ALGEBRAI RENDSZEREKEN ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEGYENLETEK
I. ALGEBRAI MÓDSZEREK A FÜGGVÉNYEGYENLETEK ELMÉLETÉBEN*

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

1. §. A függvényegyenletek elméletének alapvonalai

1. Célkitűzés. A matematika jelenkori fejlődésére jellemző a klasszikus széttagoltság feloldódása, távolálló ágazatok összefonódása. Így pl. az algebra és az analízis határterületein önálló ágazatok születtek, melyek mind a problémáik, mind pedig a módszereik tekintetében egyaránt sorolhatók akár az algebrához, akár az analízishez. E dolgozat a függvényegyenletek elméletében fellelhető algebrai vonatkozások kidomborításával kíván egy felépítést bemutatni.

Az algebrai szemlélet alkalmazásának a gyümölcseként elsősorban az tűnik ki, hogy előzetes vagy közbeiktatott algebrai vizsgálatok megkönnyítik sok olyan függvényegyenlet megoldását, melyet eddig csupán az analízis fegyvertárához tartozó szokásos módszerrel tárgyaltak. Nem célunk, hogy az absztrakt algebrában előforduló klasszikus függvényegyenletekkel foglalkozzunk, mint pl. amilyenekre a csoport bővítések problémája vezet. Erősen leszükítené a problémát, ha ezekre analitikus módszereket alkalmaznánk. Inkább arra törekszünk, hogy rámutassunk az eddig csak a speciális valós vagy komplex test felett értelmezett függvényegyenletek általánosabb algebrai struktúrák felett való vizsgálatának lehetőségére, bár e téren is meg kell küzdenünk egyes előítéletekkel. Szembe kell szállni azzal az ellenvetéssel, hogy amennyiben valamilyen általánosítást az illető függvényegyenlet eddig ismert megoldási módszere egyáltalán megengedne, akkor sem jutnánk a valós vagy komplex testtől lényegesen eltérő általánosabb struktúrához, és ott sem mondana semmi különös újat a megoldás. E kifogás azonban csak addig tartható fenn, amíg meg nem vizsgáljuk néhány példán, hogy eddig milyen módszerrel történt az illető függvényegyenlet megoldása. Ennek során könnyen rájövünk arra, hogy a problémát általánosabban megfogalmazva, algebrai módszerekkel, rövidebb úton sokkal távolabb jutunk, amennyiben a megoldás lehet sokkal általánosabb is, tekintve, hogy az analízis segédeszközeihez szükségképpen megkívánt folytonossági, differenciálhatósági stb. megszorítások elesnek. Példaként felhozhatnám az

$$F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)]$$

függvényegyenletet [2].

Egyébként az algebrai szemléletnek az is jelentős haszna lehet, hogy az a függvényegyenlet-fajták és a megoldások, továbbá a megoldásban szereplő tetszőleges elemek osztályozását áttekinthetőbbé teszi.

* A dolgozat a szerző 1960-ban készített doktori disszertációjának egy része, RÉDEI LÁSZLÓ, FUCHS LÁSZLÓ, és főként ACZÉL JÁNOS opponensi véleményének figyelembevételével módosított formában.

2. A függvényegyenletek osztályozása. Fogalmazzuk meg pontosan, mit jelentenek a „függvényegyenlet", a „függvényegyenlet megoldása", a „megoldásban szereplő tetszőleges elemek" kifejezések!

Tekintsük az $F, G, \ldots$ függvénynek egy H halmazát, melyek egy X halmaz elemeit egy Y halmazba képezik le. Legyen φ a H-nak egy C halmazba való leképezése. *Függvényegyenletnek* nevezzük a

$$\varphi F = c \tag{1}$$

kifejezést, ahol c a C valamely rögzített eleme. Az F függvény az egyenletben szereplő meghatározandó ismeretlen függvény. Az egyenlet *megoldásának* nevezzük bármelyik F-et, amely (1)-et kielégíti. A megoldások M összessége a H-nak részhalmaza.

Az *F megoldás H-ra vonatkozó legáltalánosabb alakja* valamely E halmazból származtatható

$$F = \chi f, \quad f \in E$$

alakban, ahol f az E tetszőleges eleme, és χ olyan leképezés, mely E-t M-re képezi le. A megoldás legáltalánosabb alakja nyilván határozatlan egy tetszőleges $1-1$ leképezés erejéig, ugyanis ez $f \in E$ elemekre az

$$f \to f' = \varepsilon f$$

$1-1$ leképezést alkalmazva olyan E' halmazt nyerünk, amelynek elemeiből a megoldások

$$F = \chi' f', \qquad \chi' = \chi \varepsilon^{-1}, \qquad f' \in E'$$

alakban lesznek felírhatók. Határozatlan továbbá E olyan szempontból is, hogy χE többszörösen fedheti M-et, vagyis egy-egy $F \in M$ megoldást több $f, g \in E$ elemből is származtathatunk az

$$F = \chi f = \chi g$$

alakban. Célszerű tehát kiválasztani E-nek azt a legszűkebb $\bar{E}$ részét, melyre $\chi \bar{E}$ már egyszeresen fedi M-et, mert így kapjuk meg a megoldásban szereplő *lényeges* tetszőleges elemeket, melyek közül már egyik sem hagyható el a teljes megoldási rendszer származtatásához. Ez az eset áll fenn pl. a lineáris differenciálegyenletek esetében, midőn a legáltalánosabb megoldás egyetlen lineárisan független (alap) rendszerből származtatható. A lineáris függvényegyenletek elméletében szemléltethetők legkézzelfoghatóbban e fogalmak [15, 28]. Minthogy a megoldásban szereplő tetszőleges elemek halmaza és a megoldás legáltalánosabb alakjának fogalma a megoldások részhalmazához képest több határozatlanságot tartalmaz, ezért fő feladatunknak ez utóbbi megadását tekintjük egy függvényegyenlet megoldásával kapcsolatban.

Gyakori eset, hogy X és Y valamely A_i, illetve B_i halmazokból képezett direkt szorzat:

$$X = \bigotimes_{i=1}^{n} A_i, \qquad Y = \bigotimes_{i=1}^{m} B_i,$$

vagyis az $y = F(x)$ függvényben az y, x függő, illetve független változók több komponensre bomlanak:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad x_i \in A_i,$$
$$y = (y_1, \ldots, y_m), \qquad y_i \in B_i.$$

Ekkor az (1) függvényegyenlet lényegében m ismeretlen függvényt tartalmaz, és n független változót, a függvényegyenletre jellemző eme számokat tehát az *ismeretlen függvénynek*, illetve *szabad változók számának* nevezzük. Fontos speciális eset, midőn az $F(x)$ függvény mindegyik komponense független bizonyos x_i változóktól. Azt a számot, mely megmutatja, hogy az egyenletben szereplő F komponensei közül mindegyik legalább hány változótól független, az egyenlet *degeneráltsági fokának* nevezzük. Szokás még megkülönböztetni a *függvények minimális változó-számát* is, mely megadja, hogy F komponensei közül mindegyik legalább hány változótól függ ténylegesen.

A referáló folyóiratok *speciális függvényegyenletek* címszó alatt foglalják össze az olyan (1) alatti egyenleteket, melyekben φ az ismeretlen F függvény komponensein kívül csupán véges számú megadott függvényt tartalmaz, és e függvényekből van felépítve a függvényeknek a független változók helyébe véges számú lépésben történő helyettesítésével. A megadott függvények egymásba helyettesítése nem változtat lényegesen a függvényegyenlet szerkezetén, az ismeretlen függvények egymásba helyettesítése azonban annál inkább. A függvényegyenletet *annyiszorosan összetettnek* nevezzük, ahány lépésben helyettesítésekkel felépíthető a függvényegyenlet, az ismeretlen függvényt, illetve annak adott függvényét argumentum gyanánt szerepeltetve az ismeretlen függvényben. Pl. a kétváltozós F_i függvényekre értelmezett

$$F_1[F_2(x_1, x_2), F_3(x_3, x_4)] - F_4[F_5(x_1, x_3), F_6(x_2, x_4)] = 0$$

egyenlet egyszeresen összetett, ugyanis felírható az

$$\alpha[F\beta F(x)] = 0$$

alakban, ahol

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad F = (F_1, F_2, \dots, F_6),$$

$$\alpha(F_1, \dots, F_6) = F_1(F_1, F_3) - F_4(F_5, F_6),$$

$$\beta(F_1, \dots, F_6) = \big(F_2(x_1, x_2), F_3(x_3, x_4), F_5(x_1, x_3), F_6(x_2, x_4)\big).$$

és a $F_i(x)$ függvény független az x változó bizonyos komponenseitől.

3. Az algebra alkalmazási területei a függvényegyenletek elméletében. Vegyük rendszeresen szemügyre, hol nyílik lehetőség az algebrai fogalmak és módszerek hatékony alkalmazására a függvényegyenletek elméletében.

a) Egyes függvényegyenlet-problémák, melyeket korábban egymástól elszigetelve vizsgáltak, meglepő rokonságot mutatnak, s közös általánosításuk algebrai szempontból egységesen kezelhető. Példaként említhetném az

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \qquad \text{(asszociativitás)},$$

$$F[F(x, z), F(y, z)] = F(x, y) \qquad \text{(tranzitivitás)},$$

$$F[F(x, u), v] = F(x, u+v) \qquad \text{(tranzláció)},$$

$$F[F(x, u), v] = F[x, G(u, v)] \qquad \text{(transzformáció)},$$

$$F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)] \qquad \text{(biszimmetria)}$$

függvényegyenleteket [2], melyek valamennyien az $F: A^4 \to A^m$ függvényre értelmezett, kétszeresen összetett és kétszeresen elfajult (degenerált)

$$F\{\pi F[\varrho F(x)]\} = c$$

függvényegyenlet speciális esetei, ahol π, ϱ az A^m direkt szorzat halmaz bizonyos adott vetítései A^4-re.

Segítségünkre lehetnek továbbá a függvényegyenletben szereplő függvényekre kirótt mellékfeltételek pontosabb megjelölésénél is az algebrai fogalmak. Sok esetben kiderült pl., hogy az előzőleg analitikus módszerekkel kezelt függvényegyenletben a folytonossági, szigorú monotonitási mellékfeltételek pótolhatók sokkal általánosabb, algebrai, invertálhatósági feltételekkel.

b) Csupán felületes áttekintésre is feltűnik, hogy a függvényegyenletek megoldásának két alapvető módszere van: a szabad változók, illetve az egyenletben szereplő bizonyos függvényértékek ügyes megválasztása és az egyenlet ismételt alkalmazásával (iterációval) nyert többszörösen összetett egyenletből határátmenettel olyan egyenlet felírása, melyből valamelyik függvény már könnyebben meghatározható, ill. a függvény tetszőleges helyen felvett értéke megkonstruálható. Az előbbi módszer szempontjából nem szorul alátámasztásra az algebrai fogalmak (mint pl. az invertálhatóság, vagy ennek hiányában a kongruencia osztályokba sorolás) s különösen a gruppoidok, kvázicsoportok elméletében szereplő fogalmak jelentősége. Kevésbé nyilvánvaló azonban, hogy a jellegzetesen analitikus iteratív módszer, ahol a határátmenet esetén a folytonosságnak is mindig szerepe van, hogyan kezelhető és általánosítható algebrai módszerré. Gondoljuk meg azonban, hogy egy vagy több függvény ismételt egymásba helyettesítésével egy félcsoporthoz, illetve invertálható függvényekkel csoporthoz jutunk, tehát szabad szorzat konstrukcióval olyan egyenlethez jutunk, melyben egy félcsoport, illetve csoportművelet is szerepel, s ez minden folytonossági feltétel nélkül is megkönnyítheti a megoldást. E módszer alkalmazását látjuk a [23, 24] dolgozatokban.

További általános módszer a függvényegyenletek megoldására a differenciál-, illetve integrálegyenletre való vezetés. E téren valóban nem sok mondanivalója akad az algebristának. Viszont tagadhatatlan, hogy sok függvényegyenlet megoldási probléma, mint pl. a geometriai objektumok klasszifikáció elméletében előfordulók is, melyeket előzőleg analitikus módszerekkel [4] (sőt korábban a Lie-elmélet apparátusával [16]) vizsgáltak, algebrai problémáknak bizonyultak, s pl. e függvényegyenletek megoldási módszere lényegében egy csoport, az analitikus függvények szubsztitució csoportjának szerkezeti vizsgálatát: az összes lehetséges (illetve folytonossági feltételek mellett a zárt) alcsoportok megkeresését jelenti [16]. Néhány példa kapcsán ilyen kérdéssel foglalkozik [5, 21] is.

Lényegében a differenciálegyenletre vezetés módszeréhez tartozik, ill. rokon azzal az az eljárás is, hogy az ismeretlen függvényeket sorbafejtve és a függvényegyenletbe helyettesítve, az együtthatók összehasonlítási elve alapján rekurzív összefüggést állapíthatunk meg a meghatározandó függvény együtthatóira. E módszer kiterjesztésével kapcsolatban merült fel [42] az a probléma, hogy melyik az a legáltalánosabb algebrai struktúra, melyben a közönséges polinómokhoz hasonlóan képezett polinómok együtthatóinak összehasonlítási elve még érvényes. E kérdés még lezáratlan, a [3, 22] dolgozatok eredményei azonban jelentenek előrehaladást.

Amint integrálegyenletek megoldásánál fontos szerepet játszik az egyenlet linearizálása és miként a lineáris egyenletek elmélete van leginkább kiépítve, úgy a függvényegyenletek közül is a lineáris függvényegyenlet vizsgálata a legfontosabb. Itt is kézenfekvő az algebrai általánosítás, és az algebrai módszerek alkalmazása: gondoljunk csak a homológia csoportok függvényegyenleteire, vagy a csoportok karakter elméletére.

c) Az egyenletek megoldásának, illetve a megoldások legáltalánosabb alakjának felírásánál rendkívül hasznos az algebrai fogalmak használata, mint pl. a bizonyos elemek által kifeszített lineáris altér, izomorfizmus, izotópizmus, homomorf kép stb. Összefoglalva az a), b), c) alatt kifejtetteket: az algebrai fogalmak használata hasznos mind a függvényegyenlet problémák megfogalmazásánál (az egyes egyenlet fajták osztályozásánál), mind a megoldási módszerben, mind a megoldás felírásában.

4. Az elnevezések rövid áttekintése. Az algebra és a kvázicsoportok [11, 21] elméletének szokásos és jól ismert alapfogalmait gyakran használja e dolgozat. Így pl. *algebrának* nevezzük az $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ halmazok és egy F leképezés együttesét, ahol F az $A_1 \times \dots \times A_n$ direkt szorzatot képezi le A_{n+1}-be, amit röviden az

$$F: A_1 \times \dots \times A_n \to A_{n+1}$$

jelöléssel lehet kifejezni. Az $n=2{,}3$ esetben *binér*, *ternér* algebrához jutunk ezen értelmezéssel. Ha az A_k halmazok valamennyien megegyeznek, akkor *gruppoidról* beszélünk. $Q(F)$, vagy más jelöléssel $Q(\circ)$, vagy még rövidebben Q° *kvázicsoport* az olyan binér gruppoid, mely egy Q halmazból és egy

$$F(x, y) = x \circ y : Q \times Q \to Q$$

leképezésből áll, és rögzített $y \in Q$, illetve $x \in Q$ esetén az

$$x \to x \circ y, \quad y \to x \circ y : Q \to Q$$

leképezések invertálhatók.

Itt rögzítjük, hogy mit nevezünk invertálható leképezésnek. Az $x \to y = \alpha x$ leképezésről azt mondjuk, hogy az X halmazt az Y halmaz*ba* képezi le, ha X minden x elemét az Y valamely $y = \alpha x$ eleméhez rendeli hozzá. Az α leképezés X-et Y-ra képezi le, ha az αx, $x \in X$ elemek összessége, amit röviden αX-szel lehet jelölni, kimeríti Y-t: $\alpha X = Y$. Az α leképezésről azt mondjuk, hogy $1-1$, ha minden $\alpha x \in Y$ elemhez pontosan egy $x \in X$ tartozik. Az $\alpha: X \to Y$ leképezés *invertálható* Y-on, ha X-et $1-1$ módon képezi le Y-ra. Nyilván minden $\alpha: X \to Y$ $1-1$ leképezés invertálható az $Y_1 = \alpha X$-en, mely esetleg valódi része Y-nak.

Használjuk a szokásos izotópizmus, homotópizmus, autotópizmus, izomorfizmus, automorfizmus, homomorfizmus, endomorfizmus elnevezéseket. Így pl. az

$$F: A \times B \to C$$

algebra *izotópizmusának* nevezzük az

$$\alpha: A \to A', \quad \beta: B \to B', \quad \gamma: C \to C'$$

invertálható leképezések együttesét, ha van olyan $G: A' \times B' \to C'$, mellyel fennáll

$$G(\alpha x, \beta y) = \gamma F(x, y), \qquad x \in A, \ y \in B.$$

Ilyenkor G-t röviden F izotópjának nevezzük. Nem feltétlen invertálható leképezések esetén megfelelően *homotópizmusról* beszélünk. Ha

$$A=A',\quad B=B',\quad C=C',\quad F=G,$$

akkor (α, β, γ) autotópizmus, illetve endotópizmus, aszerint, hogy a leképezések invertálhatók-e vagy sem. Az

$$A=B=C,\quad A'=B'=C',\quad \alpha=\beta=\gamma$$

speciális esetben viszont a „top" szótag a „morf" szótaggal helyettesítendő, s ekkor megfelelően azt mondjuk, hogy $A'(G)$ az $A(F)$ *izomorf*, illetve *homomorf* képe. G az F *főizotópja*, ha $C=C'$, és γ az azonos leképezés.

2. §. Kvázicsoportokon értelmezett függvényegyenletek

1. Kétszeresen összetett, kétszeresen elfajult, négy szabad változójú, és adott függvényt nem tartalmazó egyenletek osztályozása. A címben megadott függvényegyenlet-típus legáltalánosabb alakja:

$$F\{G[H(x)]\} = c, \tag{2}$$

ahol az ismeretlen F, G, H függvények értelmezési tartománya négytényezős direkt szorzat, s hogy egyáltalán értelme legyen az egyenletnek, G, illetve H értékkészlete F, illetve G értelmezési tartományába kell essen. Ha az egyenlet kétszeresen elfajult, akkor mindegyik függvény lényegében csak két komponenstől függ, tehát az egyenlet így írható:

$$\begin{gathered} F_i\{G_{j_1}[H_{k_1}(x_{p_1}, x_{p_2}), H_{k_2}(x_{q_1}, x_{q_2})], \\ G_{j_2}[H_{l_1}(x_{r_1}, x_{r_2}), H_{l_2}(x_{s_1}, x_{s_2})]\} = c_i, \end{gathered} \tag{2'}$$

ahol az indexek az 1, 2, 3, 4 értékek közül vannak választva.

Mint látjuk, egyenletünk csupa binér műveletet tartalmaz ismeretlen függvény gyanánt, melyek mindannyian egy-egy kéttényezős direkt szorzatot képeznek le valamely halmazra. Ha a függvények olyanok, hogy akármelyik változó értelmezési tartományát alkotó direkt tényezőt $1-1$ módon képezik le az illető függvény teljes értékkészletére, akkor az általánosság korlátozása nélkül azonosíthatjuk a direkt tényezőket és a szereplő kétváltozós függvények értékkészleteit.

Ha $F_i(x, y): Q\times Q \to Q$ kvázicsoport művelet, akkor az

$$F_i(x, y) = c_i \qquad (c_i \text{ rögzített})$$

összefüggés x és y között egy $y=f(x)$ függvénykapcsolatot létesít, mely Q-t nyilván $1-1$ módon képezi le önmagára. Tehát akkor a (2) egyenlet csupa különböző függvénnyel

$$F[G(x_{p_1}, x_{p_2}), H(x_{q_1}, x_{q_2})] = K[L(x_{r_1}, x_{r_2}), M(x_{s_1}, x_{s_2})], \tag{3}$$

$$(x_{j_i}\in Q;\ j=p, q, r, s;\quad i=1, 2)$$

alakban írható fel, ahol pl.

$$F(x, y) \overset{\text{def}}{=} f[G_{j_1}(x, y)],$$

és a szereplő függvények között természetesen akadhatnak megegyezők is.

További egyszerűsítésre vezet az az észrevétel, hogy a szereplő változók mindegyikének legalább kétszer kell előfordulnia az egyenletben, különben a többi változó rögzítésével az derülne ki, hogy az őt tartalmazó függvény csak látszólag függ tőle, s nem is kvázicsoport művelet. Ha valódi négy szabad változót tartalmazó egyenletet tekintünk, akkor mindegyik változónak elő is kell fordulnia. Minthogy az egyenletben összesen 8 helyen szerepel szabad változó, ezért tehát mindegyik változónak pontosan kétszer kell szerepelnie. Így a triviális esetektől eltekintve a következő lehetőségek állhatnak elő:

$$F[G(x,y), H(u,v)] = K[M(x,u), N(y,v)], \tag{4}$$

$$F[G(x,u), H(x,v)] = K[M(y,u), N(y,v)], \tag{5}$$

$$F[G(x,u), H(x,v)] = K[M(y,y), N(u,v)]. \tag{6}$$

Az osztályozás fő szempontja az, hogy szerepel-e ugyanazon változó többször is egyik oldalon, illetve egyazon függvényen belül.

Akapott egyenletek közül (4) a biszimmetria

$$B[B(x,y), B(u,v)] = B[B(x,u), B(y,v)] \tag{7}$$

egyenletének általánosítása, s mindegyikük visszavezethető az asszociativitás függvényegyenletének

$$F[G(x,y), z] = H[x, K(y,z)], \qquad x, y, z \in Q \tag{8}$$

általánosítására. E visszavezetést a 2-ben részletezzük. Itt még azt mutatjuk meg, milyen speciális egyenletek tartoznak ehhez a típushoz. A már említett (7) biszimmetria [2] egyenletén kívül nyilván ide tartozik:

$$(xy)\otimes(uv) = (x\otimes u)(y\otimes v) \quad [13], \tag{9}$$

$$(xy)(uv) = (xv)(uy) \quad [40], \tag{10}$$

$$(xy)(xu) = (vy)(vu) \quad [31], \tag{11}$$

$$(x\otimes y)(u * v) = (x\otimes u)(y * v) \quad [29, 30], \tag{12}$$

$$[(xy)\otimes u][x*(vu)] = vy \quad [12], \tag{13}$$

mely utóbbi egyenlet ugyanis pl. egyenértékű

$$F(x*a, b\otimes u) = F[M(x,b), N(a,u)]$$

-val, ha bevezetjük az

$$F(y,v) \overset{\text{def}}{=} vy$$

függvényt és az $xM=b$, $Nu=a$ összefüggéssel értelmezett M, N függvényeket.

2. Visszavezetés és néhány speciális eset. Mint előzőleg említettük, a négy szabad változót tartalmazó egyenletek bizonyos invertálhatósági feltételek mellett lényegében a kvázicsoportokon értelmezett, asszociatív típusú (8) egyenletre vezethetők vissza, mely csupán három szabad változót tartalmaz. Nézzük ezt a visszavezetést!

Pl. az

$$F[G(x, y), H(u, v)] = K[M(x, u), N(y, v)] \tag{4}$$

egyenlet esetében $u=a$ rögzítéssel azt látjuk, hogy

$$F[x, H(a, y)],\ G(x, y),\ K[M(x, a), y],\ N(x, y)$$

valóban (8) alakú egyenletet elégít ki, tehát abból F, G, K, N legáltalánosabb alakját meghatározva, (4)-be visszahelyettesítéssel megadható H, M is.

Az

$$F[G(x, u), H(x, v)] = K[M(y, u), N(y, v)] \tag{5}$$

egyenlet visszavezetése érdekében pedig elég $y=a$ értékét rögzíteni és bevezetni a

$$z = G(x, u)$$

változót, melyből $u = U(z, x)$-et kifejezve, a

$$\bar{K}(u, v) \overset{\text{def}}{=} K[M(a, u), N(a, v)]$$

jelöléssel valóban

$$F[z, H(x, v)] = \bar{K}[U(z, x), v]$$

adódik. G, K, M, N meghatározása érdekében is hasonló visszavezetés végezhető.

Hasonló az eljárás az

$$F[G(x, u), H(x, v)] = K[M(y, y), N(u, v)] \tag{6}$$

egyenlet esetében is, csak ott a

$$\bar{H}(u, v) \overset{\text{def}}{=} K[M(a, a), N(u, v)]$$

jelölésre van szükség.

Az eddig mutatott visszavezetéseken kívül a (8) asszociativitási egyenlet jelentősége sokkal több: tartalmazza a gruppoidok és kvázicsoportok elméletében ismert és vizsgált legfontosabb azonosságokat. Felsorolunk néhányat ezek közül, anélkül, hogy a teljességre törekednénk:

(14)	$x(yz)=y(xz)$	[18, 27, 36, 37],
(15)	$x(yz)=z(yx)$	(GRASSMANN) [1, 35, 36, 39, 18],
(16)	$(xy)*(yz)=xz$	(ACZÉL) [2],
(17)	$(xz)\ (yz)=xy$	(tranzitivitás) [2, 14, 17, 19, 38],
(18)	$x[y(zx)]=zy$	(TARSKI) [39],
(19)	$x[(yz)(yx)]=z$	(NEUMANN) [17],
(20)	$(xy)*z=(zy)*x$	(SCHRÖDER) [34],
(21)	$(xy)*z=x(y*z)$	(SADE) [32],
(22)	$(xy)(xz)=zy$	(SCHWEITZER) [35, 36, 14],
(23)	$xy=uv \rightleftarrows xu=yv$	[32, 20].

Ezek közül (16), (23)-ról nem látszik közvetlenül, hogy (8) speciális esetei lennének, de új változók és függvények bevezetésével ez könnyen kimutatható. Válasszunk ki egy jellegzetes példát, tekintsük pl. (23)-at és mutassuk ki ezt. Tekintsük az xy művelet

xy^{-1} inverz műveletét, melyet az $(xy^{-1})y = (xy)y^{-1} = x$ összefüggés értelmez. Akkor (23) a következő alakban írható:

$$[(uv)y^{-1}]u = yv, \qquad (uv)y^{-1} = (yv)u^{-1},$$

mely utóbbi valóban (8) speciális esete, midőn

$$F(x, y) = H(y, x) = xy^{-1},$$
$$G(x, y) = K(y, x) = xy.$$

További hasonló speciális esetek és alkalmazások tekintetében [2, 7—10, 18, 26, 32, 38, 41]-re utalunk.

3. Speciális biszimmetrikus és asszociatív típusú egyenletek megoldása. Térjünk vissza a **2.**-ban bemutatott

$$F[G(x, y), H(u, v)] = K[M(x, u), N(y, v)], \tag{4}$$
$$F[G(x, u), H(x, v)] = K[M(y, u), N(y, v)], \tag{5}$$
$$F[G(x, u), H(x, v)] = K[M(y, y), N(u, v)] \tag{6}$$

egyenletek vizsgálatára. Mint ott megjegyeztük, mindegyikük az asszociativitási egyenletre vezethető vissza. A [20]-ban viszont be van bizonyítva, hogy kvázicsoportokon az asszociativitási egyenlet minden megoldása csoportművelet izotópja. Az (5) egyenlet példáján mutassuk meg, hogyan használható fel e tény a megoldás legáltalánosabb alakjának felírásához.

Ha $F(x, y)$ egy $x \otimes y$ csoportművelet izotópja, akkor felírható

$$F(x, y) = f^{-1}[g(x) \otimes h(y)]$$

alakban, tehát $F(x, y)$ főizotópja az $x \otimes y$-nal izomorf

$$x \circ y = f^{-1}[f(x) \otimes f(y)]$$

csoportműveletnek:

$$F(x, y) = \gamma x \circ \chi y, \tag{24}$$

ahol nyilván

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} f^{-1}g, \quad \chi \overset{\text{def}}{=} f^{-1}h.$$

(24)-et (5)-be helyettesítve, x és y rögzítésével látható, hogy K is ugyanazon csoportművelet főizotópja:

$$K(x, y) = \mu x \circ \nu y. \tag{25}$$

(24)-et és (25)-öt ismét (5)-be helyettesítve, alkalmas rögzítés után megfelelő új jelölésekkel leolvasható[1]

$$G(x, u) = \gamma^{-1}(\varphi u \circ \varrho x), \tag{26}$$

[1] Ugyanis (24), (25) és (5) szerint akkor

$$\gamma G(x, u) \circ \chi H(x, v) = \mu M(y, u) \circ \nu N(y, v),$$

tehát y, v értékét rögzítve:

$$\gamma G(x, u) = \varphi u \circ \varrho x$$

adódik, ahol

$$\varphi u \overset{\text{def}}{=} \mu M(y, u), \quad \varrho x \overset{\text{def}}{=} \nu N(y, v) \circ [\chi H(x, v)]^{-1}.$$

és hasonló eljárással, szukcesszive visszahelyettesítve a már megkapott függvényeket, nyerjük sorban a

$$(27)\qquad \begin{cases} H(x, v) = \lambda^{-1}[(\varphi x)^{-1} \circ \psi v], \\ M(y, u) = \mu^{-1}(\varphi u \circ \sigma y), \\ N(y, v) = \nu^{-1}[(\sigma y)^{-1} \circ \psi v] \end{cases}$$

képleteket is. Egyszerű visszahelyettesítés meggyőz, hogy (24)—(27) valóban ki is elégíti (5)-öt, tetszőleges (invertálható) $\varphi, \psi, \ldots$ függvénnyel.

Teljesen hasonló számolással kapjuk (4) megoldásaként az

$$(28)\qquad \begin{cases} F(x, y) = \gamma x + \lambda y, \\ K(x, y) = \mu x + \nu y, \\ G(x, y) = \gamma^{-1}(\varphi x + \psi y), \\ H(x, y) = \chi^{-1}(\varrho x + \sigma y), \\ M(x, y) = \mu^{-1}(\varphi x + \varrho y), \\ N(x, y) = \nu^{-1}(\psi x + \sigma y) \end{cases}$$

formulákat, ahol $x+y$ visszahelyettesítésből láthatóan *Abel*-féle csoportművelet.

Nem részletezzük (6) megoldását sem, csak a végeredményt írjuk fel:

$$(29)\qquad \begin{cases} F(x, y) = \gamma x \circ \chi y, \\ N(u, v) = \nu(\varphi u \circ \sigma v), \\ H(x, v) = \chi^{-1}(\psi x \circ \sigma v), \\ G(x, u) = \gamma^{-1}[\varphi u \circ (\psi x)^{-1}], \\ M(y, y) = c \text{ állandó}, \\ K(c, t) = \nu^{-1} t. \end{cases}$$

Ugyancsak a számolás részletezése nélkül felírjuk rendre az (9)—(13) egyenletek megoldásait:

$$(9')\qquad \begin{cases} xy = \alpha_1 x = \alpha_2 y + a, \\ x \otimes y = \beta_1 x + \beta_2 y + a, \end{cases}$$

$$(10')\qquad xy = \alpha x + \alpha y + a,$$

$$(11')\qquad xy = (\alpha x)^{-1} \circ \alpha y \circ a,$$

$$(12')\qquad \begin{cases} xy = \gamma x + \chi y, \\ x \otimes y = \gamma^{-1}(\varphi x + \psi y), \\ x * y = \chi^{-1}(\psi x + \sigma y), \end{cases}$$

$$(13')\qquad \begin{cases} xy = \sigma x = \chi y, \\ x \otimes y = \gamma^{-1}(x - \chi y), \quad [(x-y)+y=x], \\ x * y = \chi^{-1}(y - \gamma x), \end{cases}$$

ahol $x\circ y$ tetszőleges csoportművelet, $x+y$ tetszőleges *Abel*-féle csoportművelet, $\gamma, \chi, \varphi, \psi, \sigma$ tetszőleges invertálható leképezések, α tetszőleges automorfizmus Q^+, illetve Q°-on, α_i, β_i tetszőleges felcserélhető automorfizmusok:

$$\alpha_i\beta_j = \beta_j\alpha_i; \qquad i,j=1,2,$$

$a\in Q$ pedig tetszőleges rögzített elem, mely (9′)-ben kielégíti az $\alpha_1 a+\alpha_2 a = \beta_1 a+\beta_2 a$ összefüggést.

Az (14)–(23) speciális asszociatív típusú egyenletek kvázicsoport megoldásainak is csak a végeredményeit írjuk fel:

(14′) $$xy=\varphi x+y,$$

(15′) $$xy=\alpha^2x+\alpha y+a,$$

(16′) $$\begin{cases} xy=(\varphi x)\circ(\varphi y)^{-1}, \\ x*y=x\circ y, \end{cases}$$

(17′) $$xy=x\circ y^{-1},$$

(18′) $$xy=x-y+a,$$

(19′) $$xy=x-y,$$

(20′) $$\begin{cases} x*y=\varphi x+\psi y, \\ xy=\varphi^{-1}(\chi y+\psi x), \end{cases}$$

(21′) $$\begin{cases} x*y=x\circ\varphi y, \\ xy=\psi x\circ y, \end{cases}$$

(22′) $$xy=x-y+a,$$

(23′) $$xy=\varphi(x-y),$$

ahol $x\circ y$ tetszőleges, illetve $x+y$ tetszőleges *Abel*-féle csoportművelet, x^{-1}, illetve $-x$ a megfelelő csoportműveletre vonatkozó inverzet jelöli, φ, ψ, χ tetszőleges invertálható leképezések, α tetszőleges automorfizmus ($\alpha^2=\alpha\alpha$), $a\in Q$ tetszőleges állandó.[2]

4. A Pexider-féle egyenlet általánosítása. Nem érdektelen a specializálás egy jellegzetes lépésére külön felhívni a figyelmet, éspedig arra, hogy sok esetben döntő jelentőségű az

(30) $$\omega(x\circ y) = \varrho x\circ\sigma y, \qquad x,y\in Q$$

egyenletnek az $\omega, \varrho, \sigma: Q\to Q$ függvényekre vonatkozó megoldása, ahol $x\circ y$ valamely csoportművelet. Ilyen egyenlethez jutunk pl. a (24), (26) formulából az

$$F(x,y) = G(x,y) = \gamma x\circ\chi y = \gamma^{-1}(\varphi x\circ\varrho y)$$

specializálással, ha bevezetjük az

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \gamma, \quad \psi \overset{\text{def}}{=} \varphi\gamma^{-1}, \quad \sigma \overset{\text{def}}{=} \varrho\chi^{-1}$$

[2] Megjegyezzük, hogy a megoldások közül némelyiket kvázicsoportnál általánosabb gruppoidon is megadhatjuk: így pl. (14)-nél elég csak annyit feltenni, hogy létezik olyan z_0, melyre $x\to xz_0$ invertálható [18], sőt az is elég, ha $Qz_0 = Q$ teljesül; (17)-nél elég csak a baloldali leoszthatóságot feltenni [19], stb.

függvényeket. A (30) egyenlet az

$$f(x+y) = g(x)+h(y)$$

Pexider-féle [25] egyenlet általánosítása arra az esetre, midőn a valós számokon értelmezett összeadás helyett egy $x \circ y$ csoportművelet van adva. A (30) egyenlet megoldása más szóval a Q csoport autotopizmusainak a meghatározását jelenti, illetve endotopizmusainak meghatározását, ha ω, ϱ, σ nem feltétlen invertálhatók.

Ismeretes, [25], hogy adott Q° csoporton a (30) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása

$$\omega x = a \circ \alpha x \circ b, \quad \varrho x = a \circ \alpha x, \quad \sigma x = \alpha x \circ b,$$

ahol α tetszőleges endomorfizmus.

Ha ω, ϱ, σ közül valamelyikük invertálható, akkor α is az, következőleg ω, ϱ, σ közül mindegyikük invertálható.

IRODALOM

[1] N. H. ABEL, Untersuchung der Functionen zweier unabhängigen veränderlichen Grössen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, *Journ. reine angew. Math.*, **1** (1826), 11–15.
[2] J. ACZÉL: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, 1960.
[3] J. ACZÉL, Über die Gleichheit der Polynomfunktionen auf Ringen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 105–107.
[4] J. ACZÉL–S. GOŁĄB, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, 1960.
[5] J. ACZÉL–M. HOSSZÚ–E. G. STRAUSS, Functional equations for products and compositions of functions, *Publicationes Math.*, **8** (1961), 218–224.
[6] В. Д. Белоусов, О дистрибутивных системах операций, Мат. Сборник **36** (1955), 479—500.
[7] В. Д. Белоусов, Транзитивные дистрибутивные квазигруппы, Укранск. Мат. Журнал. **10** (1958), 13—22.
[8] В. Д. Белоусов. Регулярные группы подстановок в квазигруппах, Бельцкий гос. Пед. Инс., Ученые записки, (1958), 39—49.
[9] В. Д. Белоусов, Производные операции и ассоциаторы в лупах, Мат. Сборник, **45**, (1958), 51—70.
[10] В. Д. Белоусов, О структуре дистрибутивных квазигрупп, Мат. Сборник, **50** (92) (1960), 267—298.
[11] R. H. BRUCK, A survey of binary systems. *Ergebnisse der Math.*, N. F. XX, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958.
[12] A. C. CHOUDHURY, On a generalization of Thomsen's triangle in a web, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **34** (2), (1942), 3–5.
[13] L. FUCHS, On mean systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), 303–320.
[14] H. FURSTENBERG, The inverse operation in groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 991–997.
[15] M. GHERMANESCU, *Ecuaţii funcţionale*, *Buçuresti*, 1960.
[16] J. HAANTJES–G. LAMAN, On the definition of geometric objects I–II, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag Math.*, **15** (1953), 208–215, 216–222.
[17] G. HIGHMAN–B. N. NEUMANN, Groups as groupoids with one law, *Publ. Math.*, **2** (1952), 215–221.
[18] M. HOSSZÚ, Some functional equations related with the associative law, *Publ. Math.*, **3** (1954), 205–214.
[19] M. HOSSZÚ, On the functional equation of transitivity, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 203–208.
[20] HOSSZÚ M., Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 51–56.
[21] HOSSZÚ M., Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében, I–III, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 149–162, 237–253, 333–346.

[22] M. Hosszú, Notes on vanishing polynomials, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 108–110.
[23] M. Hosszú, A generalization of the functional equation of translation, *NME Közleményei*, **21** (1960), 7–10.
[24] M. Hosszú, Homogeneous groupoids, *Eötvös Acta*, **3–4** (1960–61), 95–99.
[25] M. Hosszú, Remarks on the generalized Pexider's functional equation, *Lucrari Stiintifice*,...
[26] W. A. Hurwitz, Note on the definition of an abelian group by independent postulates, *Annals of Math.*, **8** (1906–1907), 94–96.
[27] A. Kertész–A. Sade, On some mappings of groupoids into themselves: nuclei and their isotopes, *Publ. Math.*, **6** (1959), 214–233.
[28] H.Kiesewetter, Struktur linear Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit N. H. Abels Theorem, *Dissertation*, Jena, 1958.
[29] F. Radó, Équations fonctionnelles caracterisant les nomogrammes avec trois echelles rectilignes, *Math. Cluj*, **1** (1959), 19–23.
[30] F. Radó, Sur quelques équations fonctionnelles avec plusieurs fonctions a deux variables, *Math. Cluj*, 1 (1959), 321–339.
[31] A. Sade, Quasigroupes obéissant a certains lois, *Istanbul üniversitesi Fen Fakültesi Mecmussi*, Ser. A, **22** (1957), 151–184.
[32] A. Sade, Quasigroupes parastrophiques. Expressions et identités, *Math. Nachrichten*, **20** (1959), 73–106.
[33] A. Sade, Théorie des systems demosienes de groupoides, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 625–660.
[34] S. Schröder, Über ein eigenthümliche Bestimmung einer Funktion durch formale Anforderungen, *Journ. reine Ang. Math.*, **90** (1881), 189–220.
[35] A. R. Schweitzer, Theorems on functional equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **18** (1912), 192; **19** (1913), 66–70.
[36] A. R. Schweitzer, Remarks on a functional equation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **21** (1914), 23–29.
[37] D. M. Sinzow, Über eine Funktionalgleichung, *Archiv der Math. und Phys.*, (3) **6** (1903), 216–217.
[38] S. K. Stein, On the foundation of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 228–256.
[39] A. Tarski, Ein Beitrag zur Axiomatik der abelschen Gruppen, *Fundamenta Math.*, **30** (1938), 253–256.
[40] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, New York, 1949.
[41] F. Zitek, On the definition of the articulation Index, *Apl. Mat.*, **6** (1961), 124–134.
[42] A debreceni Kossuth L. Tud. Egy. Mat. Int. feladatgyűjteménye.

(Beérkezett: 1962. VI. 2)