

# SZABADSÁGFOKREDUKCIÓ ÉS KÖVETKEZMÉNYEI LINEÁRISAN RUGALMAS SZERKEZETEK ANALÍZISÉBEN

CZEGLÉDI GYULA

Lineárisan rugalmas szerkezetek dinamikai analízisében a számítási modell szabadságfokát lehetséges tisztán matematikai eszközökkel csökkenteni. A dolgozat véges szabadságfokú modellek szabadságfokredukciójára két eljárást mutat be, összehasonlítva elemzi előnyeit és hátrányait. Bemutatott tulajdonságait egy egyszerű számpéldán szemlélteti. Végezetül kitér a kontinuos modellek esetében a szabadságfok-csökkentés egy nemkívánatos következményére.

## 1. Bevezetés

Az általános gépészet, a járműipar, a könnyűszerkezetes építésmód, az akusztika különféle szerkezeti rezgési problémáinak megoldása általában a rezgési sajátfrekvenciák és rezgéseképek ismeretét igényli. Bizonyos szerkezeteken ezek a mennyiségek analitikus módszerekkel könnyen meghatározhatók. Más esetekben a feladat matematikai megfogalmazása során olyan egyenleteket kapunk, melyek a független változók százait, vagy ezreit tartalmazzák. Ilyen nagyméretű feladat kezelése a rendelkezésre álló modern számítástechnika mellett sem mindig problémamentes. A későbbiekben leírandók mellett ezért is célszerűnek látszik olyan technikák alkalmazása, amelyek segítségével a változók száma csökkenthető. E módszereket összefoglalóan szabadságfokredukciónak (ritkábban szabadságfokkondenzációnak, esetleg sűrítésnek) nevezik (lásd pl. [1]).

Anélkül, hogy a matematikai modellalkotás problémakörével részleteiben foglalkoznánk, megállapíthatjuk, hogy az osztott paraméterű modellek (pl. lemezek, rudak stb.) helyett diszkrét paraméterű modellek választása eleve szabadságfokredukciót jelent, hiszen végtelen szabadságfok helyett véges szabadságfokkal dolgozunk. A modellalkotás során fellépő szabadságfokredukciót — bár ez is igen érdekes probléma — most kizárjuk vizsgálódásunk köréből.

## 2. Véges szabadságfokú modellek

A vizsgált csillapítatlan, lineárisan rugalmas, koncentrált paraméterű elemeket tartalmazó modell legyen  $n$  szabadságfokú. Szabad rezgés esetében a modell mozgásegyenlete az ismert formában

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{C}\mathbf{x},$$

ahol az  $n$  elemű  $\mathbf{x}$  oszlop mátrix a modell elmozdulás-koordinátáit, a kvadratikus  $\mathbf{M}$  és  $\mathbf{C}$  mátrixok a tehetetlenségi — ill. a rugalmassági jellemzőket tartalmazzák.  $\mathbf{x} = \mathbf{s} \sin \omega t$  alakú megoldást feltételezve, a

$$\mathbf{C}\mathbf{s} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{s} \quad (1)$$

jól ismert sajátértékfeladathoz jutunk, ahol az ugyancsak  $n$  elemű  $\mathbf{s}$  oszlop mátrix az elmozdulás-koordináták  $s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) amplitúdóit foglalja magába.

Ha az (1)-ben foglalt sajátértékfeladat méretének csökkentését tűzzük magunk elé célul, akkor — bár csak a tisztán matematikai lehetőségeket tekintve is — több utat követhetünk. E célkitűzést egyébként más és más ok indokolhatja. Lehet például csak kényelmi szempont a magyarázat, vagy bizonyos esetekben a fizikai tartalom jobb kidomborítása a célunk. Ezeknél azonban jóval fontosabb a végeelem módszer alkalmazásánál gyakran fellépő kényszerítő körülmény, amely a feladat óriási méretében nyilvánul meg. Az  $n$  olykor több száz vagy ezer. A korlátozott gépi technika mellett bizonyos változók eliminációja, így a szabadságfoknak matematikai úton történő csökkentése elkerülhetetlen.

A szabadságfokredukció lehetséges módjai közül most kettőt emelünk ki. Az egyik az, amely alakilag az (1)-ben felírt lineáris sajátértékfeladathoz hasonló csökkentett rendszámú feladatot eredményez; a másik nemlineáris sajátértékfeladatra vezet. Az elsőt részletesen a 2.1 pontban, a másodikat a 2.2 pontban mutatjuk be. A címekbe foglalt lineáris, ill. nemlineáris szavak a redukció eredményére utalnak. A 2.3 pont e két elvi eljárásra tartalmaz egy egyszerű szampéldát.

### 2.1 Lineáris szabadságfokredukció [5,6]

A szabadságfok csökkentésének ez a módja lényegében közelítő technika. Sajátja, hogy az eredeti modellhez tisztán matematikai eszközökkel csökkentett szabadságfokú másik modellt rendel hozzá, így matematikai eszközökkel a modell szabadságfokát fizikai értelemben is csökkenti. Ezzel a módszerrel az eredeti feladat alacsonyabb frekvencia-spektrumát felülről közelíti. Ilyen eljárást követett pl. HURTY [2], CRAIG és BAMPTON [3], GERADIN [4]. A leg hatásosabbat ANDERSON, IRONS és ZIENKIEWICZ javasolta [5]. Ez azokat az elmozdulásokat kizárja ki, melyek nem gyakorolnak lényeges befolyást a kinetikus energiára.

Legyenek az eliminálandó elmozdulások az  $m$  elemű  $\mathbf{v}$  vektorba tömörítve. Alkalmassor- és oszlop cserék után az (1) egyenlet mindig átírható az alábbi alakba:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

vagy részletezve:

$$\mathbf{C}_{11}\mathbf{u} + \mathbf{C}_{12}\mathbf{v} = \omega^2\mathbf{M}_{11}\mathbf{u} + \omega^2\mathbf{M}_{12}\mathbf{v}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{C}_{21}\mathbf{u} + \mathbf{C}_{22}\mathbf{v} = \omega^2\mathbf{M}_{21}\mathbf{u} + \omega^2\mathbf{M}_{22}\mathbf{v} \quad (3b)$$

(3b)-ből

$$\mathbf{v} = (\mathbf{E} - \omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22})^{-1} \mathbf{C}_{22}^{-1}(\omega^2\mathbf{M}_{21} - \mathbf{C}_{21}) \mathbf{u}, \quad (4)$$

ahol  $\mathbf{E}$   $m$ -edrendű egységmátrix.

A (4) jobb oldalának első tényezője — ha a konvergencia fennáll — az

$$(\mathbf{E} - \omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22})^{-1} = \mathbf{E} + \omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22} + (\omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22})^2 + \dots \quad (5)$$

alakba írható. (4) és (5) segítségével a (3a) egyenlet a

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{u} = \omega^2\bar{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \omega\text{-ban magasabb kitevőjű tagok} \quad (6)$$

formát ölti, ahol

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} \quad (7)$$

és

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} - \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} \quad (8)$$

a redukált rugó, ill. tömegmátrixok.

A (6) kifejezésből az  $\omega$ -ban magasabb kitevőjű tagok elhagyása után lineáris közelítést kapunk az (1) eredeti feladatra:

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{u} = \bar{\omega}^2\bar{\mathbf{M}}\mathbf{u}, \quad (9)$$

ahol  $\bar{\omega}^2$  a redukált feladat sajátértékét jelenti.

A (9) kifejezésnek az az előnye, hogy egy közönséges kétmátrixos sajátértékfeladatot kell megoldani, amelyre könyvtári programok állnak rendelkezésre.

Kimutatható [6], hogy a (9) redukált feladat  $\bar{\omega}_i$  sajátértékei az (1) eredeti feladat  $\omega_i$  sajátértékeire felső korlátokat adnak mindaddig, amíg az (5) jobb oldala konvergál. Ez igaz, ha

$$\omega_i < \mu_1, \quad (10)$$

ahol  $\mu_1$  a

$$\mathbf{C}_{22}\mathbf{v} = \mu^2\mathbf{M}_{22}\mathbf{v} \quad (11)$$

ún. belső sajátértékfeladat első (legkisebb) sajátértéke. Kimutatható továbbá, ha (11) sajátértékei rendre

$$\mu_1^2 \leq \mu_2^2 \leq \dots \leq \mu_m^2,$$

akkor

$$\omega_1^2 \leq \mu_1^2 \leq \mu_m^2 \leq \omega_n^2,$$

ahol  $\omega_1^2$  illetve  $\omega_n^2$  az (1) eredeti feladat legkisebb, illetve legnagyobb sajátértéke. A belső feladat sajátértékspektruma tehát az eredetiében helyezkedik el. Az  $\omega_1 = \mu_1$  határeset akkor fordulhat elő, ha az  $\omega_1$ -hez tartozó  $s_1$  sajátvektor mindazon helyein nullák állnak, amelyeket az elimináció során megtartottunk. Ez viszont azt jelenti, hogy az eredeti rendszer két olyan részrendszerre bontható, amelyek önmagukban is – függetlenül a másiktól – szabadon rezeghetnek. Mivel a gyakorlati szerkezeteken ez csak elvétve fordulhat elő, ezért feltételezhetjük, hogy  $\mu_1 > \omega_1$ . Egy adott  $\omega_i$ -re nézve a konvergencia, így a felülről történő közelítés annál jobb, minél kisebb  $\omega_i$  a  $\mu_1$ -nél, azaz  $\mu_1$  minél nagyobb. Célszerű tehát az eliminálandó elmozdulásokat a szerkezet legkisebb dinamikus rugalmassággal bíró területeiről választani.

## 2.2 Nemlineáris szabadságfokredukció [1]

A redukciónak ez a módja csak matematikai értelemben csökkenti a foksámot, azaz az egyenletekben explicit szerepeltetett szabadságfokok száma kisebb, mint  $n$ . Ennél a módszernél az eredeti modellhez nem rendelünk hozzá egy újabb, fizikailag is csökkentett foksámú modellt, mint azt az előző pontban tettük. Jelen eljárással egy nemlineáris sajátérték feladatot kapunk. Megoldása nagyobb időigénnyel jár, de a pontosság növelésének nincs elvi akadálya, ellentétben az előzőekben bemutatott eljárással. Egy, a későbbiekben részletezendő nemkívánatos mellékhatás azonban itt is fellép.

A módszer részletesebb bemutatása céljából induljunk ki ismét az (1) összefüggésből. Átrendezés, és az

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (12)$$

jelölés bevezetése után írható, hogy

$$\mathbf{S}\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

ahol  $\mathbf{S}$  a szerkezet teljes dinamikai merevségmátrixa. Az eliminálandó elmozdulásokat most is a  $v$   $m$ -edrendű oszlop mátrixba, a megmaradókat az  $n$ -edrendű  $u$ -ba gyűjtve, alkalmas sor-, ill. oszlop cserék után a (13) egyenlet az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (14)$$

alakban írható. Részletezve:

$$\mathbf{S}_{11}\mathbf{u} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{S}_{21}\mathbf{u} + \mathbf{S}_{22}\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (15b)$$

Ha  $\det \mathbf{S}_{22} \neq 0$ , a (15b) egyenletből  $\mathbf{v}$ -t kifejezve, és (15a)-ba helyettesítve:

$$(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21}) \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Az

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21} \quad (16)$$

jelöléssel

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (17)$$

redukált feladatot kapjuk, ahol  $\bar{\mathbf{S}}$  a rendszer redukált dinamikai merevségmátrixa. A rendszám  $n$  helyett már csak  $n-m$ .

(16)-ból nyilvánvaló, hogy  $\bar{\mathbf{S}}$  elemei a rendszer  $\omega^2$  sajátkörfrekvenciájának többé már nem lineáris függvényei, hanem  $\omega^2$  polinómjainak hányadosai. Ha  $n, m \rightarrow \infty$ , egyes esetekben  $\bar{\mathbf{S}}$  elemei  $\omega^2$ -nek trigonometrikus és hiperbolikus függvényeiként fejezhetők ki [7].

A számítások során  $\bar{\mathbf{S}}$  előállítása a (16)-ban levő invertálás miatt csak számszerű  $\omega$  értéknél lehetséges. Ez egyben leszűkíti az alkalmazható számolási algoritmusok körét is.

A (17) egyenlet kétféleképp teljesülhet:

$$\det \bar{\mathbf{S}} = 0, \quad (18a)$$

vagy

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (18b)$$

A redukált feladatnál a (18b) összefüggés is lehet értelmes, hiszen a (17) egyenlet az eredeti rendszernek már csak  $n-m$  szabadságfokát tartalmazza, és így (18b) fennállása esetén is létezhetik rezgés. Ezek a sajátfrekvenciák — ha ilyenek léteznek — és a hozzájuk tartozó rezgéseképek is a (15) egyenletek felhasználásával számíthatók ki. Így tehát a rendszer teljes dinamikai merevségmátrixának ismeretére van szükség.

A (15b) egyenlet alapján egyébként belátható, hogy  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  esetén — a  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  triviális esetet kizárva —  $\bar{\mathbf{S}}$  nincs értelmezve, a  $\det \bar{\mathbf{S}}$  frekvencia függvény ezen a helyen szinguláris. A (18b) egyenletet kielégítő sajátkörfrekvenciák tehát csak a (18a)-ból nem számíthatók ki.

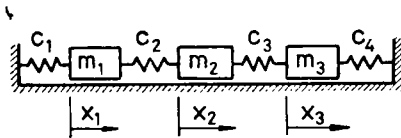
Sok esetben eleve csak a redukált feladat felírására van módunk, így frekvenciaegyenletként csak a (18a) összefüggés áll rendelkezésre. Az e pontban tárgyalt szabadságfokredukciónak viszont van egy speciális következmé-

nye: a (18a) frekvenciaegyenletből nem mindig számítható ki az összes sajátfrekvencia, a frekvenciahalmazban „lyukak” maradhatnak. Amint a következő pontban bemutatásra kerülő egyszerű számpélda is illusztrálja, ez a jelenség akkor következik be, ha a rendszernek létezik olyan sajátkörfrekvenciája, amely egyben sajátkörfrekvenciája valamely részrendszernek (vagy részrendszereknek) is környezetéhez való kapcsolódási pontjait rögzítettnek gondolva. Azt várhatnánk, hogy ezeket a sajátkörfrekvenciákat a (18b) egyenlet felhasználásával ki tudjuk számítani. A legtöbb esetben viszont ez is csak a triviális megoldást adja, azaz  $u = 0$ -hoz  $v = 0$ . Ily módon csak azok a sajátfrekvenciák számíthatók ki — a (15) egyenletek ismeretében —, melyekkel való rezgésnél  $u = 0$ , de  $v \neq 0$ .

Diszkrét modellnél annak eldöntése, hogy vajon a számítás során nem maradtak-e ki sajátfrekvenciák, viszonylag könnyű. A sajátfrekvenciák számának, figyelembe véve a multiplicitásokat is, meg kell egyezni az eredeti feladat szabadságfokával. Kontinuumok esetén ez már bonyolultabb kérdés.

### 2.3 Számpélda

Az 1. ábrán ábrázolt egyszerű láncszerű rezgőrendszer segítségével kívánjuk illusztrálni a 2.1 és 2.2 pontokban részletezett redukciós módszereket. A rezgőrendszer tömeg- és rugójellemzőit úgy választottuk meg, hogy a példa alkalmas legyen az eljárások vázolt hiányosságainak szemléltetésére is.



$$\begin{array}{ll}
 m_1 = 3 & \text{kps}^2 \text{ m}^{-1} & c_1 = 1 \cdot 10^{-2} & \text{mkp}^{-1} \\
 m_2 = 2 & \text{kps}^2 \text{ m}^{-1} & c_2 = 0,5 \cdot 10^{-2} & \text{mkp}^{-1} \\
 m_3 = 1,5 & \text{kps}^2 \text{ m}^{-1} & c_3 = 2 \cdot 10^{-2} & \text{mkp}^{-1} \\
 & & c_4 = 1 \cdot 10^{-2} & \text{mkp}^{-1}
 \end{array}$$

1. ábra

A három szabadságfokkal rendelkező rendszer teljes rugó- és tömegmátrixai:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} & -\frac{1}{c_2} & 0 \\ -\frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} & -\frac{1}{c_3} \\ 0 & -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Az 1. ábrán közölt szám adatokkal a rendszer sajátkörfrekvenciái:  $\omega_1 = 5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$  és  $\omega_3 = 10 \sqrt{2} \text{ s}^{-1}$ . A továbbiakban a második sajátkörfrekvencia különleges jelentőséggel bír, mert a hozzá tartozó sajátvektor:  $s_2^* = [1 \ 0 \ -2]$ , azaz a 2. tömeg nyugalomban van.

Alkalmazzuk először a 2.1 pontban bemutatott lineáris szabadságfok-redukciót. Más és más változót eliminálva rendre meghatározzuk a (7) és (8) redukált rugó-, ill. tömegmátrixokat, előállítjuk és megoldjuk a (9) redukált sajátértékfeladatot és a (11) belső sajátértékfeladatot. A részletek elhagyásával eredményeinket az 1. táblázatban foglaltuk össze.

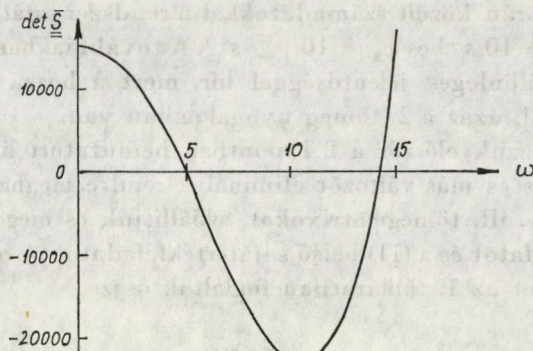
I. táblázat

Eliminált változó sorszáma	Belső feladat 1. sajátértéke, $\mu_1$	Redukált feladat sajátértékei, $\bar{\omega}$	A közelítés jósága, %
1	10	5,2963 (10,3416)	6 —
2	11,1803	5,1988 10,0000	4 0
3	10	5,0305 (13,5051)	0,6 —
1 és 3	10	5,3452	7

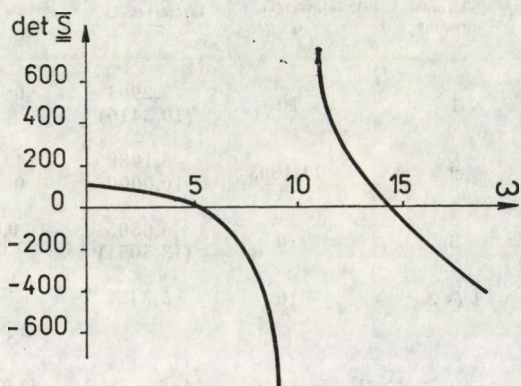
A táblázatban a zárójelbe tett 2. sajátértékek a (10) szerinti korlátok túllépése miatt nem fogadhatók el közelítő értékeként. Látható, hogy 2. változó eliminációja során a 2. sajátérték pontosan kiszámítható, hiszen a hozzá tartozó rezgésalakban a 2. tömeg rezgési amplitúdója nulla, így a redukció a rendszer kinetikus energiáját érintetlenül hagyja, míg más esetekben mindig megváltoztatja.

Ha a 2.2 pontban vázolt nemlineáris szabadságfokredukcióval dolgozunk, a (19) C és M mátrixaiból előállítjuk a rendszer teljes dinamikai merevségmátrixát, majd változó-eliminációt hajtunk végre. Először az első tömeghez tartozó rezgésamplitúdót küszöböljük ki. A (18a) alatti frekvenciafüggvényt ábrázoltuk a 2. ábrán. További szabadságfokredukcióval a 3. tömeg rezgésamplitúdóját is kiejtve, a 3. ábrán rajzolt frekvenciafüggvényhez jutunk.

Az ábrákból is kitűnik, hogy a nemlineáris szabadságfokredukcióval előállított frekvenciaegyenlet gyökei értékre nézve pontosan megadják az eredeti feladat sajátértékeit, de a frekvenciahalmazban lyukak maradhatnak. Jelen feladatnál az  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$  sajátkörfrekvenciát a (18a) szerinti összefüggésből nem lehet kiszámítani, a (18b) alapján is csak a 3. ábra esetében (lásd bővebben [1]).



2. ábra



3. ábra

### 3. Kontinuum modellek

Összetett rendszerek rezgésanalízisének egy lehetséges elvi módja a következő (1. pl. [8]-ban a 3. és 4. pont). A végtelen szabadságfokú szerkezetet csomópontok felvételével olyan részrendszerekre bontjuk, melyek szabad vagy gerjesztett rezgését leíró mezőfüggvényei ismertek. A részrendszereknek a szerkezet csomópontjaihoz kapcsolódó pontjait póluspontoknak nevezzük. A mezőfüggvények segítségével,  $\omega$  körfrekvenciájú rezgést feltételezve minden egyes részrendszerre előállíthatók a póluspontok  $s_i$  elmozdulásvektorai és a póluspontokra ható — a részrendszer szempontjából külsőnek minősülő —  $q_i$  erőhatásvektorok. Ezek a vektoregyenletek a rezgés paraméteres egyenletrendszerét alkotják, ahol a paraméter a mezőfüggvények tetszőleges konstansait tartalmazó vektor. A paramétereket kiküszöbölve az egyenletekből közvetlen összefüggést nyerünk a póluspontokra ható külső erőhatások és e pontok elmozdulásai közt. Ez a lépés viszont a 2.2 pontban ismertetett nemlineáris



szabadságfokredukciót jelent, hiszen az egyenletekben a továbbiakban szerepeltetett szabadságfok a póluspontok véges szabadságfokainak összegével egyenlő. A fentiek eredményeként nyert összefüggés:

$$\bar{S}_i s_i = q_i, \quad (20)$$

ahol  $\bar{S}_i$  az  $i$ -edik részrendszer redukált dinamikai merevségmátrixa. Megjegyezzük, hogy közvetlen fizikai megfontolások alapján rögtön az  $\bar{S}_i$ -t írjuk fel, így eleve a redukált dinamikai merevségmátrixból indulunk ki.

E módszer során az  $\bar{S}_i$ -ből építjük fel az egész szerkezet  $\bar{S}$  redukált dinamikai merevségmátrixát, így a számítás során a frekvenciahalmaz mindazon eleme kimarad, mely sajátfrekvenciája valamely részrendszernek, ha mereven megfogott pólusokkal rezeg.

Annak a kérdésnek az eldöntésére, hogy vajon valamely  $\omega^*$  frekvencia alatt nem maradt-e ki sajátfrekvencia, WITTRICK és WILLIAMS [7] egy számítási algoritmust közöl.

A fenti hiányosságok elkerülése miatt célszerűbb olyan módszert választani, amely nem alkalmaz szabadságfokredukciót, így a kimaradó sajátfrekvencia elvileg kizárt. (1. pl. [8] 5. pont).

#### IRODALOM

1. CZEGLÉDI, GY.: Einige Bemerkungen zur Freiheitsgradreduktion von linear-elastischen mechanischen Modellen, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* 19 (1975), 257—266
2. HURTY, W. C.: Dynamic Analysis of Structural Systems using Component Modes, *AIAA Journal* 3 (1965), 678—685
3. CRAIG, R. R.—BAMPTON, M. C. C.: Coupling of Structures for Dynamic Analysis, *AIAA Journal* 6 (1968), 1313—1319
4. GERADIN, M.: Analyse dynamique de structures complexes par combinaison linéaire de modes statiques, Université de Liège, Rapport VF-5, LTAS (1969)
5. ANDERSON, R. G.—IRONS, B. M.—ZIENKIEWICZ, O. C.: Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, *Int. Journal of Solids and Structures* 4 (1968), 1031—1055
6. GERADIN, M.: Error Bounds for Eigenvalue Analysis by Elimination of Variables, *Journal of Sound and Vibration* 19 (1971), 111—132
7. WITTRICK, W. H.—WILLIAMS, F. W.: A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures, *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, XXIV (1971), 263—284
8. CZEGLÉDI, GY.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen von Stabwerken, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* 18 (1974), 191—202

**Degree of freedom reduction and its consequences in the analysis of linearly elastic structures.** In the dynamic analysis of linearly elastic structures the degree of freedom of the calculation model may be reduced by purely mathematical means. Two methods are introduced for the degree of freedom reduction of finite degree of freedom models, completed with a comparison of their advantages and disadvantages. The characteristics thus explained are illustrated by a simple numerical example. Finally, an undesirable consequence of the degree of freedom reduction is pointed out in the case of continuous models.

**Reduktion der Freiheitsgrade und ihre Folgen in der Analyse der linear elastischen Konstruktionen.** In der dynamischen Analyse linear elastischer Konstruktionen ist es möglich mit rein mathematischen Mitteln den Freiheitsgrad des Rechnungsmodells zu vermindern. Die Abhandlung vermittelt zwei Verfahren zur Reduktion des Freiheitsgrades von Modellen mit endlichen Freiheitsgraden, vergleicht sie und analysiert ihre Vor- und Nachteile. Ihre angeführten Eigenschaften sind an einem einfachen Rechenbeispiel dargestellt. Schließlich weist die Abhandlung auf eine unerwünschte Folge der Verminderung der Freiheitsgrade im Falle von Kontinuummodellen hin.

**Редукция степени свободы и её последствия в анализе линейно-упругих конструкций.** При динамическом анализе линейно-упругих конструкций степень свободы модели применяемой для расчёта можно редуцировать — только и математически. Статья показывает два метода для редукации степени свободы, у моделей с конечной степенью свободы, сравнивая их, анализирует их преимущества и недостатки. Показанные свойства автор поясняет с помощью простого предмета. В конце концов статья останавливается на одном невыгодном последствии редукации степени свободы у непрерывных моделей.