RUGALMAS RÚDSZERKEZETEK ÁLLAPOTVÁLTOZÁSÁNAK PONTOS ELEMZÉSE

GÁSPÁR ZSOLT*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A rugalmas rúdszerkezetek állapotváltozásának meghatározását nagy elmozdulások esetén visszavezetjük egy nemlineáris egyenletrendszer megoldására. A nemlineáris egyenletrendszert a csomópontokra felírt egyensúlyi és a rudakra felírt kompatibilitási egyenletek alkotják. Egy-egy rúd alakját a rúdvégi igénybevételek ismeretében egy hat egyenletből álló differenciálegyenlet rendszerrel meghatározott kezdeti értékfeladat megoldásával kapjuk.

1. Bevezetés

A BME Építőmérnökkari Mechanika Tanszékén a „Rugalmas anyagú rúdszerkezetek és hálók statikai és stabilitási vizsgálata "című altéma keretében folyó kutatások főbb eredményeit a [6] tanulmány ismerteti.

Rugalmas rúdszerkezetek állapotjellemzőinek meghatározására [1] olyan módszert mutat be, amellyel ez tetszőleges pontossággal elérhető. A módszer lényege, hogy az egyensúlyi és kompatibilitási feltételeket nemlineáris egyenletrendszer formájában fogalmazza meg, és ebből deriválással kapja a [2]-ben ismertetettnek megfelelő állapotváltozási differenciálegyenlet rendszert. Egy ismert belső erőkkel terhelt rúd alakjának meghatározását [3], egy rúd érintő merevségi mátrixát [4] mutatja be részletesebben.

Ebben a dolgozatban röviden ismertetjük azokat a változásokat, amelyek a következő célok elérése érdekében történtek:

a) A módszer kiterjesztése olyan rúdszerkezetekre, melyeken a rudak keresztmetszeteinek súlypontja és nyírási középpontja nem feltétlenül esik egybe.

b) A rúd alakját meghatározó kezdeti érték feladat olyan megfogalmazása, hogy azt az eddigi 12 helyett egy 6 egyenletből álló differenciálegyenlet rendszer határozza meg.

c) Az állapotjellemzők oly módon való értelmezése, hogy konzervatív teher esetében minden fizikailag lehetséges állapotban az érintő merevségi mátrix szimmetrikus legyen.

* Dr. Gáspár Zsolt, 1025 Budapest, Kapy u. 40/b.

2. A rúd alakjának meghatározása

A vizsgált rúd általános esetben feszültségmentes állapotban is térgörbe tengelyű, változó keresztmetszetű, a csomópontokhoz excentrikusan kapcsolódik. Feltételezzük, hogy az anyag lineárisan rugalmas, a keresztmetszetek alaktartók és síkok maradnak, valamint a rudak csak végein terheltek.

A terheletlen rúd alakja jellemezhető a tengely mentén változó λ paraméter függvényében egy $\epsilon_0(\lambda)$ fajlagos eltolódás és egy $\gamma_0(\lambda)$ fajlagos elfordulásvektorral (l. [3]). A kinematikai teher, vagyis a nem feszültség miatt létrejövő deformáció is hasonlóképp jellemezhető $\epsilon_k(\lambda)$, $\gamma_k(\lambda)$. A fajlagos rugalmas deformációt az

$$\begin{bmatrix} \epsilon_e(\lambda) \\ \gamma_e(\lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_0(\lambda)\,\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{g}(\lambda))\,\mathbf{B}(\mathbf{v}(\lambda))\,\mathbf{s}$$

összefüggéssel számíthatjuk, ahol $\mathbf{s}$ a rúd végpontjának hat igénybevételét tartalmazó vektor, amit a $\mathbf{B}$ átviteli mátrix redukál a λ paraméterű pontra. Az antimetrikus $\mathbf{B}$ a λ paraméterű pont koordinátáit tartalmazza. A helyi igénybevételeket a $\tilde{\mathbf{T}}$ (két forgatómátrixból álló hiperdiagonál) mátrix transzformálja a lokális rendszerbe, amelynek tengelyei a főirányokba mutatnak. A forgatómátrixok a $\mathbf{g}$ elfordulásvektor függvényei, mely vektor a λ ponthoz tartozó lokális koordináta-rendszernek a végponti koordináta-rendszerbe való forgatását adja meg. (A $\mathbf{T}(\mathbf{g})$ kapcsolatot lásd [4] (2) képletében.)

Az $\mathbf{F}_0(\lambda)$ fajlagos hajlékonysági mátrix inverzét [3] (4) képlete mutatja. Jelöljük a keresztmetszet nyírási középpontjának a keresztmetszet lokális koordináta-rendszerében érvényes koordinátáit $\xi_{2S}(\lambda)$-val és $\xi_{3S}(\lambda)$-val. Ezeknek a zérustól való eltérése figyelembe vehető, ha az invertálás előtt a mátrix nyíróerőkhöz tartozó második és harmadik sorának $-\xi_{3S}(\lambda)$-szorosát, ill. $\xi_{2S}(\lambda)$-szorosát hozzáadjuk a csavarónyomatékhoz tartozó negyedik sorhoz.

A fajlagos eltolódásokat vissza kell forgatni a végponti koordináta-rendszerbe, hogy megkapjuk a koordináta-növekményeket. Az elfordulásvektoroknál azok nem additív volta miatt egy további transzformáció is szükséges:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(\lambda) \\ \dot{\mathbf{g}}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \\ & \mathbf{H}(\mathbf{g}(\lambda)) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{g}(\lambda)) \left(\begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_e \\ \gamma_e \end{bmatrix} \right), \tag{1}$$

ahol $\mathbf{E}$ harmadrendű egységmátrix és $\mathbf{H}$ elemei:

$$h_{ij} = \frac{g_i g_j(1-A)}{|\mathbf{g}|^2} + A\delta_{ij} - \frac{(-1)^{i+j}\,\mathrm{sign}\,(i-j)}{2|\mathbf{g}|}\, g_{6-i-j}$$

$$A = \frac{|\mathbf{g}|(1+\cos|\mathbf{g}|)}{2\sin|\mathbf{g}|}.$$

Az (1) differenciálegyenletrendszerhez a végponti excentrikus kapcsolatot jellemző $\mathbf{e}_b$ és $\mathbf{g}_b$ vektorok adják meg a kezdeti értéket. A kezdeti értékfeladatot megoldva, kapjuk a $\mathbf{v}(l)$ és $\mathbf{g}(l)$ vektorokat. Jelölje $\mathbf{e}_a$ és $\mathbf{g}_a$ a kezdőponti excentrikus kapcsolatokat jellemző vektorokat. Ekkor a

$$\mathbf{v}_w = -\mathbf{v}(l) - \mathbf{T}^*(\mathbf{g}(l))\,\mathbf{e}_a,$$
$$\mathbf{g}_w = -\mathcal{F}\left(\mathbf{T}\left(\mathbf{T}^*(\mathbf{g}(l)) \cdot \mathbf{g}_a\right) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{g}(l))\right) \tag{2}$$

vektorok megadják azokat a koordináta-transzformációkat, amelyek a kezdőponti W koordináta-rendszert a végponti V koordináta-rendszerbe viszik át. (Az $\mathcal{F}$ függvény értelmezését lásd [4] (24) képletében.)

3. Egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek

A feladat: egy adott $\mathbf{q}$ vektorral jellemzett csomóponti erőkből álló teher és az $\epsilon_k(\lambda)$, $\gamma_k(\lambda)$ függvényvektorokkal jellemzett kinematikai teher esetében keletkező állapotjellemzők meghatározása.

Legyen ismert az állapotjellemzők egy közelítése, vagyis a következő hipervektorok:

$\mathbf{x}$ melynek elemei a csomópontok helyvektorai,

$\mathbf{f}$ melynek elemei a csomóponti koordináta-rendszerek elfordulását megadó vektorok,

$\mathbf{s}$ melynek elemei a rudak végéhez definiált belső erők vektora.

Az egyensúlyhoz és kompatibilitáshoz $\mathbf{\Delta}$ eltolódás, $\boldsymbol{\varphi}$ elfordulás és $\boldsymbol{\sigma}$ belső erőnövekmény kell. Így a keresett állapotot az $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta}$ csomóponti koordináták, az $\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}$ belső erők, valamint az egyes csomóponti koordináta-rendszerek elfordulását az

$$\mathcal{F}(\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}_j)\,\mathbf{T}(\mathbf{f}_j))$$

összefüggéssel meghatározható forgásvektorok jellemzik. A j. csomópont egyensúlyát a

$$\sum_{(k1)} \mathbf{B}^*(\mathbf{\Delta}_{kb} - \mathbf{\Delta}_{ka})\,\mathbf{B}^*(\mathbf{x}_{kb} - \mathbf{x}_{ka})\,\tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{f}_{kb})\,\tilde{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{\varphi}_{kb})\,(\mathbf{s}_k + \boldsymbol{\sigma}_k) -$$
$$- \sum_{(k2)} \tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{f}_{kb})\,\tilde{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{\varphi}_{kb})(\mathbf{s}_k + \boldsymbol{\sigma}_k) + \mathbf{q}_j = \mathbf{0} \tag{3}$$

egyenlet fejezi ki, ahol az első összegzésben azok a rudak szerepelnek, amelyek a kezdőpontjukkal kapcsolódnak a j. csomóponthoz, míg a másodikban azok, melyek a végpontjukkal.

A k. rúdra felírt kompatibilitási egyenletek azt fejezik ki, hogy a rúd beilleszthető a két csomópont elmozdult koordináta-rendszere közé:

$$\mathbf{T}(\varphi_{kb}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{f}_{kb}) \cdot (\mathbf{x}_{ka} + \boldsymbol{\Delta}_{ka} - \mathbf{x}_{ko} - \boldsymbol{\Delta}_{kb}) + \mathbf{v}_{kw}(\mathbf{s}_k + \boldsymbol{\sigma}_k) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{T}(\mathbf{g}_{kw}) \cdot \mathbf{T}(\hat{\varphi}_{ka}) \cdot \mathbf{T}(\hat{\mathbf{f}}_{ka}) \cdot \mathbf{T}^*(\hat{\mathbf{f}}_{kb}) \cdot \mathbf{T}^*(\hat{\varphi}_{kb})\right) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

ahol $\mathbf{g}_{kw}$ a k. rúdnak az $\mathbf{s}_k + \boldsymbol{\sigma}_k$ belső erőkkel a (1) képlettel meghatározott értéke, és a $\wedge$ jel a rúdvégi koordinátarendszerben való felírást jelöli, tehát például

$$\hat{\mathbf{f}}_{ka} = \mathbf{T}(\mathbf{f}_{kb}) \cdot \mathbf{f}_{ka} \,.$$

4. Megoldási módszer

A csomópontokra felírt (3), valamint a rudakra felírt (4) és (5) típusú egyenletek együtt egy nemlineáris egyenletrendszert alkotnak.

Az állapotváltozási jellemzők infinitezimális változása, valamint az egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek behelyettesítési értékeinek változása között a nemlineáris rendszer Jacobi-mátrixa adja meg a kapcsolatot:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{e} \\ d\mathbf{c} \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,, \tag{6}$$

ahol $d\mathbf{e}$ és $d\mathbf{c}$ az egyensúlyi és kompatibilitási hiba megváltozása, valamint $d\mathbf{u}$ a $d\boldsymbol{\Delta}_j$ és $d\varphi_j$ vektorokból álló hipervektor. A **D**, **G** és **L** mátrixokban a deriválások képletszerűleg elvégezhetők, az **F** előállításához numerikus deriválásra van szükség.

Az állapotváltozók meghatározása a következő lépésekben történik:

a) Az igénybevételek közelítő értékéből rudanként megoldjuk az (1) kezdeti érték feladatot.

b) Az egzakt (3)—(5) típusú egyenletekkel kiszámítjuk az **e** egyensúlyi és **c** kompatibilitási hibát.

c) Ha a hibák a megengedett értéknél nagyobbak, akkor (6) lineáris összefüggést véges változásra alkalmazva, kiszámítjuk **u** és $\boldsymbol{\sigma}$ értékét.

d) Az **u** és $\boldsymbol{\sigma}$ vektorok alapján módosítjuk az **x**, **f** és **s** közelítő értékeket és az eljárást megismételjük.

IRODALOM

1. GÁSPÁR, ZS.: Large Deflection Analysis of Bar-Structures. *Acta Techn. Hung.* **86**. (Sajtó alatt)
2. SZABÓ, J.: Rúdszerkezetek állapotváltozásai egyenlete. *Építés- Építészettudomány* **3** (1971), 3—18
3. GÁSPÁR, ZS.: The Form of an Ideally Elastic Bar with a Space Curve Axis. *Acta Techn. Hung.* **84** (1977), 293—306
4. GÁSPÁR, ZS.: Establishment of the Tangent Stiffness Matrix of an Ideally Elastic Space Bar. *Acta Techn. Hung.* **84** (1977), 363—378
5. SZABÓ J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971, 268. old.
6. САБО, Я. — ГАШПАР, Ж.: Большие перемещения и посткритические изменения состояния стержневых конструкций. *Успехы механики* №1. 1977 (Sajtó alatt)

Precise analysis of the change of state of elastic bar structures. In the case of major displacements, determination of the change of state of elastic bar structures is reduced to the solution of a nonlinear equation system. This nonlinear equation system consists of equilibrium equations of the junction points, and compatibility equations related to the bars. The form of the individual bars is obtained, if the bar end stresses and load values are known, with the solution of an initial value problem defined by a differential equation system consisting of six equations.

Exakte Analyse der Zustandsänderung elastischer Stabkonstruktionen. Die Bestimmung der Zustandsänderung von elastischen Stabkonstruktionen kann im Falle großer Verschiebungen auf die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems zurückgeführt werden. Das nichtlineare Gleichungssystem besteht aus den für die Knotenpunkte aufgeschriebenen Gleichgewichts- und aus den für die Stäbe aufgeschriebenen Kompatibilitätsgleichungen. In Kenntnis der am Stabende auftretenden Beanspruchungen kann die Form eines Stabes als Lösung eines Anfangswertproblems ermittelt werden, das durch ein aus sechs Gleichungen bestehendes Differentialgleichungssystem bestimmt ist.

Точный анализ изменения состояния упругих стержневых систем. Определение изменения состояния упругих стержневых систем в случае больших перемещений возвращается на решение системы нелинейных уравнений. Система нелинейных уравнений составлена из уравнений равновесия узлов и из уравнений совместности стержней. Зная нагрузки на концах стержни деформацию одной стержни получим из решения задачи начального значения определена системой шести дифференциальных уравнений.