zárt burka és a ponthalmaz konvex burka között.

PERKAL eredményéhez kapcsolódva bevezetjük az állandó görbületű felületeken a körkonvexitás fogalmát, mely mint látni fogjuk tartalmazza a PERKAL-féle ε -konvexitás, a HADWIGER-féle α -rendű konvexitás és a MAYER-féle r -hiperkonvexitás fogalmát⁶¹. Ebben a §-ban arra is kitérünk, hogy megmutassuk a kapcsolatot a körkonvex ponthalmazok és a RESETNYÁK-féle⁶² O_3 halmazok, ill. az A. D. ALEXANDROV-féle PRV halmazok között.⁶³

Az eddigiekhez hasonlóan állandó görbületű felület alatt a gömbfelületet, az euklideszi síkot és a hiperbolikus síkot értjük. E felületeken egy sugársor bármely orthogonális trajektoriája (gömbön: kör; euklideszi síkon: kör, egyenes; hiperbolikus síkon: kör, paraciklus, hiperciklus, egyenes) a felületet két tartományra bontja. Egy ilyen határpontjával lezárt tartományt ciklustartománynak — röviden ciklusnak — nevezünk. Ha a ciklust határoló vonal ϱ -sugarú kör, akkor a ciklust ϱ sugarú, ill. — ϱ sugarú ciklusnak nevezzük aszerint, amint a ciklus konvex (78. ábra) vagy konkáv (79. ábra). Célszerűnek mutatkozik a többi ciklushoz is „sugárértéket” hozzárendelni, mégpedig a következőképpen: Legyen az euklideszi félsíkra

⁵⁷ A körkonvex elnevezés FEJES TÓTH-tól származik.

⁵⁸ Jelen dolgozatunkban a két dimenziós esettel foglalkozunk, de megállapításaink minden nehézség nélkül átvihetők magasabb dimenzióba is.

⁵⁹ A két értelmezés nem ekvivalens. Ui. az 1. értelemben konvex ponthalmaz határának egy zárt része az 1. értelmezés szerint általában nem konvex, a 2. értelmezés szerint viszont konvex (l. A. D. ALEXANDROV [3], 10–11. o.).

⁶⁰ J. PERKAL [58].

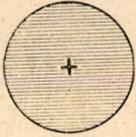
⁶¹ H. HADWIGER [39], A. E. MAYER [47], J. PERKAL [58]. Míg a HADWIGER- és a PERKAL-féle konvexitás a klasszikus konvexitás fogalmának egy kiterjesztése, addig a MAYER-féle annak egy szűkítése. Egyébként könnyen belátható, hogy a HADWIGER-féle értelemben konvex tartomány, PERKAL-féle értelemben is konvex.

⁶² J. G. RESETNYÁK [60].

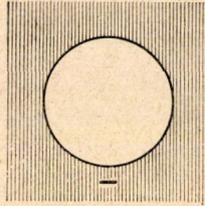
⁶³ A. D. ALEXANDROV [4], [5].

$q = +\infty$ (80. ábra), a hiperbolikus félsíkra $q = \pm 2\infty$ (81. ábra), a paraciklus által határolt (zárt) tartományra $q = \pm\infty$ (82. ábra), a hiperciklus által határolt (zárt) tartományra $q = \pm 2\infty \mp a$ (83. ábra), ahol a jelenti a hiperciklusnak alapegyenesétől való távolságát.⁶⁴ A q sugarú ciklust röviden q -ciklusnak nevezzük.

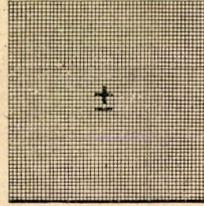
DEFINÍCIÓ: Egy zárt ponthalmazt q sugarú körkonvexnek, röviden q -konvexnek nevezünk és T_q -val jelölünk, ha bármely határpontjához illeszkedik q -sugarú támaszciklus, azaz olyan q -ciklus, mely illeszkedik a határponthoz és nem tartalmaz belsejében T_q -hoz tartozó pontot.



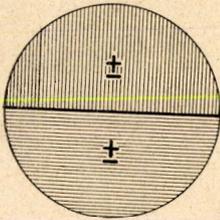
78. ábra



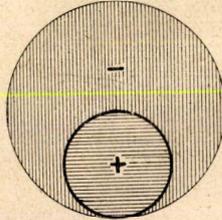
79. ábra



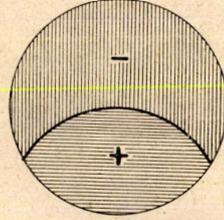
80. ábra



81. ábra



82. ábra



83. ábra

Egyszerű példákat mutat a körkonvex ponthalmazra a 84. és 85. ábra.

Megjegyzések. 1. Nyilvánvaló, hogy

a) egy körkonvex ponthalmaz lehet nem egyszeresen összefüggő (86. ábra), sőt nem is összefüggő (87. b. ábra),

b) egy q sugarú körkonvex ponthalmaz egyben q' sugarú körkonvex is, ha $q' < q$ és $q \cdot q' > 0$,

c) a klasszikus értelemben vett konvex ponthalmaz bármely q véges pozitív értékekre q -konvex is.

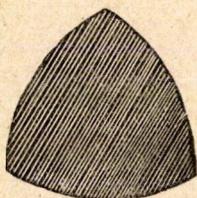
2. Könnyen belátható, hogy q sugarú körkonvex ponthalmazok közös része ugyancsak q sugarú körkonvex ponthalmaz.⁶⁵ Ennek a megjegyzésnek alapján

⁶⁴ A 81., 82. és 83. ábrán a ciklusokat a POINCARÉ modellen mutatjuk be.

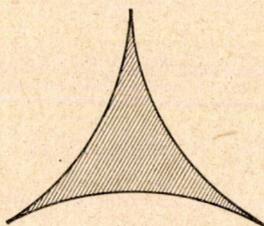
⁶⁵ Véges sok q sugarú körkonvex ponthalmaz esetén ez triviális. Végtelen sok $\{T_i\}$ q -konvex ponthalmaz esetén csupán azt kell belátnunk, hogy a metszet olyan A határpontjához is tartozik q -támaszciklus, mely T_i bizonyos A_i határpontjainak torlódási helye. Rendeljünk minden A_i ponthoz a T_i tartományhoz illeszkedő q -támaszciklust és tekintsük ennek az A_i ponton átmenő normálisán egy $A_i C_i = t$ távolságot. A BOLZANO-WEIERSTRASS-tétel értelmében a C_i pontoknak van C torlódási pontja. Az A és C pont éppen egy A -ra illeszkedő q -támaszciklust határoz meg.

értelmezhetjük a körkonvex burok fogalmát. Egy ponthalmaz ϱ -konvex burka alatt a ponthalmazt tartalmazó ϱ -konvex ponthalmazok közös részét értjük (87. a, b ábra, 87. a ábra az eredeti ponthalmaz, 87. b ábra a ϱ -konvex burka).

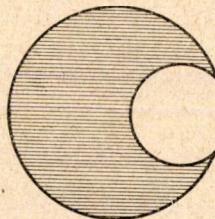
3. A HADWIGER-féle α -rendű konvex H_α ponthalmazok, a PERKAL-féle ε -konvex P_ε ponthalmazok, valamint a MAYER-féle r -hiperkonvex M_r ponthalmazok, ϱ megfelelő értékeire egyben ϱ sugarú körkonvexek is. Ezen állításunk helyességét



84. ábra



85. ábra



86. ábra

kiolvashatjuk a H_α , P_ε és M_r halmazok alábbi értelmezéséből és a hozzájuk fűzött megjegyzésekből.

Egy zárt ponthalmazt HADWIGER-féle α -rendű konvexnek mondunk (unterkonvex vom Grad α) és H_α -val jelölünk, ha minden $\lambda < \alpha$ sugarú körlappal való metszete egyszerűen összefüggő.⁶⁶

Könnyen bizonyítható, hogy egy HADWIGER-féle α -rendű ponthalmaz egyben α sugarú körkonvex is, jelekben $H_\alpha = T_\alpha$. Ehhez elegendő belátni, hogy a H_α ponthalmaz bármely P határpontjához illeszkedik α sugarú támaszkör. Legyen K_ε egy $\varepsilon < \alpha$ sugarú kör. H_α definíciójából könnyen adódik, hogy amennyiben H_α határa tartalmaz egy „konkáv” ívet, ez nem lehet K_ε körív (88. ábra).

Ugyancsak könnyen belátható, hogy $K_\varepsilon \cap H_\alpha$ olyan „konkáv” körívet sem tartalmazhat, melynek belső pontja a H_α ponthalmaznak határpontja (89. ábra). Az elmondottak értelmében a P pont nem más, mint vagy a K_ε kör $K_\varepsilon \cap H_\alpha$ -ban levő „konkáv” ívének végpontja (90. ábra), vagy azonos $K_\varepsilon \cap H_\alpha$ -val. Az

első esetben a K_ε kört a P pont körül forgatva elérhetjük, hogy $P \equiv K_\varepsilon \cap H_\alpha$. Így tehát H_α bármely P határpontjában illeszkedik K_ε támaszkör. Mivel viszont a P pontban illeszkedik bármely $\varepsilon < \alpha$ sugarú támaszkör, illeszkedik tehát α sugarú támaszkör is.

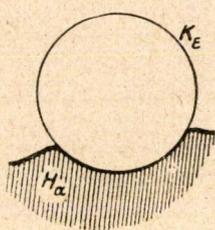
Egy zárt ponthalmaz PERKAL-féle értelemben ε -konvex, röviden P_ε , ha olyan

⁶⁶ HADWIGER [39]. Ebben a dolgozatban szerepel a β -rendű konvexitás (Überkonvexitat vom Grad β) fogalma is. A HADWIGER-féle β -rendű konvexitás mintájára bevezethető a ϱ -komplementerkörkonvexitás fogalma is. Egy T ponthalmaz ϱ -komplementerkörkonvex, ha T komplementer ponthalmaz \bar{T} ϱ -konvex, azaz \bar{T}_ϱ . Általában $\bar{T}_\varrho \neq T_{-\varrho}$ (84. ábra komplementerje).

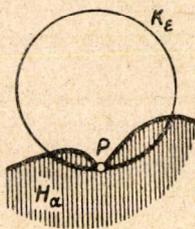
ε sugarú nyílt körlapok összességének zárt komplementerje, melyeknek nincs közös pontja a P_ε halmazzal.⁶⁷

Nyilvánvaló, hogy P_ε bármely határpontjához tartozik ε sugarú támaszkör, azaz $P_\varepsilon \equiv T_\varepsilon$.

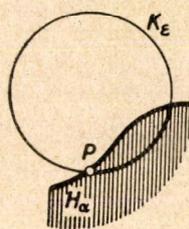
Itt említjük meg, hogy míg egy HADWIGER-féle α -rendű konvex ponthalmaz egyszersmind PERKAL-féle ε -konvex, addig a fordítottja általában nem igaz (92. ábra).



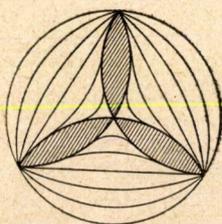
88. ábra



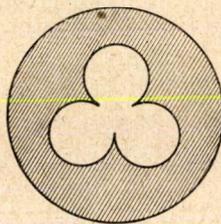
89. ábra



90. ábra



91. ábra



92. ábra

Egy zárt ponthalmaz r -hiperkonvex, röviden M_r , ha r sugarú körök metszete. Nyilvánvaló, hogy M_r bármely határpontjához tartozik $-r$ sugarú támaszkör, azaz $M_r = T_{-r}$.

4. Érdekes megjegyezni, hogy megadható olyan ϱ sugarú körkonvex tartomány, mely $\varepsilon = \varrho$ értékekre nem PERKAL-féle ε -konvex. Ilyen példát mutat a 86. ábra, mely úgy származik, hogy egy körlap belsejéből kivágunk három egyenlő ε sugarú érintő kört és az általuk határolt „belső” körívháromszöget.

5. RESETNYÁK SZOVJET matematikus 1956-ban egy dolgozatában bevezette az O_δ ponthalmaz fogalmát⁶⁸. Az O_δ halmaz — lényegében véve — egy olyan elemi felület, melynek bármely pontjához hozzáilleszhető a felületnek mindig ugyanarról az oldaláról egy δ sugarú támaszgömb. Nyilván az O_δ halmazok speciális δ sugarú körkonvex (gömbkonvex) halmazok. Ui. könnyen megadható olyan elemi felület, mely δ sugarú gömbkonvex, viszont nem O_δ halmaz. Ilyent szolgáltat pl.

⁶⁷ A ϱ -ciklus segítségével a PERKAL-féle konvexitás kiterjeszhető úgy is, hogy az ε sugarú kör helyett ϱ sugarú ciklust szerepeltetünk. Ezzel a kiterjesztéssel olyan ponthalmazhoz jutunk, mely a ponthalmaz zárt burkától, a konvex burkon keresztül elvezet a ponthalmazt tartalmazó legkisebb körig (91. ábra).

⁶⁸ Rezernyák [60.]

egy téglalap, ha behajlítjuk úgy, hogy „profilja” nyomtatott N legyen (93. ábra). Az O_δ halmazok speciális PRV (predsztávimoj ráznosztju vipuklih ... \equiv konvex (függvények) különbségeként előállított ...) halmazok is. A PRV halmaz fogalmát

N

A. D. ALEXANDROV vezette be 1949-ben.⁶⁹ A PRV halmaz olyan elemi felület, melynek bármely pontjának kis környezete $z=f(x, y)-g(x, y)$ alakban állítható elő, ahol $f(x, y)$ és $g(x, y)$ konvex függvények.

93. ábra

6. Ha egy T ponthalmaz JORDAN-féle ív komponenseket is tartalmaz, akkor lényegesen más és más T_ρ körkonvex ponthalmaz fogalomhoz jutunk aszerint, hogy csupán azt követeljük, hogy a JORDAN-féle ív minden pontjához tartozzék ρ sugarú támaszciklus, vagy pedig ezenkívül még azt is, hogy a szereplő támaszciklus az ív egyik, ill. mindkét oldalán szerepeljen.

2. §. Tételek

Ebben a paragrafusban körelhelyezéseket vizsgálunk körkonvex tartományokban.

FEJES TÓTH-tól ered a következő tétel:⁷⁰

Ha az euklideszi síkon egy konvex tartományában legalább két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör van elhelyezve, akkor ezeknek a köröknek a tartományra vonatkozó sűrűsége $< \frac{\pi}{\sqrt{12}}$.

Az első általánosítása ennek a tételnek, amellyel a következőkben foglalkozni óhajtunk, a

XII. TÉTEL: *Ha az euklideszi sík egy ($\rho > 0$) összefüggő ρ sugarú körkonvex tartományában legalább két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör van elhelyezve, akkor ezeknek a köröknek a tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}, \text{ ha } \rho \geq \rho_0,$$

$$\delta \leq \frac{\pi}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho} + \frac{\pi}{2} + (1 - \rho^2) \arcsin \frac{1}{1 + \rho}}, \text{ ha } 1 \leq \rho < \rho_0,$$

$$\delta \leq \frac{\pi}{\rho\sqrt{1 + 2\rho} + \frac{\pi}{2} + (1 - \rho^2) \arccos \frac{\rho}{1 + \rho}}, \text{ ha } \rho < 1,$$

ahol $\rho_0 = 4,8... a$

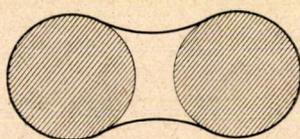
$$\sqrt{\rho^2 + 2\rho} + \frac{\pi}{2} + (1 - \rho^2) \arcsin \frac{1}{1 + \rho} = \sqrt{12}$$

egyenlet pozitív gyöke.

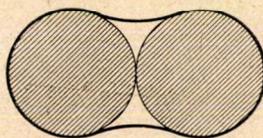
⁶⁹ A. D. ALEXANDROV [4], I. még A. D. ALEXANDROV—V. A. ZALGALLER [6].

⁷⁰ FEJES TÓTH [19], 1948.

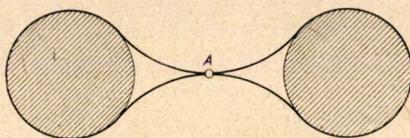
Bizonyításunk előtt megadjuk a tételben szereplő mennyiségek szemléletes jelentését. Azt a tartományt, mely két-két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör ϱ -konvex burka (94. ábra), ϱ -piskótának nevezzük. Tekintsük ennek azt a két szélső esetét, amidőn az egységkörök (95. ábra), ill. a ϱ sugarú körök érintkeznek



94. ábra



95. ábra

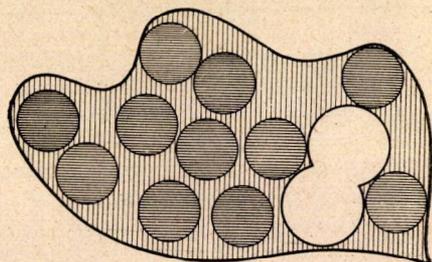


96. ábra

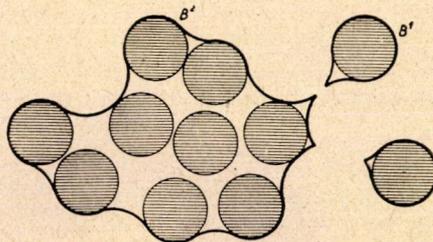
(96. ábra).⁷¹ E két esetben a két egységkörnek a piskótára vonatkozó sűrűségét d_{1-1}^{ϱ} , ill. $d_{1-1}^{\varrho-\varrho}$ -val jelöljük. Ekkor

$$d_{1-1}^{\varrho_0} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}, \quad d_{1-1}^{\varrho} = \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho + \frac{\pi}{2} + (1 - \varrho^2) \arcsin \frac{1}{1 + \varrho}}}$$

$$d_{1-1}^{\varrho-\varrho} = \frac{\pi}{\varrho\sqrt{1 + 2\varrho + \frac{\pi}{2} + (1 - \varrho^2) \arcsin \frac{\varrho}{1 + \varrho}}}$$



97. ábra



98. ábra

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $\{K\}$ körrendszer (97. ábra) ϱ -konvex B burkát (98. ábra). Mint a 98. ábrán is mutatja B általában nem összefüggő. B egy-egy összefüggő részét B^1 , ill. B^2 -vel jelöljük aszerint, hogy a $\{K\}$ körrendszernek egy vagy legalább két körét tartalmazza. Nyilván $B = \Sigma B^1 + \Sigma B^2$.

⁷¹ Tételünkben szereplő egyenlet bal oldala — egyik szélső értéket képviselő — piskóta (95. ábra, az egységkörök érintkeznek) területét adja, s így ez ϱ -nak növekvő függvénye.

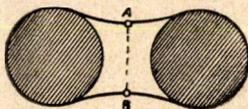
Legyen a B^1 tartományban levő egységkör K . Mivel az eredeti T tartomány összefüggő, van olyan A pontja, mely a K körtől $\sqrt{2\varrho+1}-1$ távolságra van (96. ábra). Mivel viszont a T tartomány ϱ sugarú körkonvex is, könnyen belátható, hogy a K körrel együtt a T tartományhoz tartozik A és K ϱ -konvex T^1 burka.

A T tartomány így értelmezett T^1 , ill. $T^2 \equiv B^2$ résztartományai nyilván diszjunktak.

Tételünk bizonyításához elegendő kimutatni, hogy 1. mind a T^1 tartományban, 2. mind pedig a T^2 tartományban a körök sűrűsége nem haladja meg a tételünkben szereplő sűrűségkorlátot.

1. A T^1 tartományban a körök sűrűsége a $d_1^{\varrho-\varrho}$ értéket veszi fel, mely megfelel tételünk állításának, ui. $\varrho \geq 1$ esetén nyilvánvaló, hogy $d_1^{\varrho-\varrho} \leq d_1^{\varrho-1}$, $\varrho < 1$ esetén pedig $d_1^{\varrho-\varrho}$ éppen a tételben szereplő korlát.

2. Annak bizonyítására, hogy a T^2 tartományban a körök sűrűsége nem haladhatja meg a tételünkben szereplő korlátot, két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy I. $\varrho \geq 1$, II. $\varrho < 1$.



99. ábra

I. $\varrho \geq 1$. A T^2 tartományt a körelhelyezésnek megfelelően $\{D\}$ DIRICHLET cellákra bontjuk, s ezeket három csoportba osztjuk aszerint, hogy határuk a) nem tartalmaz ϱ sugarú körívet, azaz D sokszög, b) egyetlen ϱ sugarú körívet tartalmaz, c) legalább két ϱ sugarú körívet tartalmaz.

a) Ha D sokszög, akkor tudjuk, hogy D -ben a körsűrűség $\leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ (l. pl. az

I. tétel bizonyítása).

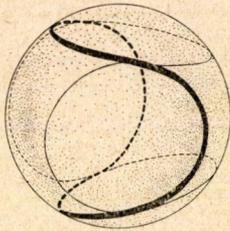
b) Ha D határának egyetlen egy szakaszát ϱ sugarú körív képezi, akkor a K kör és a határát képező ϱ sugarú kör hatványvonalával helyettesítjük a ϱ sugarú körívet (pontosabban mondva csak a hatványvonal D -ben levő részével helyettesítjük a ϱ sugarú körívet). Az így nyert $D^* \subset D$ cellában a körsűrűség $\leq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$.

c) Legyen K olyan kör, melyhez tartozó D cella legalább két ϱ sugarú körívet tartalmaz. Legyen továbbá $M \dots N$ két szomszédos ϱ sugarú körívet összekötő az a töröttvonal, amely a D határához tartozó hatványvonal szakaszokból áll. Legyen B a K körnek és az $M \dots N$ töröttvonalnak ϱ -konvex burka. Nyilván $D^* = D \cap B \subset D$. Az újonnan kapott D^* cella határvonalát képező töröttvonal végpontjait továbbra is M - és N -nel jelöljük. Ha B nem összefüggő, akkor az 1. eset mintájára könnyen belátható, hogy van olyan $D^{**} \subset D$ cella, amelyben a körsűrűség $d_1^{\varrho-\varrho}$. Ha viszont B összefüggő, akkor két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a K körön „szabadon” hagyott λ ív $\geq 2\left(\pi - \arccos \frac{1}{1+\varrho}\right)$ vagy $< 2\left(\pi - \arccos \frac{1}{1+\varrho}\right)$.

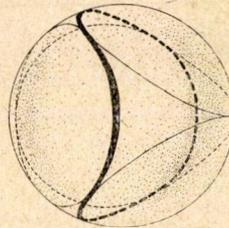
Első eset: $\lambda \geq 2\left(\pi - \arccos \frac{1}{1+\varrho}\right)$. Legyen A, B a két λ sugarú köríven levő egymáshoz legközelebb fekvő pontpár (99. ábra). A D^* cella képzését szem előtt tartva, könnyen belátható, hogy az $M \dots N$ töröttvonal szélső szakaszai az M , ill. N pontban a megfelelő ϱ sugarú körívvel nem alkotnak tompaszöveget, s így az AB szakasz, mely ezekkel az ívekkel derékszöveget alkot, a D cellában van. A D^*

cella helyett tekintsük ennek a K kört tartalmazó azon R résztartományát, mely úgy keletkezik, hogy AB -vel ketté vágjuk a D^* tartományt.⁷² Könnyen belátható, hogy már az R tartományban is $\frac{K}{R} \cong d_1^{q-e}$.

Második eset: $\lambda < 2\left(\pi - \arccos \frac{1}{1+q}\right)$. A λ körív egy tetszőleges pontjából D^* határan ellentétes irányokban haladunk, míg a q sugarú íveken levő E_1 és E_2 pontokig nem érünk, amelyekből a K körhöz húzott érintők az E_1 , ill. E_2 pontban



100a. ábra



100b. ábra

a megfelelő q sugarú körívvel derékszöget alkotnak. D^* definíciójánál fogva tartalmazza E_1 - és E_2 -t. Könnyen belátható még, hogy E_1 -, ill. E_2 -ből húzott e_1 , ill. e_2 érintő is a D^* cellában van. Ezek szerint K , e_1 és e_2 konvex B burka résztartománya a D^* cellának. A B tartományban a körsűrűség éppen d_1^{q-e} .

II. $q < 1$. Erre az esetre bizonyításunk a következő: a T tartományt felbontjuk D Dirichlet cellákra és lényegében a $q > 1$ esetnél alkalmazott gondolatmenetet követjük. Ha D sokszög vagy határa legalább két q sugarú körívet tartalmaz, akkor a $q > 1$ esetre adott bizonyítás jó $q < 1$ esetén is. Tehát csupán azzal az esettel kell foglalkoznunk, ha D határa egyetlen q sugarú K_q körívet tartalmaz. Helyettesítsük a D cellát azzal a kisebb területű D^* sokszöggel, amelyet úgy kapunk, hogy a D cellát átmetszjük a K és K_q hatványvonalával. Elegendő bizonyítani, hogy $\frac{K}{D^*} \cong d_1^{q-e}$. Ez viszont a 4. segédtétel értelmében teljesül.

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A tétel bizonyításából kiolvasható, hogy egyenlőség lép fel $q < q_0$ esetén, ha a körkonvex tartomány extrémális alakzatú piskóta tartomány.⁷³

Jelentse d_{r-r}^q , ill. d_{r-e}^{q-e} az r sugarú körök maximális sűrűségét két r sugarú kört tartalmazó extrémális q -piskótában, azaz midőn a két r sugarú kör, ill. a két q sugarú kör érintkezik (95., 96. ábra).

A XII. tétel birtokában, követve FEJES TÓTH már idézett tételének indukciós bizonyításmenetét, adódik a

⁷² Az R tartományban a körsűrűség λ -nak alulról konkáv függvénye. Ui. az R tartomány t területére áll, hogy $r'' = \frac{1}{2}(1+q^2) \sin \lambda$.

⁷³ Itt jegyezzük meg, hogy míg az euklideszi, ill. hiperbolikus sík egybevágó piskóta tartományokkal hézagmentesen és többszörös fedés nélkül nem rakható ki, addig a gömbfelület — bizonyos piskóta párokkal — kirakható. Gondoljunk pl. a teniszlabda két egybevágó piskótartományára (100. a, b ábra).

XIII. TÉTEL: *Ha az euklideszi sík egy összefüggő q -konvex tartományában egymásba nem nyúló n fajta kör van elhelyezve, melyek sugarai r_1, r_2, \dots, r_n és a legnagyobbikból legalább kettő van, akkor a körrendszernek a q -konvex tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \text{Max} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{12}}, d_{r_i}^q, d_{r_i}^{q-e} \right\} \right).$$

4. KOROLLÁRIUM: *Ha az euklideszi sík egy összefüggő q -konvex tartományában egymásba nem nyúló n fajta kör van, melyek sugarai $\cong \frac{q}{q_0} = 4, 8, \dots$ és a legnagyobb körből kettő van, akkor a körrendszernek a q -konvex tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong 1 - \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{12}} \right)^n.$$

A fenti q_0 állandó már a XII. tételben is szerepelt.

Most pedig fordítsuk figyelmünket körök elhelyezésére egy állandó görbületű felület körkonvex tartományában. Ellenpéldán láttuk, hogy hiperbolikus síkon már közönséges konvex tartomány esetén sem adható a körsűrűsége egynél kisebb univerzális korlát. Pontosabban ez az ellenpélda azt igazolja, hogy a hiperbolikus sík valamely konvex tartományában elhelyezett legalább két r sugarú egymásba nem nyúló kör kitöltési sűrűségére nem adható egy r -től független egynél kisebb felső korlát.⁷⁴ Mint látni fogjuk, megadható viszont olyan r és q -tól függő korlát (l. a XIV. és XV. tétel), mely bizonyos esetekben pontos.

A XII. tétel bizonyításának gondolatmenetéből ($q > 1$ eset) automatikusan adódik a

XIV. TÉTEL: *Az állandó görbületű felület egy összefüggő q -konvex tartományában elhelyezett legalább két r sugarú körnek a tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong \text{Max} \{d(r, r, r), d(r, q, q), d_q(r)\},$$

ahol $d(r, a, a)$ jelenti az r sugarú kör sűrűségét a HAJÓS-féle $H(r, h_{r-a-a})$ sokszögben, $d_q(r)$ pedig jelenti két r sugarú kör q -piskótájában fellépő maximális sűrűségét.

5. KOROLLÁRIUM: *A gömbfelület egy szűkebb értelemben vett konvex tartományában elhelyezett legalább két egymásba nem nyúló r sugarú körnek a tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \cong \text{Max} \{d(r, r, r), d_{\frac{\pi}{2}}(r)\}.$$

Ez a korlát r minden értékére $\left(0 < r \cong \frac{\pi}{4} \right)$ kisebb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -nél, s így $\delta \cong \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ (vö. MOLNÁR [59]).

Megjegyzések. 1. 4. segédtételünket felhasználva kimutatható, hogy a XIV. tételben $a \cong 5$ esetben

$$\delta \cong \text{Max} \{d(r, r, r), d_q(r)\}.$$

⁷⁴ Az euklideszi síkra vonatkozó XII. és XIII. tételek a gömbfelületre sem vihetők át lényeges módosítás nélkül.

2. Hiperbolikus síkon a ϱ -piskótában a körök által le nem fedett t terület a „szabadon hagyott” λ körívnek konkáv függvénye.⁷⁵ Ezért a felső korlátban szereplő $d_\varrho(r)$ érték helyettesíthető a ϱ -piskóta két szélső esetéhez tartozó legnagyobb körsűrűséggel.

3. Az állandó görbületű felületen nehézséget okoz az (r, ϱ) sík azon tartományainak meghatározása, amelyekben $d(r, r, r)$, $d(r, \varrho, \varrho)$ és $d_\varrho(r)$ közül az első, a második vagy a harmadik a legnagyobb. A problémát megnehezíti az is, hogy $d(r, r, r)$ az r -nek nem monoton függvénye.

4. Hiperbolikus síkon teljesen nyitott probléma még a $(\pm\infty, \pm 2\infty)$ „intervallumba” eső ϱ -konvex tartományokban levő körök kitöltési sűrűségének vizsgálata.

Az állandó görbületű felület körkonvex tartományában elhelyezett egymásba nem nyúló inkongruens körökre vonatkozólag csak egy tételt említünk. A XIII. tétel mintájára bizonyítható a

XV. TÉTEL: *Ha az állandó görbületű felület egy összefüggő ϱ -konvex tartományában egymásba nem nyúló n fajta kör van elhelyezve, melyeknek sugarai r_1, r_2, \dots, r_n és a legnagyobb körből legalább kettő van, akkor a köröknek a ϱ -konvex tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \text{Max} \{d(r, r, r), d(r, \varrho, \varrho), d_\varrho(r)\}).$$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] M., AGENO, I. Elementi per una sistematica dei monostrati chiusi I., *Istituto superiore di sanita* 24 (1961) 1–19.
 [2] 2. Elementi per una sistematica dei monostrati chiusi II., *Istituto superiore di sanita* 28 (1961) 1–63.
 [3] A. D. ALEXANDROV, I. *Konvexe Polyeder*, Berlin 1958.
 [4] 2. О поверхностях представимых разностью выпуклых функций Изв. Акад. Наук Казанской С. С. С. Р. 60 (3), 1949, 3–20.
 [5] 3. Поверхности, представимые разностями выпуклых функций. ДАН 72 (4), 1950, 613–620.
 [6] А. Д. Александров—В. А. Залгаллер: Двухмерной многообразия, ограниченной кривизны (Основы внутренней геометрии поверхностей) (kézirat).
 [7] W. J. BLUNDON, Multiple covering of the plane by circles, *Mathematica* 4 (1957) 7–16.
 [8] B. BOLLOBÁS, A sík lefedése egybevágó konvex sokszögekkel I., *Középisk. Mat. Lapok* 22 (1961) 49–55.
 [9] A. H. BOERDIJK, Some remarks concerning close-packing of equal spheres, *Philips Res. Rep.* 7 (1952) 303–313.
 [10] H. S. M. COXETER, *Introduction to Geometry*, New-York—London, 1961.
 [11] L. DANZER, *Verteilung von elf Punkten auf der Kugel*, Előadás az Oberwolfachi kollokviumon, 1958.
 [12] G. L. DIRICHLET, Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, *J. für die reine und angew. Math.* 40 (1850) 209–227.

⁷⁵ $t'' = \frac{\sin 2\sqrt{\kappa}(r+\varrho) \sin \sqrt{\kappa}(r+\varrho) \sin \lambda}{\left(\cos^2 \frac{\lambda}{2} + \cos^2 \sqrt{\kappa}(r+\varrho) \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)^2}$.

- [13] L. FEJES TÓTH, Über einen geometrischen Satz, *Math. Zeitschrift* 46 (1940), 83–85.
- [14] 2. Az egyenlőoldalú háromszöggrács mint szélsőértékfeladatok megoldása, *Mat. és Fiz. Lapok* 49 (1942) 238–248.
- [15] 3. Über die Abschätzung des Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Iber. disch. Math.-Ver.* 53 (1943) 66–68.
- [16] 4. Egy gömbfelület lefedése egybevágó gömbsüvegekkel, *Mat. és Fiz. Lapok* 50 (1943) 40–46.
- [17] 5. *Extremális pontrendszerek a síkban a gömbfelületen és a térben*, Kolozsvár 1944.,
- [18] 6. Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise, *Comment. Math. Helvetici* 17 (1944–45) 256–261.
- [19] 7. On the densest packing of circles in a convex domain, *Norske Vid. Selks. Forhdl. Trondheim*, 23 (1948) 32–34.
- [20] 8. Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung, *Comment. Math. Helvetici* 23 (1949) 342–349.
- [21] 9. On the densest packing of spherical caps, *Amer. Math. Monthly* 56 (1949) 330–331.
- [22] 10. Some packing and covering theorems, *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* 12/A (1950) 62–67.
- [23] 11. Ausfüllung eines convexen Bereiches durch Kreise, *Publ. Math. Debrecen* 1 (1949) 92–94.
- [24] 12. Covering with dismembered discs, *Proc. Amer. Soc. Math.* 1 (1950) 806–812.
- [25] 13. *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953.
- [26] 14. Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* 4 (1953) 103–110.
- [27] 15. Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* 4 (1953) 111–114.
- [28] 16. Über die dichteste Horozyklenlagerung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* 5 (1954) 41–44.
- [29] 17. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Москва, 1958.,
- [30] 18. Eräitä „kauniita” extremalkuvioita, *Arkhimedes*, 2 (1959) 1–10.
- [31] 19. Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, *Elemente der Math.* 15 (1960) 25–36.
- [32] L. FEJES TÓTH–J. MOLNÁR: Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachrichten* 18 (1958) 236–243.
- [33] L. FEW: The shortest path and the shortest road through n points, *Mathematica* 2 (1955) 141–144.
- [34] S. FINSTERWALDER: Regelmässige Anordnungen gleicher sich berührender Kreise in der Ebene, auf der Kugel und auf der Pseudosphäre, *Abhandl. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-nat. Abt.* 38 (1936) 1–42.
- [35] A. FLORIAN: Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *II. Magyar Math. Kongr., Előadás kiv.* Budapest, 1960. II.17.
- [36] 2. Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *Rend. del Circolo Mat. di Palermo* 9 (1960) 300–312.
- [37] H. GROEMER: Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich, *Math. Zeitschrift* 73 (1960) 285–294.
- [38] W. HABICHT–B. L. VAN DER WAERDEN: Lagerung von Punkten auf der Kugel, *Math. Annalen* 123 (1951) 223–234.
- [39] H. HADWIGER: 1. Die erweiterten Steinerschen Formeln für Ebene und sphärische Bereichen, *Comment. Math. Helvetici* 18 (1946) 59–72.
- [40] 2. Über extreme Punktverteilungen in ebenen Gebieten, *Math. Zeitschrift* 49 (1944) 305–309.
- [41] A. HEPPES: 1. Über mehrfache Kreislagerungen, *Elemente der Math.* 10 (1955) 125–127.
- [42] 2. Mehrfache gitterformige Kreislagerungen in der Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* 10 (1959) 141–146.
- [43] HEPPES A.–MOLNÁR J.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában I., *Mat. Lapok* 11 (1960) 330–355.
- [44] E. JUCOVI : Umienstie 17, 25 a 33 bodov na guli, *Mat. Fiz. Casopis* 9 (1959) 173–176.
- [45] R. KERSHNER: The number of circles covering a set, *Amer. J. Math.* 61 (1939) 665–671.
- [46] KRAMMER G.: Megjegyzés gömbnek körökkel való kitöltéséhez és lefedéséhez, *Mat. Lapok* 11 (1960) 120–123.

- [47] A. E. MAYER: Eine Überkonvexität, *Math. Zeitschrift* **39** (1935) 511–532.
- [48] H. MESCHKOWSKI: Elementare Behandlung von Lagerungsproblemen, *Math. Phys. Semesterberichte* **4** (1955) 256–262.
- [49] 2. Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie, Braunschweig 1960.
- [50] J. MOLNÁR: 1. Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise I, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1952) 266–275.
- [51] 2. Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise II, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953) 150–157.
- [52] 3. Inhaltsabschätzung eines sphärischen Polygons, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **3** (1952) 67–70.
- [53] 4. Körelhelyezések a gömbön, *Mat. Lapok* **4** (1953) 113–123.
- [54] 5. Cîteva probleme nerezolvate de geometrie, *Gaz. Mat. Fiz. Bucuresti* **12** (1958) 238–243.
- [55] 6. Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Ann. Univ. Sci. Budapestinensis, Sect. Math.* **2** (1959) 31–32.
- [56] 7. Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante, *Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa* (nyomás alatt)
- [57] 8. Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler, *Accad. Naz. dei Lincei* **30/5** (1961) 700–705.
- [58] J. PERKAL: Sur les ensembles ε -convexes, *Colloquium Math.* **6** (1956) 1–10.
- [59] R. RADO: Some covering theorems I., *Proc. London Math. Soc.* **51** (1949) 232–264.
- [60] Ю. Г. Решетняк, Об одном обобщении выпуклых поверхностей, *Мат. Сборник* **40** (82) 1956, 381–398.,
- [61] H. RUTISHAUSER: Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche, *Comment. Math. Helvetici* **17** (1944–45) 327–331.
- [62] K. SCHÜTTE: Überdeckung der Kugel mit höchstens acht Kreisen, *Math. Annalen* **129** (1955) 181–186.
- [63] K. SCHÜTTE—B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? *Math. Annalen* **123** (1951) 96–124.
- [64] B. SEGRE—K. MAHLER: On the densest packing of circles, *Amer. Math. Monthly* **51** (1944) 261–270.
- [65] U. SINOGOWITZ: Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreisen in der Ebene, *Z. Kristallogr.* **100** (1939) 461–508.
- [66] A. THUE: Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Förhdl. Skand. Naturfors.* **14** (1892) 352–353.
- [67] S. VERBLUNSKY: On the least number of unit circles which can cover a square, *J. London Math. Soc.* **24** (1949) 164–170.
- [68] B. L. VAN DER WAERDEN: Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze, *Math. Annalen* **125** (1952) 213–222.
- [69] L. L. WHITE: Unique arrangements of points on a sphere, *Amer. Math. Monthly* **59** (1952) 606–611.
- [70] В. А. Залгаллер: Об одном необходимом признаке плотнейшего расположения фигур, *УМН* **8** (4) 56 1953, 153–162.