A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ÚJ FEJLŐDÉS A MÉRTÉKTARTÓ LEKÉPEZÉSEK ELMÉLETÉBEN*

Írta: V. A. ROHLIN

Tartalom:

Bevezetés.
1. §. Az izomorfizmus problémája.
2. §. KOLMOGOROV munkája.
3. §. Automorfizmus entrópiája.
4. §. Az entrópia tulajdonságai.
5. §. Az entrópia kiszámítása.
6. §. Null-entrópiájú automorfizmusok.
7. §. Entrópia és spektrum.
8. §. A *Kolmogorov-féle* automorfizmusok és teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok.
9. §. Pontos endomorfizmusok.
10. §. Folyamatok.
11. §. Új problémák.
Az idézett ironalom

BEVEZETÉS

A mértéktartó leképezések elmélete (szokás még *ergodikus elméletnek*, vagy *dinamikus rendszerek metrikus elméletének* is nevezni) mint önálló disciplina a harmincas években alakult ki, amikor is bebizonyították az alapvető ergodikus tételeket és erre az új területre behatoltak a spektrál elmélet fogalmai és módszerei. Hamarosan nyilvánvalóvá vált, hogy ez az elmélet nemcsak a dinamikus rendszerek klasszikus elméletével (amelyből keletkezett), hanem a valószínűségszámítás, a számelmélet és funkcionálanalízis különböző problémáival is szoros kapcsolatban áll.

Azonban az új elmélet előtt álló feladatok túlságosan nehezeknek bizonyultak. Ez vonatkozik mind az alkalmazásaira (elsősorban a statisztikus mechanikában), mind a belső, tisztán mértékelméleti feladataira. A nehézségek — melyek az alkalmazásokra vonatkoznak — az ergodikusság effektív kritériumainak hiányában áll egyrészt, másrészt, hogy nem tudjuk kiszámítani dinamikus rendszerek spektrumát. Az elmélet központi belső problémája az *izomorfizmus problémája:* milyen feltételek esetén tartozik két mértéktartó leképezés egy metrikus típusba? Ez a probléma leképezéseknek csak egy igen szűk osztályára — mely lényegében a diszkrét spektrumú leképezésekből áll — van megoldva. Folytonos spektrumú leképezésekre igen keveset csináltak. A legutóbbi időig még az sem volt ismeretes, hogy tisztán folytonos spektrum esetén a metrikus típust meghatározzák-e a leképezés spektrál invariánsai. Ezen kérdés megoldási kísérletei sokáig nem vezettek célhoz és úgy látszott abba is hagyták a kísérletezést.

* Успехи математических наук, Том XV (1960), ыпуск 4, 3—26.

Az újabb fejlődés kezdetét A. N. KOLMOGOROV 1958-ban megjelent munkái [1], [2] jelentik. KOLMOGOROV bebizonyította olyan megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrummal bíró leképezések létezését, amelyek különböző metrikus típusba tartoznak. Az a módszer, amellyel ezt az eredményt kapta, nem kevésbé érdekes, mint maga az eredmény. KOLMOGOROV a mértéktartó leképezéseknek egy új metrikus invariánsát határozta meg — a *leképezés entrópiáját* — felhasználva az információelmélet eszközeit. Ezen invariáns segítségével sikerült felosztania a megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrummal rendelkező leképezések osztályát kontinuum számosságú metrikusan invariáns részosztályra.

KOLMOGOROV munkáit egy sor olyan mű követte, amelyekben az új invariánst tanulmányozták, tökéletesítették és alkalmazták más problémákra. Új fogalmak és új, érdekes problémák vetődtek fel. Ezért úgy látszik lehet beszélni az egész elmélet újabb fejlődéséről.

Ennek az újabb fellendülésnek szenteltem jelen összefoglaló munkámat. Ezt azokból az előadásokból állítottam össze, amelyeket a bakui funkcionálanalízis konferencián (1959. IX. 30) és a moszkvai matematikai társulatban (1959. XI. 17) tartottam. Az összefoglalóban megemlített munkákat KOLMOGOROV [1] dolgozatát kivéve, mind előadták a moszkvai egyetem „dinamikus rendszerek metrikus elmélete" szemináriumán. Jelenleg ezen munkák majdnem kivétel nélkül megjelentek, vagy sajtó alatt vannak. (Az 1958/59-es évről szóló szemináriumi beszámoló megtalálható [3]-ban.) Az olvasó munkájának megkönnyítésére az első paragrafusban az izomorfizmus problémájáról rövid előzetes tájékoztatást nyújtunk. Régi eredményeket irodalmi utalás nélkül közlünk, részletesebb tárgyalásuk megtalálható [4], [5], [6]-ban, összefoglaló tárgyalásuk [7]-ben. Az ezután következő tíz paragrafus teljesen az új eredményeket és az új problémákat tartalmazza.

1. §. AZ IZOMORFIZMUS PROBLÉMÁJA

1. 1. Alapvető meghatározások. Általános értelemben a mértéktartó leképezés egy mértéktérnek egy másik mértéktérre való olyan leképezése, melynél tetszőleges mérhető halmaz ősképe mérhető és mértéke megegyezik a halmaz mértékével. Az ilyen leképezéseket röviden *homomorfizmusnak* nevezzük.

Azt a kölcsönösen egyértelmű homomorfizmust, mely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az inverz leképezés szintén homomorfizmus, *izomorfizmus*nak nevezzük. Ha a terek megegyeznek, a homomorfizmust *endomorfizmus*nak, az izomorfizmust *automorfizmus*nak nevezzük. Az elmélet első feladata az *automorfizmusok* tárgyalása. Rendszerint erről van szó akkor, amikor mértéktartó leképezésekről beszélnek.

Az izomorf módon egymásra leképezhető mértéktereket *izomorfok*nak nevezzük. Az M tér T automorfizmusa és az M' tér T' automorfizmusa izomorf, ha létezik az M térnek az M' térre való olyan S izomorfizmusa, hogy $T' = STS^{-1}$.

A mértékelmélet egyik legfontosabb elve az, hogy a null mértékű halmazokat el lehet hagyni. Ennek az elvnek megfelelően mind a tereket, mind az automorfizmusokat null mértékű halmazoktól eltekintve kell tanulmányozni, vagy röviden moduló null (mod 0). Például, nem az a fontos, hogy az M és M' terek, vagy a rajtuk értelmezett T és T' automorfizmusok izomorfok-e, hanem az, hogy izomorffá tehetők-e bizonyos M és M'-beli null mértékű halmazok elhagyásával, ha a válasz pozitív, akkor az M és M' tereket vagy a T és T' automorfizmusokat *moduló null izomorfok*nak nevezzük.

A mod 0 izomorf automorfizmusokról azt mondjuk, hogy egy metrikus típusba tartoznak. Az izomorfizmus problémája, melyet ebben a paragrafusban vizsgálunk, az automorfizmusoknak metrikus típus szerinti osztályozásában áll.

1. 2. A Lebesgue-tér. Mérhető felbontások. Természetesen azokra a terekre, amelyekben az automorfizmusok értelmezve vannak, bizonyos korlátozásokat kell tennünk, hogy használható elméletet kapjunk. A kérdés tanulmányozása azt mutatta, hogy amennyiben véges mértékű terekről van szó, célszerű *Lebesgue*-terekre szorítkozni. *Lebesgue*-térnek nevezzük az olyan 1 mértékű teret, amely izomorf mod 0 egy intervallummal a rajta értelmezett *Lebesgue* mértékkel együtt, amely intervallumhoz még véges vagy megszámlálható sok pozitív mértékű pont is hozzátartozhat. Ez elég széles osztálya a tereknek, tartalmazza pl. az összes normált mértékű tereket; csak ez utóbbiak érdekesek a dinamikus rendszerek elméletében.

A *Lebesgue*-terek axiomatikus meghatározása és elmélete [8]-ban van kifejtve. Nekünk itt csak a *mérhető felbontás, a faktor-tér, és a mértékek kanonikus rendszere* alapvető fogalmára van szükségünk. A továbbiakban M mindig Lebesgue-teret jelent.

Az M tér egymást nem metsző nem üres halmazokra történő ζ felbontását *mérhetőnek* nevezzük, ha létezik megszámlálható sok mérhető halmazból álló olyan $\{B_\alpha\}$ a felbontás elemeiből álló halmazrendszer, hogy a felosztás tetszőleges két eleme valamilyen α-ra B_α és $M-B_\alpha$ segítségével szétválasztható. Mérhető felbontásokra példaként szolgálhatnak az M térnek más *Lebesgue*-terekre való homomorf leképezéseinél a pontok ősképeire való felbontások.

Az M tér ζ felbontásához tartozó *faktor-terének* nevezzük azt a mértékteret, melynek pontjai a ζ felbontás elemei és a μ_ζ mérték a következőképpen van értelmezve: Legyen H az M térnek a ζ felbontás elemeiből álló M/ζ térre történő leképezése oly módon, hogy tetszőleges $x\in M$ pont képe azon felosztásbeli elem legyen, melyhez az adott pont tartozik; a Z halmaz mérhető M/ζ-ban, ha $H^{-1}Z$ mérhető M-ben, és — értelmezés szerint — $\mu_\zeta(Z) = \mu(H^{-1}Z)$. Ha a ζ felosztás mérhető, akkor az M/ζ faktortér Lebesgue-tér. Nyilvánvaló, hogy H az M térnek homomorfizmusa az M/ζ térre.

A ζ felosztáshoz tartozó *kanonikus mértékrendszernek* nevezzük a következő két tulajdonsággal rendelkező μ_C, $C\in M/\zeta$ mértékrendszert: 1. μ_C mérték C-ben, és a C-tér a μ_C mértékkel *Lebesgue*-tér; 2. tetszőleges mérhető $X\subset M$ halmazra az XC halmaz mérhető C-ben majdnem minden $C\in M/\zeta$ pontra, a $\mu_C(XC)$ függvény mérhető M/ζ-án és

$$\mu(X) = \int_{M/\zeta} \mu_C(XC)\,d\mu_\zeta.$$

Tetszőleges mérhető felbontásnak van kanonikus mértékrendszere, és tetszőleges két μ_C és μ_C' kanonikus mértékrendszer, mely egy és ugyanazon ζ felbontáshoz tartozik, azonos mod 0 (azaz $\mu_C=\mu_C'$ majdnem minden $C\in M/\zeta$-ra).

1. 3. Metrikusan tranzitív komponensekre bontás. A T automorfizmust *metrikusan tranzitívnak* nevezzük, ha tetszőleges mérhető, T-re nézve invariáns, azaz $TX=X$ feltételnek eleget tevő, $X\subset M$ halmaznak a mértéke vagy 0, vagy 1. Nyilvánvaló, hogy az olyan tér, melyen metrikusan tranzitív automorfizmus van értelmezve, vagy nem tartalmaz pozitív mértékű pontot, vagy véges sok azonos pozitív mértékű pontból áll mod 0.

Ha a T automorfizmus nem metrikusan tranzitív, akkor felbontható metrikusan tranzitív komponensekre a következő értelemben. Nevezzük a ζ felbontást a T-re nézve *mozdulatlannak*, ha összes elemei invariánsak T-re nézve, és jelöljük T_C-vel azt a leképezést, melyet a T automorfizmus indukál a ζ felbontás C elemén. Ha a ζ felbontás mozdulatlan és mérhető, akkor T_C a C tér automorfizmusa lesz (μ_C mértékkel). Ezt az automorfizmust a T automorfizmus C-n levő komponensének nevezzük. Igaz, hogy az összes mérhető felbontások között, melyek T-re nézve mozdulatlanok, van egy legkisebb felbontás mod 0 és, hogy a T automorfizmusnak ezen felbontás elemein értelmezett komponensei metrikusan tranzitivak. Ezek lesznek a T automorfizmus metrikusan tranzitív komponensei.

Nyilvánvaló, hogy az izomorfizmus problémáját elsősorban a metrikusan tranzitív automorfizmusokra kell tekinteni és hogy éppen itt van az egész probléma súlypontja. A következő tétel az izomorfizmus általános problémáját teljesen visszavezeti erre a speciális esetre. Legyen ζ mozdulatlan felbontás, mely a T automorfizmust T_C komponensekre bontja; ha a T_ζ automorfizmus metrikus típusa ismert mint az M/ζ faktortéren értelmezett függvény, akkor a T automorfizmus metrikus típusa teljesen meg van határozva.

1. 4. Spektrál invariánsok. A metrikusan tranzitív automorfizmusok tanulmányozásának fő eszköze az operátorok spektrál elmélete.

Legyen $L_2(M)$ az M-en abszolút értékben négyzetesen integrálható komplex értékű függvények unitér tere. $L_2(M)$-en minden T automorfizmusnak megfelel egy U_T unitér operátor, mely a következőképpen van értelmezve:

$$U_T f(x) = f(Tx), \quad f \in L_2(M), \ x \in M.$$

Az U_T operátor spektrál invariánsai a T automorfizmus metrikus típusának is invariánsai és ezeket az automorfizmus spektrál invariánsainak nevezzük. Ha a T és T' automorfizmushoz rendelt U_T és $U_{T'}$ operátorok spektrál invariánsai megegyeznek (azaz unitér ekvivalensek), a T és T' automorfizmusokat spektrálisan izomorfnak nevezzük. A T automorfizmus legegyszerűbb spektrál invariánsai az U_T operátor sajátértékei. Az 1 mindig sajátérték: a konstansok mindig a megfelelő sajátfüggvények. Ha az 1 sajátértéknek más sajátfüggvényei nincsenek, a T automorfizmust ergodikusnak nevezzük. Majdnem nyilvánvaló, hogy az ergodikusság ekvivalens a metrikus tranzitivitással, ily módon a metrikus tranzitivitás az automorfizmus spektrál tulajdonsága. Ezzel szemben az automorfizmusnak metrikusan tranzitív komponensekre történő felbontásának invariánsai nem spektrál invariánsok, például ha a T automorfizmus két metrikusan tranzitív automorfizmusra bomlik, úgy azon halmazok mértékeit, melyeken ezek az automorfizmusok értelmezve vannak, nem lehet meghatározni a T automorfizmus spektrál tulajdonságai alapján. Metrikusan tranzitív automorfizmus sajátértékei egyszeresek és multiplikatív csoportot alkotnak.

1. 5. Diszkrét és kvázi diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmusok. Diszkrét (azaz tisztán pontokból álló) spektrumú ergodikus automorfizmusok esetén a spektrál invariánsok teljes mértékben megoldják a metrikus osztályozás problémáját: ha a T és T' automorfizmusok ergodikusak és egy és ugyanazon diszkrét spektrummal rendelkeznek, úgy ugyanazon metrikus típushoz tartoznak; az egységkör kerületén levő komplex számoknak tetszőleges, legfeljebb megszámlálható multiplikatív csoportjához létezik olyan diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmus, melynek spektruma egybeesik ezzel a csoporttal.

Tetszőleges ergodikus automorfizmus esetén az izomorfizmus problémája nem oldható meg *csak* a spektrál invariánsok segítségével. Hogy erről meggyőződjünk, feltételesen nevezzük az U_T operátor közönséges sajátértékeit és sajátfüggvényeit *elsőrendű kvázisajátértéknek* és *kvázisajátfüggvénynek* és az $n>1$*-rendű kvázisajátértékeket és kvázisajátfüggvényeket* értelmezzük a következőképpen: az $n-1$-edrendű φ kvázisajátfüggvényt nevezzük n-edrendű kvázisajátértéknek, ha létezik olyan $f\in L_2(M)$, $f\neq 0$, hogy

$$U_T f = \varphi\cdot f;$$

ebben az esetben f-et n-edrendű, a φ kvázisajátértékhez tartozó kvázisajátfüggvénynek nevezzük. Ergodikus T automorfizmus esetén az n-edrendű kvázisajátértékek tetszőleges n esetén csoportot alkotnak és ha $n>1$ esetén ezen csoport minden eleméhez hozzárendeljük azt az $n-1$-edrendű kvázisajátértéket, melyhez tartozik, úgy ennek a csoportnak a megelőzőbe való homomorfizmusát kapjuk. Az ily módon nyert növekvő csoportok sorozatának algebrai típusa, ellátva a homomorfizmusokkal, a T automorfizmus metrikus invariánsa. Egyszerű példa mutatja, hogy ez az invariáns nem spektrális.

Ha a kvázisajátfüggvények $L_2(M)$-ben teljes rendszert alkotnak, az automorfizmus — megállapodás szerint — kvázi diszkrét spektrummal rendelkezik. A kvázi diszkrét spektrumú automorfizmusokat nemrég vizsgálta meg L. M. ABRAMOV [9], aki egy teljes klasszifikáló elméletet dolgozott ki azokra. ABRAMOV a feladat egyszerűsítése érdekében vizsgálataiból kizárta azokat az automorfizmusokat, melyeknek sajátértékei között szerepelnek 1 gyökei, kivéve magát 1-et. Kiderült, hogy ezen feltétel esetén két kvázi diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmus abban és csak abban az esetben tartozik egy metrikus típusba, ha sajátértékeik megegyeznek és a nekik megfelelő csoportok és homomorfizmusok sorozata megfeleltetésbe hozható egy izomorfizmussal, mely ezeket a sajátértékeket a helyükön hagyja. Érvényes a megfelelő *egzisztencia* tétel is. Mint a közönséges sajátfüggvények, a különböző kvázisajátértékekhez tartozó kvázisajátfüggvények ortogonálisak. Az összes kvázisajátfüggvény abszolút értékben 1-gyel egyenlő.

1. 6. Tisztán folytonos spektrumú automorfizmusok. Így nevezzük azokat az automorfizmusokat, melyeknek a konstanson kívül nincsen más sajátfüggvényük. Ezek tanulmányozása — az egész probléma legmélyebb és legérdekesebb része. Éppen erre vonatkozik az a fejlődés, melynek ezt az összefoglalást is szenteltük.

A legutóbbi időig (azaz KOLMOGOROV [1], [2] dolgozatának megjelenéséig) nem volt ismeretes, hogy léteznek-e spektrálisan izomorf, de különböző metrikus típusba tartozó automorfizmusok tisztán folytonos spektrummal. Ezen problémának negatív megoldása valószínűtlennek tűnt, a pozitív megoldáshoz új, nem spektrális invariánsokra lett volna szükség. Új invariánsokat ajánlottak, de nem spektrál voltuk megállapítása nem járt sikerrel.

Tisztán folytonos spektrumú automorfizmusok legegyszerűbb példáit a valószínűségszámításból vették: ezek a *Bernoulli-féle automorfizmusok:* Legyen X Lebesgue tér és M az X térnek mindkét irányban végtelen önmagával való direkt szorzata. Az M tér pontjaiul a mindkét irányban végtelen $\{x_n\}$, $x_n\in X$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ sorozatok szolgálnak. Az X állapothalmazú *Bernoulli*-féle automorfizmus az M térnek a következőképpen értelmezett automorfizmusa lesz

$$T\{x_n\}=\{x_n'\},\ x_n'=x_{n-1}.$$

Ha X nem egyetlen pontból áll mod 0, akkor ez az automorfizmus tisztán folytonos spektrumú, mely a következőképpen írható le: az $L_2(M)$ térnek a konstansra ortogonális függvényekből álló alterében létezik olyan teljes ortonormált függvényrendszer $\{f_{m,n}\}$, $m=1, 2, \ldots$; $n=0, \pm 1, \ldots$, hogy

$$U_T f_{mn} = f_{m,n+1}.$$

Az ilyen spektrumot megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumnak nevezzük, az elnevezés azzal magyarázható, hogy konstansokból álló egydimenziós altér ortogonális kiegészítő halmazán értelmezett U_T operátor szétesik megszámlálható sok operátor ortogonális összegére, amelyek unitér ekvivalensek a független változóval való szorzás operátorával az egységkör kerületén abszolút értékben négyzetesen integrálható függvények terében a közönséges *Lebesgue* mértékre nézve. Nyilvánvaló, hogy az összes automorfizmusok megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrum esetén spektrálisan izomorfak egymással.

A *Bernoulli* automorfizmusok csak egyike a valószínűségszámítási automorfizmusok osztályának: minden időben diszkrét stacionárius folyamatnak megfelel egy automorfizmus a folyamat trajektoriáinak terében.

A példák másik fontos osztályát a topológikus algebra szolgáltatja. Legyen M kompakt topológikus csoport megszámlálható topológikus bázissal, μ invariáns mérték M-ben és T az M topológikus csoport automorfizmusa. Az invariáns mérték egyértelműségének értelmében T az M mértéktér (μ a mérték) automorfizmusa az 1. 1 pont értelmében. Ez az automorfizmus abban és csak abban az esetben ergodikus, ha az M csoport karakterjeinek M diszkrét csoportján a T-nek megfelelő T^* automorfizmus aperiódikus (azaz a T^{*n} automorfizmusok egyikének sincs az M^* csoport egységelemén kívül mozdulatlan pontja). Például az r-dimenziós tórus egy automorfizmusa, mely egy a tórus ciklikus koordinátáiban megadott egész számokból álló r-edrendű mátrixszal (± 1 determinánssal) van megadva, akkor és csak akkor ergodikus, ha ennek a mátrixnak karakterisztikus értékei között nem szerepel 1-nek gyöke. Kompakt kommutatív csoport tetszőleges ergodikus automorfizmusa megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú.

Bizonyos szempontból azonban a megszámlálható multiplicitású Lebesgue spektrum különleges eset. Jelölje $\mathfrak{A}$ a $[0, 1]$ intervallum összes automorfizmusai csoportját, zérus mértékű halmazoktól eltekintve, és a $T_0 \in \mathfrak{A}$ automorfizmus környezetének tekintsük azon $T \in \mathfrak{A}$ automorfizmusok összességét, melyek eleget tesznek véges sok

$$\mu[(T_0 A \cup TA) - T_0 A \cap TA] < \varepsilon$$

alakú egyenlőtlenségnek, ahol A mérhető halmaz, ε pozitív szám. Ebben az esetben a $\mathfrak{A}$ topológikus csoport lesz megszámlálható topológikus bázissal. A $\mathfrak{A}$ topológikus térben van metrika, melyre nézve a tér teljes, és igaz, hogy a tisztán folytonos spektrummal rendelkező automorfizmusok mindenütt sűrű G_δ, a megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú automorfizmusok pedig első kategóriájú halmazt alkotnak.

Nem ismeretes az, hogy általában milyen lehet egy automorfizmus folytonos spektruma. Az egyetlen általános (majdnem triviális) tétel azt mondja ki, hogy a spektrum szimmetrikus a valós tengelyre nézve. Ha 1-től különböző sajátértékek is vannak, akkor a spektrum invariáns ezekkel a sajátértékekkel való szorzásra nézve. Másrészt bármilyen legyen is az egységkör kerületén értelmezett *Lebesgue — Stieltjes* mérték, azon automorfizmusok, melyeknek spektrál típusa alá van rendelve ennek a mértéknek $\mathfrak{A}$-ban első kategóriájú halmazt alkotnak. Nemrég I. V. GIRSZANOV [10] bebizonyította egyszerű tisztán folytonos spektrumú automorfizmusok létezését. Eddig még az sem volt ismeretes, hogy léteznek-e véges multiplicitású folytonos spektrumú automorfizmusok. Máig sem ismeretes, hogy léteznek-e véges multiplicitású *Lebesgue* spektrumú automorfizmusok.

Nem spektrál metrikus invariánsra feltehetőleg példaként szolgálhat a keverés fokszáma. Azt mondjuk, hogy a T automorfizmus r-edfokú keverés, ha mérhető halmazoknak tetszőleges $X_0, X_1, \ldots, X_r$ rendszerére és egészszámok komplexumainak tetszőleges $(k_1^0, k_1^1, \ldots, k_1^r)$, $(k_2^0, k_2^1, \ldots, k_2^r), \ldots$ sorozatára, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \min\limits_{0\leq i<j\leq r} |k_n^j - k_n^i| = \infty$, fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{k_n^i} X_i\right) = \prod_{i=0}^{r} \mu(X_i)$$

összefüggés. Az egyszerű keverés (azaz az elsőfokú keverés) az automorfizmus spektrál tulajdonsága. Az $r>1$ fokszámú keverés valószínűleg már nem spektrál tulajdonság, de bizonyítani ezt nem sikerült. A *Bernoulli* automorfizmusok és a kompakt kommutatív csoportok ergodikus automorfizmusai tetszőleges fokszámú keverések. Az elsőfokú keverések $\mathfrak{A}$-ban első kategóriájú halmazt alkotnak.

1. 7. Folyamatok. Az $\{S_t\}$, $-\infty<t<\infty$ *folyamat* a *Lebesgue*-tér automorfizmusainak egy egyparaméteres csoportja. A dinamikus rendszerek klasszikus elméletének éppen folyamatokkal (és nem egyes automorfizmusokkal) van dolga. A valószínűségszámításban is állandóan folyamatokkal találkozunk: míg minden időben diszkrét stacionárius sztochasztikus folyamatnak egy automorfizmus felel meg a sztochasztikus folyamat trajektoriáinak terében, addig tetszőleges, időben folytonos stacionárius sztochasztikus folyamatnak megfelel egy folyamat a sztochasztikus folyamat trajektóriájának terében.

Az $\{S_t\}$ folyamatot *mérhetőnek* nevezzük, ha tetszőleges mérhető $X\subset M$ halmazra az M tér és a (t) számegyenes $M\times(t)$ direkt szorzatának terében az (x, t) pontok azon halmaza mérhető lesz $M\times(t)$-ben, melyekre $S_t x \in X$.

Minden folyamatnak nyilvánvaló módon megfelel a valós számok additív csoportjának egy homomorfizmusa az $\mathfrak{A}$ csoportra, és mérhető folyamat esetén ez a homomorfizmus folytonos lesz. A valós számok csoportjának $\mathfrak{A}$-ba való tetszőleges homomorfizmusát *folytonos folyamatnak* nevezzük. Nem ismeretes, hogy tetszőleges folytonos folyamat származtatható-e mérhető folyamat segítségével.

Mivel a T automorfizmus tanulmányozása lényegében ezen automorfizmus által származtatott $\{T^n\}$ ciklikus csoport tanulmányozása, ezért az egyes automorfizmusról a folyamatra való áttérés valójában csak automorfizmusok ciklikus csoportjáról az egy paraméteres csoportra való áttérést jelenti. Ennek megfelelően a folyamatok — mind a mérhetők, mind a folytonosak — elmélete alapjában ugyanúgy épül fel, mint az automorfizmusok elmélete. Többek között lehet beszélni folyamatok izomorfizmusáról, metrikus típusáról, metrikusan tranzitív és metrikusan nem tranzitív folyamatokról, metrikusan tranzitív komponensekre való bontásról, folyamatok spektrál invariánsairól és spektrál izomorfizmusáról, diszkrét és kvázi diszkrét spektrumú folyamatokról, tisztán folytonos spektrumú folyamatokról, megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú folyamatokról, ilyen vagy olyan fokú keverésről. A folyamatok izomorfiája ugyanolyan állapotban van, mint az automorfizmusoké: megvan a diszkrét spektrumú ergodikus folyamatok metrikus osztályozása, de tisztán folytonos spektrumú folyamatokról kevés ismeretes.

Mérhető folyamatok tanulmányozásának hatékony eszköze a mérhető folyamatoknak *speciális folyamatok* segítségével történő előállítására vonatkozó tétel. Legyen L Lebesgue tér λ mértékkel, F pozitív integrálható függvény L-en és T az L tér automorfizmusa. Jelöljük M-el az L tér és (u) számegyenes $L\times(u)$ direkt szorzatának azt az alterét, mely azon (x, u) pontokból áll, melyekre $0 \leqq u < F(x)$ és legyen $(x, u) \in M$-re:

$$S_t(x,u)=\begin{cases} (x, u+t) \text{ ha } -u \leqq t < -u+F(x) \\ (T^n x, u+t-F(x)-\dots-F(T^{n-1}x)) \\ \qquad \text{ha } -u+\sum_{k=0}^{n-1} F(T^k x) \leqq t < u+\sum_{k=0}^{n} F(T^k x), \quad (n=1,2,\dots) \\ (T^{-n}x, u+t+F(T^{-1}x)+\dots+F(T^{-n}x) \\ \qquad \text{ha } -u-\sum_{k=1}^{n} F(T^{-k}x) \leqq t < -u-\sum_{k=1}^{n-1} F(T^{-k}x), \quad (n=1,2,\dots) \end{cases}$$

Ha az M-en levő mértéket $\int_L F d\lambda$-val osztva normáljuk, akkor M *Lebesgue*-tér lesz, míg az $\{S_t\}$ csoport — mérhető folyamat M-ben. Ezt a folyamatot nevezzük a T automorfizmus és az F függvény segítségével felépített *speciális folyamatnak.* Az előállításra vonatkozó tétel legegyszerűbb alakjában azt állítja, hogy tetszőleges, mozdulatlan pont nélküli mérhető folyamat felbontható véges, vagy megszámlálható sok speciális folyamatokkal izomorf (mod 0) komponensekre.

2. §. KOLMOGOROV MUNKÁJA

Mint már említettük, KOLMOGOROV [1], [2] 1958-ban bebizonyította megszámlálható *Lebesgue* spektrumú különböző metrikus típusú automorfizmusok létezését.

Az új metrikus invariáns, melynek segítségével ezt az eredményt kapta, a következőképpen írható le. Az M tér véges vagy megszámlálható sok $A_1, A_2, \dots$ pozitív mértékű halmazra történő ζ *felbontás entrópiáját* értelmezzük a

$$H(\zeta) = -\sum_k \mu(A_k) \log \mu(A_k)$$

képlettel (a logaritmus 2-es alapú) és jelöljük Z-vel a véges entrópiájú felbontások halmazát. Ha a $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ felbontások Z-be tartoznak, akkor szorzatuk $\prod_{k=1}^{m} \zeta_k$ (azaz a $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ felbontások legnagyobb közös részfelbontása) szintén Z-be tartozik. Tetszőleges T automorfizmusra és $\xi \in Z$-re legyen

$$\xi_T = \prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi, \quad \xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^k \xi,$$

(1)
$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^N).$$

Általános információelméleti tételekből következik, hogy ez a határérték létezik és nem nagyobb, mint $H(\xi)$ és hogy $h(T, \eta) \leqq h(T, \xi)$, ha $\eta \leqq \xi$ (azaz ξ az η felbontás részfelbontása). KOLMOGOROV megmutatta, hogy sokkal általánosabban $h(T, \eta) \leqq \leqq h(T, \xi)$, ha $\eta \leqq \xi_T$. Speciálisan, ha van olyan $\xi \in Z$ felbontás, hogy $\xi_T = \varepsilon \bmod 0$, ahol ε az M térnek a tér pontjaira való felbontását jelenti, akkor tetszőleges $\eta \in Z$ felbontásra $h(T, \xi) \geqq h(T, \eta)$. Ebben az esetben a $h(T, \xi)$ függvény minden a $\xi_T = \varepsilon$ feltételnek elegettevő $\xi \in Z$ felbontásra ugyanazt az értéket veszi fel. Ily módon ez az érték a T automorfizmus metrikus invariánsa.

Ezt az invariánst KOLMOGOROV $h_1(T)$-vel jelölte, olyan automorfizmusokra pedig, melyre nézve nincs a $\xi_T = \varepsilon \bmod 0$ feltételnek elegettevő $\xi \in Z$ felbontás, legyen $h_1(T) = \infty$. Példaként a *Bernoulli* automorfizmusokat tekintette (lásd 1. 6). Legyen T *Bernoulli* automorfizmus, véges, vagy megszámlálható sok $p_1, p_2, \ldots$ mértékű pontból álló állapottérrel. Legyen az M tér ξ felbontása a következő feltétellel értelmezve: az $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ pontok a felbontás azonos eleméhez tartoznak, ha $x_0 = y_0$. Nyilvánvaló, hogy $\xi_T = \varepsilon$ és

$$H(\xi) = -\sum_k p_k \log p_k. \tag{2}$$

Véges (2) entrópia érték esetén, amint azt egyszerű számítások mutatják, $h(T, \xi) = = H(\xi)$, és így

$$h_1(T) = -\sum_k p_k \log p_k. \tag{3}$$

Nem nehéz megmutatni, hogy ez a formula érvényben marad akkor is, ha a (2) entrópia végtelen. Ily módon már a *Bernoulli* automorfizmusok osztályában is a h_1 invariáns minden pozitív értéket felvesz, a ∞ értéket is beleértve. Következésképp kontinuum sok olyan megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú automorfizmus van, melyek különböző metrikus típusba tartoznak.

3. §. AUTOMORFIZMUS ENTRÓPIÁJA

Az M tér tetszőleges

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi = \varepsilon \bmod 0$$

feltételnek eleget tevő, pozitív mértékű halmazokra történő ξ felbontását *kialakítónak* (образующий) nevezzük a T automorfizmusra nézve. Léteznek kialakító nélküli automorfizmusok, pl. a periódikus automorfizmusok. Nem ismeretes, léteznek-e kialakító nélküli ergodikus automorfizmusok.

Értelmezés szerint $h_1(T) = \infty$ abban és csak abban az esetben, ha a T automorfizmusnak nincs véges entrópiájú kialakítója. Sajnos ez a feltétel nem elég effektív, mivel nem állnak rendelkezésünkre megfelelő eszközök, melyek segítségével meg lehetne állapítani kialakítók létezését vagy nem létezését. Igaz, hogy *Kolmogorov* tétele szerint

$$h_1(T) \geqq \sup h(T, \xi), \qquad \xi \in Z,$$

tehát a $\sup h(T, \xi) = \infty$ egyenlőségből következik a $h_1(T) = \infty$ egyenlőség (így történik a (3) összefüggés bizonyítása, ha a jobb oldal végtelen). De ha, és ez gyakran előfordul, a T automorfizmus ergodikus és $\sup h(T, \zeta) < \infty$ és véges entrópiájú kialakítót nem sikerül találni, akkor $h_1(T)$-t nem tudjuk kiszámítani. Példaként említjük a racionális számok csoportja karaktereinek csoportján értelmezett ergodikus automorfizmusokat (lásd 5. §).

J. G. SZINAJ [11] javasolta a *Kolmogorov*-féle invariáns meghatározásának megváltoztatását; tetszőleges T automorfizmusra legyen

$$(4) \qquad h(T) = \sup h(T, \xi), \qquad \xi \in Z.^1$$

Nyilvánvaló, hogy $h(T) \leqq h_1(T)$ és $h(T) = h_1(T)$ ha $h_1(T) < \infty$. Ha T periódikus automorfizmus $h(T) = 0$, míg $h_1(T) = \infty$. Nem ismeretes azonban, hogy léteznek-e olyan ergodikus automorfizmusok, melyekre $h(T) < \infty$ és $h_1(T) = \infty$. A $p_1, p_2, \ldots$ számokkal meghatározott *Bernoulli* automorfizmus esetén (lásd 2. §)

$$h(T) = h_1(T) = -\sum_k p_k \log p_k.$$

SZINAJ javaslata igen szerencsésnek bizonyult, $h(T)$-t a T automorfizmus entrópiájának nevezzük.

4. §. AZ ENTRÓPIA TULAJDONSÁGAI

4. 1. $\quad h(T^n) = |n| h(T) \quad$ (n tetszőleges egész)

4. 2. $\quad h(S \times T) = h(S) + h(T)$.

Itt $S \times T$ az S és T automorfizmusok direkt szorzata, azaz azon terek direkt szorzatán értelmezett automorfizmus, melyeken az S és T automorfizmusok értelmezve vannak, a következő összefüggéssel értelmezve $S \times T(x, y) = (Sx, Ty)$.

4. 3. Ha az S automorfizmus a T automorfizmusnak homomorf képe (faktor automorfizmusa), akkor $h(S) \leqq h(T)$. Az L tér S automorfizmusa az M tér T automorfizmusának *homomorf képe*, ha létezik az M térnek az L térre olyan R homomorfizmusa, hogy $RT = SR$. Az M tér T automorfizmusának a ζ T-re invariáns ($T\zeta = \zeta$) mérhető felbontás szerinti *faktor automorfizmusának* nevezzük azt a T_ζ automorfizmust, melyet a T automorfizmus indukál az M/ζ faktortéren. A T_ζ faktor automorfizmus homomorf képe a T automorfizmusnak: az R homomorfizmus az M térnek az M/ζ faktor térre való természetes homomorfizmusa lesz. Fordítva, a T automorfizmus S homomorf képe izomorf a T automorfizmus azon ζ felbontás szerinti faktor automorfizmusával, mely az L tér pontjaira való felbontásának ősképéül szolgál az R homomorfizmus esetén, mely eleget tesz a $RT = SR$ összefüggésnek.

4. 4. Ha az M tér ζ mérhető felbontása mozdulatlan a T automorfizmusra nézve, és T_C a ζ felbontás C elemein a T komponensei (ergodikus vagy nem ergodikus), akkor

$$h(T) = \int_{M/\zeta} h(T_c)\, d\mu_\zeta.$$

[1] Valójában SZINAJ $h(T)$ értékét mint a $h(T, \xi)$ függvény felső határát értelmezte a *véges* mérhető ξ felbontások terén, ami ekvivalens (4)-el.

4. 5. Ha a T' olyan származtatott automorfizmus, melyet az M tér T automorfizmusa indukál, az $A \subset M$ altéren, mely eleget tesz a $\mu\left(\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n A\right) = 1$ feltételnek, akkor $h(T') = \dfrac{h(T)}{\mu(A)}$.

Az „altér" szó itt azt jelenti, hogy az A halmazt mint önálló teret tekintjük $\mu_A(X) = \dfrac{\mu(X)}{\mu(A)}$ mértékkel. A T' *származtatott automorfizmus* a

$$T'x = T^{m(x)}x, \ x \in A$$

összefüggéssel van értelmezve, ahol $m(x)$ az a legkisebb természetes l szám, melyre $T^l x \in A$ (ilyen l majdnem minden $x \in A$-ra létezik). Ha a T automorfizmus ergodikus a $\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n A\right) = 1$ feltétel tetszőleges pozitív mértékű A halmazra teljesül és a T' származtatott automorfizmus szintén ergodikus.

A 4. 1 tétel SZINAJ [11] dolgozatában a 4. 5 tétel ABRAMOV [12],[9] dolgozataiban, a 4. 2, 4. 3 és 4. 4 tételek az én [13] dolgozatomban találhatók. A 4.1, 4. 2 és 4. 3 tételek bizonyítása egyszerű, 4. 4 és 4. 5 mélyebb tételek.

A 4. 5 tétellel szoros kapcsolatban van ABRAMOV egy másik tétele [12], [9], mely szerint ergodikus automorfizmus entrópiája egyenletesen oszlik el a térben. Pontosan megfogalmazva: Legyen tetszőleges pozitív mértékű X halmazra és tetszőleges $A_1, A_2, \ldots$ elemekből álló $\xi \in Z$ felbontásra

$$H(\xi \cap X) = -\sum_k \mu(A_k \cap X) \log \mu(A_k \cap X)$$

($\mu(A_k \cap X) = 0$ esetén az összeg megfelelő tagja zérusnak veendő). Ekkor a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n \cap X)$$

határérték tetszőleges T automorfizmusra létezik és minden ergodikus T automorfizmus esetén $h(T, \xi)\, \mu(X)$ az értéke.

5. §. AZ ENTRÓPIA KISZÁMÍTÁSA

Ha a T automorfizmusnak van $\xi \in Z$ kialakítója, úgy entrópiáját a $h(T) = h(T, \xi)$ összefüggés alapján számíthatjuk ki. Fentebb megmutattuk, hogyan alkalmazható ez a módszer *Bernoulli* automorfizmusokra, ha a (2) összeg véges. Második példaként tekintsük tórusok automorfizmusait. Ha T a kétdimenziós tórus egy ergodikus automorfizmusa, akkor ezt az automorfizmust ciklikus koordinátákban meghatározó egész számokból álló mátrixnak két valós sajátértéke van, melyek közül az egyik — mondjuk λ_1 — abszolút értékben egynél nagyobb, a másik egynél kisebb. Mint SZINAJ megmutatta

$$h(T) = \log |\lambda_1|.$$

Általában, ha T az r-dimenziós tórus egy ergodikus automorfizmusa, melynek mátrixa r különböző valós sajátértékkel rendelkezik és ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ az abszolút értékben egynél nagyobbakat jelölik, akkor

$$h(T) = \sum_{i=1}^{p} \log |\lambda_i|.$$

Minden ilyen automorfizmusnak van véges entrópiájú kialakítója (sőt véges kialakítója). $h(T)$ kiszámítása a kialakító célszerű kiválasztásában és a megfelelő $h(T, \xi)$ függvényérték kiszámításában áll.

Az alábbi tételek lehetővé teszik automorfizmusok entrópiájának kiszámítását azokban az esetekben, amikor nincs véges entrópiájú kialakító, vagy ilyen kialakítót nem sikerült találni.

(A) Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan Z-beli felbontás sorozat, hogy

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \xi_r = \varepsilon \bmod 0,$$

akkor az M tér tetszőleges T automorfizmusára

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T_1, \xi_n)$$

(B) Ha T az M tér egy automorfizmusa és $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan Z-beli felbontás-sorozat, hogy

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi_n \right) = \varepsilon \bmod 0,$$

akkor

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \xi_n).$$

(C) Legyen T az M tér egy automorfizmusa és $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ a tér mérhető felbontásainak olyan sorozata, hogy

$$T\zeta_n = \zeta_n, \quad \zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon \bmod 0.$$

Ha T_n a T automorfizmus ζ_n szerinti faktor automorfizmusa, akkor

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T_n).$$

Az (A) tétel a [13], a (B) tétel SZINAJ [14], a (C) tétel pedig ABRAMOV [15] dolgozatában található meg. A (B) tétel tekinthető a (C) tétel speciális esetének (legyen $\zeta_n = \prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi_n$ és alkalmazzuk KOLMOGOROV 2. §-beli tételét), míg (A) a (B) speciális esetének tekinthető. Az (A) tétel főként elméleti jelentőségű és olyan esetekben alkalmazzuk, amikor automorfizmusok egy egész seregének egyidejűleg kell kiszámítani az entrópiáját. Ezen a tételen alapul a 4. 4 és sok más tétel bizonyítása. Konkrét számításokra a (B) és (C) tételek alkalmasabbak.

Példaként tekintsük a racionális számok additív R csoportja — vagy tetszőleges R' alcsoportja — karakterei csoportján értelmezett tetszőleges T automorfizmust. A T konjugált automorfizmusa, mint az R' alcsoport bármely automorfizmusa, valamilyen r racionális számmal való szorzás műveletét jelenti, és $r \neq \pm 1$ esetén a T automorfizmus ergodikus. Legyen $r = \frac{m}{n}$, ahol m és n relatív prímek. Ha R' az mn-es számrendszer racionális számaiból álló csoport, akkor a T automorfizmusnak van véges kialakítója, de komplikáltabb esetekben, speciálisan $R' = R$ esetén kialakitót nem sikerült találni és az entrópia kiszámítására a (B) vagy (C) tételt kell használni. Mint ABRAMOV [15] megmutatta, minden esetben

$$h(T) = \log \max(|m|, |n|).$$

6. §. NULL ENTRÓPIÁJÚ AUTOMORFIZMUSOK

Amint [13] dolgozatomban megmutattam, a null entrópiájú automorfizmusok $\mathfrak{A}$-ban (lásd 1. 6) egy mindenütt sűrű G_δ halmazt alkotnak. Más szavakkal: egy automorfizmus „törvényszerűen" (rendszerint) null entrópiájú.

A null entrópiájú automorfizmusok osztályát le lehet írni az entrópia fogalmának felhasználása nélkül is: a T automorfizmus entrópiája abban és csak abban az esetben egyenlő nullával, ha az M tér tetszőleges mérhető ζ felbontása, amely eleget tesz a $T\zeta \geqq \zeta$ feltételnek, eleget tesz a $T\zeta = \zeta$ mod 0 feltételnek is. Hogy jobban megértsük ezt a tételt, megjegyezzük, hogy a T automorfizmus az M tér tetszőleges mérhető ζ felbontás szerinti faktor terében egy a $T\zeta \geqq \zeta$ feltételnek elegettevő T_ζ *endomorfizmust* indukál, mely abban és csak abban az esetben lesz automorfizmus, ha $T\zeta = \zeta$. Ily módon a T automorfizmusnak abban és csak abban az esetben lesz null entrópiája, ha az összes faktor endomorfizmusai automorfizmusok mod 0.

Ugyanezen tétel harmadik megfogalmazását kapjuk, ha mérhető felbontásokról a megfelelő *mérhető halmazok algebráira* térünk át. Minden mérhető ζ felbontásnak megfelel az M összes mérhető halmazaiból álló $\mathfrak{M}$ algebra egy részalgebrája, mely a ζ felbontás elemeinek összegeiből áll. Az *$\mathfrak{M}$ algebra részalgebrájának* nevezzük tetszőleges mérhető halmazokból álló összességet, mely tartalmazza M-et, és zárt a kivonás, megszámlálható összeadás és megszámlálható metszetképzés műveleteire, a halmazokat null mértékű halmazoktól eltekintve tekintjük. A mod 0 különböző mérhető felbontásoknak az $\mathfrak{M}$ algebra különböző részalgebrái felelnek meg és minden részalgebra valamilyen mérhető felbontásnak felel meg. Ily módon a T automorfizmus entrópiája akkor és csak akkor lesz nulla, ha az $\mathfrak{M}$ algebra tetszőleges $\mathfrak{S}$ olyan részalgebrájára, melyre $T\mathfrak{S} \supseteqq \mathfrak{S}$, teljesül a $T\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ feltétel is.

7. §. ENTRÓPIA ÉS SPEKTRUM

A következő (ugyancsak [13]-ban szereplő) tétel az entrópia és spektrum közötti kapcsolatra mutat rá: pozitív entrópiájú T automorfizmus esetén az $L_2(M)$ térnek van olyan invariáns altere, melyben az U_T operátor spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú. Speciálisan: diszkrét spektrumú automorfizmusok null entrópiával bírnak; szinguláris spektrumú automorfizmus entrópiája nullával egyenlő; megszámlálható spektrumú automorfizmusok entrópiája szintén nullával egyenlő.

A tétel megfordítása nem igaz: null entrópiájú automorfizmus spektrumának szintén lehet megszámlálható multiplicitású, *Lebesgue* típusú komponense. Példa a tetszőleges kvázidiszkrét, de nem diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmus, melynek sajátértékei között nem szerepel 1-nek a gyöke, kivéve magát az 1-et. Ilyen automorfizmus entrópiája nullával egyenlő és a hozzárendelt U_T operátornak a sajátfüggvények által kifeszített altere $L_2(M)$-beli ortogonális kiegészítő terében megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektruma van (ABRAMOV [9]).

Még többet is lehet állítani: léteznek null entrópiájú megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumu automorfizmusok. Ilyen példát GIRSZANOV szerkesztett (nem publikálta). GIRSZANOV automorfizmusa minden fokon keverés.

8. §. KOLMOGOROV-FÉLE AUTOMORFIZMUSOK ÉS TELJESEN POZITÍV ENTRÓPIÁJÚ AUTOMORFIZMUSOK

A T automorfizmust *Kolmogorov-féle automorfizmusnak* nevezzük, ha az $\mathfrak{M}$ algebrának létezik olyan $\mathfrak{S}$ részalgebrája, hogy

$$(5)\qquad T\mathfrak{S}\supset\mathfrak{S},\quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathfrak{S}=\mathfrak{M},\quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathfrak{S}=\mathfrak{N},$$

ahol $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{M}$ algebrának két elemből — M-ből és az üres halmazból — álló részalgebrája. $\bigvee_\alpha \mathfrak{S}_\alpha$ jelöli az $\mathfrak{M}$ algebra legkisebb, az összes $\mathfrak{S}_\alpha$-át tartalmazó részalgebráját.

Automorfizmusoknak ezt az osztályát KOLMOGOROV vezette be [1] dolgozatában. Ott „kvázireguláris" automorfizmusoknak nevezte őket.

Kolmogorov automorfizmusra példa a *Bernoulli* automorfizmusok osztálya. Az (5) feltételnek eleget tevő $\mathfrak{S}$ algebraként a $\prod_{n=-\infty}^{0} T^n\xi$ felbontásnak megfelelő részalgebra szolgál, ahol ξ a 2. §-ban mutatott kialakító.

A *Kolmogorov* automorfizmusok spektrumát [1]-ben vizsgálták meg. Kitűnt, hogy az mindig megszámlálható multiplicitású, *Lebesgue* típusú. Mint [16] munkámban megmutattam, tetszőleges *Kolmogorov* automorfizmus keverés minden fokon.

A 6. §-ban mondottakból következik, hogy a *Kolmogorov* automorfizmus entrópiája pozitív. Egy PINSZKER [17] által bebizonyított mélyebb tétel szerint a *Kolmogorov* automorfizmusnak megfelelő $h(T, \xi)$ függvény szigorúan pozitív. Ez utóbbi azt jelenti, hogy tetszőleges, a triviális mod 0 ν felbontástól — mely az egyetlen M elemből áll — eltekintve, $\xi\in Z$ felbontásra $h(T, \xi)>0$. PINSZKER tételét még a következőképpen is meg lehet fogalmazni: *Kolmogorov* automorfizmus tetszőleges faktor automorfizmusának pozitív az entrópiája.

PINSZKER hipotézise az, hogy igaz a tétel megfordítása is: ha a $h(T, \xi)$ függvény szigorúan pozitív, akkor T Kolmogorov automorfizmus. Ezzel kapcsolatban megjegyzem, hogy szigorúan pozitív $h(T, \xi)$ függvényű automorfizmus spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú és minden fokon keverés.

Szigorúan pozitív $h(T, \xi)$ függvényű automorfizmusokat röviden *teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusoknak* fogjuk nevezni (PINSZKER „gyengén regulárisaknak" nevezte őket). Tanulmányozásuk bizonyos értelemben egyszerűbb, mint a *Kolmogorov* automorfizmusoké. Nyilvánvaló például, hogy teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus inverze teljesen pozitív entrópiájú és hogy teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus faktor automorfizmusa szintén teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus, ugyanakkor *Kolmogorov* automorfizmusokra hasonló tételeket sem bizonyítani, sem cáfolni nem sikerült.

PINSZKER érdekes eredményeket kapott tetszőleges automorfizmusokra nézve is. Bebizonyította, hogy tetszőleges T automorfizmus null entrópiájú faktor automorfizmusai között van legnagyobb faktor automorfizmus, azaz olyan T_{ζ_0} faktor automorfizmus, hogy tetszőleges null entrópiájú T_ζ faktor automorfizmusra fennáll a $\zeta \leqq \zeta_0$ mod 0 összefüggés. Ezen legnagyobb null entrópiájú faktor automorfizmusnak megfelelő ζ_0 felbontás a neki megfelelő $\mathfrak{S}_0$ részalgebra segítségével a következőképpen írható le: $\mathfrak{S}_0$ az $\mathfrak{M}$ algebra azon legkisebb részalgebrája, mely tartalmazza az összes

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \bigvee_{k=-\infty}^{n} T^k\mathfrak{S}$$

részalgebrákat, ahol $\mathfrak{S}$ tetszőleges részalgebrája az $\mathfrak{M}$ algebrának. Emellett tetszőleges invariáns és mérhető ζ felbontás, melynek a T_ζ *teljesen pozitív entrópiájú* faktor automorfizmus felel meg, független ζ_0-tól; ez utóbbi azt jelenti, hogy tetszőleges a ζ_0 felbontás elemeiből álló, A_0 mérhető halmaz és tetszőleges, a ζ felbontás elemeiből álló mérhető A halmaz esetén igaz a $\mu(A_0 \cap A) = \mu(A_0)\,\mu(A)$ összefüggés.

Ezzel a tétellel kapcsolatban PINSZKER megkérdezte, hogy lehetséges-e tetszőleges ergodikus automorfizmust teljesen pozitív entrópiájú és null entrópiájú automorfizmus direkt szorzatára bontani? Ez a hatásos sejtése azonban nincs sem bizonyítva, sem cáfolva. Innen következne, hogy tetszőleges pozitív entrópiájú ergodikus automorfizmusnak van teljesen pozitív entrópiájú faktor automorfizmusa, ami sokkal szerényebb állítás és ugyancsak nincs bizonyítva vagy cáfolva.

9. §. PONTOS ENDOMORFIZMUSOK

A *Kolmogorov*-féle automorfizmusokkal szorosan összefüggnek a *pontos endomorfizmusok*, melyeket [16] dolgozatomban részletesen tanulmányoztam. Az M tér T endomorfizmusát pontosnak nevezzük, ha

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}.$$

Ez a feltétel ekvivalens a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^n X) = 1$$

összefüggéssel, ahol X tetszőleges pozitív mértékű halmaz mérhető $TX, T^2X, \ldots$ képekkel. Az olyan tér, melyen pontos endomorfizmus van értelmezve, vagy nem tartalmaz pozitív mértékű pontot, vagy egyetlen pontból áll mod 0.

A pontos endomorfizmusok alapvető tulajdonságainak felsorolásához szükség van az 1. § bizonyos meghatározásainak endomorfizmusokra való kiterjesztésére. A T endomorfizmus metrikusan tranzitív, ha tetszőleges a $T^{-1}X = X$ feltételnek eleget tevő halmaz 0, vagy 1 mértékű. Az U_T operátor endomorfizmusra ugyanúgy van értelmezve, mint automorfizmusra, de ha T nem automorfizmus, vagy mod 0 sem automorfizmus, akkor U_T nem unitér, hanem csak félunitér operátor, azaz az $L_2(M)$ térnek lineáris izometrikus leképezése egy valódi részébe. Hogy a keverés fokszámának endomorfizmusokra alkalmas értelmezését kapjuk, az 1. 6-ban szereplő értelmezésben a $T^{k_n^i}X_i$ halmazok helyett $T^{-k_n^i}X_i$ halmazokat kell venni. A mod 0 nem egyetlen pontból álló *Lebesgue*-tér tetszőleges pontos endomorfizmusa metrikusan tranzitív, minden fokban keverés és a következő módon leírható spektrummal rendelkezik: a konstansok terének ortogonális kiegészítésében létezik olyan teljes ortonormált $\{f_{m,n}\}$, $m=1, 2, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots$ függvényrendszer, hogy

$$U_T f_{m,n} = f_{m,n+1}.$$

A következő konstrukció az M tér tetszőlegesen megadott T endomorfizmusát egy automorfizmussá alakítja. Legyen M' olyan halmaza az $\{x_n\}$ sorozatoknak (ahol $x_n \in M$ $(n=1, 2, \ldots)$), hogy $Tx_{n+1}=x_n$. Jelöljük megadott $X \subset M$ halmaz esetén X'_p-vel azon $\{x_n\} \in M'$ sorozatok halmazát, melyekre $x_p \in X$ és K_p-vel az összes lehetséges $X \subset M$ mérhető halmazoknak megfelelő X'_p halmazok összességét. Nyilvánvaló, hogy a $K_0, K_1, \ldots$ sorozat növekvő, és hogy $K = \bigcup_{p=0}^{\infty} K_p$ halmaztest. Legyen a μ' függvény K-n a $\mu'(X'_p) = \mu(X)$ összefüggéssel értelmezve és terjesszük ki ezt a függvényt *Lebesgue* mértékké. M' akkor *Lebesgue*-tér lesz, míg a T' leképezés, mely a

$$T\{x_n\}=\{x'_n\}, \quad x'_n=x_{n+1}$$

összefüggéssel van értelmezve az M' térnek automorfizmusa lesz. Ezt az automorfizmust nevezzük a T endomorfizmus *természetes kiterjesztésének.*

Egy endomorfizmus és természetes kiterjesztése egyidejűleg metrikusan tranzitívek vagy nem, és ugyanolyan fokon lesznek keverések. A *Kolmogorov* automorfizmusok és pontos endomorfizmusok közötti kapcsolat abban áll, hogy egy pontos endomorfizmus természetes kiterjesztése *Kolmogorov* automorfizmus és tetszőleges *Kolmogorov* automorfizmus (mod 0 izomorfizmus pontossággal) természetes kiterjesztése valamely pontos endomorfizmusnak. Hogy ilyen endomorfizmust kapjunk, a *Kolmogorov* automorfizmust fel kell bontani az (5) tulajdonsággal rendelkező $\mathfrak{S}$ algebrának megfelelő mérhető felbontás szerint.

A $h(T, \xi)$ függvény és $h(T)$ entrópia endomorfizmusra ugyanúgy az (1) és (4) képletekkel van értelmezve, mint automorfizmusra, csak ξ_T^n felbontáson a $\prod_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ felbontást kell érteni. Valódi endomorfizmus entrópiája mindig pozitív: $h(T)=0$ esetén T vagy automorfizmus, vagy automorfizmus mod 0. Ha T pontos endomorfizmus, a $h(T, \xi)$ függvény szigorúan pozitív. Endomorfizmus entrópiája egyenlő természetes kiterjesztésének entrópiájával.

Endomorfizmusokra legegyszerűbb példák a *Bernoulli endomorfizmusok.* Ugyanúgy vannak értelmezve, mint a *Bernoulli* automorfizmusok, csak az M tér az egy irányban végtelen $\{x_n\}$ sorozatokból áll. *Bernoulli* endomorfizmus természetes kiterjesztése *Bernoulli* automorfizmus lesz ugyanazon állapottérrel.

Másik példa a kétdimenziós tórus endomorfizmusai. Legyen v az endomorfizmust ciklikus koordinátákban megadó egész számokból álló másodrendű mátrix determinánsa. Ha $|v|>1$, az endomorfizmus pontos és entrópiája $\log |v|$ lesz.[2]

[2] Feltételezve, hogy mindkét sajátérték abszolút értékben nagyobb 1-nél. *(A fordító megjegyzése.)*

Harmadik példaként tekintsük a *számelméleti Gauss-féle endomorfizmust*. Legyen M a $[0, 1]$ intervallum irracionális számainak

$$\mu(X) = \frac{1}{\ln 2} \int_X \frac{dx}{1+x}$$

mértékkel ellátott tere és T M-nek önmagára való a $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$ képlettel értelmezett leképezése, ahol (c) a c szám törtrésze. Ismeretes [18], hogy T metrikusan tranzitív endomorfizmusa az M térnek. Ha minden $x \in M$ számot lánctört előállításával helyettesítünk, az M tér átalakul a természetes számokból álló $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatok terévé, míg T eltolássá alakul át, mely az $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot az $(a_2, a_3, \ldots)$ sorozatba viszi át. A mértéket, természetesen át kell vinni M sorozatainak a terébe. Hogy megkapjuk a T endomorfizmus természetes kiterjesztését, az egyoldalú $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot kétoldalú $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ sorozattal kell felcserélni. T pontos endomorfizmusnak bizonyul és entrópiája

$$h(T) = \frac{\pi^2}{6(\ln 2)^2}$$

lesz. Ez az összefüggés szoros kapcsolatban van a lánctörtek elméletében ismert azon tétellel, mely szerint az x szám n-edik közelítésében szereplő $q_n(x)$ nevezőre majdnem mindenütt igaz a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e^{\frac{\pi^2}{12 \ln 2}}$$

összefüggés.

10. §. FOLYAMATOK

Nyilvánvaló, hogy a folytonos $\{S_t\}$ folyamatot előállító S_t automorfizmusok bármelyikének $h(S_t)$ entrópiája metrikus invariánsa lesz a $\{S_t\}$ folyamatnak. Mi a kapcsolat ezen invariánsok között? Hogyan kell értelmezni magának az $\{S_t\}$ folyamatnak az entrópiáját?

Természetes az a feltevés, hogy a 4. 1 tétellel analóg

$$h(S_t) = |t| h(S_1) \tag{6}$$

összefüggés fennáll. Ha t racionális, ez az összefüggés a 4. 1 tételnek egyenesen következménye. Azonban irracionális t esetén a kérdés nem olyan egyszerű. KOLMOGOROV, aki először foglalkozott ezzel a problémával, a probléma megoldásáig az $\{S_t\}$ folyamat entrópiáját a következő képlettel értelmezte

$$h(\{S_t\}) = \sup \frac{h(S_t)}{t}, t > 0.$$

Bizonyos idő múlva ABRAMOV [19] bebizonyította, hogy a (6) összefüggés tetszőleges mérhető $\{S_t\}$ folyamatra igaz, tehát $h(\{S_t\}) = h(S_1)$. Azután PINSZKER bebizonyította a (6) összefüggést tetszőleges folytonos folyamatra (nem publikálta).

PINSZKER bizonyítása konstruktív, ABRAMOV bizonyítása a speciális folyamatok tanulmányozásának egyik részeredménye. ABRAMOV alapvető eredménye abban áll, hogy ha az $\{S_t\}$ speciális folyamat a T automorfizmus és az F függvény (1. 7 pont) alapján lett felépítve, akkor

$$h(S_t)=|t|\frac{h(T)}{\int_L F d\lambda}.$$

Ennek a formulának sok alkalmazása van. Speciálisan belőle következik a (6) összefüggés először csak speciális folyamatokra, azután a mérhető folyamatoknak speciális folyamatokkal történő előállítására vonatkozó tétel (1. 7 pont) és a 4. 4 tétel alapján mérhető folyamatokra.

Tisztán folytonos spektrum esetén folyamatokra, ugyanúgy, mint automorfizmusokra, a spektrál izomorfiából nem következik az egy metrikus típushoz való tartozás: tetszőleges pozitív h-ra, $h=\infty$ értéket is beleértve, létezik olyan megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú mérhető folyamat, melynek entrópiája h. A megfelelő példák már KOLMOGOROV első dolgozatában [1] szerepelnek. Ezek a példák elméleti valószínűségszámítási módszerekkel készültek, de lehetséges egyszerű izomorf előállításuk speciális folyamatokkal (minden esetben a T bázisautomorfizmus, *Bernoulli* automorfizmus, míg az F függvény konstans a 2. §-ban leírt ξ felbontás elemein). Entrópiájuk kiszámítását KOLMOGOROV kezdte el és SZINAJ fejezte be [14]. A *Kolmogorov—Szinaj*-féle összefüggések az ABRAMOV által később talált általános [7] formulának részei.

A folytonos $\{S_t\}$ folyamatot *Kolmogorov folyamatnak* („kvázireguláris" folyamatnak a *Kolmogorov*-féle terminológiában [1]) nevezzük, ha létezik az $\mathfrak{M}$ algebrának olyan $\mathfrak{S}$ részalgebrája, hogy

$$S_t\mathfrak{S}\subset S_{t'}\mathfrak{S} \text{ ha } t<t', \quad \bigvee_{-\infty<t<\infty} S_t\mathfrak{S}=\mathfrak{M}, \quad \bigcap_{-\infty<t<\infty} S_t\mathfrak{S}=\mathfrak{N}.$$

KOLMOGOROV [1] bebizonyította, hogy tetszőleges ilyen folyamat spektruma homogén *Lebesgue* típusú. SZINAJ [20] bebizonyította, hogy tetszőleges mérhető KOLMOGOROV folyamat spektruma megszámlálható multiplicitású. SZINAJ bizonyítása felhasználja mérhető folyamatoknak speciális folyamatokkal történő előállítását; folytonos folyamatokra nem alkalmas. *Kolmogorov* folyamat minden fokon keverés.

Bár a kvázireguláritás fogalma a valószínűségszámításban vetődött fel, a *Kolmogorov*-féle automorfizmusok és folyamatok a topológikus algebrában és a dinamikus rendszerek klasszikus elméletében is előfordulnak. A legérdekesebb példa erre a *geodétikus folyamatok*. Legyen V^n teljes *Riemann* felület (a felső indexek a dimenziószámot jelölik) és M^{2n-1} a lineáris elemek halmaza, azaz az (a, e) pároké, ahol $a\in V^n$ míg e V^n a pontbeli érintőjének egységvektora. Minden (a, e) lineáris elemnek megfelel egy geodetikus vonal, mely V^n-en az a ponton keresztül e irányba halad és M^{2n-1}-ben a geodetikus folyamat az

$$S_t(a, e) = (a_t, e_t)$$

formulával van értelmezve, ahol (a_t, e_t) az a lineáris elem, mely (a, e)-ből adódik, ha egységnyi sebességgel mozgunk ezen geodetikus vonal mentén t ideig. M^{2n-1}-ben a μ invariáns mérték $d\mu = dm\,d\omega$ összefüggéssel van értelmezve, ahol dm a V^n-beli

n-dimenziós térfogatelem, míg $d\omega$ az $n-1$ dimenziós térfogatelem az érintővektorok egységgömbjén az adott pontban. A geodétikus folyamatok jelentősége abban áll, hogy tanulmányozásukhoz vezet a mechanika problémáinak széles osztálya. Spektrál tulajdonságaikat csak a legegyszerűbb esetben, negatív állandó görbületű V^n felületek esetén vizsgálták. HEDLUND [21] és HOPF [22] megmutatták, hogy negatív állandó görbületű kompakt felületeken a geodetikus folyamat ergodikus és elsőfokon keverés. GELFAND és FOMIN [23] bebizonyították, hogy spektruma *Lebesgue* típusú és hogy $n=2$ esetén ez a spektrum megszámlálható multiplicitású. (Ezeket az eredményeket 1951-ben kapták csoport reprezentációs módszerekkel.) SZINAJ [24] nemrég bebizonyította, hogy negatív állandó görbületű kompakt felületen tetszőleges geodétikus folyamat *Kolmogorov* folyamat, speciálisan spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú és minden fokon keverés. Ugyanebben a [24] munkában kiszámítja ilyen folyamat entrópiáját. Következik a változó negatív görbületű kompakt felületeken a geodétikus folyamatok tanulmányozása. Nincs kizárva, hogy szintén *Kolmogorov* folyamatoknak bizonyulnak és hogy ily módon megkezdődik a klasszikus dinamikus rendszerek spektrálelméletének kialakítása. Mindeddig csupán az volt ismeretes, hogy a mindenütt negatív görbületű kompakt felület ($n=2$) geodétikus folyamata ergodikus (HOPF [22]). SZINAJ nemrég bebizonyította (nem publikálta), hogy ilyen folyamat spektrumának van megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* komponense.

11. §. ÚJ PROBLÉMÁK

11. 1. Az izomorfizmus problémája. Legyenek T és T' teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok; egy metrikus típusba tartoznak-e, ha $h(T) = h(T')$?

A kérdés még szűkebb értelemben is feltehető, például *Kolmogorov* automorfizmusokra Z-beli kialakítóval. De lehet, hogy kezdetben helyes teljesen speciális esetben, a *Bernoulli* automorfizmusokra felvetni. Itt bizonyos eredmények ismeretesek: L. D. MESALKIN [25] bebizonyította, hogy ha a T és T' automorfizmusok olyan $p_1, p_2, \dots, p_r$ és $p_1', p_2', \dots, p_r'$ számokkal vannak értelmezve (lásd 2. §), melyek egy és ugyanazon természetes szám negatív egész hatványai és $h(T) = h(T')$, akkor T és T' egy metrikus típusba tartoznak. Például az $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ számokkal meghatározott *Bernoulli* automorfizmusok azonos metrikus típusba tartoznak.

11. 2. Bernoulli automorfizmusok. Bebizonyítható (nem publikált), hogy a véges entrópiájú T automorfizmus abban és csak abban az esetben *Bernoulli* automorfizmus, ha van oly $\xi \in Z$ kialakítója, melyre $H(\xi) = h(T)$.

Nincs kizárva, hogy tetszőleges *Kolmogorov* automorfizmus egyben *Bernoulli* automorfizmus. Igaz-e, hogy $\xi \in Z$ kialakító létezése esetén fennáll az

$$\inf H(\xi) = h(T)$$

egyenlőség, ahol az infimum az összes $\xi \in Z$ kialakítókra vonatkozik?

11. 3. Kialakítók (vö. 3. §). Van-e minden ergodikus automorfizmusnak kialakítója? Minden véges entrópiájú ergodikus automorfizmusnak van-e véges entrópiájú kialakítója? Hogyan lehet ezeket a problémákat *Kolmogorov* automorfizmusokra megoldani? Létezik-e $h(T) < \infty$ esetén legalább olyan $\xi \in Z$ felbontás, hogy $h(T, \xi) = h(T)$?

11. 4. Kolmogorov automorfizmusok és teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok (vö. 8. §). Tetszőleges, teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus *Kolmogorov* automorfizmus-e? Egy *Kolmogorov* automorfizmus tetszőleges faktor automorfizmusa *Kolmogorov* automorfizmus-e? *Kolmogorov* automorfizmus inverze *Kolmogorov* automorfizmus-e?

Minden pozitív entrópiájú ergodikus automorfizmusnak van-e teljesen pozitív entrópiájú faktor automorfizmusa? Szétesik-e minden ergodikus automorfizmus egy teljes pozitív entrópiájú és egy null entrópiájú automorfizmus direkt szorzatára?

11. 5. Kompakt kommutatív csoportok automorfizmusai. Egy kompakt kommutatív csoport ergodikus automorfizmusa *Kolmogorov* automorfizmus-e? Teljesen pozitív entrópiájú-e? Vagy pozitív entrópiájú?

Részeredmények, természetesen vannak. Például SZINAJ bebizonyította (nem publikált), hogy a kétdimenziós tórus ergodikus automorfizmusa *Kolmogorov* automorfizmus.

Helyes lenne a véges dimenziós tórus ergodikus automorfizmusainak és endomorfizmusainak entrópiáját teljesen meghatározni (lásd 5. és 9. §§). Másik, reálisnak látszó feladat a kétdimenziós tórus ergodikus automorfizmusainak teljes metrikus osztályozásában áll. Az entrópia lesz-e itt az egyetlen invariáns? Ezek az automorfizmusok *Bernoulli* automorfizmusok lesznek-e?

11. 6. Megszámlálható multiplicitású Lebesgue spektrumú automorfizmusok tere. Jelölje $\mathfrak{L}$ a [0, 1] intervallum azon automorfizmusainak terét, melyek spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú, és vezessük be $\mathfrak{L}$-ben a

$$\varrho(S, T) = \inf \sigma(V) \tag{8}$$

metrikát, ahol az infimum az $L_2(M)$-en értelmezett összes V az $U_T = VU_SV^{-1}$ feltételnek elegettevő unitér operátorokra terjesztendő ki, miközben a σ függvény értelmezése

$$\sigma(V) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|Vf_k - f_k\|}{2^{k+1}},$$

ahol $f_1, f_2, \ldots$ valamilyen teljes, normált rendszer $L_2(M)$-ben. Ezen metrikában az $\mathfrak{L}$ tér teljes és szeparábilis.

Érdekes lenne megvizsgálni a null entrópiájú és a másodfokon keverő automorfizmusok osztályainak elhelyezkedését $\mathfrak{L}$-ben. Az első osztály, ezt nem nehéz megmutatni, G_δ. Mindenütt sűrű lesz-e? A második osztály első kategóriájú lesz-e?

A (8) metrika felhasználható tetszőleges spektrál típusú automorfizmusok tanulmányozására.

11. 7. A ferde szorzat entrópiája. Legyenek L és L' *Lebesgue* terek, S az L tér automorfizmusa és $\{S'_x\}$, $x \in L$ az L' tér automorfizmusainak egy mérhető serege (a mérhetőség azt jelenti, hogy az L térnek az $x \to S'_x$ leképezéssel az L' tér automorfizmusainak terébe történő leképezésénél a nyílt halmazok ősképei mérhetők). Az L és L' terek $M = L \times L'$ direkt szorzatán a T leképezést értelmezzük a

$$T(x, y) = (Sx, S'_x y)$$

összefüggéssel. Nem nehéz megmutatni, hogy T az M térnek automorfizmusa, vagy legalábbis automorfizmussá válik az S'_x automorfizmusok mindegyikének egy null mértékű halmazon (a neki megfelelő) való megfelelő megváltoztatásával. Ez az automorfizmus mod 0 egyértelműen meg van határozva és *S bázisú S'_x rétegződésű ferde szorzatnak* nevezzük.

A probléma a ferde szorzat entrópiájának a bázis és a réteg karakterisztikái alapján történő kiszámításában áll. Egyszerű példákon látható, hogy $h(T)$ értékét a $h(S)$ és $h(S'_x)$ értékek nem határozzák meg. Részeredmények ismeretesek: ha egyenes szorzatról van szó (azaz S'_x nem függ x-től), a 4. 2 tétel érvényes; ha S az azonosság leképezése, a 4. 4 tétel érvényes; ha az összes S'_x automorfizmusok eltolások a kör kerületén vagy valamilyen más kompakt kommutatív csoporton, akkor $h(T)=h(S)$ (ABRAMOV [19], [9]). Az általános esetben érdekes becslések adódnak (ABRAMOV [9]), de pontos formula még nem ismeretes.[1]

Bár mostanáig a ferde szorzatokat főleg példák készítésére használták, ennél nagyobb jelentőségűek bizonyos értelemben: bármilyen legyen is az ergodikus T automorfizmus és bármilyen legyen a T-re nézve invariáns ζ felbontás, a T automorfizmus felbontható ferde szorzat alakba, melynek bázisául a T_ξ faktorautomorfizmus szolgál (lásd 4. §). Hogy ilyen felbontást kapjunk, az M teret az M/ζ faktortér és valamilyen L' *Lebesgue* tér direkt szorzataként kell előállítani és legyen

$$L=M/\xi, \quad S=T_\xi, \quad S'_x=P_{Sx}TP_x^{-1} \quad (x\in L),$$

ahol P_x az $x\times L'$ rétegnek a $P_x(x,y)=y$ által meghatározott természetes vetülete L'-re. Az $M=M/\zeta\times L'$ felbontás létezése következik a mérhető felbontások elméleten ismert a független kiegészítő létezésére vonatkozó általános tételből (lásd [8], hogy ennek a tételnek a feltételei teljesülnek, következik a ζ felbontás invariáns voltából és a T automorfizmus ergodikusságából). Ily módon a ferde szorzat entrópiájának kiszámítására szolgáló formula a 4. 3 tétel élesítése lenne.

11. 9. Egy egyenlőtlenség. Igaz-e, felcserélhető T, S automorfizmusokra a $h(ST)=$ $=h(S)+h(T)$ egyenlőtlenség?

Hasonló egyenlőtlenség nem lehet igaz *tetszőleges* S, T automorfizmusokra. Valóban, mivel a null entrópiájú automorfizmusok $\mathfrak{A}$-ban egy mindenütt sűrű G_δ-át alkotnak, tetszőleges automorfizmus két null entrópiájú automorfizmus szorzata.

11. 9. Folyamat entrópiája és spektruma. Kívánatos lenne olyan direkt bizonyítást találni a *Kolmogorov* folyamat spektrumának megszámlálható multiplicitására, mely használható folytonos folyamatokra is (lásd 10. §).

Ezzel kapcsolatos egy másik probléma: van-e minden pozitív entrópiájú folyamatnak a spektrumában megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* komponens?

11. 10. Speciális folyamatok. Konkrét speciális folyamatok tulajdonságainak a tanulmányozása jelentős nehézségekkel jár. Ezért kívánatos lenne olyan eléggé tág feltételeket találni, melyeket a T automorfizmustól és az F függvénytől kell megkövetelni, hogy az általunk szerkesztett speciális folyamat *Kolmogorov* folyamat legyen.

[1] *Megjegyzés a korrektúránál.* Jelenleg ez a probléma teljesen megoldott.

AZ IDÉZETT IRODALOM

[1] А. Н. Колмогоров, Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега, Д.А.Н. **119** (1958), 861—864.

[2] А. Н. Колмогоров, Об энтропии на единицу времени; как метрическом инварианте автоморфизмов, У.А.Н. **124** (1959), 754—755.

[3] Л. М. Абрамов и Я. Г. Синай, О семинаре В. А. Рохлина по метрической теории динамических систем, У.М.Н. **14**, вып. 6 (1959), 223—225.

[4] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Berlin, 1937.

[5] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, У.М.Н. **4**, вып. 2 (1949), 57—128.

[6] P. R. Halmos, *Lectureson ergodic theory*, Tokyo, 1956.

[7] В. А. Рохлин и С. В. Фомин, Спектральная теория динамических систем, Труды третьего всесоюзного математического съезда, том 3, М., 1958, 284—292.

[8] В. А. Рохлин, Об основных понятиях теории меры, Матем. сб. **25** (**67**): 1 (1949) 107—150.

[9] Л. М. Абрамов, Некоторые вопросы метрической теории динамических систем (диссертация) М.Г.У. (1960).

[10] И. В. Гирсанов, О спектрах динамических систем, порождаемых стационарными гауссовскими процессами, Д.А.Н. **119** (1958), 851—853.

[11] Я. Г. Синай, О понятии энтропии динамической системы, Д.А.Н. **124** (1959), 768—771.

[12] Л. М. Абрамов, Энтропия производного автоморфизма, Д.А.Н. **124** (1959), 647—650.

[13] В. А. Рохлин, Об энтропии метрического автоморфизма, Д.А.Н. **124** (1959), 980—983.

[14] Я. Г. Синай, О потоках с конечной энтропией, Д.А.Н. **125** (1959), 1200—1202.

[15] Л. М. Абрамов, Энтропия автоморфизма соленоидальной группы, Теория вероятн. и её прим., **4** (1959), 249—254.

[16] В. А. Рохлин, Точные ендоморфизмы пространства Лебега, Изв. Ан (1960).

[17] М. С. Пинскер, Понятие регулярности случайных процессов, Теория вероятн. и её прим., **4** (1959), 475—476.

[18] Ryll—Nardsewski, On the ergodic theorems, II., *Studia Math.* **12** (1951), 74—79.

[19] Л. М. Абрамов, Об энтропии потока, Д.А.Н, **128** (1959), 873—876.

[20] Я. Г. Синай, Динамические системы и стационарные процессы, Теория вероятн. и её прим., **5** (1960).

[21] G. A. Hedlung, The dynamics of geodesic flows, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 241—246.

[22] E. Hopf, Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, *Ber. Verh. Säch. Akad. Wiss.*, Leipzig, **91** (1939), 261—304.

[23] И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, У.М.Н. **7**, вып. 1 (1952), 118—137.

[24] Я. Г. Синай, Геодезические потоки на многообразиях отрицательной постоянной кривизны, Д.А.Н. (1960).

[25] Л. Д. Мешалкин, Один случай изоморфизма схем Бернулли, Д.А.Н. **128** (1959), 41—44.

Fordította: Arató Mátyás