

# HAJLÍTOTT VASBETON RÚDELEM NEMLINEÁRIS SZÁMÍTÁSA KOLLOKÁCIÓS MÓDSZERREL

DRASKÓCZY ANDRÁS\*

A tanulmány hajlított vasbeton rúdelem nemlineáris közelítő számítására tesz javaslatot. Az eljárás a meggörbült rúdtengelyt hetedfokú polinommal közelíti. A nyomatékok és görbületek egymásnak való megfelelést — bilineárisnak tekintett összefüggés alapján — a rúdtengely négy pontjában írja elő és két pontban a nyomaték- és görbületfüggvény első deriváltját is egyezteti. Az adott rúdvégi elmozdulásoknak megfelelő befogási nyomatékok kétismeretlenes egyenletrendszerből számíthatók. A javasolt eljárás az irodalomból ismert numerikus iteratív közelítő módszerekbe beillesztve, azok hatékonyságát tovább növelheti.

## 1. Bevezetés

Az utóbbi években számos kutatóhelyen foglalkoznak a vasbeton szerkezetek nemlineáris viselkedését jól követő számítási módszerek kidolgozásával. A probléma vasbetonelméleti és számítástechnikai kérdéseket vet fel. Jelen tanulmány elsősorban számítástechnikai vonatkozású.

## 2. A „kezdeti feszültségek” módszere

A nemlineáris viselkedés követésére alkalmas egyik iteratív numerikus módszer az ún. „kezdeti feszültségek” módszere (initial stress method).\*\*

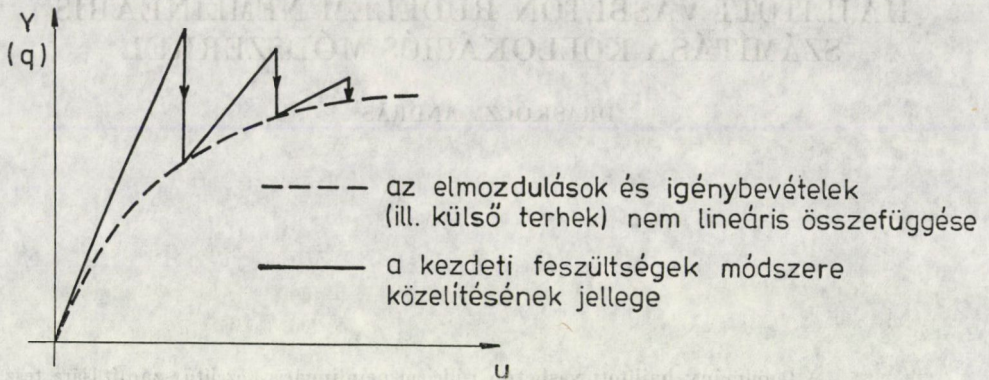
E közelítő módszer lényege, hogy a szerkezet elmozdulásait minden iterációs ciklusban a kezdeti merevségi viszonyokból és a korábbi ciklusok során még ki nem egyensúlyozott terhekből határozzuk meg.

Az elmozdulások és igénybevételek, illetve az elmozdulások és a külső terhek nemlineáris összefüggését a számítás során az 1. ábrán látható séma szerint közelítjük.

A módszer igen jelentős számítástechnikai előnye, hogy elkerülhetővé teszi a változó merevségek lépésenkénti újraszámítását. A szerkezet alakválto-

\* Draskóczy András, 1092 Budapest, Erdő u. 80.

\*\* A módszer angol elnevezése kezdeti feszültségként tulajdonképpen azokat a belsőerőket jelöli meg, amelyek az  $n$ -edik lépésben lineárisan számított belsőerők és az  $u_n$  elmozdulásoknak megfelelő tényleges belsőerők közötti különbségnek felelnek meg.



1. ábra

zási egyenletrendszerének együtthatómátrixát ezáltal csak egyszer kell felállítani és invertálni, ami jelentős gépidő-megtakarítást eredményez, és így a gyakorlati alkalmazhatóság realisabbá válik.

A „kezdeti feszültségek” módszerének alkalmazása során minden iterációs ciklusban meg kell határozni, hogy a szerkezet az adott elmozdulási állapotban milyen külső terheket képes egyensúlyozni. (Ez a lépés jelenti a lineáris számítás iterációs ciklusonkénti korrekcióját: az 1. ábrán nyíllal jelölt szakaszok.) Az egyensúlyozott külső terheket az adott elmozdulási állapotban a szerkezetben működő igénybevételekből határozhatjuk meg.

### 3. A tanulmány tárgya, közelítő feltevések

A tanulmány síkbeli vasbeton keretszerkezetek hajlított rúdelemeiben adott rúdvégi elmozdulások mellett ébredő igénybevételek számítástechnikailag kedvező közelítő számítását tárgyalja. A javasolt módszerrel az elemi merevségi mátrixok ciklusonkénti újraszámítása kiküszöbölhető: a rúdvégi nyomtatók egy — max. nyolc kombinációban megoldandó — kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával számíthatók.

A számítás során az alábbi közelítő feltételezéseket fogadjuk el:

1. A derékerő hatását elhanyagoljuk;
2. A sík keresztmetszetek törvényét érvényesnek tekintjük.
3. A nyomtatók és görbületek közötti összefüggést bilineáris függvényre közelítjük, amelynek töréspontja az acélbetétek megfolyásához, második szakaszának végpontja pedig a beton törési összenyomódásának eléréséhez tartozik. (Ezzel egyúttal a keresztmetszetek alulvasalt voltát is feltételezzük.)
4. A 3. ponttal összhangban a beton húzószilárdságát elhanyagoljuk. (A nyomtató-görbület összefüggést egyébként csak trilineáris függvényre közelíthetnénk.)

5. Feltesszük, hogy a rúdvégi igénybevételek jó közelítő értékét kapjuk, ha

a) a nyomatékokat és görbületeket a rúdtengely négy pontjában — a két rúdvégen és két belső pontban — a bilineáris nyomaték-görbület összefüggés értelmében egyeztetjük, és

b) a rúdvégeken a görbületfüggvény első deriváltját is előírjuk a

$$\kappa'(x) = m_i \cdot M'(x) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

összefüggés értelmében, ahol  $m$  a hajlékonyságot jelenti. (Korábbi numerikus vizsgálatok azt mutatták, hogy a nyomatékok és görbületek négy pontban való egyeztetése lineáris esetben jó közelítést eredményez, a folyási jelenség követésére azonban ez önmagában nem elegendő.)

6. Az 5. ponttal összhangban a rúdtengely alakját leíró, folytonosnak feltételezett alakváltozási függvényt hetedfokú polinomnak választjuk. Ugyanis a hat kollokációs egyenlet és a négy alakváltozási peremfeltétel tíz független ismeretlen meghatározására elegendő, és mivel a feladat statikailag kétszeresen határozatlan, az alakváltozási függvénynek nyolc ismeretlen paramétere lehet.

Megjegyzendő, hogy másodfokú nyomatékfüggvény és bilineáris nyomaték-görbület összefüggés mellett, az alakváltozott rúdtengely negyedfokú — egymáshoz érintőlegesen csatlakozó — parabolaszakaszokból áll.

A számítási algoritmus emellett arra a speciális esetre vonatkozik, amikor is a rúdtengely mentén egyenletesen megoszló teher működik. Ez a feltevés azonban nem érinti a módszer lényegét és a gyakorlati alkalmazás során általában helytálló.

#### 4. A kollokációs módszer alkalmazása

##### 4.1 A rúdelem viselkedését leíró egyenletek

— A nyomatékfüggvényt a két ismeretlen rúdvégi nyomatékkal adjuk meg, egyenletesen megoszló terhelés esetére:

$$M(x) = M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_B \frac{x}{l} - 0,5qx(l-x)$$

— A nyomatékok és görbületek közötti összefüggést leíró bilineáris függvény:

$$\kappa(x) = m_i M(x) + k_i \quad i = 1, 2, 3, 4$$

—  $i = 1, 3$ : berepedt rugalmas állapot:  $|M| \leq |M_{Hr}^a|$

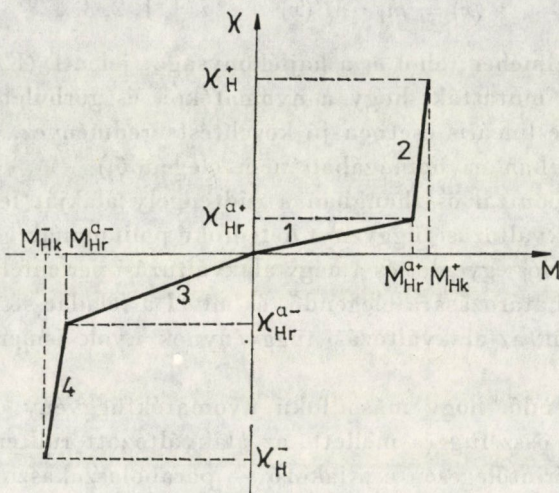
$$m_3 = \frac{\kappa_{Hr}^{a-}}{M_{Hr}^{a-}}; \quad k_3 = 0; \quad m_1 = \frac{\kappa_{Hr}^{a+}}{M_{Hr}^{a+}}; \quad k_1 = 0$$



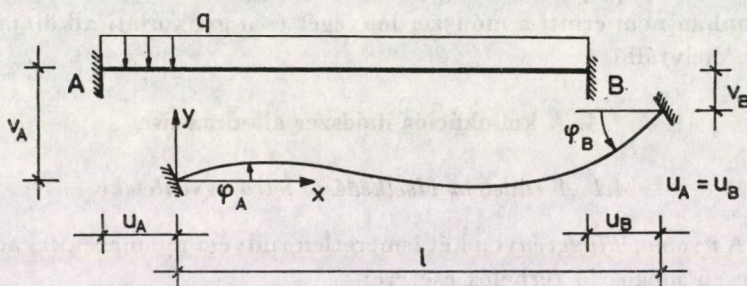
—  $i = 2, 4$ : berepedt képlékeny állapot:  $|M_{Hr}^a| < |M| \leq |M_{Hk}|$

$$m_4 = \frac{\varkappa_{Hr}^- - \varkappa_{Hr}^{a-}}{M_{Hk}^- - M_{Hr}^{a-}}; \quad k_4 = \varkappa_{Hr}^{a-} - M_{Hr}^{a-} \frac{\varkappa_{Hr}^- - \varkappa_{Hr}^{a-}}{M_{Hk}^- - M_{Hr}^{a-}};$$

$$m_2 = \frac{\varkappa_{Hr}^+ - \varkappa_{Hr}^{a+}}{M_{Hk}^+ - M_{Hr}^{a+}}; \quad k_2 = \varkappa_{Hr}^{a+} - M_{Hr}^{a+} \frac{\varkappa_{Hr}^+ - \varkappa_{Hr}^{a+}}{M_{Hk}^+ - M_{Hr}^{a+}}.$$



2. ábra



3. ábra

— Az alakváltozásokat közelítő függvényt egy olyan derékszögű  $(x, y)$  koordináta rendszerben adjuk meg, amelynek kezdőpontja az alakváltozott rúdtengely halvégével ( $A$ ) egybeesik és  $x$  tengelyének iránya a rúd kezdeti — egyenes — tengelyvonalával párhuzamos:

$$y(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h.$$

Ismeretlenek az alakváltozási függvény paraméterei és a két rúdvégi nyomaték (összesen 10 érték).

#### 4.2. Feltételi egyenletek

Az ismeretlenek meghatározására a következő feltételi egyenleteket írhatjuk fel:

Peremfeltételek:

1.  $y(x = 0) = 0$
2.  $y'(x = 0) = \varphi_A$
3.  $y(x = l) = v_B - v_A$
4.  $y'(x = l) = \varphi_B$

Kollokációs egyenletek:

5.  $y''(x = 0) = \kappa_A = m_i^A M_A + k_i^A \quad (i = 1, 2, 3, 4)$
6.  $y'''(x = 0) = \kappa'_A = m_i^A M'_A = m_i^A \frac{M_B - M_A - 0,5ql^2}{l} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$
7.  $y''(x = \alpha l) = \kappa(x = \alpha l) = m_i^\alpha M_\alpha + k_i^\alpha \quad (i = 1, 2, 3, 4)$
8.  $y''(x = \beta l) = \kappa(x = \beta l) = m_i^\beta M_\beta + k_i^\beta \quad (i = 1, 2, 3, 4)$
9.  $y''(x = l) = \kappa_B = m_i^B M_B + k_i^B \quad (i = 1, 2, 3, 4)$
10.  $y'''(x = l) = \kappa'_B = m_i^B \frac{M_B - M_A + 0,5ql^2}{l} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

#### 4.3 A megoldás lépései

Az 1–10. feltételi egyenletek célszerűen három csoportba sorolhatók:

a) az  $x = 0$  helyre vonatkozó egyenletekből az alakváltozási függvény  $e, f, g, h$  paramétereit az ismeretlen rúdvégi nyomatékok függvényében közvetlenül számíthatjuk.

b) az  $x = l$  helyre vonatkozó egyenletekből az alakváltozási egyenlet további ismeretlen paraméterei — ugyancsak a rúdvégi nyomatékok függvényében — meghatározhatók. A paraméterekre vonatkozóan ezek az egyenletek egy lineáris egyenletrendszert alkotnak.

c) ha végül az  $x = \alpha l$  és  $x = \beta l$  helyre vonatkozó egyenletekbe behelyettesítjük az alakváltozási függvény előzőek során meghatározott paramétereit, az ismeretlen rúdvégi nyomatékokra egy kétismeretlenes egyenletrendszert nyerünk.

a) A balvégre vonatkozó feltételi egyenletek:

1.  $y(x = 0) = h = 0,$
2.  $y'(x = 0) = g = \varphi_A$

$$5. y''(x=0) = 2f = m_i^A M_A + k_i^A \cdot$$

$$f = \frac{m_i^A M_A + k_i^A}{2},$$

$$6. y'''(x=0) = 6e = m_i^A \frac{M_B - M_A - 0,5 ql^2}{l},$$

$$e = m_i^A \frac{M_B - M_A - 0,5 ql^2}{6l}.$$

b) A jobbvégre vonatkozó feltételi egyenletek:

$$3. y(x=l) = al^7 + bl^6 + cl^5 + dl^4 + el^3 + fl^2 + gl = v_B - v_A,$$

$$4. y'(x=l) = 7al^6 + 6bl^5 + 5cl^4 + 4dl^3 + 3el^2 + 2fl + g = \varphi_B,$$

$$9. y''(x=l) = 42al^5 + 30bl^4 + 20cl^3 + 12dl^2 + 6el + 2f = m_i^B M_B + k_i^B,$$

$$10. y'''(x=l) = 210al^4 + 120bl^3 + 60cl^2 + 24dl + 6e =$$

$$= m_i^B \cdot \frac{M_B - M_A + 0,5 ql^2}{l}.$$

A fenti egyenletek az  $a, b, c, d$  ismeretlenekre nézve lineáris egyenletrendszert alkotnak.

Mátrixalakban:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j},$$

$$\text{ahol} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} l^7 & l^6 & l^5 & l^4 \\ 7l^6 & 6l^5 & 5l^4 & 4l^3 \\ 42l^5 & 30l^4 & 20l^3 & 12l^2 \\ 210l^4 & 120l^3 & 60l^2 & 24l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^* = [a, b, c, d]$$

és  $g = \varphi_A$  helyettesítéssel, valamint a

$$\Delta v = v_B - v_A - \varphi_A l,$$

$$\Delta \varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

jelölések bevezetésével ( $\Delta v$  és  $\Delta \varphi$  a rúdvégek relatív elmozdulása és elfordulása):

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \Delta v - el^3 - fl^2 \\ \Delta \varphi - 3el^2 - 2fl \\ m_i^B M_B + k_i^B - 6el - 2f \\ m_i^B \frac{M_B - M_A + 0,5 ql^2}{l} - 6e \end{bmatrix}$$

Célszerű a fenti egyenletrendszer megoldását analitikusan előállítani, hogy információkat szerezhessünk a rúdvégi nyomatékokra — ezen eredmények birtokában — felírható kétismeretlenes egyenletrendszerrel.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$k = \begin{bmatrix} -20l^{-7}\Delta v + 10l^{-6}\Delta\varphi + el^{-4} + 4fl^{-5} - 2l^{-5}(m_i^B M_B + k_i^B) + \\ \quad + l^{-5}m_i^B(M_B - M_A + 0,5ql^2) \\ 70l^{-6}\Delta v - 34l^{-5}\Delta\varphi - 4el^{-3} - 15fl^{-4} + 6,5l^{-4}(M_i^B m_B + k_i^B) - \\ \quad - l^{-4}m_i^B(M_B - M_A + 0,5ql^2) \\ -84l^{-5}\Delta v + 39l^{-4}\Delta\varphi + 6el^{-2} + 20fl^{-3} - 7l^{-3}(m_i^B M_B + k_i^B) + \\ \quad + l^{-3}m_i^B(M_B - M_A + 0,5ql^2) \\ 35l^{-4}\Delta v - 15l^{-3}\Delta\varphi - 4el^{-1} - 10fl^{-2} + 2,5l^{-2}(m_i^B M_B + k_i^B) + \\ \quad + l^{-2}m_i^B(M_B - M_A + 0,5ql^2) \end{bmatrix}.$$

Helyettesítsük be ezeket az értékeket a 7. és 8. egyenletbe. (A két egyenlet nagyfokú hasonlósága miatt a részletes behelyettesítést csak a 7. egyenlettel végezzük el, és az egyszerűbb írásmód érdekében egyúttal

$$m_i^B M_B + k_i^B = \kappa_B \\ m_i^B \cdot \frac{M_B - M_A + 0,5ql^2}{l} = \kappa'_B$$

helyettesítéseket is végzünk.)

$$\begin{aligned} & -840\alpha^5 \frac{\Delta v}{l^2} + 420\alpha^5 \frac{\Delta\varphi}{l} + 42\alpha^5 el + 168\alpha^5 f - 84\alpha^5 \kappa_B + 7\alpha^5 l\kappa'_B + \\ & + 2100\alpha^4 \frac{\Delta v}{l^2} - 1020\alpha^4 \frac{\Delta\varphi}{l} - 120\alpha^4 el - 450\alpha^4 + 195\alpha^4 \kappa_B - 15\alpha^4 l\kappa'_B - \\ & - 1680\alpha^3 \frac{\Delta v}{l^2} + 780\alpha^3 \frac{\Delta\varphi}{l} + 120\alpha^3 el + 400\alpha^3 f - 140\alpha^3 \kappa_B + 10\alpha^3 l\kappa'_B + \\ & + 420\alpha^2 \frac{\Delta v}{l^2} - 180\alpha^2 \frac{\Delta\varphi}{l} - 48\alpha^2 el - 120\alpha^2 f + 30\alpha^2 \kappa_B - 2\alpha^2 l\kappa'_B + \\ & \quad + 6\alpha el + 2f = \\ & = m_i^2 [M_A(1 - \alpha) + M_B \alpha + 0,5ql^2(\alpha^2 - \alpha)] + k_i^2. \end{aligned} \quad (7')$$

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -840\alpha^5 + 2100\alpha^4 - 1680\alpha^3 + 420\alpha^2, \\ \alpha_2 &= 420\alpha^5 - 1020\alpha^4 + 780\alpha^3 - 180\alpha^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= 7\alpha^5 - 20\alpha^4 + 20\alpha^3 - 8\alpha^2 + \alpha, \\
\alpha_4 &= 84\alpha^5 - 225\alpha^4 + 200\alpha^3 - 60\alpha^2 + 1, \\
\alpha_5 &= -84\alpha^5 + 195\alpha^4 - 140\alpha^3 + 30\alpha^2 \\
\alpha_6 &= 7\alpha^5 - 15\alpha^4 + 10\alpha^3 - 2\alpha^2, \\
\alpha_7 &= 1 - \alpha, \\
\alpha_8 &= \alpha^2 - \alpha,
\end{aligned}$$

és behelyettesítve az  $e$  és  $f$  paraméterek értékét, valamint a  $\kappa_B$ ,  $\kappa_B$  kifejezéseket; rendezés után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&M_A(-\alpha_3 m_i^A + \alpha_4 m_i^A - \alpha_6 m_i^B - \alpha_7 m_i^z) + \quad (7'') \\
&+ M_B(\alpha_3 m_i^A + \alpha_5 m_i^B + \alpha_6 m_i^B - \alpha m_i^z) = \\
&= -\alpha_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \alpha_2 \frac{\Delta \varphi}{l} - \alpha_4 k_i^A - \alpha_5 k_i^B + 0,5 ql^2(\alpha_3 m_i^A - \alpha_6 m_i^B + \alpha_8 m_i^z) + k_i^z.
\end{aligned}$$

A 8. egyenlet ehhez hasonlóan:

$$\begin{aligned}
&M_A(-\beta_3 m_i^A + \beta_4 m_i^A - \beta_6 m_i^B - \beta_7 m_i^z) + \quad (8'') \\
&+ M_B(\beta_3 m_i^A + \beta_5 m_i^B + \beta_6 m_i^B - \beta m_i^z) = \\
&= -\beta_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \beta_2 \frac{\Delta \varphi}{l} - \beta_4 k_i^A - \beta_5 k_i^B + \\
&+ 0,5 ql^2(\beta_3 m_i^A - \beta_6 m_i^B + \beta_8 m_i^z) + k_i^z,
\end{aligned}$$

ahol  $\beta_{1-8}$   $\beta$ -től függő,  $\alpha_{1-8}$ -cal egyező alakú és együtthatójú kifejezéseket jelentenek.

#### 4.4 A rúdelem várható viselkedéséből következő egyszerűsítési lehetőségek

A fenti kétismeretlenes egyenletrendszer elvileg  $4^4 = 256$  kombinációban kellene megoldani a kollokált keresztmetszetek egymástól független különböző lehetséges állapotának megfelelően. A kollokációs pontok helyére vonatkozóan azonban gyakorlati megfontolások alapján elfogadhatjuk a következő feltevéseket:

1. A rúdvégeken a nyomaték előjele negatív: a negatív nyomatéokra érvényes nyomaték-görbület összefüggést használhatjuk (3. és 4. szakasz a 2. ábrán).

Feltehető ugyanis, hogy a gyakorlati esetek túlnyomó részében a csomóponti elmozdulásokból ébredő nyomatékok abszolút értékben kisebbek a terhelésből keletkező nyomatékoknál:

$$|M_A^{v\varphi}| \leq |M_A^q|; \quad |M_B^{v\varphi}| \leq |M_B^q|.$$



2. Az  $x = \alpha l$  koordinátájú keresztmetszet nyomatéka negatív előjelű és az acélbetétek megfolyása ebben a keresztmetszetben nem következik be.  $\alpha$  értékének megfelelő felvételével ez a feltétel biztosítható.

3. Az  $x = \beta l$  koordinátájú keresztmetszetben a nyomaték előjele pozitív és itt az acélbetétek megfolyását is megengedjük (1. és 2. szakasz a 2. ábrán).

Gyakorlati esetekben a négy pont közül háromban (a rúdvégeken és az  $x = \alpha l$  helyen) ugyanazt a nyomaték-görbület függvényt használhatjuk.

A fenti — a rúd várható viselkedését tükröző — korlátozások mellett az egyenletrendszert csak max. nyolc kombinációban kell megoldani. A helyes eredményt az a kombináció szolgáltatja, amelynél az egyes keresztmetszetek feltételezett állapota és az eredmény összhangban van.

Ha egyik kombináció sem ad jó eredményt és ezen a belső lokációs pontok helyének alkalmas változtatása sem segít, a rúd egyensúlya az adott teherbírási és alakváltozási korlátozó feltételek mellett nem biztosítható.

#### 4.5 Lineáris eset

Ha az acélbetétek megfolyása még egyik keresztmetszetben sem következik be, a (7'', 8'') egyenletrendszer egyszerűsödik, mivel:

$$k_3^A = k_3^s = k_1^s = k_3^B = 0,$$

$$\begin{aligned} & M_A(-\alpha_3 m_3^A + \alpha_4 m_3^A - \alpha_6 m_3^B - \alpha_7 m_3^s) + \\ & + M_B(\alpha_3 m_3^A + \alpha_5 m_3^B + \alpha_6 m_3^B - \alpha m_3^s) = \\ = & -\alpha_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \alpha_2 \frac{\Delta \varphi}{l} + 0,5ql^2(\alpha_3 m_3^A - \alpha_6 m_3^B + \alpha_8 m_3^s), \end{aligned} \quad (7''')$$

$$\begin{aligned} & M_A(-\beta_3 m_3^A + \beta_4 m_3^A - \beta_6 m_3^B - \beta_7 m_1^s) + \\ & + M_B(\beta_3 m_3^A + \beta_5 m_3^B + \beta_6 m_3^B - \beta m_1^s) = \\ = & -\beta_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \beta_2 \frac{\Delta \varphi}{l} + 0,5ql^2(\beta_3 m_3^A - \beta_6 m_3^B + \beta_8 m_1^s). \end{aligned} \quad (8''')$$

Ily módon  $M_A$ -ra és  $M_B$ -re olyan lineáris egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldása — állandó rúdkeresztmetszet esetében — kell hogy a lineáris rugalmasságtan ismert összefüggését adja.

Ha a rúdkeresztmetszet állandó

$$m_3^A = m_3^s = m_1^s = m_3^B = m.$$

„ $m$ ”-et kiemelve, majd mindkét egyenletet „ $m$ ”-mel elosztva:

$$M_A \alpha_9 + M_B \alpha_{10} = -\alpha_1 \frac{\Delta v}{ml^2} - \alpha_2 \frac{\Delta \varphi}{ml} + 0,5ql^2 \alpha_{11}, \quad (7^{IV})$$

$$M_A \beta_9 + M_B \beta_{10} = -\beta_1 \frac{\Delta V}{ml^2} - \beta_2 \frac{\Delta \varphi}{ml} + 0,5ql^2 \beta_{11}, \quad (8^{IV})$$

ahol

$$\alpha_9 = -\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_7 = 10\alpha^2(7\alpha^3 - 19\alpha^2 + 17\alpha - 5)$$

$$\alpha_{10} = \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha = 10\alpha^2(-7\alpha^3 + 16\alpha^2 - 11\alpha + 2)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_3 - \alpha_6 + \alpha_8 = 10\alpha^2(-0,5\alpha^2 + \alpha - 0,5)$$

( $\beta_{9-11}$  hasonlóan)

Egyszerűen belátható, hogy a ( $7^{IV}$ ,  $8^{IV}$ ) egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása, ha két kollokációs pont egybeesik ( $\alpha = 0$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0$ ;  $\beta = 1$ ;  $\alpha = \beta$ ).

Kimutatható, hogy az  $M_A$ ,  $M_B$  nyomatékok  $\alpha$  és  $\beta$  értékére nézve invariánsak és az egyenletrendszer megoldása a lineáris rugalmasságtan összefüggéseihez vezet:

$$M_A = 6 \frac{\Delta v}{ml^2} - 2 \frac{\Delta \varphi}{ml} + \frac{ql^2}{12},$$

$$M_B = -6 \frac{\Delta v}{ml^2} + 4 \frac{\Delta \varphi}{ml} + \frac{ql^2}{12}.$$

#### IRODALOM

1. Planning and Design of Tall Buildings. Volume III: Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings. (Proceedings of the International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1972.)
2. MONNIER, TH.: The Moment-Curvature Relation of Reinforced Concrete. *Heron*, 17 (1970), No. 2

**Nonlinear calculation of bent reinforced concrete bar elements by collocation.** A recommendation is submitted on a nonlinear approximative calculation of bent reinforced concrete bar elements. The bent bar axis is approximated by a seventh degree polynome. Correspondence of the moments and curvatures are specified at four points of the bar axis on the basis of a relation considered as bilinear, and at two points the first derivatives of the torque and curvature functions are also conformed. The clamping moments corresponding to the given bar end displacements can be calculated from an equation system of two unknowns. Fitted into the numerical iterative approach methods known from literature, the suggested technique might further increase their efficiency.

**Nichtlineare Berechnung eines biegebeanspruchten Stahlbeton-Stabelementes nach der Kollokationsmethode.** Der Aufsatz enthält einen Vorschlag für die nichtlineare Näherungsberechnung eines biegebeanspruchten Stahlbeton-Stabelementes. Im Verfahren wird die gekrümmte Stabachse mit einem Polynom siebenten Grades angenähert. Die einander zugeordneten Momente und Krümmungen müssen — auf Grund des als bilateral angenommenen Zusammenhanges — in vier Punkten der Stabachse und die ersten Derivate der Momenten- und Krümmungsfunktion in zwei Punkten übereinstimmen. Die den gegebenen Verschiebungen des Stabendes entsprechenden Einspannmomente können aus einem Gleichungssystem

mit zwei Unbekannten errechnet werden. Das vorgeschlagene Verfahren ist in die aus der Literatur bekannten numerischen, iterativen Näherungsverfahren eingereiht und kann die Wirksamkeit dieser weitersteigern.

**Нелинейный расчёт изогнутого сталебетонного стержня с коллокационным методом**

В статье предлагается приближенный метод на нелинейный расчёт на изгибе железобетонного стержня. Метод приближает загнутую ось стержня с полиномом седьмой степени; предписывает взаимно соответствие моментов и кривизней — на основе двулинейной связи — в четырех местах оси стержня и тоже согласовывает первую производную функции моментов и кривизней. Моменты закрепления подходящие заданным перемещениям на крае стержня могут вымыслить из системы уравнений с двумя неизвестными. Предложенный метод может увеличить эффективность различных итеративных приближенных методов известных из литературы.