ALGEBRAI RENDSZEREKEN ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEGYENLETEK, II.

Az asszociativitás függvényegyenleteinek általánosításai

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

Binér, ternér stb. rendszereken értelmezett függvényegyenletek szokásos megoldási módszereit vizsgálva azonnal szembetűnik, hogy az általános törekvés mindig az, hogy az illető albegrai struktúrát valamely speciális tulajdonságú csoport segítségével állítsuk elő, vagyis, hogy az illető függvényegyenletet az asszociativitás

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)]$$

függvényegyenletére vezessük vissza. Példaként a dolgozat első részében [8] felsorolt egyenleteket említhetnénk, amelyek megoldásai, mint láttuk, valamely csoport bizonyos izotópjaiként* jelentkeztek.

Minthogy tehát az algebrai struktúrák között központi szerepet játszanak a csoportok, azért az algebrai rendszereken értelmezett függvényegyenletek vizsgálata közben is rendszerező elvnek tekinthetjük azt, hogy legfontosabb feladat az asszociativitás függvényegyenletének „környezetét" felderíteni. E törekvés jegyében alapvető lépést tett előre a [4] dolgozat, mely az asszociativitási egyenlet

$$(1) \qquad F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)]$$

általánosítását oldotta meg, a szereplő függvényekről feltételezve, hogy valamennyien kvázicsoport műveletek, azaz mindkét változóban invertálhatók. Gyakran van azonban szükség arra, hogy az (1) egyenletet olyan körülmények között vizsgáljuk, midőn a szereplő függvények csak részben, nem mindegyik változójukban invertálhatók. Erre az esetre vezethető vissza pl. a ternér kvázicsoportokon értelmezhető asszociatív törvények vizsgálata; ezzel a kérdéssel a *4.* §. foglalkozik.

Az invertálhatóság enyhítése mellett a megoldás érdekében bizonyos változók szerint az invertálhatóságot célszerű fenntartani. Két fő eset válik szét ilyen szempont alapján: a függvények abban a változóban invertálhatók, melyek az (1) egyenletben közvetlenül, vagy közvetve az x változót, illetve az y változót tartalmazzák. Az *1.* §. és *2.* §. ezzel a két fő esettel foglalkozik.

Alkalmazásként a *3.* §. a poliadikus csoportokat vizsgálja.

Végül az *5.* §. az (1) egyenlet megoldását mutatja meg az $F(x, y) = G(y, x) = H(y, x) = K(x, y)$ speciális esetben, minden invertálhatósági feltétel nélkül, csupán az $F(x, y) = z$ egyenlet x változó szerinti (nem feltétlenül egyértelmű) megoldhatóságát követeljük meg. Ekkor az (1) egyenlet

$$F[F(x, u), v] = F[F(x, v), u]$$

* Lásd pl. R. H. BRUCK [3] könyvét az izotopizmus és egyéb fogalmak definíciójára vonatkozólag.

-ra redukálódik, tehát az egyenlet azt fejezi ki, hogy az $x \to F_u x \overset{\text{def}}{=} F(x, u)$ leképezések összessége, mely az u paraméternek is függvénye, csupa felcserélhető leképezést tartalmaz [7]. A megoldási módszer reménylhetővé teszi az invertálhatósági feltételek enyhíthetőségét az általánosított asszociativitás (1) egyenletének egyéb speciális eseteiben is. Ezek kivizsgálása további feladat.

1. §. Az x változót közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változókban intervállható megoldások

Vizsgáljuk az

$$F[G(x, u), v] = H[x, K(u, v)] \tag{1'}$$

egyenlet megoldását a

$$K: U \times V \to P, \quad H: X \times P \to Q, \quad G: X \times U \to Y, \quad F: Y \times V \to Q$$

ismeretlen függvényekre vonatkozólag.

Hogy a megoldás gondolatmenetét világosabban áttekinthessük, nem mondjuk ki előre az invertálhatósági mellékfeltételeket, amelyek az egyes lépések jogosságát majd alátámasztják, hanem utólag foglaljuk össze mindazt, amit a bizonyítás során felhasználtunk.

Rögzítsük (1')-ben $u = a$-t és vezessük be a

$$\gamma x \overset{\text{def}}{=} G(x, a), \qquad \varkappa_2 t \overset{\text{def}}{=} K(a, t) \tag{2}$$

jelölést, akkor

$$F(\gamma x, v) = H(x, \varkappa_2 v),$$

tehát az $y = \gamma x$ változóval

$$F(y, v) = H(\gamma^{-1} y, \varkappa_2 v). \tag{3}$$

Helyettesítsük ezt (1')-be, akkor a kapott

$$H[\gamma^{-1} G(x, u), \varkappa_2(v)] = H[x, K(u, v)]$$

egyenletből $v = b$ rögzítéssel az előzőkhöz hasonlóan

$$\begin{gathered} G(x, u) = \gamma\chi^{-1} H(x, \varkappa_1 u), \\ \chi t \overset{\text{def}}{=} H(t, c), \quad \varkappa_1 t \overset{\text{def}}{=} K(t, b), \\ [c = K(a, b)] \end{gathered} \tag{4}$$

adódik, tehát fennáll

$$H[\varkappa^{-1} H(x, \varkappa_1 u), \varkappa_2 v] = H[x, K(u, v)].$$

Végül $x = \chi^{-1} t$-t helyettesítve, $\varkappa_1 u$ és $\varkappa_2 v$ helyett új u, v változót írva és bevezetve a

$$\begin{gathered} T(t, u) \overset{\text{def}}{=} H(\chi^{-1} t, u): Q \times P \to Q \\ I(u, v) \overset{\text{def}}{=} K(\varkappa_1^{-1} u, \varkappa_2^{-1} v): P \times P \to P \end{gathered} \tag{5}$$

függvényeket, a transzformáció:

$$T[T(x, u), v] = T[x, I(u, v)]; \qquad x \in Q; \; u, v \in P \tag{6}$$

jól ismert függvényegyenletéhez jutunk [1, 5].

Az így nyert egyenletünk azt fejezi ki, hogy az $u \in P$ paramétertől függő

$$x \to T_u x \overset{\text{def}}{=} T(x, u)$$

transzformációk *sereget* alkotnak, azaz két különböző paraméterrel egymásután végrehajtott transzformáció helyettesíthető egyetlen olyan transzformációval, melynek paramétere csupán az előző két transzformáció paraméterétől függ. Ha *effektív* transzformáció-sereget tekintünk, azaz feltesszük, hogy a paraméterek P értelmezési tartománya csupa lényeges paramétert tartalmaz, azaz

$$(7) \qquad T(x, u) \not\equiv T(x, v) \qquad [H(x, u) \not\equiv H(x, v)], \text{ ha } u \neq v,$$

akkor a paraméterek

$$u \circ v \overset{\text{def}}{=} I(u, v)$$

kompozíciós törvénye asszociatív:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w),$$

ami nyilván következik a (6) ismételt alkalmazásával nyert

$$T_{(u \circ v) w} x = T_{u \circ v} T_w x = T_u T_v T_w x = T_u T_{v \circ w} x = T_{u \circ (v \circ w)} x, \quad x \in Q$$

azonosságból. Tehát P° félcsoport.

Az eddigieket összefoglalva, (2), (4), (5), (7) alapján a következő tételt lehet kimondani:

1. TÉTEL. *Legyenek valamely rögzített $u \in U$, $b \in V$ és $c = K(a, b) \in P$ esetén*

$$x \to G(x, a), \;\; H(x, c),$$
$$t \to \varkappa_1 t \overset{\text{def}}{=} K(t, b), \;\; \varkappa_2 t \overset{\text{def}}{=} K(a, t)$$

invertálható leképezések, továbbá

$$H(x, u) \not\equiv H(x, v), \quad \text{ha} \quad u \neq v,$$

akkor az

$$(1') \qquad F[G(x, u), v] = H[x, K(u, v)]; \qquad x \in X, \; u \in U, \; v \in V$$

függvényegyenletnek minden $K: U \times V \to P$ megoldásához található olyan a P-n értelmezett asszociatív $I(u, v)$ művelet, amellyel fennáll:

$$K(u, v) = I(\varkappa_1 u, \varkappa_2 v).$$

Ha pedig $P(K)$ kvázicsoport, akkor természetesen $P(I)$ csoport. Ekkor azonban a (6) alatti $x \to T_u x$ transzformációk ekvivalensek a $P(I)$ csoport valamely S alcsoportja szerinti $S \circ p$ $(p \in P)$ jobb mellékosztályok [5]

$$(8) \qquad S \circ p \to T_u(s \circ p) \overset{\text{def}}{=} (S \circ p) \circ u, \;\; u \in P$$

tranzlációival, feltéve, hogy az $x \to T_u x$ transzformáció-sereg *tranzitív*, azaz fennáll

$$(9) \qquad T_P x = Q, \qquad x \in Q.$$

Ez utóbbi tranzitivitási feltétel nélkül is megállapítható, hogy Q ilyen tranzitivitási tartományok összege:

$$Q = \bigcup_i Q_i; \;\; Q_i = T_P x_i,$$

amelyek mindegyikén $x \to T_P x$ ekvivalens valamely hasonló alakú, esetleg más S alcsoporttal képezett mellékosztályok tranzlációival.

Ha speciálisan pl. van olyan x_0 érték, hogy $H(x_0, P) = Q$, akkor tekintetbe véve T (5) alatti értelmezését, a (9) tranzivitási feltétel is teljesül, tehát $T(x, u)$-hoz lehet találni olyan S alcsoportot, hogy $T(x, u)$ minden $x \in Q$ esetén ekvivalens legyen az S szerinti jobb-mellékosztályok egyikének (8) tranzlációjával. Ezen S alcsoport, konjugáltságtól eltekintve, egyértelműen meg van határozva T-vel, éspedig valamely $x_0 \in Q$ elem *stacioner operátor*ainak alcsoportja, melyekre fennáll

$$(1.2.10) \qquad T(x_0, S) = x_0.$$

Könnyen belátható, hogy ezen x_0 az $S \circ p$ mellékosztályok közül éppen magával S-sel ekvivalens, ugyanis éppen erre érvényes, hogy

$$S \to T_S S = S \circ S = S.$$

A stacioner operátorok S alcsoportjának (10) értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy ha megköveteljük az

$$(11) \qquad u \to T(x_0, u), \text{ illetve } H(\chi^{-1} x_0, u)$$

leképezés invertálhatóságát legalább egy $x_0 \in Q$ esetén, akkor S csak az egységelemből fog állni. Ekkor tehát (8)-ból megkapjuk $T(x, u)$ legáltalánosabb alakját:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \tau(x \circ u) &= T(\tau x, u), \\ T(x, u) &= \tau(\tau^{-1} x \circ u), \end{aligned}$$

amely tetszőleges invertálható τ függvénnyel és tetszőleges asszociatív $u \circ v = I(u, v)$-vel valóban ki is elégíti (6)-ot, vagyis a legáltalánosabb megoldást szolgáltatja a (11) alatti leképezések invertálhatósági feltétele mellett.

Egy (12) előállítást adó τ függvény ténylegesen megadható $T(x, u)$-val, ehhez csupán (6)-ba kell $x = x_0$-t helyettesíteni. Ekkor látható, hogy pl.

$$(13) \qquad \tau u \overset{\text{def}}{=} T(x_0, u) = H(x_1, u), \quad x_1 = \chi^{-1} x_0, \quad u \in P$$

megfelel a célnak.

Megjegyezzük, hogy a (11) alatti leképezések invertálhatósága már maga után vonja a (7) effektivitási követelmény teljesülését is. Így a (3), (4), (5), (12) (13) formulák és az 1. tétel alapján kimondhatjuk a következőt:

2. TÉTEL. *Legyenek valamely rögzített $a \in U$, $b \in V$, $c = K(a, b) \in P$ és $x_1 \in X$ esetén*

$$x \to \gamma x \overset{\text{def}}{=} G(x, a), \quad \chi x \overset{\text{def}}{=} H(x, c),$$

$$u \to \varkappa_1 u \overset{\text{def}}{=} K(u, b),$$

$$v \to \varkappa_2 v \overset{\text{def}}{=} K(a, v),$$

$$t \to \tau t \overset{\text{def}}{=} H(x_1, t)$$

invertálható leképezések. Akkor az (1′) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása *felírható*

$$(14)\qquad \begin{cases} F(y,v) = \tau(\tau^{-1}\chi\gamma^{-1}y \circ \varkappa_2 v), \\ G(x,u) = \gamma\chi^{-1}\tau(\tau^{-1}\chi x \circ \varkappa_1 u), \\ H(x,w) = \tau(\tau^{-1}\chi x \circ w), \\ K(u,v) = \varkappa_1 u \circ \varkappa_2 v \end{cases}$$

alakban, ahol $u \circ v$ a P-n értelmezett tetszőleges asszociatív művelet, amely az invertálhatósági követelmények folytán rögzített $u=c$, $H(x_1, c)$, illetve $v=c$ esetén a második változóban invertálható.

A (14) megoldást $\varphi = \tau^{-1}\chi\gamma^{-1}$, $\psi = \tau^{-1}\chi$-vel kissé rövidebb alakban is írhatjuk:

$$(15)\qquad \begin{cases} F(y,v) = \tau(\varphi y \circ \varkappa_2 v), \\ G(x,u) = \varphi^{-1}(\psi x \circ \varkappa_1 u), \\ H(x,w) = \tau(\psi x \circ w), \\ K(u,v) = \varkappa_1 u \circ \varkappa_2 v. \end{cases}$$

A (15) formulában F, G, H, K nyilván tetszőleges $\varphi, \psi, \tau, \varkappa_1, \varkappa_2$-vel ki is elégíti (1′)-et, ha $u \circ v$ asszociatív:

$$(\psi x \circ \varkappa_1 u) \circ \varkappa_2 v = \varphi x \circ (\varkappa_1 u \circ \varkappa_2 v).$$

Következmény. A $Q(L)$ kvázicsoportokon értelmezett (1) asszociativitási egyenlet mindegyik $L = F, G, H, K$ megoldása ugyanazon csoportművelet izotópja [4].

2. §. Az y változót közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változókban invertálható megoldások

Eddig az általánosított

$$(1)\qquad F[G(x,y),z] = H[x, K(y,z)]$$

egyenletet fokozatosan specializáltuk. Most már ismerve (1) megoldását kvázicsoportokon, ismét induljunk el az általánosítás útján, az eddigi iránytól azonban eltérően. Az eddig használt invertálhatósági feltételekre vezető általánosítás lényege abban állt, hogy (1)-ben az x változót közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változók szerinti invertálhatóságát fenntartottuk, az y, z változót pedig az x-től eltérően más értelmezési tartományból választottuk. Így lényegében a (6) transzformáció függvényegyenlet általánosítását adó egyenletre jutunk. Most az invertálhatósági követelményt enyhítsük olyan módon, hogy (1)-ben az y-t közvetlenül vagy közvetve tartalmazó változók szerinti invertálhatóságot követeljük meg, e változó rögzítése mellett a másik változóban pedig csupán a tranzitivitást.

A változók értelmezési tartományát és a függvények értékkészletét is válasszuk a lehetőség szerint mind különbözőnek. Így az

$$F: Q \times Z \to R, \quad G: X \times Y \to Q,$$

$$H: X \times P \to R, \quad K: Y \times Z \to P$$

függvényekre vonatkozólag felírt (1)-hez jutunk. Az

$$u \to F(u, z), \quad y \to G(x, y),$$
$$v \to H(x, v), \quad y \to K(y, z)$$

leképezések invertálhatósága folytán (melyek közül elég lenne H, K invertálhatóságát és G tranzitivitását kiróni, mert ezekből és (1) fennállásából már következnék a többiek invertálhatósága), a Q, P, R halmazok az általánosság sérelme nélkül azonosíthatók Y-nal.

Problémánk tehát az egyszerűbb írásmód kedvéért rögtön egyszerűsíthető az (1) egyenletnek az

$$F: Y \times Z \to Y, \quad G: X \times Y \to Y,$$
$$H: X \times Y \to Y, \quad K: Y \times Z \to Y$$

ismeretlen függvényekre vonatkozó megoldásává.

Vezessük be ezután az

$$x \in X_y \rightleftharpoons G(x, y_0) = y, \quad z \in Z_y \rightleftharpoons K(y_0, z) = y$$

összefüggéssel értelmezett X_y, Z_y halmazokat[1]. A

$$G(X, y_0) = Y, \quad K(y_0, Z) = Y$$

tranzitivitási feltétel teljesülése esetén X_y, Z_y nyilván minden $y \in Y$-ra értelmezve van és

$$X = \bigcup_{y \in Y} X_y, \quad Z = \bigcup_{y \in Y} Z_y.$$

Értelmezzük ezután a

$$\bar{G}(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} G(X_t, y), \quad \bar{K}(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} K(y, Z_t),$$
$$\bar{F}(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} F(y, Z_t), \quad \bar{H}(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} H(X_t, y)$$

függvényeket, melyekről a következő észrevételeket tehetjük:

I. $\bar{F}, \bar{H}, \bar{G}, \bar{K}: Y \times X \to Y$ egyértékű függvények;

II. létezik $t_0, s_0 \in Y$, melyre $y \to \bar{G}(t_0, y)$, $K(y, s_0)$ invertálhatók;

III. $t \to \bar{G}(t, y_0)$, $\bar{K}(y_0, t)$ invertálhatók;

IV. $y \to \bar{F}(y, s_0)$, $\bar{H}(t_0, y)$ invertálhatók;

V. $\bar{F}[\bar{G}(t, y), s] = \bar{H}[t, \bar{K}(y, s)]$, $t, y, s \in Y$.

Ezek közül I. rögtön belátható, ha pl. alkalmas x-szel felírjuk az

$$\bar{F}(y, s) = F(y, Z_s) = F[G(x, y_0), Z_s] = H[x, K(y_0, Z_s)] = H(x, s)$$

függvényt, mely s-nek valóban egyértékű függvénye s nyilván y-nak is. Hasonló érvényes $\bar{H}$-ra is. $\bar{G}$ egyértékűsége pedig $y \to F(y, z)$ invertálhatósága alapján abból

[1] Tehát pl. X_y az X azon x elemeinek összességét jelöli, melyekre $G(x, y_0) = y$ teljesül.

következik, hogy

$$F[\bar{G}(t, y), z] = F[G(X_t, y), z] = H[X_t, K(y, z)] = \bar{H}[t, K(y, z)]$$

egy-egyértékű függvénye mind t-nek, mind y-nak, s hasonló áll $\bar{K}$-ra is.

II. Nyilvánvaló az értelmezés és az $y \to G(x, y)$, $K(y, z)$ invertálhatósága alapján.

III. alatt fennáll

$$\bar{G}(y, y_0) = G(X_y, y_0) = y$$

és hasonlóan $\bar{K}(y_0, y) = y$ is.

IV. úgy mutatható ki, hogy pl. alkalmas $x \to G(x, y_0)$-val az

$$\bar{F}(y, s_0) = F(y, Z_{s_0}) = F[G(x, y_0), Z_{s_0}] = H[x, K(y_0, Z_{s_0})] = H(x, s_0)$$

függvény x változóban való invertálhatóságát felhasználjuk, és hasonlóan járunk el $\bar{H}(t_0, y)$-nal is.

Végül V. magától értetődik, ha 1-ben $x = X_t$, $z = Z_s$-et helyettesítünk.

Az I—V. észrevételek alapján alkalmazható a 2. tétel, amelyből azt kapjuk, hogy pl.

$$\bar{F}(u, t) = F(u, Z_t)$$

valamely, az $Y = R$-en értelmezett $a \circ b$ asszociatív művelet főizotópja:

$$F(u, Z_t) = \gamma u \circ \delta t.$$

Tehát értelmezve a $z \in Z_t$ elemekre a nem feltétlen invertálható

$$z \to \varepsilon z = t, \quad z \in Z_t$$

leképezést,

$$F(u, z) = \gamma u \circ \delta \varepsilon z = \gamma u \circ \psi z$$

adódik, és teljesen hasonlóan

$$H(x, v) = \varphi x \circ \varkappa v,$$

ahol φ szintén nem feltétlen invertálható, de $\varkappa$, éppúgy mint γ, biztosan az.

Végül visszahelyettesítéssel megkapjuk a

$$G(x, y) = \gamma^{-1}(\varphi x \circ \sigma y)$$
$$K(y, z) = \varkappa^{-1}(\sigma y \circ \psi z)$$

összefüggéseket is.

Az invertálhatósági követelmények maguk után vonják, hogy a kifejezésben szereplő γ, $\varkappa$, σ leképezések invertálhatók, továbbá a $G(x, y_0)$, $K(y_0, z)$ tranzivitásából következik, hogy φ, ψ képtartománya az egész R. Az

$$y \to G(x, y), \quad K(y, z)$$

leképezésekre kirótt invertálhatósági feltételből pedig az R° félcsoportra vonatkozólag az az invertálhatósági megszorítás következik, hogy

$$r \to \varphi x \circ r, \quad r \circ \psi z$$

is invertálható, tetszőleges rögzített x, illetve z esetén; vagyis R° csoport, minthogy φ, ψ képtartománya az egész R.

Végezetül, eltekintve a Q, P, R, Y halmazoknak csupán a könnyebb áttekinthetőség kedvéért történt azonosításától, teljes általánosságban kimondhatjuk a következőt:

3. TÉTEL. *Legyenek rögzített* $x \in X$, $z \in Z$ *esetén*

$$y \to K(y, z), \quad v \to H(x, v)$$

invertálható leképezések, és

$$G(x, Y) = G(X, y_0) = Q, K(y_0, Z) = P.$$

Akkor az

$$F: Q \times Z \to R, \quad G: X \times Y \to Q,$$

$$H: X \times P \to R, \quad K: Y \times Z \to P$$

függvényekre értelmezett

$$F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)] \tag{1}$$

függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása:

$$\begin{cases} F(u, z) = \gamma u \circ \psi z \\ G(x, y) = \gamma^{-1}(\varphi x \circ \sigma y), \\ H(x, v) = \varphi x \circ \varkappa v, \\ K(y, z) = \varkappa^{-1}(\sigma y \circ \psi z), \end{cases}$$

ahol R° *az* R *halmazon értelmezett tetszőleges csoport,* γ, $\varkappa$, σ *a* Q, P, *illetve* Y *halmazok tetszőleges* 1—1 *leképezései* R*-re,* φ *és* ψ *pedig* X, *illetve* Z *tetszőleges leképezései* R*-re.*

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás gondolatmenete nyilván megengedi azt az általánosítást is, hogy az

$$y \to K(y, z), \quad v \to H(x, v)$$

leképezések invertálhatóságát csak bizonyos rögzített x_0, z_0 esetén követeljük meg. Akkor természetesen R° csupán félcsoport, de a megoldási formulában szereplő függvényekre vonatkozó invertálhatósági feltételek nehezen áttekinthetővé válnak.

3. §. Az asszociativitás függvényegyenletének általánosítása multinér kvázicsoportokon

Maguk a kvázicsoportok is általánosíthatók pl. úgy, hogy binér művelet helyett ternér stb. műveletet tekintünk. Így a kvázicsoportokon binér műveletekre értelmezett függvényegyenletek között központi szerepet játszó (1) egyenletnek megfelelő

$$F[G(x, y, z), u, v] = H[x, K(y, z, u), v] = N[x, y, N(z, u, v)]$$

általánosításhoz jutunk. Sőt, feladva azt az elvet is, hogy az egyenletben csak azonos változószámú függvények forduljanak elő, több változóval mindjárt az

$$F[G(x_1, x_2, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n] = \tag{16}$$
$$= H[x_1, x_2, \dots, x_q, K(x_{q+1}, \dots, x_n)], \quad (p > q)$$

általánosítást tekinthetjük [9].

A megoldás érdekében tegyük fel, hogy F, H az első, illetve utolsó változójukban invertálhatók.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az

$$u = (x_1, \dots, x_q) \in Q^q,$$
$$v = (x_{q+1}, \dots, x_p) \in Q^{p-q},$$
$$w = (x_{p+1}, \dots, x_n) \in Q^{n-p},$$

változókat, mellyel (16) így írható:

$$F[G(u, v), w] = H[u, K(v, w)], \tag{17}$$
$$u \in Q^q, \quad v \in Q^{p-q}, \quad w \in Q^{n-p}.$$

Ekkor (17)-ből a $w = w_0$, illetve $u = u_0$ rögzítéssel látható, hogy

$$G(u, v) = \alpha^{-1} H[u, k(v)],$$
$$K(v, w) = \beta^{-1} F[g(v), w],$$

ahol

$$\alpha x \overset{\text{def}}{=} F(x, w_0), \quad \beta x \overset{\text{def}}{=} H(u_0, x), \quad x \in Q,$$
$$k(v) \overset{\text{def}}{=} K(v, w_0), \quad g(v) \overset{\text{def}}{=} G(u_0, v), \quad v \in Q^{p-q}.$$

Ezzel (17) a következő alakot ölti:

$$F\{\alpha^{-1} H[u, k(v)], w\} = H\{u, \beta^{-1} F[g(v), w]\},$$
$$u \in Q^b, \quad v \in Q^{p-q}, \quad w \in Q^{n-p}.$$

Az $u = u_0$, $w = w_0$ rögzítéssel (17)-ből

$$\beta k(v) = \alpha g(v), \quad g(v) = \alpha^{-1} \beta k(v),$$

adódik, tehát egyenletünk az $y = k(v)$ változó bevezetésével és a

$$\bar{G}(u, y) \overset{\text{def}}{=} \alpha^{-1} H(u, y), \quad \bar{K}(y, v) \overset{\text{def}}{=} \beta^{-1} F(\alpha^{-1} \beta y, w)$$

jelöléssel

$$F[\bar{G}(u, y), w] = H[u, \bar{K}(y, w)],$$
$$u \in Q^q, \quad y \in Q, \quad w \in Q^{n-p}$$

alakot ölt.

Ha a 3. tétel

$$\bar{G}(u_0, Q) = \bar{G}(Q^q, y_0) = Q, \quad \bar{K}(y_0, Q^{n-p}) = Q$$

feltételei, valamint az

$$y \to \bar{K}(y, w), \quad H(u, y)$$

függvényre vonatkozó invertálhatósági feltételek teljesülnek, akkor

$$F(x, w) = \gamma x \circ \psi w,$$
$$H(u, x) = \varphi u \circ \varkappa x,$$

amelyet (17)-be helyettesítve, a változók alkalmas rögzítése után rögtön megkapjuk a

$$G(u, v) = \gamma^{-1}(\varphi u \circ \sigma v),$$
$$K(v, w) = \varkappa^{-1}(\sigma v \circ \psi w)$$

formulákat is.

Az eddigi gondolatmenet alapján összefoglalva a felhasznált invertálhatósági, illetve tranzivitási feltételeket, kimondjuk a következőt:

4. TÉTEL. *Ha valamely*

$$F(x_0, w_0) = H(u_0, y_0)$$

összefüggést kielégítő, rögzített $x_0 \in Q$, $w_0 \in Q^{n-p}$, $U_0 \in Q^q$, $y_0 \in Q$ *elemekre teljesül a*

$$K(Q^{p-q}, x_0) = H(u_0, Q) = H(Q^q, y_0) = (x_0, Q^{n-p}) = Q$$

feltétel, és ha az

$$x \to F(x, w), \quad H(u, x) \quad (Q \to Q)$$

leképezések tetszőlegesen rögzített $u \in Q^q$, $w \in Q^{n-p}$ *esetén invertálhatók, akkor az*

$$(17) \qquad F[G(u, v), w] = H[u, K(v, w)], \quad u \in Q^q, \quad v \in Q^{p-q}, \quad w \in Q^{n-p},$$

illetve részletezve az

$$(16) \qquad F[G(x_1, \ldots, x_p), x_{p+1}, \ldots, x_n] = H[x_1, \ldots, x_q, K(x_{q+1}, \ldots, x_n)], \qquad (p > q),$$

függvényegyenlet megoldásának legáltalánosabb alakja

$$\begin{cases} F(x, w) = \gamma x \circ \psi w, \\ G(u, v) = \gamma^{-1}(\varphi u \circ \sigma v), \\ H(u, x) = \varphi u \circ \varkappa x, \\ K(u, x) = \varkappa^{-1}(\sigma v \circ \psi w), \end{cases}$$

illetve részletesen

$$\begin{aligned} F(x, x_{p+1}, \ldots, x_n) &= \gamma x \circ \psi(x_{p+1}, \ldots, x_n), \\ G(x_1, \ldots, x_p) &= \gamma^{-1}[\varphi(x_1, \ldots, x_q) \circ \sigma(x_{q+1}, \ldots, x_p)], \\ H(x_1, \ldots, x_q; x) &= \varphi(x_1, \ldots, x_q) \circ \varkappa x, \\ K(x_{q+1}, \ldots, x_n) &= \varkappa^{-1}[\sigma(x_{q+1}, \ldots, x_p) \circ \psi(x_{p+1}, \ldots, x_n)]; \end{aligned}$$

ahol $x \circ y$ *tetszőleges csoportművelet a* Q *halmazon, és*

$$\gamma, \varkappa : Q \to Q$$

tetszőleges invertálható leképezések,

$$\varphi : Q^q \to Q, \quad \psi : Q^{n-p} \to Q, \quad \sigma : Q^{p-q} \to Q$$

tetszőleges leképezések Q*-ra.*

4. §. Ternér csoportok

A 4. tételből speciálisan megkapjuk

(18) $$F[G(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5] = H[x_1, x_2, K(x_3, x_4, x_5)]$$

megoldását is:

$$F(x, x_4, x_5) = \gamma x \circ \psi(x_4, x_5),$$
$$G(x_1, x_2, x_3) = \gamma^{-1}[\varphi(x_1, x_2) \circ \sigma x_3],$$
$$H(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) \circ \varkappa x,$$
$$K(x_3, x_4, x_5) = \varkappa^{-1}[\sigma x_3 \circ \psi(x_4, x_5)].$$

Ha itt további specializálással

(19) $$F = G = H = K,$$

akkor

$$F(x, y, z) = K(x, y, z) = \gamma x \circ \psi(y, z) = \varphi(x, y) \circ \varkappa z$$

folytán

$$\varphi(x, y) = \gamma x \circ \psi(y, z_0) \circ (\varkappa z_0)^{-1} = \gamma x \circ \chi y,$$

következőleg

$$\psi(y, z) = \chi y \circ \varkappa z.$$

Ezekkel az $F = G = K$ egyenlőség ilyen lesz:

$$\gamma x \circ \chi y \circ \varkappa z = \gamma^{-1}(\gamma x \circ \chi y \circ \sigma z) = \varkappa^{-1}(\sigma x \circ \chi y \circ \varkappa z),$$

tehát a $\gamma x = \varkappa z = e$ (ahol e a Q° egységeleme) helyettesítésből nyilvánvalóan

$$\gamma y = y \circ c_1, \varkappa y = c_2 \circ y,$$

azaz végeredményben

$$F(x, y, z) = G = H = K = x \circ c_1 \circ \chi y \circ c_2 \circ z = x \circ \varepsilon y \circ z,$$

amely valóban tetszőleges $\varepsilon: Q \to Q$ leképezéssel ki is elégíti (18)-at és (19)-et.

A poliadikus (példánkban ternér) csoportok értelmezésében (18) mellett még [3, 10]

(20) $$F[F(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5] = F[x_1, F(x_2, x_3, x_4), x_5]$$

fennállását is meg szokták követelni. Ekkor

$$x_1 \circ \varepsilon x_2 \circ x_3 \circ \varepsilon x_4 \circ x_5 = x_1 \circ \varepsilon(x_2 \circ \varepsilon x_3 \circ x_4) \circ x_5$$

csak úgy áll fenn, ha

(21) $$\varepsilon x \circ \varepsilon^{-1} y \circ \varepsilon z = \varepsilon(x \circ y \circ z),$$

vagyis ha teljesül az, hogy

$$\varepsilon x = a \circ \alpha x,$$

ahol α a Q° tetszőleges, az

$$\alpha a = a, \quad \alpha\alpha x = a^{-1} \circ x \circ a$$

feltételeket kielégítő automorfizmusa. Ez utóbbi állítások helyességét (21) alapján tudjuk belátni. Helyettesítsük ugyanis ott z helyébe a Q° csoport e egységelemét, akkor azt látjuk, hogy

$$\varepsilon(x \circ y) = \varepsilon x \circ \alpha y, \tag{22}$$

ahol

$$\alpha y \overset{\text{def}}{=} \varepsilon^{-1} y \circ \varepsilon e,$$

vagyis (22)-ben az $x=e$ helyettesítésből nyilván

$$\alpha y = (\varepsilon e)^{-1} \circ \varepsilon y,$$

amely Q°-nak valóban automorfizmusa, amint ezt a (22) egyenlet mutatja, ha mindkét oldalt beszorozzuk balról $(\varepsilon e)^{-1}$-gyel. Hasonlítsuk most össze az ε-ra kapott két utóbbi kifejezést, akkor

$$\varepsilon y = a \circ \alpha y = \alpha^{-1}(y \circ a),$$

ahol

$$a \overset{\text{def}}{=} \varepsilon e.$$

Így, minthogy α automorfizmus, rögtön adódik:

$$\alpha a \circ \alpha \alpha y = y \circ a,$$

$$\alpha \alpha y = (\alpha a)^{-1} \circ y \circ a.$$

Azt kell tehát még kimutatni, hogy $\alpha a = a$. Ez pedig rögtön következik α és az a iménti értelmezéséből:

$$\alpha a = \varepsilon^{-1} a \circ \varepsilon e = \varepsilon^{-1} \varepsilon e \circ a = a.$$

Végeredményben tehát F kifejezhető ε helyett α-val:

$$F(x, y, z) = x \circ a \circ \alpha y \circ z.$$

Könnyű meggyőződni arról, hogy az ilyen F a Q° tetszőleges az

$$\alpha a = a, \alpha \alpha x = a^{-1} \circ x \circ a$$

feltételeknek eleget tevő α automorfizmusával ki is elégíti (20)-at. Kimondhatjuk tehát a 4. tétel alábbi folyományát:

5. TÉTEL. *Egy Q halmazon értelmezett*

$$F: Q \times Q \times Q \to Q,$$

mindegyik változóban invertálható, asszociatív ternér művelet legáltalánosabb alakja

$$F(x, y, z) = x \circ a \circ \alpha y \circ z,$$

ahol $x \circ y$ a Q halmazon értelmezett tetszőleges csoportművelet, melynek α tetszőleges,

$$\alpha a = a, \quad \alpha \alpha x = a^{-1} \circ x \circ a$$

feltételeket kielégítő automorfizmusa, és itt $a \in Q$ valamely rögzített elem, a^{-1} pedig az a elem inverzét jelöli a Q° csoportban.

Megjegyezzük, hogy az $x \circ y$ csoportműveletet és az α automorfizmust az F ternér művelet nem egyértelműen határozza meg, hanem csupán az

$$x \circ z = F(x, a^{-1}, z)$$
$$\alpha y = F(a^{-1}, y, e)$$

összefüggés alapján, ahol $b = e^{-1}$, $e \in Q$ tetszőlegesen választható

$$(23) \qquad \begin{cases} F(x, b, e) = F(e, b, x) = x, \\ F(x, e, b) = F(b, b, x) \end{cases}$$

tulajdonságú elemek. Az e és b elemeknek ezek a tulajdonságai az

$$(24) \qquad x \circ e = e \circ x = x, \quad \alpha\alpha x \circ a^{-1} = a^{-1} c x$$

egyenletek fennállásához elengedhetetlenek, s ha viszont (23) fennáll, akkor már

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$
$$\alpha a^{-1} = a^{-1}, \quad \alpha(x \circ y) = \alpha x \circ \alpha y$$

is minden feltétel nélkül teljesül, nemcsak (24). Ilyen speciális a, b elemek létezése egyébként a 4. tétel imént leírt következménye alapján biztos.

5. §. Egy megjegyzés a felcserélhető leképezésekről

Tekintsük a Q halmaz $x \to F_u x$ leképezéseinek összességét, melyek egy $u \in P$ paramétertől függnek. A leképezések felcserélhetősége azt jelenti, hogy fennáll

$$(25) \qquad F_u F_v x = F_v F_u x, \qquad x \in Q;\, u, v \in P.$$

Ezen egyenlet legáltalánosabb megoldását fogjuk megadni olyan feltétel mellett, hogy az $y = F_u x$ egyenletnek tetszőleges, rögzített $x, y \in Q$ esetben van legalább egy (nem feltétlen egyértelmű) $u \in P$ megoldása, amit röviden úgy fejezhetünk ki, hogy az $x \to F_u x$ leképezések összessége tranzitív, azaz

$$(9) \qquad F_P x = Q.$$

6. TÉTEL. *Egy Q halmaz $x \to F_u x$ $(u \in P)$ felcserélhető leképezéseinek tranzitív összessége mindig felírható az*

$$F_u x = x + \varphi u, \qquad x \in Q,\ u \in P$$

alakban, ahol „+" a Q halmazon értelmezett Abel-féle csoportművelet, φ pedig a P-nek Q-ra való leképezése [7].

Bizonyítás. Válasszunk egy rögzített $x_0 \in Q$-t és értelmezzük a Q halmazon az

$$x + y \overset{\text{def}}{=} F_u y$$

műveletet, ahol u a P olyan eleme, amelyre fennáll $F_u x_0 = x$. Az $x + y$ művelet értelmezése nyilván független attól, hogy P-nek melyik

$$F_u x_0 = F_{u'} x_0 = x$$

tulajdonságú u, u' elemeit választjuk ki, ugyanis ekkor alkalmas v-vel $y = F_v x_0$, és így a felcserélhetőség miatt

$$F_u y = F_u F_v x_0 = F_v F_u x_0 = F_v F_{u'} x_0 = F_{u'} F_v x_0 = F_{u'} y$$

érvényes bármely $y \in Q$ esetén.

Kimutatjuk, hogy Q^+ *Abel*-féle csoport. Valóban, alkalmas u, v elemekkel

$$x+y = F_u y = F_u F_v x_0 = F_v F_u x_0 = F_v x = y+x,$$

$$x+(y+z) = F_u(y+z) = F_u F_v z = F_v F_u z = y+(x+z),$$

$$Q+a = F_P a = Q,$$

amelyekből nyilvánvalóan következik állításunk.

Így végeredményben $x+y$ értelmezése alapján azt kapjuk, hogy

$$F(y, u) = x+y = y+x = y+\varphi u,$$

ahol

$$x = \varphi u \overset{\text{def}}{=} F(x_0, u).$$

Egyszerű számolással meg lehet győződni arról, hogy az ilyen alakú F tetszőleges $x+y$ kommutatív csoportművelettel és tetszőleges $\varphi : P \to Q$ leképezéssel ki is elégíti az eredeti függvényegyenletet.[2]

Feltételezve, hogy Q topológikus tér, melyen $F_u x$ folytonos, $x+y$ az értelmezése alapján az y változónak folytonos függvénye, s minthogy $x+y$ kommutatív, ezért x-nek is folytonos függvénye; akkor tehát Q^+ topologikus csoport. Minthogy egy valós intervallumon értelmezett folytonos csoport mindig izomorf a valós additív csoporttal [1], abban a speciális esetben, amikor Q egy valós intervallum, a következőt nyerjük:

Következmény: Egy valós intervallumon folytonos és felcserélhető leképezéseknek tranzitív összessége izomorf a tranzlációkkal, azaz

$$x \to F_u x = f^{-1}[f(x) + \varphi(u)]$$

alakban írható, ahol $f(x)$ az adott intervallumot a valós egyenesre leképező folytonos 1—1 függvény.

Minthogy a tranzláció függvényegyenletének

$$F[F(x, u), v] = F(x, u \oplus v), \qquad x \in Q;\ u, v \in P$$

általánosítása kommutatív $u \oplus v$ gruppoidok esetén szintén közvetlenül visszavezethető (25)-re, hiszen akkor

$$F_u F_v x = F_{u \oplus v} x = F_{v \oplus u} x = F_v F_u x,$$

[2] FUCHS LÁSZLÓ megjegyezte, hogy a tranzitivitás helyett elég lenne feltételezni csupán azt, hogy Q az F_u leképezésekre nézve irreducibilis, azaz Q-nak nincs olyan Q' valódi része, melyre $F_u Q' \subseteq Q'$ teljesül minden $u \in P$-re. Ekkor ugyanis tetszőleges $x, y \in Q$-hoz létezik olyan $u_1, u_2, \ldots, u_k \in P$ elemrendszer, hogy $y = F_{u_1} F_{u_2} \ldots F_{u_k} x$, mert az $F_{u_1} F_{u_2} \ldots F_{u_k} x$ alakú elemek nem lehetnek benne Q egyetlen valódi részében sem, éppen az irreducibilitás miatt. Ezután $x+y$ ugyanúgy értelmezhető, mint a tétel fenti bizonyításában, csupán u helyett kell egy $u_1, u_2, \ldots, u_k$ elemrendszert tekinteni.

ezért a 6. tétel hasznosnak látszik a tranzláció általánosításának megoldásánál is [6]. A tranzláció egyenlete pl. fontos szerepet játszik a törtrendű iteráltak értelmezésénél [2]. Az előbbi megjegyzés tehát arra világít rá, hogy ekkor is az iteráltak felcserélhetősége játszik döntő szerepet.

IRODALOM

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, 1961.

[2] L. Berg, Unstetige Iterationsgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 47–56.

[3] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.

[4] Hosszú M., Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959). 51–56.

[5] Hosszú M., Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében, I., *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 149–162.

[6] Hosszú M., A generalization of the functional equation of translation, *Mitt. Techn. Univ. Schwerind., Miskolc* **21** (1960), 7–10.

[7] Hosszú M., Note on commutable mappings, *Publ. Math.* **9** (1962), 105–106.

[8] Hosszú M., Algebrai rendszereken értelmezett függvényegyenletek, I., *MTA III. Oszt. Közleményei* **13** (1962), 303–315.

[9] F. Radó, Équations fonctionnelles caracterisant les nomogrammes avec trois echelles rectilinges, *Math. Cluj*, (1959), 19–23.

[10] E. Vincze, Über die Charakterisierung der associativen Funktionen von mehreren Veränderlichen, *Publ. Math.*, **6** (1959), 241–253.

(Beérkezett: 1962. IX. 17)