KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEKRŐL (I)*

Írta: A. SZ. KRONROD

Bevezetés

A két- és többváltozós valós függvények elméletének elég kiterjedt irodalma van. Véleményem szerint azonban az ebben az irányban elért nagyszámú és gyakran igen mély eredmény mégsem képez természetes elméletet. A jelen cikk egy a kétváltozós valós függvények geometriai elméletébe való bevezetés vázlata.

Vizsgálatunk tárgyai a kétváltozós függvények, de éppen nem mint *két* változó, x és y, függvényei, hanem mint valamely kétdimenziós tartomány pontjaiban megadott függvények. Ezzel kapcsolatban a bevezetendő fogalmaknak — lineáris és síkbeli variáció, lineáris integrál, a monotonitás fogalma stb. — úgy kell felépülniük, hogy ne függjenek a koordinátarendszer véletlen megválasztásától.

A tanulmányozás során kiderül, hogy a kétváltozós függvények tulajdonságai élesen széthasadnak. Közülük egyesek kisebb-nagyobb mértékben invariánsnak bizonyulnak az értelmezési tartomány önmagába való homeomorf transzformációival szemben; ezek a tulajdonságok közel állnak az egyváltozós függvények tulajdonságaihoz, Különösen világosan mutatkozik meg a kétváltozós függvények bizonyos tulajdonságainak „egydimenziószága" azokban az eredményekben, amelyeket az I. fejezet 2. §-ában ismertetünk. Kiderül, hogy minden függvénnyel kapcsolatban van egy egydimenziós kontinuum, a függvény egydimenziós fája. A függvény számos tulajdonságának vizsgálata visszavezethető az egydimenziós fán értelmezett megfelelő függvény tulajdonságainak vizsgálatára.

A kétváltozós függvények más tulajdonságai, ellenkezőleg, határozottan „kétdimenziósak". Lényegében ilyen tulajdonságokat tanulmányozunk a III. fejezetben. Végül kiderül, hogy vannak olyan fogalmak is, amelyek a függvények „egydimenziós" és „kétdimenziós" tulajdonságaitól is függnek. Ilyen például az a tétel, amely a korlátos síkbeli és lineáris variációjú függvények teljes differenciáljának majdnem mindenütt való létezéséről szól. Bizonyos mértékig ilyen közbenső helyzetet foglalnak el a IV. fejezet eredményei is.

Az első fejezet — „Nívóhalmazok" — célja annak az apparátusnak a megalkotása, amelynek segítségével a kétváltozós függvényeket tanulmányozni fogjuk.

A második fejezetet — „Lineáris variáció" — a kétváltozós függvények „egydimenziós" tulajdonságainak szenteljük; a lineáris variáció itt megalkotott fogalma majdnem azonos az egyváltozós függvény — pontosabban az egydimenziós kontinuumon értelmezett függvény — variációjának fogalmával.

* Успехи математических наук, Том V, выпуск 1 (35), 24—134. A magyar nyelvű fordítás több részletben jelenik meg. Ez az (I) rész az eredeti cikk I. fejezete 1—2. §-át, valamint a FÜGGELÉK-et és az irodalomjegyzéket tartalmazza.

A harmadik fejezetben — „Síkbeli variáció" — a függvények „kétdimenziós" tulajdonságait tanulmányozzuk. Itt megalkotjuk a kétdimenziós tartományon értelmezett $F(\eta)$ függvény síkbeli $W(F)$ variációjának fogalmát. A síkbeli variáció korlátossága ekvivalensnek bizonyul az ismert *Tonelli-féle variáció* korlátosságával. Az utóbbi variáció-fogalom azonban nem tesz eleget annak a legfontosabb követelménynek, amely nézetem szerint a geometriában minden fogalommal szemben természetes módon támasztható: a Tonelli-féle variáció *lényegesen függ* a derékszögű koordinátarendszer megválasztásától. Éppen ezért a *Tonelli-féle* variációra elvileg nem nyerhetők olyanfajta tételek, mint a síkbeli variáció egyenlősége a gradiens abszolút értékének integráljával (abszolút folytonos függvényeknél).

A *Tonelli-féle* variáció-fogalom nem-geometriai voltának egy mélyebb következménye abban áll, hogy nem alkalmazható felületi függvényekre, ahol a síkbeli variáció alkalmas segédeszköz például a felszín fogalmának vizsgálatára. Az alkalmazások szempontjából valószínűleg a III. fejezet a legfontosabb.

A negyedik fejezet — „Lineáris integrál" — kissé különleges helyzetet foglal el. Itt vezetjük be kétváltozós függvény deriváltjának, primitív függvényének és „ponttól pontig vett" integráljának fogalmát. E fogalmak bevezetését a szerző szükségesnek véli és a kapott eredmények ezt bizonyos mértékben igazolják. De míg a síkbeli és a lineáris variáció konstrukciója számos okból véglegesnek látszik, a lineáris integrál konstrukciójával a dolog másként áll. Mégis az a körülmény, hogy ennek a nem tökéletes konstrukciónak a segítségével néhány természetes és eddig fel nem fedezett összefüggést lehetett kapni, arra késztetett, hogy bevegyem ezt a fejezetet, igaz, kissé vázlatos formában.

A szerző seholsem törekedett maximális általánosságra, feláldozva azt a szemléletesség érdekében. A figyelmes olvasó a cikk majdnem minden eredményét át fogja tudni vinni olyan függvényekre, amelyek például egy irányítható, folytonosan differenciálható, nem határolt kétdimenziós sokaságon vannak értelmezve (az I., II. és III. fejezet eredményeit pedig határolt sokaságok esetére is). Továbbá az eredmények nagyrésze automatikusan átvihető n-változós függvények esetére is. Itt azonban $n>2$ esetén természetes és szükségszerű módon fellépnek a „k-dimenziós" karakterisztikák ($k=1, 2, \dots, n$), amelyeket $k \neq 1$; n mellett én nem tudok eléggé geometriai módon megszerkeszteni, és ezért az $n=2$ esetre szorítkoztam.

A nívóhalmaznak mint a függvényvizsgálat eszközének fogalma felhasználásra került már G. M. ADELSZON—VELSZKIJjel közösen írt [1] munkáinkban, amelyek a monogén függvények analitikus voltának *direkt* bizonyításával foglalkoznak. (Az utóbbi problémát N. N. LUZIN vetette fel.) Éppen ezek a munkák vezettek el engem a többváltozós függvények önmagukban való tanulmányozásához. A többváltozós függvények elmélete terén végzett munkásságomra, amely ennek a cikknek a megírására vezetett, sokan gyakoroltak hatást. Bár nincs lehetőségem arra, hogy mindnyájukat felsoroljam, mégis felhasználom az alkalmat és mély hálámat fejezem ki N. N. LUZINnak, A. N. KOLMOGOROVnak, SZ. L. SZOBOLJEVnek, I. M. GELFANDnak és D. E. MENYSOVnak értékes tanácsaikért és útmutatásaikért. Továbbá őszintén hálás vagyok a többváltozós függvények tanával foglalkozó szeminárium résztvevőinek, különösen E. V. GLIVENKÓnak, R. SZ. GUTYERnak, A. JA. DUBOVICKIJnek, SZ. A. PLOTNYIKOVAJÁnak, A. F. FILIPPOVnak és SZ. V. JABLONSZKIJnak, akikkel folytatott beszélgetéseim lényeges haszonnal jártak számomra.

Végül egészen külön kell rámutatnom E. M. LANGYISZ szerepére. E. M. LANGYISZ, aki állandóan figyelemmel kísérte munkám minden részletét, az egész idő

alatt jelentős befolyást gyakorolt magára a mű irányára is tanácsaival, felfogásával és elképzeléseivel.

A cikkben felhasználásra kerül az elemi topológia számos fogalma. Az olvasó ezeket megismerheti P. Sz. ALEKSZANDROV [2] és HAUSDORFF [3] könyvéből. A szükséges topológiai fogalmak és eredmények összeállítása megtalálható a jelen bevezetést követő Függelékben*, magában a szövegben pedig hivatkozunk erre a függelékre. (A Függelék definíciói és tételei latin, a segédtételek görög betükkel vannak jelölve.)

Az egész cikk folyamán (az I. fejezet 2. §-a kivételével) az egyedüli előforduló ponthalmazok a négyzet vagy a kétdimenziós gömbfelület pontjaiból álló halmazok. A továbbiakban gyakran nem fogjuk külön megemlíteni ezt a körülményt. A zárt négyzetet vagy a kétdimenziós gömbfelületet mindig J-vel fogjuk jelölni. Két ponthalmaz, M és N egymástól való távolságát mindenütt $\varrho(M, N)$ vagy $|M, N|$ jelöli. Speciálisan ha ξ és ζ két pont, akkor $\varrho(\xi, \zeta) = |\xi, \zeta|$ a köztük mért távolságot jelenti. Az E halmaz kiegészítő halmazát CE-vel, E lezárását pedig $\bar{E}$-sal jelöljük. $[\xi, \zeta]$ a ξ, ζ pontokat összekötő zárt egyenesszakasz, illetve főkörív aszerint, amint J négyzet vagy gömbfelület.

$\overline{lt}_n E_n$ és $\underline{lt}_n E_n$ az $\{E_n\}$ halmazsorozat topológiai limes superiorát és limes inferiorát jelenti (lásd az F definíciót a Függelékben).

FÜGGELÉK*

Néhány topológiai segédeszköz

A továbbiakban, mint mindig, J a kétdimenziós gömbfelületet vagy az egységnégyzetet jelöli. Ha a definíciókban, segédtételekben és tételekben a tér jellegéről nincs említés, akkor kompaktumokról van szó.

A definíció. Az R tér E halmazát *összefüggőnek* nevezzük, ha nem bontható fel két olyan E_1, E_2 halmazra, hogy

$$\bar{E}_1 \cap E_2 = 0 \quad \text{és} \quad E_1 \cap \bar{E}_2 = 0.$$

B definíció. Összefüggő kompaktum neve *kontinuum.*

C definíció. Nyílt összefüggő halmaz neve *tartomány.*

α SEGÉDTÉTEL. *Összefüggő halmaz lezárása összefüggő.*

β SEGÉDTÉTEL. *Ha valamely összefüggő halmaz mindegyik pontját befedi egy tartomány, akkor e tartományok összege összefüggő.*

D definíció. Az E halmaz a pontot tartalmazó *komponensének* nevezzük az a pontot tartalmazó *legnagyobb összefüggő $\mathscr{E}_a \subset E$ részhalmazt.*

γ SEGÉDTÉTEL. *Bármely E halmaz és $a \in E$ pont esetén található az a pontot tartalmazó $\mathscr{E}_a \subset E$ komponens. Az $\mathscr{E}_a$ komponens egyenlő az E halmaz a pontot tartalmazó összes összefüggő részhalmazainak egyesítésével.*

* Az eredeti cikktől eltérően, a FÜGGELÉK-et a BEVEZETÉS után közöljük. *(Szerk.)*

δ SEGÉDTÉTEL. *Zárt halmaz komponense zárt halmaz.*

E definíció. Az E halmaz *elválasztja* az A, B halmazokat (speciálisan: az a, b pontokat), ha tetszés szerinti, az A, B halmazokat metsző K kontinuumra az $E \cap K$ metszet nem üres.

ε SEGÉDTÉTEL. *Ha az $E \subset J$ zárt halmaz nem választja el az a, b pontokat, akkor található az a pontot b-vel összekötő és az E halmazt nem metsző poligon* (gömbfelület esetén a „poligon" főkörívekből áll).

F definíció. Legyen $\{E_n\}$ halmazokból álló sorozat. A sorozat *topológiai limes inferiorának* nevezzük és az $\underline{\mathrm{lt}}_n E_n$ jellel jelöljük azon a pontok halmazát, amelyeknek bármely $U \ni a$ környezete minden E_n halmazt metsz, kivéve legfeljebb véges számút. A sorozat *topológiai limes superiorának* nevezzük és az $\overline{\mathrm{lt}}_n E_n$ jellel jelöljük azon pontok halmazát, amelyeknek bármely környezete végtelen sok E_n halmazt metsz.

ζ SEGÉDTÉTEL. *Bármely halmazsorozat topológiai limes superiora és limes inferiora zárt halmaz.*

A TÉTEL (ZORETTI). *Ha egy J-beli összefüggő halmazokból álló $\{E_n\}$ sorozat $\underline{\mathrm{lt}}_n E_n$ topológiai limes inferiora nem üres, akkor az $\overline{\mathrm{lt}}_n E_n$ topológiai limes superior összefüggő.*

B TÉTEL (JANISZEWSKI). *Legyen G valamely tartomány és K olyan kontinuum, amely G-t is, CG-t is metszi. Akkor a $K \cap G$ metszet mindegyik komponensének a lezárása metszi G határát.*

C TÉTEL. *Ha $G \subset J$ egy tartomány és $a \notin G$ valamely pont J-ben, akkor G határának van olyan L komponense, amely elválasztja a-t és a G halmaz tetszés szerinti pontját. Ez az L komponens egyértelműen meghatározott.*

Megjegyezzük, hogy a C tétel már a tóruszon nem igaz.

B′ TÉTEL. *Legyen $G \subset J$ olyan tartomány, amely elválasztja a CG halmaz a és b pontját, L_a és L_b pedig G határának olyan komponensei, amelyek G-t elválasztják az a, illetve a b ponttól. Legyen K az a, b pontokat tartalmazó kontinuum. Akkor $K \cap G$ tartalmaz legalább egy komponenst, amelynek lezárása L_a-t is, L_b-t is metszi.*

D TÉTEL. *Ha a $\{K_n\}$ sorozat mindegyik tagja olyan J-beli halmaz, amely elválasztja az a, b pontokat, akkor a $K = \overline{\mathrm{lt}}_n K_n$ halmaz is elválasztja a-t és b-t.*

E TÉTEL. *Ha az $F \subset J$ zárt halmaz elválasztja az a, b pontokat, akkor F-nek van olyan F_1 komponense, amely szintén elválasztja a-t és b-t.*

Nyilvánvaló, hogy ez a tétel sem igaz már a tóruszon sem.
Szükségünk lesz az E tételt általánosító F tételre.

F TÉTEL. *Legyen $E \subset J$ zárt halmaz és K, L ennek két különböző komponense. Akkor vagy $E - K - L$ nem választja el a K, L komponenseket, vagy található az E halmaznak K-tól és L-től különböző és őket elválasztó S komponense.*

BIZONYÍTÁS: 1°. Legyen F zárt halmaz és K az F halmaz valamely komponense. Tetszés szerinti $\delta > 0$ számhoz található olyan $\delta_1 > 0$, hogy az F halmaz δ_1-környezetének K-t tartalmazó komponense a K halmaz δ-környezetében fekszik. Ez az A tételből következik.

2°. Most legyen K és L az E halmaz két olyan komponense, amelyet E-nek egyetlen, K-tól és L-től különböző komponense sem választ el. Legyen $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$, $\lim_n \delta_n = 0$ és $\delta_1 < \frac{1}{2}\varrho(K, L)$. Legyenek a $\delta_1' > \delta_2' > \ldots$ számok olyanok, hogy U_n, ill. V_n — az E halmaz δ_n'-környezetének K-t, ill. L-et tartalmazó komponense — K, ill. L δ_n-környezetében fekszik. Legyen B_n és C_n $(n=2, 3, \ldots)$ rendre U_n és V_n határának az U_n halmazt B_{n-1}-től, illetve a V_n halmazt C_{n-1}-től elválasztó komponense, és $C_1 = B_1$ az U_1 halmaz határának U_2-t L-től elválasztó komponense. Akkor $B_n \cap E = 0$ és $C_n \cap E = 0$. Ha E elválasztja a B_n, B_{n+1}, vagy a C_n, C_{n+1} halmazokat, akkor E valamelyik, K-tól és L-től különböző komponense az E tétel szerint elválasztja az U_{n+1}, V_{n+1} halmazokat és ennélfogva elválasztja K-t és L-et is. Ellenkező esetben találhatók a B_n halmazt B_{n+1}-gyel, illetve a C_n halmazt C_{n+1}-gyel összekötő L_n, L_n' poligonok, amelyekre $L_n \cap E = 0$, $L_n' \cap E = 0$. Legyen L_n^* az L_n poligonnak a B_n halmazzal való utolsó metszésponttól a B_{n+1} halmazzal való első metszéspontig terjedő szakasza. Az $L_n'^*$ szakaszokat analóg módon képezzük. Akkor az $R = \sum_n L_n^* + \sum_n L_n'^* + \sum_n B_n + \sum_n C_n + K + L$ halmaz kontinuum; $R \cap (E - K - L) = 0$; és $R \supset K + L$.

G TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az egymást nem metsző K, L kontinuumok elválasztják a J-beli a és b pontot. Akkor vagy K elválasztja az a pontot L minden pontjától, vagy K elválasztja a b pontot L minden pontjától. Az első esetben L elválasztja b-t K minden pontjától és $\varrho(a, K) < \varrho(a, L)$, a másodikban pedig a-t választja el K minden pontjától és $\varrho(b, K) < \varrho(b, L)$.*

H TÉTEL. *Ha a K kontinuum nem választja szét J-t, akkor bármely $U(K)$ környezetéhez található olyan $V(K)$ környezet, hogy $\overline{V(K)} \subset U(K)$ és $\overline{V(K)}$ szintén nem választja szét J-t.*

J TÉTEL. *Legyen $U \subset J$ valamely tartomány, ξ és λ pedig U határának két pontja. Ha ξ és λ az U halmaz kiegészítő halmazának ugyanahhoz a komponenséhez tartozik, akkor ξ és λ az U halmaz határának is ugyanahhoz a komponenséhez tartozik.*

J definíció. Szakasz homeomorf képét egyszerű ívnek nevezzük.

K definíció. A K kontinuum α pontját lokális összefüggési pontnak nevezzük, ha bármely $U(\alpha)$ környezetéhez található olyan $V(\alpha)$ környezet, hogy $\overline{V(\alpha)} \cap K$ az $U(\alpha) \cap K$ metszet egyetlen komponensében fekszik. Ellenkező esetben α lokális össze nem függési pont. Ha egy kontinuum csupa lokális összefüggési pontból áll, akkor lokálisan összefüggőnek nevezzük.

K TÉTEL. *Folytonos leképezésnél zárt (nyílt) halmaz teljes inverz képe zárt (nyílt) halmaz.*

L TÉTEL. *Lokálisan összefüggő kontinuum folytonos képe lokálisan összefüggő kontinuum.*

M TÉTEL. *Legyen τ az S kompaktumnak a T kontinuumra való folytonos leképezése. Ha mindegyik $l \in T$ pont teljes inverz képe összefüggő, akkor S kontinuum.*

I. fejezet

NÍVÓHALMAZOK

1. §. Folytonos függvény nívóhalmazainak szerkezete

A függvény *nívóhalmazának* fogalma egész ismertetésünk során alapvető szerepet játszik. Éppen ezért a folytonos függvények nívóhalmazai szerkezetének részletes tanulmányozásával kezdjük. Ebben az irányban az alapvető eredményeket az 1 – 3. tételekben mondjuk ki. Helyénvalónak találtuk azonban, hogy néhány segédtételt (például a 9 – 12. segédtételeket) is felvegyünk ebbe a paragrafusba, minthogy kisegítő jellegük ellenére a nívóhalmazok általános tulajdonságaival foglalkoznak. Mint már említettük, a függvények értelmezési tartományának a kétdimenziós gömbfelületet vagy a négyzetet választottuk. Megjegyezzük, hogy ez az erős megszorítás nem lényeges és csak az előadásmód egyszerűsége kedvéért vezettük be.

1. definíció. Legyen $F(\eta)$ a J tartományban értelmezett függvény. Az $F(\eta)$ függvény E_t *nívóhalmazának* nevezzük mindazon $\xi \in J$ pontok halmazát, amelyekben $F(\xi) = t$.

Az „E_t nívóhalmaz” szavak helyett rövidség kedvéért néha a „t nívó” kifejezést fogjuk használni.

Az E_t nívóhalmaz K komponense a topológiában szokásos módon értendő (lásd a D definíciót). Néha rövidség kedvéért „az E_t nívóhalmaz komponense” helyett azt fogjuk írni, hogy „a t nívó komponense”, vagy egyszerűen azt, hogy „komponens”.

Ha $F(\eta)$ folytonos függvény, akkor a hozzá tartozó E_t nívóhalmazok (és egyúttal a δ segédtétel szerint a nívóhalmazok komponensei is) páronkint közös pont nélküli zárt halmazok.

Nem tudunk megadni semmi más tulajdonságot, amellyel minden folytonos függvény valamennyi nívóhalmaza rendelkezne, a zártságon kívül. Valóban, bármely $D \subset J$ zárt halmazhoz minden különösebb fáradság nélkül szerkeszthető olyan folytonos $F(\eta)$ függvény, amelynek D az egyik nívóhalmaza. Megfelel például az $F(\eta) = \varrho(\eta, D)$ választás.

Találhatunk azonban olyan tulajdonságokat, amelyek igazak, mondjuk, megszámlálhatóan sok t érték kivételével vagy nulla mértékű halmazt alkotó t értékek kivételével minden E_t nívóhalmazra. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy az adott tulajdonság fennáll megszámlálhatóan sok kivétellel minden nívóra, illetve majdnem minden nívóra. Az ilyen tulajdonságokat *tipikusaknak* fogjuk mondani.

2. definíció. Az E_t nívóhalmaz K komponensét *regulárisnak* nevezzük, ha a J értelmezési tartományt két részre választja szét.

Következésképpen valamely nem reguláris komponens vagy kettőnél több részre választja szét, vagy egyáltalán nem választja szét J-t.

1. SEGÉDTÉTEL. *Tegyük fel, hogy a $\{K_\alpha\}$ rendszerben szereplő mindegyik kontinuum legalább három tartományra választja szét a J négyzetet. Ha a K_α kontinuumok páronkint nem metszik egymást, akkor legfeljebb megszámlálhatóan sokan lehetnek.*

BIZONYÍTÁS: Rendeljünk hozzá mindegyik K_α-hoz egy csupa racionális koordinátákkal rendelkező pontokból álló a, b, c ponthármast, amelynek elemeit K_α páronkint elválasztja J-ben. Ha a K_α kontinuumok rendszere nem lenne megszámlálható, akkor található lenne két kontinuum, $K=K_\alpha$ és $L=K_\beta$, amelyekhez ugyanazt az a, b, c ponthármast rendeltük (megszámlálhatónál több ilyen kontinuum is található lenne). Megmutatjuk, hogy K és L metszi egymást. Valóban, jelentse a', b' és c' a $K+L$ összeg azon pontjait, amelyek a-hoz, b-hez és c-hez rendre a legközelebb vannak. (Ha ilyen pontokból nem egy van, válasszuk bármelyiket.) Az a', b', c' pontok közül valamelyik kettő K-hoz tartozik, vagy valamelyik kettő L-hez tartozik. Meghatározottság kedvéért legyen $a' \in K$ és $b' \in K$. Ekkor az az R kontinuum, amely K-ból és az $[a, a']$, $[b, b']$ szakaszokból áll, nyilvánvalóan tartalmazza az a, b pontokat és ezért metszi L-et, minthogy L szétválasztja a-t és b-t. De az $[a, a']$, $[b, b']$ szakaszok nem metszik az L kontinuumot, tehát K és L metszi egymást. A segédtételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor J gömb, a bizonyítás analóg módon történik.

Az 1. segédtétel értelmében az összes nívóhalmaz összes olyan komponenseinek, amelyek J-t kettőnél több tartományra választják szét, száma legfeljebb megszámlálhatóan végtelen (ugyanis magától értetődik, hogy ugyanazon nívó komponensei, és még inkább a különböző nívóhalmazok komponensei nem metszik egymást). Ebből következik, hogy annál inkább legfeljebb megszámlálhatóan végtelen azoknak a nívóknak az összessége, amelyeknek van ilyen „nyolcas típusú" komponensük. Ily módon *a tipikus nem reguláris komponensek nem választják szét a J értelmezési tartományt.* Viszont vannak olyan folytonos függvények, amelyek mindegyik nívón tartalmaznak szét nem választó komponenst.

Osztályozni fogjuk a nívóhalmazok nem szétválasztó komponenseit. Ehhez szükségünk lesz a következő segédtételre.

2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény és K az E_t nívóhalmaz egyik komponense. Legyen U a K komponens valamely környezete. A K komponensnek található olyan V környezete, hogy bármely nívóhalmaznak bármely olyan komponense, amely metszi $\overline{V}$-t, teljesen benne van U-ban.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan a $\{t_n\}$ nívósorozathoz tartozó $\{K_n\}$ komponens-sorozat, amelyre $\varrho(K, K_n)\to 0$ ha $n\to\infty$ és $K_n \cap CU \neq 0$. J kompaktsága miatt kiválasztható a komponensek olyan K_{s_n} részsorozata, amelyre $\underset{n}{\underline{\mathrm{lt}}}\, K_{s_n} \neq 0$. Ekkor az A tétel szerint az $M=\underset{n}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_{s_n}$ halmaz kontinuum. Nyilvánvaló, hogy $M\cap K\neq 0$ és $M\cap CU\neq 0$. Végül az $F(\eta)$ függvény M mindegyik pontjában t-vel egyenlő, mert folytonos. Tehát az M kontinuum teljesen benne van E_t-ben, és így az M-et tartalmazó komponens K. De $M\cap CU\neq 0$, következésképpen $K\cap CU\neq 0$, ez pedig ellentmond annak a feltevésnek, hogy U a K környezete.

3. definíció. Legyen $K\subset E_t$ az E_t nívóhalmaz olyan komponense, amely nem választja szét J-t. Akkor:

1. Tegyük fel, hogy a K komponens bármely U környezetéhez található a t nívónak olyan K' komponense, amely U-ban fekszik és K-t CU minden pontjától elválasztja. Ebben az esetben a K komponenst *koncentrikus szingularitású* komponensnek nevezzük.

2. Tegyük fel, hogy van olyan L kontinuum, amely metszi K-t, de nem metszi az $E_t - K$ halmazt, továbbá L nincs benne teljesen K-ban. Ekkor azt mondjuk, hogy K *fél-extrémumot szolgáltató* komponens, mégpedig:

a) Ha $\eta \in L$ esetén $F(\eta) \geqq t$, akkor K *félminimumot szolgáltató* komponens.

b) Ha $\eta \in L$ esetén $F(\eta) \leqq t$, akkor K *félmaximumot szolgáltató* komponens.

1. TÉTEL. *Minden nem szétválasztó komponens vagy* 1. *konventrikus szingularitású, vagy* 2. *félmaximumot szolgáltató, vagy* 3. *félminimumot szolgáltató komponens, és az* 1, 2, 3. *esetek kölcsönösen kizárják egymást.*

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az 1. és 2. eset kölcsönösen kizárja egymást. Valóban, legyen K fél-extrémumot szolgáltató komponens és L az a kontinuum, amelyről a 3. definícióban szó van. Minthogy L nem tartozik teljesen K-hoz, van olyan a pont, amelyre $a \in L \cap CK$. K zárt halmaz, így $\varrho(a, K) > \delta > 0$. Tekintsük a K komponens δ-környezetét, U-t. Legyen $K' \subset U$ a t nívó olyan komponense, amely K-t elválasztja CU-tól. De $a \in CU$ és L kontinuum. Ezért a B' tétel szerint $L \cap K' \neq 0$ szemben a feltevéssel. Tehát 1. és 2. (és hasonlóan 1. és 3.) kizárja egymást. Megmutatjuk, hogy a 2, 3. esetek szintén kölcsönösen kizárják egymást. Valóban, tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben található két kontinuum, L_1 és L_2, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) L_1 és L_2 metszi a J-t nem szétválasztó $K \subset E_t$ komponenst;

b) egyikük sem fekszik teljesen K-ban;

c) sem L_1, sem L_2 nem metszi az $E_t - K$ halmazt, és végül

d) $F(\eta) \geqq t$, ha $\eta \in L_1$, $F(\eta) \leqq t$, ha $\eta \in L_2$.

Feltételeinkből következik, hogy találhatók olyan ξ_1, ξ_2 pontok, amelyekre $\xi_1 \in L_1 - K$, $\xi_2 \in L_2 - K$, és így $F(\xi_1) > t$, $F(\xi_2) < t$. A ξ_1, ξ_2 pontokat az E_t zárt halmaz, tehát (lásd az E tételt) E_t valamely komponense is elválasztja. De ez a komponens csak K lehet, mert az $L_1 + L_2 + K$ kontinuum E_t egyetlen más komponensét sem metszi és tartalmazza a ξ_1, ξ_2 pontokat. Ilyen módon ellentmondásra jutottunk, ugyanis K nem szétválasztó komponens.

Tehát az 1., 2., 3. esetek kölcsönösen kizárják egymást. Megmutatjuk, hogy a lehetőségek ezzel kimerülnek. Legyen K a t nívó valamely nem szétválasztó és nem koncentrikus szingularitású komponense, U pedig K-nak oly kicsiny környezete, hogy nincs olyan $K' \subset E_t$ komponens, amely U-ban fekszik és elválasztja K-t és CU-t. Legyen $V \subset U$ K-nak olyan környezete, amelyre CV összefüggő halmaz. A H tétel értelmében ilyen környezet létezik. Legyen $D = E_t + CV$. Jelentse K^* és R a zárt D halmaz K-t, illetve CV-t tartalmazó komponensét. $K^* \neq R$, mert ellenkező esetben JANISZEWSKI tétele (B tétel) szerint a $K^* \cap V$ metszet K-t tartalmazó komponensének, K^{**}-nak lennének torlódási pontjai V határán, ez pedig lehetetlen, mert $K^{**} \subset E_t$ és így $K^{**} = K = K^*$. Továbbá az U-ra vonatkozó feltevés szerint nincs olyan $K' \subset D$ komponens, amely különbözik R-től és K^*-tól és elválasztja K^*-ot és R-et, mert ebben az esetben K' elválasztaná a $K = K^*$ és $CU \subset CV$ halmazokat és $K' \subset D - R \subset E_t$. Tehát az F tétel értelmében van olyan L kontinuum, amelyre: 1. $L \cap K \neq 0$; 2. $L \cap R \neq 0$; 3. $L \cap (D - K - R) = 0$. Legyen W a K komponens olyan környezete, hogy $\overline{W} \subset V$, és hogy abból, hogy $\tilde{K}$ az E_t halmaz komponense és $\tilde{K} \cap \overline{W} \neq 0$, következék a $\tilde{K} \subset V$ összefüggés.

Ilyen környezet a 2. segédtétel szerint létezik.

Megemlítjük, hogy $R \cap \overline{W} = 0$. Valóban, ellenkező esetben esetben az $R \cap V$ metszetnek az $a \in R \cap \overline{W}$ pontot tartalmazó Q komponense a B tétel szerint rendelkeznék torlódási pontokkal V határán, következésképpen a $\overline{Q} \subset E_t$ halmaz teljesen benne feküdnék E_t-nek valamely, CV-t és $\overline{W}$-t metsző komponensében, ami W választása folytán lehetetlen.

Legyen L' az $L \cap W$ metszet olyan komponense, amely tartalmaz K-beli pontokat. Akkor $\overline{L'}$ nem metszi R-et, tehát $\overline{L}_1 \cap (E_t - K) = 0$, ugyanis $\overline{L'} \subset L$ és $L \cap (E_t - K - R) = 0$.

Másrészt a B tétel szerint $\overline{L'} \cap CW \neq 0$. De ha ez így van, akkor $\overline{L'}$-nak található olyan b pontja, amely nem tartozik E_t-hez, mert ellenkező esetben $\overline{L'} \subset K$ és $K \cap CW \neq 0$ lenne. A b pontban $F(b) \neq t$, és így K fél-extrémumot szolgáltató komponens: valóban, $\overline{L'}$-nak vannak K-hoz nem tartozó pontjai, az $\overline{L'}$ kontinuum nem metszi az $E_t - K$ halmazt, következésképpen vagy $\overline{L'} - K$ minden pontjában $F(\eta) > t$, vagy mindezekben a pontokban $F(\eta) < t$. Az az eset, amikor $\overline{L'}$ bizonyos pontjaiban $F(\eta) > t$, más pontjaiban pedig $F(\eta) < t$, ki van zárva, ugyanis két ilyen a, c pontot a t nívó, és így ennek a nívónak valamely K' komponense is elválasztana. De $K' \neq K$ (mert K nem szétválasztó komponens) és $(\overline{L'} + K) \cap K' = 0$, tehát K' nem választja el a-t és c-t, minthogy ezek mindketten az $\overline{L'} + K$ kontinuumhoz tartoznak.

Ily módon K fél-extrémumot szolgáltató komponens, és az 1. tételt bebizonyítottuk.

Az 1. tétel osztályozza a nem szétválasztó komponenseket. Mi azonban nem három, hanem öt esetet fogunk megkülönböztetni. Nevezetesen, a félmaximumot szolgáltató komponensek közül különválasztjuk a *maximumot szolgáltató* komponenseket, vagyis azokat a K komponenseket, amelyeknek minden $a \in K$ pontja közönséges lokális maximum-hely a tágabb értelemben, azaz a valamely $V(a)$ környezetében az $F(\eta)$ függvény nem haladja meg az $F(a)$ értéket. Analóg módon a félminimumot szolgáltató komponensek közül különválasztjuk a *minimumot szolgáltatókat.*

Az 1. tétel segítségével bizonyos értelemben osztályozni tudjuk a reguláris komponenseket. A komponenseknek ezt az osztályozását azonban valamely rögzített ξ pontra vonatkozóan fogjuk elvégezni.

Bevezetünk néhány jelölést.

Legyen ξ rögzített pont és K valamely nívóhalmaznak egy ξ-t nem tartalmazó, reguláris komponense. Akkor K a J értelmezési tartományt két J_1, J_2 tartományra ($J_1 \ni \xi$) osztja.

4. definíció. Nevezzük: a) a $K \subset E_t$ komponens K^* *belső karakterisztikájának* a $K^* = J_1 + K$ zárt halmazt, b) a K komponens K^{**} *külső karakterisztikájának* a $K^{**} = J_2 + K$ zárt halmazt. Értelmezzük az $F^*(\eta)$, $F^{**}(\eta)$ függvényeket a következőképpen:

$$F^*(\eta) = \begin{cases} F(\eta), & \text{ha} \quad \eta \in J_2, \\ t, & \text{ha} \quad \eta \in K^*; \end{cases}$$

$$F^{**}(\eta) = \begin{cases} F(\eta), & \text{ha} \quad \eta \in J_1, \\ t, & \text{ha} \quad \eta \in K^{**}. \end{cases}$$

A belső és külső karakterisztika az F^* illetve F^{**} függvény t nívójának egy-egy komponense, mégpedig nem szétválasztó komponense. Így az 1. tétel értelmében mindegyikük a következő öt típus valamelyikéhez tartozik: maximumot szolgáltató, félmaximumot (de nem maximumot) szolgáltató, minimumot szolgáltató, félminimumot (de nem minimumot) szolgáltató és koncentrikus szingularitású komponens. Ennek megfelelően a ξ pontot nem tartalmazó és reguláris K komponenst azon 25 típus valamelyikéhez fogjuk sorolni, amelyeket úgy nyerünk, hogy a K^* számára fennálló öt lehetőséget kombináljuk a K^{**} számára fennálló öt lehetőséggel.

Ily módon a következőt kapjuk:

2. TÉTEL. *Valamely nívóhalmaznak a ξ pontot nem tartalmazó és reguláris K komponense az* 1. *ábrán feltüntetett* 25 *típus valamelyikéhez tartozik.*

Könnyen látható (1. ábra), hogy a reguláris komponenseknek mind a 25 típusa megvalósul.

5. definíció. A reguláris komponenst (a ξ pontra nézve) *növekedési komponensnek* nevezzük, ha belső karakterisztikája minimumot vagy félminimumot szolgáltató, külső karakterisztikája pedig maximumot vagy félmaximumot szolgáltató komponens.

A reguláris komponenst *fogyási komponensnek* nevezzük (a ξ pontra vonatkozólag), ha belső karakterisztikája maximumot vagy félmaximumot szolgáltató, külső karakterisztikája pedig minimumot vagy félminimumot szolgáltató komponens.

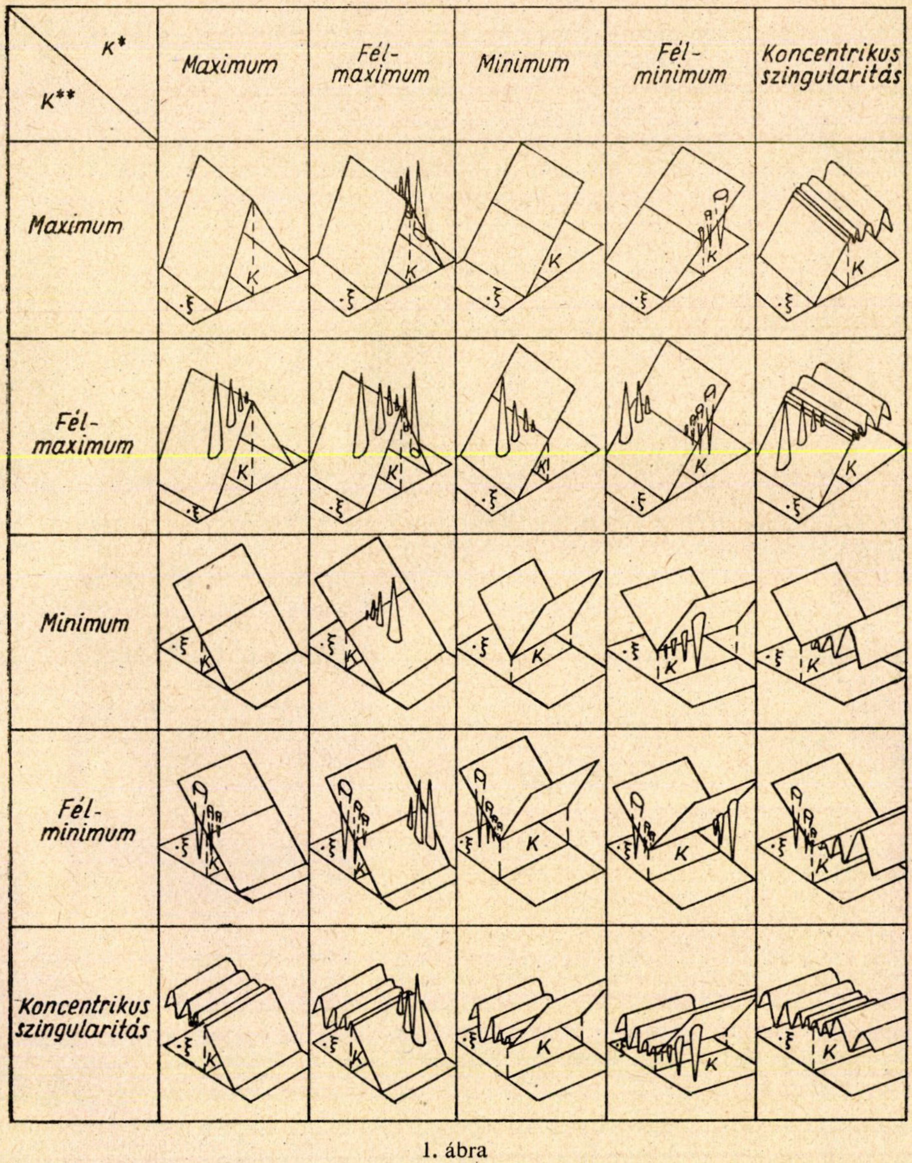
6. definíció. Legyen K az $F(\eta)$ folytonos függvény t nívójának valamely reguláris komponense. Tegyük fel, hogy a K komponens J-t a J_1, J_2 tartományokra osztja. K-t *kvázi-extrémális* komponensnek nevezzük, ha található két olyan R_1, R_2 kontinuum, amely metszi K-t és a J_1, J_2 tartományok közül a megfelelőt, továbbá amelyekre vagy $F(\eta) \leqq t$ minden $\eta \in R_1 + R_2$ pontban, vagy $F(\eta) \geqq t$ minden ilyen pontban.

3. SEGÉDTÉTEL. *Minden $F(\eta)$ folytonos függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón tartalmaz kvázi-extrémális komponenst.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K a t nívó kvázi-extrémális komponense, R_1 és R_2 pedig azok a kontinuumok, amelyekről a kvázi-extrémális komponens definíciójában szó volt. Legyen az $a_1 \in R_1 \cap J_1$, $a_2 \in R_2 \cap J_2$ pontokban $F(a_1) \neq t$, $F(a_2) \neq t$. Ekkor az a_1, a_2 pontok elég kicsiny, köralakú U_1, ill. U_2 környezetét véve $F(\eta) \neq t$, ha $\eta \in U_1 + U_2$. Válasszunk U_1-ben és U_2-ben egy-egy racionális koordinátájú b_1, b_2 pontot, és egészítsük ki az R_1 kontinuumot az $[a_1, b_1]$, az R_2 kontinuumot az $[a_2, b_2]$ szakasszal. Minthogy sem $[a_1, b_1]$, sem $[a_2, b_2]$ nem tartalmaz E_t-beli pontokat, az így kiegészített kontinuumok ugyanazokkal a 6. definícióban posztulált tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az R_1, R_2 kontinuumok, ezért feltehetjük, hogy már maguk az R_1, R_2 kontinuumok tartalmaznak egy-egy racionális koordinátájú pontot és ezekre az $a_1 \in J_1, a_2 \in J_2$ pontokra vagy $F(a_1) < t$ és $F(a_2) < t$, vagy $F(a_1) > t$ és $F(a_2) > t$. Meghatározottság kedvéért feltehetjük, hogy $F(a_1) < t$, $F(a_2) < t$, mert az ellentétes eset visszavezethető erre a $-F(\eta)$ függvényre való áttérés segítségével.

Legyen tehát azon nívók halmaza, amelyeknek van kvázi-extrémális $(F(a_1) < t$, $F(a_2) < t$ tulajdonságú$)$ komponensük, nem megszámlálható. Ekkor tekintettel arra, hogy a racionális koordinátájú pontokból álló párok halmaza megszámlálható, található két *különböző* t és t' nívóhoz tartozó K és K' kvázi-extrémális komponens, amelyre az a_1, a_1' és a_2, a_2' pontok páronkint egybeesnek: $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$ és $F(a_1) < t$, $F(a_1') < t'$, $F(a_2) < t$, $F(a_2') < t'$.

Meghatározottság kedvéért legyen $t < t'$. Legyen R_1 és R_2 két, a_1-et és a_2-t rendre tartalmazó és K-t metsző kontinuum; akkor a $D = R_1 + K + R_2$ halmaz kontinuum, amely tartalmazza a_1-et és a_2-t. Minthogy K' elválasztja az $a_1 = a_1' \in J_1'$



1. ábra

és az $a_2 = a_2' \in J_2'$ pontot, a K' kontinuum metszi D-t. Ez azonban lehetetlen, mert egyrészt feltevés szerint a D halmazon $F(\eta)$ seholsem haladja meg a $t < t'$ értéket, másrészt viszont K'-n az $F(\eta)$ függvény t'-vel egyenlő. A kapott ellentmondás bizonyítja a segédtétel helyességét.

4. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ tetszés szerinti függvény. A maximum-helyet (minimum-helyet) tartalmazó nívók halmaza legfeljebb megszámlálható.*

BIZONYÍTÁS: Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy a maximum-helyet tartalmazó nívók halmaza nem megszámlálható. Minden a maximum-helyhez rendeljünk hozzá egy a középpontú és olyan kicsiny racionális sugarú kört, hogy a körben mindenütt fennálljon az $F(\eta) \leqq F(a)$ egyenlőtlenség. Ha a maximum-helyet tartalmazó nívók halmaza nem megszámlálható, valamely racionális r-hez megszámlálhatónál több olyan, különböző nívókhoz tartozó maximum-hely található, amelyhez r sugarú kört rendeltünk. Ebből következik, hogy található két olyan, *különböző* nívóhoz tartozó a, a' maximum-hely, amelyek r-nél közelebb vannak egymáshoz és amelyekhez r sugarú köröket rendeltünk. De akkor $F(a) \leqq F(a')$ és $F(a') \leqq F(a)$, amiből $F(a) = F(a')$ következik, ellentétben feltevésünkkel. A nyert ellentmondás igazolja segédtételünket.

5. SEGÉDTÉTEL. *Legyen az $F(\eta)$ függvény folytonos és K a t nívó olyan nem szétválasztó komponense, amelynek legalább egy pontja nem extrémum-hely. Akkor a t nívónak végtelen sok szétválasztó komponense van.*

BIZONYÍTÁS: Valóban, ellenkező esetben található volna olyan $\delta > 0$ szám, hogy a K kontinuum δ-környezete nem tartalmazza ezen szétválasztó komponensek egyetlen pontját sem. Tegyük fel, hogy az $a \in K$ pont nem extrémum-hely, b és c pedig az a hely δ-környezetének két olyan pontja, amelyekre $F(b) < F(a)$ és $F(c) > F(a)$. A b, c pontokat az E_t halmaz és így ennek valamely K' komponense is elválasztja, ennélfogva K' δ-nál kisebb távolságra van K-tól (ugyanis K' metszi a $[bc]$ szakaszt), ez viszont ellentmond kiindulásunknak és ezáltal bizonyítja, hogy az E_t halmaznak végtelen sok szétválasztó komponense van.

7. definíció. Legyen K a t nívó reguláris komponense, amely a J értelmezési tartományt a J_1, J_2 tartományokra osztja fel. A K komponenst *teljesen regulárisnak* nevezzük, ha $K = \bar{J}_1 - J_1 = \bar{J}_2 - J_2$.

6. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\{K_\alpha\}$ a J-ben fekvő kontinuumok olyan rendszere, amelyre*

a) *mindegyik K_α kontinuum a J tartományt $J_\alpha^{(1)}, J_\alpha^{(2)}$ tartományokra választja szét:*

b) $K_\alpha \cap K_\beta = 0$;

c) $K_\alpha - (\bar{J}_\alpha^{(1)} - J_\alpha^{(1)}) \neq 0$.

Akkor a $\{K_\alpha\}$ rendszer legfeljebb megszámlálható.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\tilde{\xi}_\alpha \in K_\alpha - (\bar{J}_\alpha^{(1)} - J_\alpha^{(1)})$. Akkor $\varrho(\tilde{\xi}_\alpha, \bar{J}_\alpha^{(1)}) > \delta_\alpha > 0$, ahol δ_α racionális szám. Legyen ξ_α olyan racionális koordinátájú pont, hogy $\varrho(\xi_\alpha, \tilde{\xi}_\alpha) < \frac{\delta_\alpha}{4}$. Legyen $\eta_\alpha \in J_\alpha^{(1)}$ racionális koordinátájú pont. Mindegyik K_α kontinuumhoz rendeljük hozzá a $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ pontpárt. Ha a segédtétel állításával ellentétben a K_α kontinuumok rendszere nem lenne megszámlálható, akkor található lenne két olyan K_α, K_β kontinuum, hogy $\xi_\alpha = \xi_\beta$, $\eta_\alpha = \eta_\beta$ és $\delta_\alpha = \delta_\beta$. Legyen c a $[\xi_\alpha, \eta_\alpha]$ szakasznak η_α-tól ξ_α felé haladva az első metszéspontja a $K_\alpha + K_\beta$ összeggel. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $c \in K_\alpha$. Akkor $\bar{J}_\beta^{(1)} - J_\beta^{(1)}$ nem választja el c-t és η_α-t, de elválasztja ξ_α-t és η_α-t, ennélfogva elválasztja c-t és ξ_α-t. Másrészt azonban a $K_\alpha + O_\alpha$ kontinuum, ahol O_α a ξ_α középpontú, $\frac{\delta_\alpha}{2}$ sugarú zárt körlemez, tartalmazza a c, ξ_α pontokat és nyilván nem metszi a $\bar{J}_\beta^{(1)} - J_\beta^{(1)}$ halmazt. A nyert ellentmondásból következik segédtételünk helyessége.

A 6. segédtételből adódik, hogy *reguláris, de nem teljesen reguláris komponens legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok lehet.* Annál inkább legfeljebb megszámlálható azoknak a nívóknak az összessége, amelyek tartalmaznak ilyen komponenseket.

7. SEGÉDTÉTEL. *Egymást páronkint nem metsző, a síkot szétválasztó és az adott J zárt négyzetben fekvő kontinuumok közül legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan lehet, amely tartalmaz J határán fekvő pontot.*

BIZONYÍTÁS: Valóban, ha a szóban forgó kontinuumok rendszere nem megszámlálható, akkor a J négyzetnek van olyan oldala, amelyet megszámlálhatónál több ilyen kontinuum metsz. Tükrözzünk minden ilyen L kontinuumot erre az oldalra nézve. Legyen L tükörképe L'. Ekkor az $L + L'$ halmaz kontinuum, amely a síkot legalább három részre választja szét. Ha továbbá L nem metszi M-et, akkor $L + L'$ nem metszi az $M + M'$ kontinuumot. Ily módon az 1. segédtétel ellenére megszámlálhatónál több olyan egymást nem metsző kontinuumot kapnánk, amelyek közül mindegyik a síkot kettőnél több részre választja szét. Ez az ellentmondás bizonyítja a segédtételt.

A 7. segédtételből speciálisan következik, hogy a J négyzetben értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívója tartalmaz a síkot szétválasztó és J határát metsző komponenst.

8. definíció. A K kontinuum α pontját *elágazási pontnak* nevezzük, ha K-nak van három olyan részkontinuuma, amelyek közül egyik sem áll egyedül az α pontból és amelyeknek páronkint α az egyetlen közös pontjuk.

8. SEGÉDTÉTEL (V. M. KOMAREVSZKIJ [4]). *Elágazási pontot tartalmazó és egymást páronkint nem metsző síkbeli kontinuumok bármely rendszere legfeljebb megszámlálható.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K valamely kontinuum, α ennek egy elágazási pontja, K_1, K_2 és K_3 pedig K olyan részkontinuumai, amilyenekről a 8. definícióban szó van. Legyen továbbá Ω az α pontot tartalmazó nyílt körlemez; K_1', K_2' és K_3' a $K_1 \cap \Omega$, $K_2 \cap \Omega$, $K_3 \cap \Omega$ halmazoknak az α pontot tartalmazó komponensei, S az Ω halmaz határa, végül $a_1 \in \bar{K}_1' \cap S$, $a_2 \in \bar{K}_2' \cap S$, $a_3 \in \bar{K}_3' \cap S$. Akkor a $K' = \bar{K}_1' + \bar{K}_2' + \bar{K}_3'$ kontinuum az Ω halmazt legalább három tartományra választja szét. Valóban, az S körvonal $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$ íveinek mindegyikén található a CK' halmaznak egy-egy pontja, mert ellenkező esetben a $\bar{K}_1'$, $\bar{K}_2'$, $\bar{K}_3'$ kontinuumok közül valamelyik kettőnek lenne közös pontja S-en. Legyen $b_1 \in \overline{a_2 a_3} \cap CK'$, $b_2 \in \overline{a_3 a_1} \cap CK'$ és $b_3 \in \overline{a_1 a_2} \cap CK'$. Megmutatjuk, hogy a b_1, b_2, b_3 pontokat a K' kontinuum páronkint elválasztja Ω-ban. Csakugyan, tegyük fel, hogy például b_1 és b_2 nincs elválasztva. Akkor található olyan L egyszerű ív, amely összeköti b_1-et és b_2-t, teljesen $\bar{\Omega}$-ban fekszik és nem metszi a K' kontinuumot. Jelentse S' az S-sel koncentrikus és kétszer akkora sugarú körvonalat. Legyen b_1' és b_2' a b_1-nek és b_2-nek megfelelő két pont az S' körvonalon. Akkor L a $[b_1, b_1']$, $[b_2, b_2']$ szakaszokkal és az S' körvonal $\widetilde{b_1'b_2'}$ ívével együtt egy M topológikus kört képez, amely a síkot Jordan tétele szerint szétválasztja és amely nem metszi a K' kontinuumot. M elválasztja az a_3, a_1 pontokat, mert M az a_3 pontot elválasztja a végtelentől, az a_1 pontot pedig nem. Ez azonban nem lehetséges,minthogy a_1 és a_3 a K' kontinuumhoz tartozik. Tehát K' az Ω halmazt valóban legalább három tartományra választja szét.

Legyen most η a K_α kontinuum elágazási pontja. Legyen δ a K_1, K_2, K_3 részkontinuumok átmérői közül a legkisebb, η' pedig racionális koordinátákkal rendelkező és η-tól legfeljebb $\frac{\delta}{4}$ távolságra levő pont. Legyen Ω_α η' középpontú és $r_\alpha < \frac{\delta}{4}$ sugarú kör, ahol r_α racionális szám. Akkor, amint megmutattuk, van olyan $K_\alpha' \subset K_\alpha$ részkontinuum, amely az Ω_α kört legalább három tartományra választja szét. Az 1. segédtétel értelmében ugyanaz az Ω kör legfeljebb megszámlálhatóan sok K_α kontinuumnak felelhet meg. Minthogy azonban mindazoknak a köröknek a halmaza, amelyeknek sugara és középpontjuk mindkét koordinátája racionális, legfeljebb megszámlálható, az összes K_α kontinuumok rendszere szintén legfeljebb megszámlálható.

Gömbfelületen elhelyezkedő kontinuumok esetére a bizonyítás automatikusan átvihető.

A 8. segédtételből következik, hogy a nívóhalmazok elágazási pontokkal rendelkező komponensei legfeljebb megszámlálható halmazt alkotnak, és még inkább legfeljebb megszámlálható azoknak a nívóknak a halmaza, amelyeknek van ilyen komponensük.

Összefoglalva az összes előző eredményeket, a nívóhalmazok tipikus szerkezetéről kimondhatjuk a következő tételt:

3. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a J négyzetben (illetve gömbfelületen) értelmezett folytonos függvény. Akkor:*

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan sok nívó tartalmaz extrémum-helyet és reguláris kvázi-extrémális komponenst.*

2. *Legfeljebb megszámlálhatóan sok nívó tartalmaz a J tartományt kettőnél több részre osztó komponenst, elágazási ponttal rendelkező komponenst és reguláris, de nem teljesen reguláris komponenst. Ha J négyzet, akkor a síkot szétválasztó és J határát metsző komponensek is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok nívóhalmazban lépnek fel.*

3. *Minden egyéb nívó vagy csupa reguláris komponensből áll, vagy egy a J tartományt szét nem választó komponenssel együtt végtelen sok reguláris komponenst tartalmaz.*

4. *A J tartományt szét nem választó komponensek és a reguláris komponensek típusokba sorolhatók az 1. és 2. tételnek megfelelően.*

E paragrafus befejezéseként bebizonyítunk három segédtételt, amelyet többször is fel fogunk használni.

9. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, ξ és ζ pedig J tetszés szerinti pontjai. Ha a t nívó elválasztja a ξ, ζ pontokat, akkor e nívó komponensei közt található ξ-hez legközelebb fekvő, a ξ, ζ pontokat elválasztó komponens.*

BIZONYÍTÁS. A G. tétel szerint a ξ, ζ pontokat elválasztó összes komponensek rendezettek, vagyis bármely kettő közül az egyik közelebb van ξ-hez, mint a másik, és az utóbbit elválasztja ξ-től. Legyen $\{K_n\}$ a t nívó ξ, ζ pontokat elválasztó komponenseinek olyan sorozata, hogy K_n-nek ξ-től mért távolsága az alsó határhoz tart, ha $n \to \infty$. Akkor J kompaktsága következtében e komponensek valamely részsorozatának topológiai limes inferiora nem üres. Feltehetjük, hogy maga a $\{K_n\}$ sorozat már így van megválasztva. Akkor a $K = \underline{\mathrm{lt}}_n K_n$ halmaz kontinuum, továbbá ($F(\eta)$ folytonossága miatt) az egész K egy nívóhoz tartozik. Következésképpen a K kontinuum az E_t nívóhalmaz valamelyik $\tilde{K}$ komponenséhez tartozik (bár lehetséges, hogy nem azonos az egész komponenssel). Az A és D tétel értelmében a K kontinuum és annál inkább a $\tilde{K} \supset K$ komponens elválasztja a ξ, ζ pontokat. A $\tilde{K}$ komponens a legközelebb van ξ-hez, mert ha a t nívó egy másik K' komponense a $\tilde{K}$ komponenst elválasztja ξ-től, akkor $\varrho(\xi, K') < \varrho(\xi, K)$ és így $\varrho(\xi, K_n)$ nem tartana az alsó határhoz n növekedésével, ugyanis $\varrho(\xi, K) \leqq \underline{\lim}_n \varrho(\xi, K_n)$.

Megjegyezzük még, hogy ha $\tilde{F}(\xi) \neq t$, akkor a K komponens nem tartalmazza a ξ pontot. Ellenkező esetben $\tilde{K} \ni \xi$.

10. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény és ξ, ζ a J tartomány tetszés szerinti pontjai. Legyen K valamely $t \neq F(\xi)$ nívónak a ξ, ζ pontokat elválasztó komponensei közül a ζ-hoz legközelebb fekvő, és legyen K reguláris komponens. Ebben az esetben ha $t < F(\zeta)$, akkor a K^* belső karakterisztika félminimumot szolgáltató komponens, ha pedig $t > F(\zeta)$, akkor K^* félmaximumot szolgáltató komponens (mindig a ξ pontra vonatkozólag).*

Analóg módon, ha K' a t nívó ξ, ζ pontokat elválasztó komponensei közül a ξ-hez legközelebbi, akkor attól függően, hogy $t < F(\xi)$ vagy $t > F(\xi)$, a K^{**} külső karakterisztika félminimumot, illetve félmaximumot szolgáltató komponens lesz (ξ-re vonatkozólag).

BIZONYÍTÁS: Legyen K a t nívónak a ζ ponthoz legközelebb fekvő komponense és $t < F(\zeta)$ (a 9. segédtétel értelmében található ilyen komponens). Legyen a K komponens reguláris és tegyük fel, hogy a segédtétel állításával ellentétben a K^* karakterisztika nem félminimumot szolgáltató komponens. Ekkor két eset lehetséges:

a) K^* koncentrikus szingularitású komponens. Ez lehetetlen, mert akkor a t nívónak volna olyan K' komponense, amely elválasztja K^*-ot és az $U \supset K^*$ környezet kiegészítő halmazát. De ha az U környezet elég kicsiny, úgyhogy $\zeta \in CU$, akkor K' elválasztja a K^* komponenst a ζ ponttól, ugyanis K' elválasztja K^*-ot CU-tól. Ez nem lehetséges, mert K a t nívónak a ζ ponthoz legközelebb fekvő komponense.

b) K^* félmaximumot szolgáltató komponens. Legyen R olyan kontinuum, amely metszi K^*-ot, nem metszi az $E_t - K^*$ halmazt és tartalmaz egy a pontot, amelyre $F^*(a) < t$. Akkor az a, ζ pontokat a t nívó elválasztja (ugyanis $t < F^*(\zeta) = F(\zeta)$). Az E tétel értelmében található az a, ζ pontokat elválasztó $K' \subset E_t$ komponens. De akkor tekintettel arra, hogy K' elválasztja az a, ζ pontokat, K' különbözik K^*-tól, mert K^* szét nem választó komponens. $K' \cap R = 0$, így K' nem választja el a K^* komponenst és az a pontot. De akkor K' elválasztja a ζ pontot és K^*-ot, mert különben K' nem választhatná el az a, ζ pontokat. Következésképpen K' elválasztja a ξ, ζ pontokat és közelebb fekszik ζ-hoz, mint K, ez pedig lehetetlen.

Tehát K^* félminimumot szolgáltató komponens.

A 10. segédtétel fennmaradt három esete analóg módon bizonyítható be.

11. SEGÉDTÉTEL. *Legyen K_1 és K_2 az $F(\eta)$ folytonos függvény valamely t nívójának két komponense. Akkor található egy maximális $\delta_0 > 0$ szám, amelyre vagy a $t+\delta_0$, vagy a $t-\delta_0$ nívó elválasztja a K_1, K_2 komponenseket. Ha a $t \pm \delta$ nívó elválasztja K_1-et és K_2-t, akkor bármely δ' számra $(0 < \delta' < \delta)$ a $t \pm \delta'$ nívó elválasztja a K_1, K_2 komponenseket.*

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha a $t \pm \delta$ nívó elválasztja a K_1, K_2 komponenseket, akkor a $t \pm \delta'$ nívó is elválasztja K_1-et és K_2-t minden $0 < \delta' < \delta$ mellett. Valóban, az E tétel szerint található a K_1, K_2 komponenseket elválasztó $L \subset E_{t \pm \delta'}$ komponens. Ekkor $E_{t \pm \delta'}$ elválasztja egyrészt K_1-et L-től, másrészt K_2-t L-től, és az $E_{t \pm \delta'}$ halmaznak van legalább két olyan komponense, amely elválasztja K_1-et és L-et, illetve K_2-t és L-et és egyúttal elválasztja K_1-et és K_2-t.

Most tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben semmilyen $\delta > 0$ szám mellett a $t+\delta$, $t-\delta$ nívók nem választják el a K_1, K_2 komponenseket. Akkor található olyan, kontinuumokból álló $\{R_s\}$ sorozat, amelynek minden tagja metszi K_1-et is, K_2-t is, és amelyre $R_s \cap \left(E_{t+\frac{1}{s}} + E_{t-\frac{1}{s}}\right) = 0$.

Ebből következik, hogy az R_s halmazon $t - \frac{1}{s} < F(\eta) < t + \frac{1}{s}$. Szokásos módon az $\{R_s\}$ sorozatból válasszunk ki egy olyan részsorozatot, amelynek topológiai limes inferiora nem üres. Tegyük fel, hogy maga az $\{R_s\}$ sorozat már ilyen. Akkor az $R = \underline{\mathrm{lt}}_s\, R_s$ halmaz kontinuum, és R metszi K_1-et is, K_2-t is. Az R kontinuumon $F(\eta) \equiv t$, vagyis $R \subset E_t$, és így a K_1, K_2 komponensek azonosak. Tehát van olyan $\delta > 0$, hogy $E_{t \pm \delta}$ elválasztja a K_1, K_2 komponenseket. Egy maximális δ_0 szám létezése J kompaktságából és az A, D tételekből következik.

2. §. Kétváltozós függvény komponens-tere (egydimenziós fája)

A többváltozós függvények sok tulajdonsága teljesen analóg az egyváltozós függvények, vagy pontosabban, az egydimenziós kontinuumon értelmezett függvények tulajdonságaival. Kiderül, hogy maga a függvény szolgáltat nekünk ilyen egydimenziós kontinuumot: ilyen a függvény „*egydimenziós fája*", vagyis a függvény nívóhalmazainak komponenseiből alkotott tér a természetes topológiával. Ebben a paragrafusban többváltozós függvények egydimenziós fájának megszerkesztésével és tanulmányozásával foglalkozunk. A 2. § anyaga valamivel elvontabb, mint az összes többié. Bár az e paragrafusban kapott eredményeket később felhasználjuk, szükség esetén az egész 2. § elhagyható lenne, igaz, egyes bizonyítások meghosszabbodása árán. A kétváltozós függvények tulajdonságainak „egydimenziósakra" és „kétdimenziósakra" való elkülönülése azonban szememben elvi jelentőségű ténynek látszik. Ebből a szempontból az egydimenziós fa bevezetése éppen hogy lényeges: segítségével a függvények egydimenziós tulajdonságai különösen világosan választhatók ki.

Legyen tehát $F(\eta)$ kétváltozós, vagy ha úgy tetszik, a kétdimenziós gömbfelületen értelmezett folytonos függvény. Rögtön megjegyezzük, hogy az egész paragrafus folyamán nem lesz fontos számunkra a függvény J értelmezési tartományának nem-csak a pontos alakja, hanem még a dimenziója sem, úgyhogy az olvasó, ha akarja, az $F(\eta)$ függvényt képzelheti az n-dimenziós kockán, az n-dimenziós gömbfelületen stb. értelmezett folytonos függvénynek.

Minden $F(\eta)$ függvénynek meg fogunk feleltetni egy T_F topológikus teret, amelyet az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fájának fogunk elnevezni (később kiderül, hogy T_F egydimenziós kontinuum). Pontoknak az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazainak komponenseit vesszük. T_F-en a topológiát a következőképpen adjuk meg: legyen $U(K)\subset J$ olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza az E_t nívóhalmaz K komponensét. A teljesen $U(K)$-ban fekvő és a T_F tér pontjainak tekintett komponensek halmazát a T_F tér K pontja környezetének fogjuk tekinteni. A topológiát egy környezetrendszer megadása segítségével vezettük be. Meg kell mutatni, hogy a bevezetett topológia eleget tesz a topológikus tér axiómáinak. Két ilyen axióma van:

1. Bármely adott $p\in T_F$ pont tetszés szerinti két környezetének metszete tartalmazza a p pont valamely környezetét.

2. Ha a q pont a p pont $U(p)$ környezetéhez tartozik, akkor q-nak van olyan $U(q)$ környezete, amely $U(p)$-ben fekszik.

Ennek a két axiómának a T_F térben való teljesülése könnyen következik abból, hogy J-ben két nyílt halmaz metszete nyílt halmaz, és a 2. segédtételből.

Tehát minden J-n értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvénynek megfeleltettünk egy T_F topológikus teret. Ennek kapcsán a J térnek a T_F térre való τ_F természetes leképezését nyerjük. Ha ξ a J tér valamely pontja, akkor legyen definíció szerint $\tau_F(\xi)=K$, ahol K egy nívóhalmaz valamely komponense *mint a T_F tér pontja.* Ha M a J tér valamely halmaza, akkor $\tau_F(M)$ jelenti M képét a T_F térben. Ha L a T_F térben fekvő halmaz, akkor szokásos módon $\tau_F^{-1}(L)$ jelöli L teljes inverz képét J-ben. Azonkívül gyakran az l_ξ jelölést fogjuk használni $\tau_F(\xi)$-re, vagyis a $K\ni\xi$ komponensre mint a T_F tér pontjára, továbbá a K_ξ jelölést ugyanarra a K komponensre, de most a J tér ponthalmazának tekintve.

12. SEGÉDTÉTEL. *A τ_F leképezés folytonos.*

BIZONYÍTÁS: Legyen l a T_F tér valamely pontja, $K=\tau_F^{-1}(l)$ és $\xi\in K$. Legyen $U(l)$ az l pont tetszés szerinti környezete T_F-ben, $U(K)$ pedig K-nak az $U(l)$ halmazt generáló környezete J-ben. Akkor $U(K)\supset K\ni\xi$, és a 2. segédtétel szerint található olyan $V(\xi)\subset U(K)$ környezet, hogy minden a $V(\xi)$ környezetet metsző K' komponens teljesen $U(K)$-ban fekszik. De akkor $\eta\in V(\xi)$ esetén $\tau_F(\eta)\subset U(l)$, ami $U(l)$ önkényes megválasztása folytán éppen azt jelenti, hogy a τ_F leképezés folytonos.

Minthogy J lokálisan összefüggő kontinuum (lásd a K definíciót), az L tételből rögtön kevetkezik az alábbi tétel:

4. TÉTEL. *A J halmazon értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvény T_F egydimenziós fája lokálisan összefüggő kontinuum.*

13. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, T_F az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája, l_0 és l_1 pedig T_F tetszés szerinti pontjai. Legyen R mindazon komponensek összege J-ben, amelyek elválasztják a $K_0=\tau_F^{-1}(l_0)$, $K_1=\tau_F^{-1}(l_1)$ komponenseket. Akkor $\sigma=\tau_F(R)$ az egyetlen olyan egyszerű ív T_F-ben, amelynek l_0 és l_1 a két végpontja. A σ ív maximális, vagyis teljesen benne van bármely az l_0, l_1 pontokat tartalmazó $L\in T_F$ kontinuumban.*

BIZONYÍTÁS: A G tétel szerint a σ halmaz rendezett, ha a rendezést úgy értelmezzük, hogy $l,\tilde{l}\in\sigma$ esetén $l\prec\tilde{l}$ azt jelenti, hogy $\tau_F^{-1}(l)$ a $\tau_F^{-1}(\tilde{l})$ komponenst elválasztja K_0-tól. Megmutatjuk, hogy ilyen rendezés mellett σ hasonló egy szakaszhoz. Ehhez elég belátni, hogy σ rendelkezik a következő négy tulajdonsággal:

1. Van olyan l^0, hogy tetszés szerinti $l \in \sigma - l^0$ pontra $l^0 \prec l$.

2. σ elemeinek bármely $l^{(1)} \prec l^{(2)} \prec \ldots$ monoton sorozatához található limeszelem, vagyis olyan σ-beli l elem, hogy $l^{(s)} \prec l$ $(s=1, 2, \ldots)$ és hogy bármely $l' \in \sigma$ elemre $l' \prec l$ esetén elég nagy s értékekre $l' \prec l^{(s)}$.

3. σ szeparábilis halmaz, vagyis van olyan megszámlálható $\{l_s\}$ halmaz, hogy l^0 kivételével bármely $l \in \sigma$ elemhez található olyan monoton $\{l_{s_n}\}$ részsorozat, amelynek l limesz-eleme.

4. σ bármely l és $l' \succ l$ eleméhez található olyan l'', amelyre $l \prec l'' \prec l'$.

Az 1. tulajdonság magától teljesül: az l^0 első elem szerepét l_0 játssza.

A 2. tulajdonság könnyen következik az A, D tételekből és J kompaktságából. Valóban, legyen $l^{(1)} \prec l^{(2)} \prec \ldots$; legyen $K^{(s)} = \tau_F^{-1}(l^{(s)})$ és legyen az $\{l^{(s)}\}$ sorozat olyan ritka, hogy $\underset{s}{\underline{\mathrm{lt}}}\, K^{(s)} \neq 0$. Legyen $\tilde{K} = \underset{s}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_s$, a megfelelő komponens $K \supset \tilde{K}$, továbbá legyen $l = \tau_F(\tilde{K})$. Nyilvánvaló, hogy $\tau_F(K^{(s)}) \prec l$ minden s-re. Azonkívül ha $l' \prec l$ és minden s-re $l' \succ l^{(s)}$, akkor az $L = \tau_F^{-1}(l')$ és a K_0 halmazt mindegyik $K^{(s)}$ és ezzel együtt topológiai limes superioruk is elválasztja, így a $K \supset \underset{s}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_s$ komponens még inkább elválasztja őket. De akkor K elválasztja L-et K_0-tól és $\tau_F(K) \prec \tau_F(L)$ ellentétben a feltevéssel. Tehát az 1. és 2. tulajdonságot bebizonyítottuk.

Most bizonyítsuk be a 3. tulajdonságot. A G tétel szerint két különböző és R-hez tartozó K, L komponens különböző távolságra van K_0-tól. Legyen D az a valós számokból álló halmaz, amelynek elemei K_0-nak az R-beli komponensektől mért távolságai. Legyen $D^* \subset D$ megszámlálható és D-ben mindenütt sűrű halmaz. Legyen $\{K_n\}$ azoknak az R-hez tartozó komponenseknek a halmaza, amelyeknek K_0-tól mért távolságai D^*-beli számok. Megmutatjuk, hogy $\{\tau_F(K_n)\}$ a keresett megszámlálható és mindenütt sűrű halmaz. Legyen $l \in \sigma$. Legyen $\xi \in K_0$ és $\eta \in L = \tau_F^{-1}(l)$ két olyan pont, amelyre $\varrho(\xi, \eta) = \varrho(K_0, L)$. Legyen továbbá $d_1 < d_2 < \ldots$ a D^* halmaz elemeiből álló és a $\varrho(K_0, L)$ számhoz tartó sorozat. Válasszuk ki az R-hez tartozó komponenseknek egy $K_1^*, \ldots, K_n^*, \ldots$ sorozatát, amelyre $\varrho(K_0, K_n^*) = d_n$. Legyen η_n a K_n^* komponens η-hoz legközelebbi metszéspontja a $[\xi, \eta]$ szakasszal. Ilyen van, mert K_n^* elválasztja a K_0, L komponenseket. Nyilván $d_n \leqq \varrho(\xi, \eta_n)$, és így $\lim\limits_n \varrho(\eta_n, \eta) = 0$. Következésképpen $\eta \in \underset{n}{\underline{\mathrm{lt}}}\, K_n^*$, tehát $L \ni \underset{n}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_n^*$. De ebből következik, hogy az l elem a $\{\tau_F(K_n^*)\}$ sorozatnak limesze.

Végül a 4. tulajdonság a 11. segédtétel miatt teljesül.

Most legyen θ a σ halmaznak a $[0,1]$ szakaszra való hasonló leképezése, vagyis $\theta(l)$ a σ halmazon értelmezett függvény, amelyre $\theta(l_0) = 0$, $\theta(l_1) = 1$, amelyre továbbá $\theta(l) < \theta(l')$ ha $l \prec l'$. Megmutatjuk, hogy a θ függvény a T_F tér σ halmazának a $[0, 1]$ szakaszra való *homeomorf* leképezését valósítja meg. Valóban, legyen $l \in \sigma$ és $\varepsilon > 0$ előre megadott szám. Legyenek $l' \in \sigma$, $l'' \in \sigma$ olyan komponensek, amelyekre $\theta(l') = \theta(l) - \varepsilon$, $\theta(l'') = \theta(l) + \varepsilon$. Legyen U a J térnek a $\tau_F^{-1}(l')$, $\tau_F^{-1}(l'')$ komponensek által határolt tartománya. Akkor U a T_F térben egy $\tilde{U}$ tartományt generál, amelynek σ-val való metszete az $l' \prec \tilde{l} \prec l''$ összefüggésnek eleget tevő $\tilde{l}$ pontokból áll és így $\tilde{l} \in \tilde{U} \cap \sigma$ esetén $|\theta(\tilde{l}) - \theta(l)| < \varepsilon$. Ezzel bebizonyítottuk $\theta(l)$ folytonosságát. Megmutatjuk, hogy az inverz leképezés folytonossága is fennáll. A 2. segédtétel értelmében elég megmutatni, hogy $\theta(l_n) \to \theta(l)$ esetén $\varrho(K_n, K) \to 0$, ahol $K = \tau_F^{-1}(l)$, $K_n = \tau_F^{-1}(l_n)$. Legyen a feltevéssel ellentétben $\varrho(K, K_n) > \delta > 0$. A $\{K_n\}$ sorozatot tekinthetjük olyan ritkának, hogy $\underset{n}{\underline{\mathrm{lt}}} K_n \neq 0$. Legyen $\tilde{K}$ a $\underset{n}{\overline{\mathrm{lt}}} K_n$ halmazt tartalmazó komponens. Akkor vagy $\varrho(K, \tilde{K}) > 0$, vagy $K = \tilde{K}$. Az utóbbi ellentmond a $\varrho(K, K_n) > \delta$ feltételnek. Legyen $\varrho(K, \tilde{K}) = \delta_1 > 0$. Akkor $\theta(K) = \theta(\tilde{K})$, ami lehetetlen, mert $K \neq \tilde{K}$ és vagy $K \prec \tilde{K}$, vagy $\tilde{K} \prec K$. A 13. segédtétel első felét bebizonyítottuk: σ egyszerű ív.

Most legyen $L \subset T_F$ olyan kontinuum, amely tartalmazza az l_0, l_1 pontokat. Akkor az $S = \tau_F^{-1}(L)$ halmaz a K és az M tétel szerint kontinuum J-ben és $S \supset K_0 + K_1$. De akkor S metszi a K_0, K_1 komponenseket elválasztó bármelyik komponenst, és így $L = \tau_F(S) \supset \sigma = \tau_F(R)$, ugyanis R az összes ilyen komponensek összege. Tehát $L \supset \sigma$, vagyis a σ egyszerű ív minimális. Most legyen $\sigma' \subset T_F$ olyan egyszerű ív, amelynek végpontjai l_0 és l_1. Akkor $\sigma' \supset \sigma$. Legyen $l \in \sigma' - \sigma$. Legyen σ'' a σ' ív l-től l_1-ig terjedő része, és l_2 a σ'' és σ' ív első közös pontja l-től l_1 felé haladva. Akkor az $l_0 l_2$, $l l_2$, $l_2 l_1$ íveknek l_2 az egyetlen közös pontjuk, vagyis l_2 elágazási pont és σ' nem egyszerű ív.

A 13. segédtételt teljesen bebizonyítottuk.

A topológiából ismeretes, hogy azok a lokálisan összefüggő kontinuumok, amelyek nem tartalmaznak topológikus kört, egydimenziósak, T_F pedig a 13. segédtétel értelmében nyilvánvalóan nem tartalmaz topológikus kört. Ez igazolja az „egydimenziós fa" elnevezés jogosságát. Az is ismeretes, hogy minden lokálisan összefüggő és topológikus kört nem tartalmazó kontinuum homeomorf módon leképezhető egy síkbeli kontinuumra. Ezeket a tényeket nem fogjuk felhasználni és bizonyításukat elhagyjuk.

9. definíció. Legyen K valamely kontinuum és a ennek egy pontja. Az *a pont indexének* nevezzük *azoknak az n számoknak a felső határát, amelyekre található K-nak n számú olyan, több pontból álló részkontinuuma, hogy bármelyik kettőnek a az egyetlen közös pontja.*

10. definíció. A K kontinuum $n \geqq 3$ indexű pontját *elágazási pontnak*, 1 indexű pontját pedig *végpontnak* nevezzük (vö. 8. definíció).

5. TÉTEL. *Az $F(\eta)$ folytonos függvény nem reguláris komponenseinek a függvény T_F egydimenziós fáján a következők felelnek meg:*

a) *az értelmezési tartományt $n \geqq 3$ részre szétválasztó komponenseknek elágazási pontok ugyanazzal az n indexszel, és megfordítva;*

b) *az értelmezési tartományt szét nem választó komponenseknek a fa végpontjai, és megfordítva.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az E_t nívóhalmaz K komponense a J tartományaz n számú $G_1, G_2, \ldots, G_n$ tartományra választja szét (lehet $n = \infty$ is). Be kell bizonyít tanunk, hogy K-nak mint a T_F kontinuum pontjának indexe szintén n.

A $G_s + K$ zárt halmazok mindegyike bármely pontjával együtt e pont egész komponensét is tartalmazza. Ezeknek a halmazoknak a metszete K. A T_F térben mindegyik $G_s + K$ halmaznak megfelel egy nem egyetlen pontból álló kontinuum, és a K komponens mint a T_F tér pontja e kontinuumok egyetlen metszéspontja. Tehát K indexe T_F-ben legalább n.

Bizonyítsuk be állításunk második felét. Legyen l elágazási pont a T_F térben, és $K = \tau_F^{-1}(l)$. Legyenek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ egynél több pontból álló, egymást páronkint

l-ben és csak l-ben metsző kontinuumok a T_F térben. Bebizonyítjuk, hogy a K komponens a J tartományt legalább n részre osztja. Valóban, legyen $D_s=\tau_F^{-1}(L_s)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$. Megmutatjuk, hogy $r\neq s$ esetén K elválasztja a D_r-K, D_s-K halmazokat. Legyen $\alpha\in D_r-K$, $\beta\in D_s-K$ és R olyan kontinuum, amely tartalmazza az α, β pontokat, de nem metszi a K komponenst. Legyen $M=\tau_F(R)$. Nyilvánvaló, hogy M az l pontot nem tartalmazó kontinuum. Ez azonban azt jelenti, hogy az l_α, l_β pontok T_F-ben összeköthetők az l pontot nem tartalmazó M kontinuummal. A 13. segédtétel értelmében található az l_α, l_β pontokat tartalmazó minimális σ egyszerű ív. Akkor $\sigma\subset M$ nem tartalmazza l-et, mert M nem tartalmazza l-et. Másrészt L_r+L_s tartalmazza a σ ívet, tehát $\sigma\ni l$, mert ha $\sigma\not\ni l$, akkor egy elég kicsiny $U(l)$ környezet sem metszi a σ ívet, akkor pedig $L_r-U(l)$ és $L_s-U(l)$ egymást nem metsző zárt halmazok (mivel feltevés szerint L_r és L_s egyetlen metszéspontja l), vagyis az $l_\alpha\in L_r-U(l)$, $l_\beta\in L_s-U(l)$ pontok nem köthetők össze a $\sigma\subset L_r+L_s-U(l)$ egyszerű ívvel.

Tehát ha K indexe a T_F térben n, akkor a K komponens a J tartományt legalább n részre osztja. Megmutattuk, hogy a K komponensnek mint a T_F tér pontjának indexe egyenlő azoknak a tartományoknak a számával, amelyekre K felosztja a J halmazt. Ebből következik a bebizonyítandó tétel a) és b) állítása.

14. SEGÉDTÉTEL: *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos J értelmezési tartományon és K e függvény valamelyik E_t nívóhalmazának egy szétválasztó komponense. Legyen J_1 azok közül a tartományok közül az egyik, amelyekre K felosztja J-t. Akkor J_1-ben található szét nem választó komponens.*

BIZONYÍTÁS: Indirekt bizonyítást fogunk végezni. Rendezzük közönséges $\{r_s\}$ sorozatba J mindazon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátájuk racionális. Legyen $\xi\notin J_1$. Legyen $K_1=K$. Tegyük fel, hogy a $K_1, K_2, \ldots, K_n$ komponensek és a $J_1, J_2, \ldots, J_n$ tartományok már értelmezve vannak oly módon, hogy K_s elválasztja a J_s tartományt K_{s-1}-től, továbbá $K_s\subset J_{s-1}$. Az $r_s\in J_n$ pontok közül jelöljük meg azokat, amelyeket legalább egy $\tilde{K}\subset J_n$ komponens nem választ el K_n-től. Rögzítsük közülük a legkisebb indexű $r_s(n)$ pontot és válasszunk K_{n+1}-nek egy J_n-ben fekvő és az $r_s(n)$ pontot a K_n komponenstől el nem választó komponenst, J_{n+1}-nek pedig egy olyan tartományt, amelyet K_{n+1} elválaszt K_n-től. Folytassuk eljárásunkat minden n természetes számra. Most legyen a $\{K_{n_m}\}$ részsorozat olyan ritka, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_m K_{n_m}\neq 0$. Legyen $K'=\overline{\mathrm{lt}}_m K_{n_m}$, továbbá $\tilde{K}\supset K'$ egy nívóhalmaz komponense. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{K}\subset \prod_n J_n$, és $\tilde{K}$ nem választja szét J-t; valóban, ellenkező esetben legyen J_0 olyan tartomány, amelyet $\tilde{K}$ elválaszt mindegyik K_n-től. Legyen $\tilde{\tilde{K}}\subset J_0$ tetszés szerinti komponens. Található olyan $r_s\subset J_0$ pont, amelyet $\tilde{\tilde{K}}$ nem választ el $\tilde{K}$-tól és egyúttal az összes K_n komponenstől sem. Ez azonban azt jelenti, hogy $r_s(n)$ indexe valamely n-re nem volt minimális.

15. SEGÉDTÉTEL: *Folytonos függvény egydimenziós fája a végpontok halmazából és legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan egyszerű ívből áll, amelyek egymást páronkint legfeljebb egy pontban, méghozzá elágazási pontban metszik.*

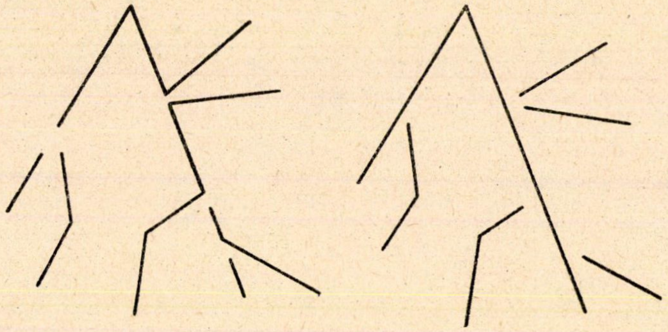
BIZONYÍTÁS: Rendezzük közönséges sorozatba a J tartomány racionális koordinátájú pontjaiból képezhető összes párokat. Összesen megszámlálhatóan sok ilyen pár van. Minden olyan párnak, amelynek elemei nem tartoznak ugyanahhoz a komponenshez, feleltessük meg az $F(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának a pontpárt elválasztó egyik komponensét. Legyenek ezek a megjelölt komponensek $K_1, \ldots, K_n, \ldots$, K_0 pedig egy, a J tartományt szét nem választó komponens. Legyen $l_0 = \tau_F(K_0)$. A K_s komponens szétválasztja J-t. Legyen J_s azon tartományok egyike, amelyeket K_s elválaszt K_0-tól. Akkor J_s-ben található a J tartományt szét nem választó L_s komponens. Képezzük most az említett megszámlálhatóan sok T_F-beli egyszerű ívet a következőképpen. Legyen $l_s = \tau_F(K_s)$. Legyen σ_s^0 az l_0 és l_s pontot összekötő minimális egyszerű ív T_F-ben. Továbbá legyen $\sigma_1 = \sigma_1^0$, és σ_s az az egyszerű ív, amely az l_s pontot a σ_s^0 és $\sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k$ halmaz l_s-től számított első metszéspontjával köti össze. Azt állítom, hogy az egész T_F tér a végpontok és a σ_s egyszerű ívek összege. Valóban, tegyük fel, hogy az $l \in T_F$ pont nem végpont és $K = \tau_F^{-1}(l)$. Akkor nyilván létezik olyan *megjelölt* K_s komponens, amelyet K elválaszt K_0-tól. Legyen L_s a K_s-nek megfelelő szét nem választó komponens. Nyilvánvaló, hogy $\sigma_s^0 \ni l$, mert σ_s^0 tartalmazza T_F *mindazon* pontjait, amelyek a ξ pontot és az L_s komponenst elválasztó komponenseknek felelnek meg. Tehát $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^0$ tartalmazza T_F minden olyan pontját, amely nem végpont. Világos azonban, hogy $\sigma_s^0 \subset \sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k + \sigma_s$, ugyanis a $\sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k + \sigma_s$ kontinuum tartalmazza az l_0, l_s pontokat, és így tartalmazza az e pontokat összekötő minimális egyszerű íveit is.

Azt kell még megmutatni, hogy a σ_s, σ_m ívek közös pontjai elágazási pontok. σ_s is, σ_m is tartalmaz egy l_s ill. l_m végpontot. Legyen $l \in \sigma_s \cap \sigma_m$. Szerkesztés szerint l az egyetlen közös pontjuk. Ha l az egynél több pontból álló σ_s, σ_m ívek közül valamelyiknek nem végpontja, akkor l nyilván elágazási pont. Ha viszont l a σ_s és σ_m ívnek is végpontja, akkor l különbözik az l_0, l_s, l_m pontoktól, mert ellenkező esetben a T_F kontinuum l végpontján *két*, nem az l pontra összehúzódó és egyetlen közös ponttal rendelkező kontinuum haladna át, ez pedig ellentmond a végpont definíciójának. Tehát $l \neq l_s, l_m, l_0$. Legyen $s < m$. Akkor az l pont mint a σ_s ív végpontja biztosan hozzá tartozik a $\sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k$ halmazhoz, és így $l \in \sigma_r$ $(r < s < m)$.

Tehát l hozzá tartozik *három* különböző, egynél több pontból álló l_r, l_s, l_m kontinuumhoz és $\sigma_r \cap \sigma_s = \sigma_s \cap \sigma_m = \sigma_r \cap \sigma_m = l$, vagyis l elágazási pont. A 15. segédtételt bebizonyítottuk.

A 15. segédtétel lehetővé teszi, hogy a T_F fát előállíthassuk megszámlálhatóan sok, végpontokat elágazási pontokkal összekötő egyszerű ívnek és a végpontok halmazának összegeként, ahol az egyszerű ívek páronkint vagy nem metszik egymást, vagy egyetlen közös pontban, amely egyúttal elágazási pont, metszik egymást. Az ilyen felbontás nyilván nem egyértelmű (lásd a 2. ábrát, amelyen ugyanazon fa felbontásának több változata szerepel). Azonkívül az egyszerű ívekhez nem tartozó végpontok halmaza lehet lényegesen nem üres. Erre példa az ismert „vasút" kontinuum, amelynek szerkezete a 3. ábrából világosan látható. A „vasút" végpontjainak halmaza nyilván kontinuum számosságú, viszont megszámlálhatóan sok egyszerű ívnek csak megszámlálhatóan sok végpontja van.

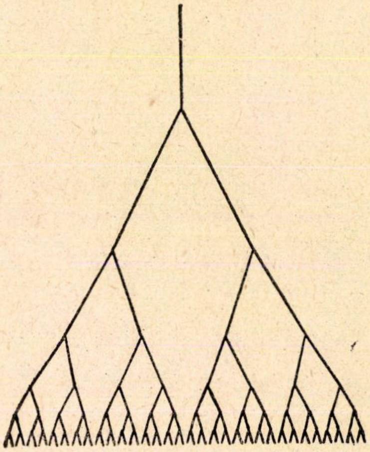
Egy fa bármelyik olyan felbontását, amely megfelel a 15. segédtétel feltételeinek, *szabályos felbontásnak* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy topológialilag egyforma fája eléggé különböző függvényeknek is lehet. Így a kétváltozós függvények közül az összes „forgási függvény" egydimenziós fája egyszerű ív. Ezért képezhetünk olyan függvényosztályokat, hogy ugyanabba az osztályba tartozó függvények egymásra vonatkozó viselkedése nagyon hasonlítson az egyváltozós függvények viselkedéséhez.



2. ábra

11. definíció. Legyen $F(\eta)$ folytonos és egyetlen gömbben sem állandó függvény. E függvény értelmezési tartományának nívóhalmazok komponenseire való felbontását az $F(\eta)$ függvénynek megfelelő *teljes felbontásnak* fogjuk nevezni. A $\varphi(\eta)$ függvény *az $F(\eta)$ függvény lineáris típusához tartozik*, ha az értelmezési tartomány neki megfelelő felbontása az $F(\eta)$-nak megfelelő felbontásból összeragasztással keletkezik, vagyis ha abból, hogy a $\varphi(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának valamelyik komponense metszi az $F(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának egyik komponensét, következik, hogy teljesen tartalmazza azt.

Nyilvánvaló, hogy ha $F(\eta)$ teljes felbontást létesít, és a $\varphi(\eta)$ függvény $F(\eta)$ lineáris típusához tartozik, akkor a T_F egydimenziós fát le lehet képezni a T_φ egydimenziós fába folytonosan és úgy, hogy T_F minden olyan részkontinuuma, amely T_φ-nek egy pontjába megy át, a J térben ugyanazt a halmazt értelmezze, mint T_φ-nek ez a pontja. Azokat az $F(\eta)$ függvényeket, amelyek egyetlen gömbben sem állandók és ennélfogva teljes felbontást létesítenek, rövidség kedvéért elemieknek fogjuk nevezni.



3. ábra

Ha $F(\eta)$ elemi függvény, akkor az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó összes függvények együtt gyűrűt alkotnak, vagyis két, $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó függvény összege, különbsége és szorzata ismét ugyanehhez a lineáris típushoz tartozik.

Valóban, legyen $F(\eta)$ elemi függvény, és az $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ függvények tartozzanak $F(\eta)$ lineáris típusához. Legyen $\varphi(\eta) = F_1(\eta) \pm F_2(\eta)$ és $\psi(\eta) = F_1(\eta) \cdot F_2(\eta)$. A $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ függvények folytonosak. Legyen továbbá K az $F(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának tetszés szerinti komponense. Akkor feltevés szerint a K halmazon az $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ függvények és velük együtt összegük, különbségük és szorzatuk is állandó. Ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi(\eta)$ és $\psi(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény lineáris típusához tartozik.

Tegyük fel továbbá, hogy az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó függvények valamely $\{F_n(\eta)\}$ sorozata egyenletesen tart $F_0(\eta)$-hoz. Akkor, minthogy mindegyik $F_n(\eta)$ függvény állandó a K halmazon, limeszük — az $F_0(\eta)$ folytonos függvény — szintén állandó a K komponensen és így $F(\eta)$ lineáris típusához tartozik. Végül a $\varphi(\eta) \equiv \text{const}$ függvény nívóhalmaza J, tehát $\varphi(\eta) \equiv \text{const}$ bármely elemi függvény lineáris típusához hozzá tartozik.

6. TÉTEL: *Legyen $F(\eta)$ elemi függvény. Az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó folytonos függvények olyan $\mathcal{K}_F$ gyűrűt alkotnak, amely tartalmazza a konstans függvényt és amely az egyenletes konvergenciára nézve zárt.*

A $\mathcal{K}_F$ gyűrű izomorf az $F(\eta)$ függvény T_F egydimenziós fáján értelmezett összes folytonos függvények $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrűjével.

BIZONYÍTÁS: Csak az említett gyűrűk izomorf voltát kell belátnunk, a többit már bebizonyítottuk. A $\mathcal{K}_F$ gyűrűbeli $\varphi(\eta)$ függvényeket megfeleltetjük a $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrűhöz tartozó $\varphi^*(\eta)$ függvényeknek a $\varphi^*[\tau_F(\eta)] = \varphi(\eta)$ képlet segítségével. Mivel $\varphi(\eta)$ folytonos függvény, $\varphi^*(l)$ is folytonos; valóban, legyen $\varepsilon > 0$. Válasszuk ki a K komponensnek egy olyan kis $U(K)$ környezetét, amelyben $\varphi(\eta)$ ingadozása nem haladja meg az ε értéket. Akkor nyilvánvaló, hogy $U(K)$ a T_F térben egy $U(l)$ környezetet generál, és $\varphi^*(l)$ ingadozása $U(l)$-ben szintén legfeljebb ε. Fordítva, legyen $\varphi^*(l)$ a T_F fán értelmezett tetszés szerinti folytonos függvény. Megmutatjuk, hogy $\varphi(\eta) = \varphi^*[\tau_F(\eta)]$ az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó folytonos függvény. Legyen $\varepsilon > 0$ és legyen ξ_0 a $K = \tau_F^{-1}(l_0)$ komponens egyik pontja. Akkor a T_F térben az $l_0 \equiv l_{\xi_0}$ pontnak van olyan kicsiny $U(l_0)$ környezete, amelyben $\varphi^*(l)$ ingadozása nem nagyobb ε-nál.

Legyen $U(K)$ a K komponensnek az $U(l_0)$ környezetet generáló környezete a J térben. Legyen $V(K)$ a K komponens olyan környezete, hogy $F(\eta)$ bármely nívóhalmazának a $V(K)$ környezetet metsző bármely K' komponense benne van $U(K)$-ban. $U(K)$ létezése a 2. segédtételből következik. Nyilvánvaló, hogy a $V(K)$ halmazon a $\varphi(\eta)$ függvény ingadozása legfeljebb ε, és ez $\varphi(\eta)$ folytonosságát bizonyítja.

Magából a $\varphi(\eta)$ függvény értelmezéséből folyik, hogy $\varphi(\eta)$ állandó $F(\eta)$ bármely nívóhalmazának tetszés szerinti K komponensén, ami éppen azt jelenti, hogy $\varphi(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény lineáris típusához tartozik.

Tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk a $\mathcal{K}_F$ és a $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrű között. Megmutatjuk, hogy ez a megfeleltetés izomorfizmus.

Legyen $\varphi_1(\eta) \in \mathcal{K}_F$, $\varphi_2(\eta) \in \mathcal{K}_F$ és $\varphi_1^*(l)$, $\varphi_2^*(l)$ a megfelelő függvények $\mathcal{K}_{F^*}$-ban. Legyen továbbá $\varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) \pm \varphi_2(\eta)$ és $\psi(\eta) = \varphi_1(\eta) \cdot \varphi_2(\eta)$. Legyenek $\varphi^*(l)$ és $\psi^*(l)$ a megfelelő függvények $\mathcal{K}_{F^*}$-ban. Akkor

$$\varphi^*[\tau_F(\eta)] = \varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) \pm \varphi_2(\eta) = \varphi_1^*[\tau_F(\eta)] \pm \varphi_2^*[\tau_F(\eta)]$$

és

$$\psi^*[\tau_F(\eta)] = \psi(\eta) = \varphi_1(\eta) \cdot \varphi_2(\eta) = \varphi_1^*[\tau_F(\eta)] \cdot \varphi_2^*[\tau_F(\eta)].$$

Ezzel a $\mathcal{K}_F$, $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrűk izomorf voltát és egyben a 6. tételt bebizonyítottuk.

A 6. tétel azzal, hogy *kétváltozós függvények olyan gyűrűit* választja ki, *amelyek izomorfok bizonyos egydimenziós halmazon értelmezett függvényekből álló gyűrűkkel*, éppen a kétváltozós függvények egyes tulajdonságainak „lineárisságát" mutatja.

Az egydimenziós fa segítségével a kétváltozós függvények sok tulajdonságának vizsgálatát vissza lehet vezetni egydimenziós alakzatokon értelmezett függvények tulajdonságainak tanulmányozására. Ebből a célból *a J tartományon értelmezett minden folytonos $F(\eta)$ függvénynek megfeleltetünk egy, az $F(\eta)$ függvény T_F egydimenziós fáján értelmezett $F^*(l)$ függvényt az $F^*[\tau_F(\eta)] = F(\eta)$ képlet útján.*

Mindjárt jegyezzük meg, hogy $F^*(l)$ nem állandó egyetlen, egynél több pontból álló $\sigma \subset T_F$ egyszerű íven sem. Valóban, tegyük fel, hogy a $\sigma \subset T_F$ íven az $F^*(l)$ függvény állandó. Az $R = \tau_F^{-1}(\sigma)$ halmaz a K, M tételek értelmében kontinuum. Az R kontinuumon $F(\eta)$ állandó, tehát R egy nívóhalmaz valamelyik komponensének részhalmaza, ebből viszont következik, hogy a σ ív egyetlen pontból áll.

Most megvizsgáljuk, hogyan lehet a fa fogalmának segítségével átfogalmazni a nívóhalmazok komponenseinek általunk megadott osztályozását.

Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, T_F e függvény egydimenziós fája, $F^*(l)$ az $F(\eta)$-nak megfelelő függvény T_F-en, $\xi \in J$ rögzített pont, $l_\xi = \tau_F(\xi)$ pedig T_F megfelelő pontja. Ha az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazának K komponense nem választja szét a J tartományt, akkor, mint az 5. tételben megmutattuk, a T_F fa e komponensnek megfelelő l_ξ pontja végpont. Ha l_ξ az $F^*(l)$ függvény maximum-helye (minimum-helye), akkor K_ξ maximumot (minimumot) szolgáltató komponens. Ha viszont a K komponens nem szolgáltat maximumot (minimumot), akkor az l_ξ pont se maximum-hely (minimum-hely). Kössük össze az l_0 és l_ξ pontot a minimális σ egyszerű ívvel. Három eset lehetséges:

a) Az l_ξ pont az $F^*(l)$ függvény szigorú maximum-helye a σ íven.

b) Az l_ξ pont az $F^*(l)$ függvény szigorú minimum-helye a σ íven.

c) Az l_ξ pont az $F^*(l)$ függvénynek nem szigorú maximum-helye és nem is szigorú minimum-helye a σ íven.

Az első két esetben l_ξ tetszés szerinti környezetében biztosan található elágazási pont, továbbá olyan l' pont, amely nem tartozik σ-hoz, és amelyre az a) esetben $F^*(l') > F^*(l_\xi)$, a b) esetben $F^*(l') < F^*(l_\xi)$. Az a) esetben K félmaximumot szolgáltató, a b) esetben pedig félminimumot szolgáltató komponens. Mindkét esetben a σ ív elég kicsiny szakaszának J-beli inverz képe olyan kontinuum a J tartományban, amely tartalmazza a K komponenst és már nem metszi az $E_t - K$ halmazt. Most tegyük fel, hogy a c) esettel van dolgunk. Legyen $U(K)$ a K komponens bármily kicsiny környezete. Mindig találhatunk a J tartományt szét nem választó $U'(K) \subset U(K)$ környezetet. Legyen $U'(l_\xi)$ az l_ξ pont $U'(K)$ által generált környezete T_F-ben. Legyen továbbá l' a σ ív $U'(l)$-ben fekvő és olyan pontja, hogy $F^*(l') = F^*(l)$. A $K' = \tau_F^{-1}(l')$ komponens a J térben elválasztja a $CU'(K)$ és a K halmazt. Valóban, legyen ζ a $CU'(K)$ halmaz tetszés szerinti pontja, és $\zeta_0 \in CU'(K) \cap \tau_F^{-1}(\sigma)$. A ζ pontot $U'(K)$ nem választja el ζ_0-tól, még kevésbé a $K' \subset U'(K)$ komponens. De K' elválasztja a K komponenst és a $\zeta_0 \in CU'(K) \cap \tau_F^{-1}(\sigma)$ pontot és így elválasztja K-tól a ζ pontot is. Ily módon a K komponens bármely $U(K)$ környezetében található ugyanannak a nívónak olyan komponense, amely K-t elválasztja $CU(K)$-tól; ez definíció szerint azt jelenti, hogy K koncentrikus szingularitású komponens.

Továbbá könnyű megadni a reguláris komponensek osztályozását. Ha K az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazának reguláris komponense, akkor a T_F fa megfelelő l pontja

T_F-et két részre választja szét. Egyiküket elhagyva, a maradékul kapott kontinuum olyan fa, amelynek l már végpontja. A 2. tételben ismertetett osztályozás ebből azonnal megkapható.

A fa fogalmának segítségével könnyű átfogalmazni a ξ pontra nézve növekedési és fogyási komponens fogalmát.

Legyen l a T_F fa reguláris pontja, vagyis l nem végpont és nem elágazási pont. Ha valamely l_ξ végpontú és l-et belső pontként tartalmazó egyszerű íven l növekedési (fogyási) pont l_ξ felől számítva, akkor a $K=\tau_F^{-1}(l)$ komponens a ξ pontra nézve növekedési (illetve fogyási) komponens a régi értelemben.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy ha a T_F-hez tartozó σ, σ' egyszerű ívek mindegyike a reguláris l pontot belső pontként tartalmazza, akkor található olyan $\sigma'' \subset \sigma \cap \sigma'$ egyszerű ív, amelynek l szintén belső pontja. Valóban, legyen l_1 és l_2 a σ ív, l_1' és l_2' pedig a σ' ív két olyan pontja, hogy az l pont a σ íven l_1 és l_2, a σ' íven pedig l_1' és l_2' között helyezkedik el. Akkor vagy az $l_1 l$ és $l_2' l$, vagy az $l_1' l$ és $l_2 l$ minimális egyszerű íveknek van l-en kívül legalább egy közös pontjuk, mert különben az $l_1 l, l_1' l, l_2' l$ egyszerű íveknek l lenne az egyetlen közös pontjuk és l elágazási pont lenne. Feltehetjük, hogy $l_1 l \cap l_1' l \ni l' \neq l$. De akkor az ívek minimális volta miatt $l_1 l \supset l' l$ és $l_1' l \supset l' l$. Analóg módon található olyan l'' pont, hogy az $l'' l$ minimális ív benne van $l_2 l$-ben és $l_2' l$-ben. Ekkor $l' l''$ a keresett ív. Ily módon l növekedési vagy fogyási pont (a rögzített l_ξ pontra nézve) vagy szabálytalan pont az l pontot belső pontként tartalmazó (l_ξ végpontú) összes σ egyszerű íveken egyidejűleg. Az elmondottak a következő tételben foglalhatók össze:

7. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, T_F e függvény egydimenziós fája és l valamely reguláris K komponensnek megfelelő pont T_F-ben. Legyen ξ az $F(\eta)$ függvény J értelmezési tartományának rögzített pontja és $l_\xi=\tau_F(\xi)$. Ha K az $F(\eta)$ függvény növekedési (fogyási) komponense ξ-re nézve, akkor l az $F^*(l)$ függvény növekedési (fogyási) pontja l_ξ-re nézve bármely, az l_ξ pontot végpontként, l-et pedig belső pontként tartalmazó $\sigma \subset T_F$ egyszerű íven.*

Ha K a J tartományt szét nem választó komponens, akkor a megfelelő $l \in T_F$ pont a) az $F^*(l)$ függvény lokális maximum-helye (minimum-helye) az l-et tartalmazó bármely $\sigma \subset T_F$ egyszerű íven, ha K félmaximumot (félminimumot) szolgáltató komponens; b) nem lokális maximum-hely és nem is lokális minimum-hely, ha K koncentrikus szingularitású komponens.

A 7. tételt lényegesen fel fogjuk használni a lineáris variáció bevezetéséhez szükséges multiplicitás-függvények mérhetőségének bizonyítása során (II. fejezet 1. és 2. §).

IRODALOM

[1] Г. М. Адельсон—Вельский, А. С. Кронрод, a) О линиях уровня непрерывных функций, обладающих частными производными, Доклады Академии наук СССР **49**, №4 (1945), 239. b) О принципе максимума для решений системы уравнений в частных производных эллиптического типа, Доклады Академии наук СССР **49**, № 8 (1945), 559. c) О прямом доказательстве аналитичности моногенной функции, Доклады Академии наук СССР **50**, № 7 (1945), 7.

[2] П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1947.
[3] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914) (különösen a VIII. fejezet).
[4] М. В. Комаревский, Об одном свойстве линейных континуумов на плоскости с точками ветвления, Труды Туркестанского государственного университета, вып. 6, 8 (1923)
[5] А. Н. Колмогоров, Beiträge zur Masstheorie, *Mathematische Annalen* **107** (1932), 351.
[6] S. Saks, *Theory of the integral*, Hafner, New York, 1937.
[7] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, **36** (1934), 63.
[8] А. С. Кронрод, Е. М. Ландис, О множествах уровня функций многих переменных, Доклады Академии наук СССР **58**, № 7 (1947), 1269.
[9] И. Я. Верченко, А. Н. Колмогоров, Продолжение исследований о точках разрыва функций двух переменных, Доклады Академии наук СССР **4** (1934), 361.
[10] C. R. Adams, J. A. Clarkson, *a)* On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Transactions of the American Mathematical Society* **35** (1933), 824.; *b)* Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Transactions of the American Mathematical Society* **36** (1934), 711.
[11] В. В. Степанов, Sur les conditions de l'existence de la différentiale totale, Математический сборник **32** (1925), 511.
[12] T. Rado, P. Reichelderfer, A theory of absolutly continuous transformation in plane, *Transactions of the American Mathematical Society* **49** (1941), 258.
[13] Ch. J. de La Vallée Poussin, *Cours L'analyse infinitésimale*, 5. éd, Gauthier—Villars, Paris, 1923—1925.

Fordította: *Bognár János*