A FINSLER-FÉLE FIBRÁLT TEREK ELMÉLETÉHEZ

Írta: SOÓS GYULA

Bevezetés

A differenciálható fibrált terek elmélete (l. pl. [7], [8], [10]) a differenciálgeometria legújabb fejezete. Az elmélet alapja az EHRESMANNtól ([4]) származó, a principális fibrált terek felett értelmezett lineáris összefüggés fogalma, amely visszatükrözi, általános formában s szigorú fogalmazásban a CARTAN és más geometerek által vizsgált különböző differenciálható sokaságok közös geometriai tartalmát, más szavakkal, a differenciálgeometriai struktúrát.

Ezt az elméletet amiatt, hogy tekintetbe veszi a differenciálgeometriai struktúra hordozójának, a bázistérnek topológiai tulajdonságait és eszközeit is ennek megfelelően választja meg, szokás globális differenciálgeometriának is nevezni.

Ez a dolgozat, az EHRESMANN-féle gondolatmenet szellemében a FINSLER-féle fibrált terek (l. II. 2. 1. Def.) problematikájával foglalkozik. A globális megalapozást megnehezíti ezeknek a tereknek többrétű, specifikus szerkezete. Az EHRESMANN-módszer formális alkalmazása azzal a veszéllyel járna, hogy elhalványulna, helyesebben nem domborodnék ki jellegzetesen a mindenek előtt való geometriai lényeg, holott az *általánossal* szemben itt a *speciális* szerkezeti tulajdonságokban gazdagabb voltán van a hangsúly. Ezt szem előtt tartva vizsgálataimban arra törekedtem, hogy a rendelkezésre álló lehetőségekkel, a meglevő és megalkotandó módszerekkel úgy éljek, hogy az elsődleges cél mindig a geometriai lényeg megragadása legyen és hogy ennek elérését másodlagos tényezők előtérbe kerülése ne hátráltassa.

Ezért az I. fejezetben, minimális méretezésben, csak a legszükségesebb tudnivalók összefoglalására szorítkozom. Ami az elért eredményeket illeti, a II. fejezetből talán elsősorban a lineáris összefüggés új, esetünkben legcélszerűbb bevezetését, az érintő terek erre alapuló direkt szétbontását, a FINSLER-nyaláb torzió- és görbületelméletének teljesen geometriai (infinitezimális meggondolásoktól mentes) megalapozását emelném ki.

A III. fejezet a FINSLER-nyaláb automorfizmusaival (a lineáris összefüggést megőrző differenciálható homeomorfizmusaival) foglalkozik módszeresen. E fejezetben a figyelmet az érintő térben operáló endomorfizmus-csoport bevezetésére legyen szabad felhívnom. Ez a csoport sajátos módon tükrözi vissza a tér görbületi viszonyait és remélhetően hasznosnak bizonyul bizonyos problémák vizsgálatában.

A dolgozat felépítése axiomatikusnak tekinthető. A globális megalapozás meszszemenően leegyszerűsített, áttekinthető tárgyalásmódot tesz lehetővé, a klasszikus tenzorkalkulus alkalmazására csak ott került sor, ahol ezt a probléma természete indokolta.

A fibrált terek s a rokon területek magyar terminológiája még nem alakult ki, ezért elkerülhetetlenné vált egy sor kifejezés magyar megfelelőjének megválasztása s további új elnevezések bevezetése. Nem állítom, hogy a javasolt elnevezések megválasztása minden esetben szerencsés módon történt.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

I. Differenciálható sokaságok
1. A differenciálható struktúra 18
2. Lokális érintővektor. Érintőtér. Duális érintőtér 20
3. Vektormező. Differenciálformák 23
4. Tenzorok, külső differenciálformák 25
5. Differenciálható leképezések. Egyparaméteres globális és lokális transzformáció-csoport 26

II. A Finsler-féle fibrált tér
1. Differenciálható fibrált terek 29
2. Az M sokasághoz rendelt Finsler-féle fibrált tér 31
3. Lineárisan összefüggő Finsler-féle fibrált tér 32
4. Kapcsolat a klasszikus elmélettel 36
5. Párhuzamosság. Az érintőtér direkt szétbontása 41
6. A lineárisan összefüggő Finsler-féle fibrált tér struktúrája (torzió- és görbületelmélet) 45
7. Differenciáloperátorok (kovariáns deriváltak) 47

III. A Finsler-féle fibrált tér automorfizmus-csoportjának geometriája
1. Automorfizmusok. Automorfizmus-csoport 50
2. Lokális automorfizmusok 53
3. Az érintőtér endomorfizmus-csoportja 56
4. Automorfizmusok Finsler-féle metrikus terekben 60
5. Záró megjegyzések 62

Irodalom 64

I. DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOK

1. A differenciálható struktúra

Alapsokaságnak nevezzük az M topologikus teret, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

B 1.: M *Hausdorff*-féle, összefüggő topologikus tér, dim $M=n$,

B 2.: M lokálisan euklideszi.

Ez utóbbi tulajdonság annyit jelent, hogy M bármely x pontjának létezik olyan U környezete, amely az R^n n-dimenziós euklideszi tér K^n nyílt egységgömbjével homeomorf. (K^n helyett természetesen bármilyen vele homeomorf $E \subset R^n$ halmaz is vehető.)

Jelölje φ_U a B 2. alapján létező

$$\varphi_U : \quad U \to E_U \subset R^n, \quad E_U \rightleftarrows K^n$$

homeomorfizmust. A $\varphi_U(x) \in E_U$ pont derékszögű koordinátái legyenek rendre $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (x^i)$. Megállapodás szerint az (x^i) számrendszert az $x \in U$ pont *koordinátáinak* nevezzük. Az

$$x \to x^i(x) \in R \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

leképezés az i-edik *koordinátafüggvény*. Az $\{U; \varphi_U; E_U\}$ hármast *lokális koordinátarendszernek* nevezzük, U a lokális koordinátarendszer *tartománya*. A B 2. követelmény következményeként azt kaptuk, hogy M bármely pontja eleme valamely koordinátakörnyezetnek.

Ha $x \in U \cap V$, a φ_U, illetve φ_V homeomorfizmusok segítségével az alábbi homeomorfizmus értelmezhető:

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \quad \varphi_V(U \cap V) \to \varphi_U(U \cap V)$$

Mivel $\varphi_U : U \to E_U$, $\varphi_V : V \to E_V$, ezért

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \quad E_V \to E_U,$$

az $U \cap V$ metszet E_V-be eső képét E_U-ba eső képébe képezi le homeomorf módon. Ha $x_U^i(x)$ az U, $x_V^i(x)$ a V felett érvényes koordinátafüggvények, $U \cap V$ felett a $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ leképezés az

$$x_U^i(x) = \varphi_{UV}^i(x_V(x)) \tag{1.1}$$

függvényrendszerrel írható le. Az (1. 1) függvényrendszert *lokális koordinátatranszformációnak* nevezzük. Ez a transzformáció C^r-osztályú, ha $\varphi^i \in C^r$ és $J_{UV} \neq 0$, ahol $J_{UV} = \det\left(\frac{\partial x_U}{\partial x_V}\right)$ az (1. 1) rendszer *Jacobi*-determinánsa.

Legyen $\mathfrak{A} = \{U_\alpha; \varphi_{U_\alpha}; E_{U_\alpha} | \alpha \in I\}$ lokális koordinátarendszerek valamely halmaza. $\mathfrak{A}$-t az M alapsokaság C^r-atlaszának nevezzük, ha $\mathfrak{A}$ kielégíti az alábbi két követelményt:

$\mathfrak{A}_1^{(r)}$: Az U_α-k lefedik M-et: $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$.

$\mathfrak{A}_2^{(r)}$: Ha U_α, $U_\beta \in \mathfrak{A}$ és $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor

$$\varphi_{U\alpha} \circ \varphi_{U\beta}^{-1} \in C^r \text{ és } J_{U\alpha U\beta} \neq 0.$$

1. 1. DEFINÍCIÓ. Az $\mathfrak{M} = \{M, \mathfrak{A}^{(r)}\}$ kettőst C^r-osztályú *differenciálható sokaságnak* nevezzük. Az M alapsokaság a differenciálható sokaság *hordozója*, az $\mathfrak{A}^{(r)}$ atlasz pedig *M koordinátarendszere.*

Tekintsük az $A = \{\mathfrak{A}_\sigma^{(r)}, \sigma \in \Sigma\}$ halmazt, azaz, az M alapsokaság C^r-osztályú atlaszainak rendszereit. $\mathfrak{A}_\sigma^{(r)} \sim \mathfrak{A}_\tau^{(r)} : \mathfrak{A}_\sigma^{(r)}$ ekvivalens $\mathfrak{A}_\tau^{(r)}$-val, $(\mathfrak{A}_\sigma^{(r)}, \mathfrak{A}_\tau^{(r)} \in A)$, ha e két atlasz egyesítése ismét A-hoz tartozik. Az $\mathfrak{A}^{(r)} = \{U_\alpha; \varphi_\alpha; E_\alpha | \alpha \in I\}$ és az $\mathfrak{A}^{(r)\prime} = \{U'_\beta; \varphi'_\beta; E'_\beta | \beta \in I'\}$ C^r-atlaszok egyesítésén az

$$\{U_\alpha, U'_\beta;\ \varphi_\alpha, \varphi'_\beta;\ E_\alpha, E'_\beta \mid \alpha \in I, \beta \in I'\}$$

atlaszt értjük. Könnyű igazolni, hogy ez a reláció ekvivalencia-reláció. Jelöljön $A^{(r)}$ egy ekvivalencia-osztályt.

1. 2. DEFINÍCIÓ. Az $\{M, A^{(r)}\}$ kettőst *differenciálható struktúrának nevezzük M* fölött. Azt mondjuk, hogy $\{M, \mathfrak{A}^{(r)}\}$ és $\{M, \mathfrak{A}^{(r)\prime}\}$ *ugyanazt* a differenciálható struktúrát realizálják, ha $\mathfrak{A}^{(r)} \in A^{(r)}$ és $\mathfrak{A}^{(r)\prime} \in A^{(r)}$.

Ugyanaz az M alapsokaság egyidejűleg több, nem-ekvivalens struktúra hordozója lehet. A C^r-osztály r rendszáma nyilván bármilyen pozitív egész lehet. Ha $r = \infty$, vagy $r = \omega$, a differenciálható sokaságot *korlátlanul differenciálhatónak*, vagy *analitikusnak* nevezzük. A továbbiakban megállapodunk abban, hogy a tekintett sokaságok általában C^∞-osztályúak.

Az $\mathfrak{M} = \{M, \mathfrak{A}^{(r)}\}$ differenciálható sokaságot irányíthatónak nevezzük (az $\mathfrak{A}^{(r)}$ atlaszra nézve), ha bármely $U \cap V \neq \emptyset$ esetén $J_{UV} > 0$, (vagy $J_{UV} < 0$).

2. Lokális érintővektor. Érintőtér, duális érintőtér

Legyen f valós értékű függvény M fölött:

$$f: \quad M \to R, \quad x \to f(x) \in R.$$

Jelölje f_U az f leszűkítését az U koordinátakörnyezetre: $f_U = f|U$. E környezetben nyilván

$$f_U(x) = f_U^*(x^1(x), x^2(x), \ldots, x^n(x)), \tag{2.1}$$

ahol $x^i(x)$ az U feletti i-edik koordinátafüggvény.

Az f függvény *C^r-osztályú*, ha bármely U fölött a (2. 1) előállításban fellépő f_U^* függvény az (x^i) lokális változók C^r-osztályú függvénye. Nyilvánvaló, hogy ha $f \in C^r$ az $\mathfrak{A}^{(r)}$ atlaszra vonatkozóan, ugyanilyen tulajdonságú bármely, $\mathfrak{A}^{(r)}$-rel ekvivalens atlasz alapulvétele esetén is, azaz, e fogalomalkotás független a koordinátarendszer megválasztásától.

Jelöljük $\mathscr{F}_M$-mel az M sokaság fölött értelmezett differenciálható függvények halmazát. $\mathscr{F}_{x_0}$-lal jelöljük az x_0 környezetében differenciálható függvények családját. $\mathscr{F}_{x_0}$ nyilván gyűrű.

2. 1. DEFINÍCIÓ. Az M sokaság x_0 támadó-pontú L_{x_0} *lokális érintővektora* olyan

$$L_{x_0}: \quad \mathscr{F}_{x_0} \to R, \qquad f \to L_{x_0}(f) \in R,$$

leképezés, amelyre az alábbiak teljesülnek:

LTV 1.: $L_{x_0}(k) = 0, \; k = \text{const.},$

LTV 2.: $L_{x_0}(k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 L_{x_0}(f_1) + k_2 L_{x_0}(f_2),$

LTV 3.: $L_{x_0}(fg) = g(x_0) L_{x_0}(f) + f(x_0) L_{x_0}(g),$

$(k_1, k_2 = \text{const.}, f, g, fg \in \mathscr{F}_{x_0}).$

T_{x_0}-lal jelölve az $\{L_{x_0}\}$ halmazt, kimutatjuk, hogy T_{x_0} vektortér a valós számok teste felett, továbbá azt, hogy $\dim T_{x_0} = \dim M = n$. T_{x_0}-ban az additív struktúrát az

$$(L_1, L_2) \to L_1 + L_2: \quad (L_1 + L_2)(f) = L_1(f) + L_2(f)$$
$$(k, L) \to kL: \quad (kL)(f) = kL(f)$$

relációkkal értelmezzük. T_{x_0} neutrális eleme a $0(f) = 0$ vektor.

T_{x_0} n-dimenziós voltát az alábbiakban bizonyítjuk. Legyen $f_U \in \mathscr{F}_{x_0}$. Értelmezzük az f_i függvényeket a következő módon

$$f_i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \begin{cases} \dfrac{f(x^1, \ldots, x^i, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n) - f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x_0^i, \ldots, x_0^n)}{x^i - x_0^i}, & \\ \qquad\qquad \text{ha} \quad x^i \neq x_0^i, & \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0}, \qquad \text{ha} \quad x^i = x_0^i, & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{2.2}$$

ahol x^i az $x \in U$, x_0^i pedig az $x_0 \in U$ lokális koordinátái. Nyilván $f_i \in \mathscr{F}_{x_0}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Azonnal látni, hogy az

$$f_U(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(x)(x^i - x_0^i) + f(x_0)$$

előállítás érvényes. Számítsuk ki $L_{x_0}(f)$-et. Az LTV követelmények alkalmazásával

$$L_{x_0}(f) = L_{x_0}(\sum f_i \cdot (x^i - x_0^i)) = \sum L_{x_0}(f_i \cdot (x^i - x_0^i)) =$$
$$= \sum [(x^i - x_0^i)_{x_0} L_{x_0}(f_i) + (f_i)_{x_0} L_{x_0}(x^i - x_0^i)] =$$
$$= \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0} L_{x_0}(x^i),$$

mivel (2. 2) miatt $(f_i)_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_0}$ és $L_{x_0}(x^i - x_0^i) = L_{x_0}(x^i)$. Az

$$L_{x_0}(f) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0} L_{x_0}(x^i), \; f \in \mathscr{F}_{x_0}$$

kifejezésből, avagy, operátor-írásmódra térve át, az

$$L_{x_0} = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} L_{x_0}(x^i) \tag{2.3}$$

alakból nyilvánvaló, hogy L_{x_0}-t ismerjük, ha ismeretesek az x^i koordinátafüggvények feletti értékei. Az

$$L_{x_0}(x^i) = \xi^i \in R$$

számokat az L_{x_0} vektor (U-ra vonatkozó) lokális komponenseinek nevezzük. Ezek felhasználásával (2. 3) a

$$L_{x_0} = \sum \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} \tag{2. 4}$$

alakban írható. Az

$$\underset{(i)}{L_{x_0}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2. 5}$$

operátorok nyilván lokális érintővektorok az x_0 pontban. (2. 4)-ből, továbbá abból, hogy ezek a vektorok x_0-ban lineárisan függetlenek, következik, hogy a (2. 5) rendszer T_{x_0} *bázisa*, azaz, dim $T_{x_0} = n$. Nevezzük a (2. 5) vektorrendszert *természetes bázisnak*, vagy természetes *n-élnek*. T_{x_0} bármely más n-élje, $\{e_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$,

$$e_i = R_i^s \left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{x_0}, \quad (R_i^s) \in GL(n, R), \tag{2. 6}$$

alakban adható meg. ($GL(n, R)$ az n-edrendű, valós elemű reguláris matrixok csoportja). Az

$$\{e_i\}_{x_0} \rightleftharpoons (R_i^s) \tag{2. 7}$$

hozzárendelés nyilván kölcsönösen egyértelmű. R_{x_0}-lal a továbbiakban az x_0 támadópontú n-élek halmazát jelöljük.

$T^*_{x_0}$ jelölje a T_{x_0} vektortér duális terét, azaz, T_{x_0} lineáris formáinak terét. Kimutatjuk, hogy $\dim T^*_{x_0}=n$, továbbá azt, hogy T_{x_0} bármely bázisához kanonikus módon $T^*_{x_0}$-nak egy ún. duális bázisa tartozik. Írjuk evégből az

$$f \to L(f) \in R, \qquad L \in T_{x_0}, f \in \mathscr{F}_{x_0}$$

leképezést $\langle f, L\rangle$ alakban. Ha f-t rögzítjük s L befutja T_{x_0} elemeit, az

$$\omega_f(L) = \langle f, L\rangle = L(f) \in R$$

egyenlettel értelmezett ω_f lineáris függvény T_{x_0} felett, azaz, $\omega_f \in T^*_{x_0}$. Ezt a formát az $f \in \mathscr{F}_{x_0}$ által indukált lineáris formának nevezzük. Tegyük f helyébe rendre az x^i koordinátafüggvényeket. Az

$$\omega^i(L) = \omega_{x^i}(L) = L(x^i) = \xi^i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{2.8}$$

módon értelmezett formákról kimutatható, hogy $T^*_{x_0}$ bázisát alkotják. (2. 8) szerint ω^i az a forma, amely L-hez annak i-edik lokális komponensét rendeli. (Ez a tulajdonság ω^i definíciójaként szolgálhat.) Speciálisan ha $L = \underset{(j)}{L}$,

$$\omega^i(\underset{(j)}{L}) = \delta^i_j, \quad (\delta^i_j = 1, \text{ ha } i=j, \text{ egyébként nulla}), \tag{2.9}$$

hiszen $\underset{(j)}{L}$ lokális komponensei az $\{\underset{(k)}{L}\}$ természetes bázisra vonatkozóan nyilván δ^j_k. A hagyományt követve megtartjuk az

$$\omega^i = (dx^i)_{x_0} \tag{2.10}$$

jelölést. (2. 9) így is írható

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \delta^i_k. \tag{2.11}$$

A $\{dx^i\}_{x_0}$ bázist a (2. 11) tulajdonság miatt a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{x_0}$ bázis *duális bázisának, kobázisának* nevezzük. $T^*_{x_0}$ egy tetszőleges ω eleme ezek szerint

$$\omega = \Sigma \alpha_i (dx^i)_{x_0}$$

alakban írható. Az α_i számok ω *lokális komponensei.*

2. 2. DEFINÍCIÓ. A T_{x_0}, illetve a $T^*_{x_0}$ vektortér az M sokaság *érintő-*, illetve *duális érintőtere* az x_0 pontban. T_{x_0} elemeit *kontravariáns*, $T^*_{x_0}$ elemeit *kovariáns* érintővektoroknak nevezzük.

Ha $\{e_i\}_{x_0} \in R_{x_0}$, a

$$\theta^j(e_i) = \delta^j_i, \quad \theta^j \in T^*_{x_0} \tag{2.12}$$

relációval értelmezett $\{\theta^j\}_{x_0}$ rendszert a $\{e_i\}_{x_0}$ bázis duális bázisának, duális n-éljének nevezzük. A duális n-élek halmazát $R^*_{x_0}$-lal jelöljük. Nyilván

$$\theta^j = \bar{R}^j_s (dx^s)_{x_0}, \quad (\bar{R}^j_s) \in GL(n, R).$$

Ha $e_i = R_i^m \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{x_0}$ és (2. 12) fennáll, azonnal látni, hogy

$$R_i^m \bar{R}_m^j = \delta_j^i,$$

azaz $\bar{R} = R^{-1}$, ha $R = (R_i^k) \in GL(n, R)$.

Az eddigiek során x_0 az M sokaság rögzített, egyébként tetszőleges pontja volt. A 2. pontban elmondottak röviden így összegezhetők: Az M alapsokaságon a differenciálható struktúra az

$$x \to T_x, \quad x \to T_x^*, \quad x \to R_x, \quad x \to R_x^*$$

hozzárendeléseket teszi lehetővé.

2. 3. DEFINÍCIÓ. A $T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x$ és $T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*$, illetve az $R(M) = \bigcup_{x \in M} R_x$ és az $R^*(M) = \bigcup_{x \in M} R_x^*$ halmazokat rendre az M sokaság *érintő-, duális érintőnyalábjának*, ill. *n-él* és *duális n-élnyalábjának* nevezzük.

Látni fogjuk, hogy ezek a nyalábok egy később értelmezendő általánosabb fogalomnak, a differenciálható fibrált térnek számunkra legfontosabb speciális esetei.

3. Vektormező. Differenciálforma. (Pfaff-forma)

3. 1. DEFINÍCIÓ. Az M sokaság Y *vektormezője* olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya M, értékei pedig lokális érintővektorok, pontosabban

$$Y: \quad x \to Y_x, \qquad x \in M, \quad Y_x \in T_x.$$

Y_{x_0} az Y mező „értéke" az x_0 pontban.

Bármely Y vektormezőhöz, illetve $f \in \mathscr{F}_M$ függvényhez egyértelműen egy $Y(f)$ függvény rendelhető az alábbi értelmezés szerint:

$$Y(f): \quad x \to Y_x(f) \in R.$$

Az Y vektormező *differenciálható*, ha $Y(f)$ differenciálható, azaz, ha $Y(f) \in \mathscr{F}_M$. Legyen $Y_U(f) = Y(f)|U$, akkor a 2. pontban elmondottak alapján

$$Y_U(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} Y(x^i = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} y^i(x),$$

azaz Y differenciálhatósága az $y^i = Y(x^i)$ függvények (Y *komponens-függvényei*) differenciálhatóságát jelenti. Ha nem is említjük kifejezetten, a továbbiak során vektormezőn mindig differenciálható vektormezőt értünk.

Az X és Y vektormezők összegén az

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f) \in \mathscr{F}_M \tag{3. 1}$$

relációval értelmezett $X+Y$ mezőt, az Y mező φY skalárszorosán, ($\varphi \in \mathscr{F}_M$), a

$$(\varphi Y)(f) = \varphi \cdot Y(f) \in \mathscr{F}_M \tag{3. 2}$$

tulajdonsággal jellemzett mezőt értjük.

Ha $\mathfrak{V}_M$-mel M vektormezőinek halmazát jelöljük, akkor (3. 1) és (3. 2) alapján világos, hogy $\mathfrak{V}_M$: modulus, pontosabban $\mathscr{F}_M$-*modulus*. Ha skaláris szorzóként függvények helyett csak számokat engedünk meg, $\mathfrak{V}_M$ nyilván *vektortér*, (általában végtelen dimenziójú) az R test fölött.

3. 2. DEFINÍCIÓ. Az X és Y vektormezők *kommutátorán* (zárójeles kifejezésen) az $[X, Y]$ szimbólummal jelölt s az

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

módon értelmezett mezőt értjük. $[X, Y]$ tulajdonságai:

a) $$[X, Y] = -[X, Y], \text{ tehát } [X, X] = 0,$$

b) $$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \text{ (Jacobi-identitás).}$$

Az $(X, Y) \to [X, Y]$ művelet bevezetésével $\mathfrak{V}_M$ az R test felett *Lie-algebrát* alkot. $\mathfrak{V}_M$ Lie-algebra, illetve modulus-struktúrája között összefüggést a

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f\cdot(X\cdot g)\,Y - g\cdot(Yf)\,X \tag{3. 3}$$

formula adja meg.

A vektormező értelmezéséhez analóg módon definiálható a formamező, a differenciálforma fogalma. *Differenciálformának* nevezünk minden

$$\omega : x \to \omega_x \in T_x^*$$

hozzárendelést. Ha $Y \in \mathfrak{V}_M$, értelmezhetjük az

$$\omega(X) : x \to \omega_x(Y_x) \in R \tag{3. 4}$$

függvényt. Megkívánjuk, hogy $\omega(X) \in \mathscr{F}_M$. Az ω_1 és ω_2 formák $\omega_1 + \omega_2$ összegét, s ω-nak $\varphi\omega$ skalárszorosát az

$$(\omega_1 + \omega_2)(X) = \omega_1(X) + \omega_2(X), \quad (\varphi\omega)(X) = \varphi\cdot\omega(X) \tag{3. 5}$$

definiáló relációkkal értelmezzük. Ha $\mathfrak{V}_M^* = \{\omega\}$, akkor (3. 5) alapján $\mathfrak{V}_M^*$: $\mathscr{F}_M$-modulusnak tekinthető. Az ω forma ω_U leszűkítése nyilván

$$\omega_U = \sum \omega_i(dx^i)$$

alakban írható, hiszen a dx^i formák (az U koordinátakörnyezet felett) lineárisan függetlenek.

Bármely $f \in \mathscr{F}_M$ függvényhez tartozik egy $\omega_f \in \mathfrak{V}_M^*$ differenciálforma az

$$\omega_f(X) = X(f) \tag{3. 6}$$

definíció alapján. Az ω_f forma f *teljes differenciálja*. Bevezetve a hagyományos $\omega_f = df$ jelölést, (3. 6) így is írható

$$(df)(X) = X(f). \tag{3. 7}$$

4. Tenzorok, külső differenciálformák

Vegyük az M sokaság T_x, illetve T_x^* érintőtereinek s, illetve r példányát s készítsük el a

$$\mathfrak{T}_x = \underbrace{T_x \times \ldots \times T_x}_{(r\text{-szer})} \times \underbrace{T_x^* \times \ldots \times T_x^*}_{(s\text{-szer})}$$

szorzatot. Az M sokaság (s, r)-*típusú* (másképpen: s-szeresen kovariáns, r-szeresen kontravariáns) t_x *tenzora* az x pontban a $\mathfrak{T}_x$ direkt szorzaton értelmezett, valós értékű multilineáris függvény:

$$t_x(X_1, \ldots, X_r\ ;\ \omega_1, \ldots, \omega_s) \in R,$$

ahol $X_i \in T_x$, $\omega_j \in T_x^*$. Az (s, r)-típusú t_x tenzorok (R fölött) vektorteret alkotnak, amelyet T_r^s-sel jelölünk. T_x, illetve T_x^* elemei nyilván az (0, 1)-, ill. (1, 0)-típusú tenzorokkal azonosíthatók.

4. 1. DEFINÍCIÓ. Az M sokaság (s, r)-*típusú tenzormezője* olyan t függvény, amelynek értelmezési tartománya M, értékei pedig (lokális) tenzorok:

$$t\ :\ \ x \to t_x \in T_r^s.$$

A t mezőt differenciálhatónak mondjuk, ha t lokális komponensei (t_U komponensei) a koordináták differenciálható függvényei.

A külső differenciálforma értelmezéséhez vegyük a $\mathfrak{V}_M$ modulus r példányának direkt szorzatát:

$$V = \mathfrak{V}_M \times \ldots \times \mathfrak{V}_M.$$

Az M tér ω *r-edfokú külső differenciálformáján*, röviden: *r-formáján* V-nek $\mathscr{F}_M$-be való olyan leképezését értjük, amelyre teljesül

DF 1.: $\omega(X_1, \ldots, X_r) \in \mathscr{F}_M$ alternáló, azaz

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) = (\operatorname{sign} \sigma)\, \omega(X_1, \ldots, X_r);$$

DF 2.: $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ multilineáris ($r-1$ számú változót rögzítve a leképezés Plaff-formát eredményez).

(A $\operatorname{sign} \sigma$ a $\sigma\ :\ \ (1, \ldots, r) \to (\sigma(1), \ldots, \sigma(r))$ permutációk halmazán értelmezett függvény: $\operatorname{sign} \sigma = \pm 1$ aszerint, hogy σ páros, avagy páratlan).

Az r-formák $\mathfrak{D}^r$ halmazán az $\omega_1 + \omega_2, f\omega$ műveletek értelmezése nyilvánvaló.

Ha $\omega_1 \in \mathfrak{D}^r$ és $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s$, akkor $\omega_1 \wedge \omega_2$-vel a két forma (ismert módon értelmezett) *külső szorzatát* jelöljük: $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathfrak{D}^{r+s}$. A $\mathfrak{D}^1$ teret $\mathfrak{V}_M^*$-gal, $\mathfrak{D}^0$-t $\mathscr{F}_M$-mel azonosítva, a *külső deriválás* d operációja az alábbi módon értelmezhető:

ED 1.: Ha $f \in \mathscr{F}_M (= \mathfrak{D}^0)$, akkor $df = f$ teljes differenciálja.

ED 2.: $d\omega \in \mathfrak{D}^{r+1}$, ha $\omega \in \mathfrak{D}^r$; a $d: \mathfrak{D}^r \to \mathfrak{D}^{r1+}$ leképezés lineáris.

ED 3.: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$, $(\omega_1 \in \mathfrak{D}^r)$, $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s)$,

ED 4.: $d(d\omega) = 0$.

Ismeretes, hogy az ED követelmények a d operátort egyértelműen meghatározzák.

Az r-formákon még az alábbi két operációt szokás értelmezni.

Ha $X \in \mathfrak{V}_M$ és ω külső forma, ω-nak X-re vonatkozó $L(X)\omega$ ún. *Lie-deriváltja* ismét formát eredményez. Az $L(X)$ lineáris operátor definiáló relációi:

LD 1.: $L(X)f = X(f) \in \mathscr{F}_M, f \in \mathscr{F}_M$,

LD 2.: $L(X)(d\omega) = d(L(X)\omega)$,

LD 3.: Ha ω_1 és ω_2 r-, illetve s-forma, $L(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L(X)\omega_2)$.

Az $i(X): \omega \to i(X)\omega$ lineáris operátort X-re vonatkozó belső szorzásnak s $i(X)\omega$-t az ω forma s az X mező *belső szorzatának* nevezzük, ha $i(X)$ eleget tesz az alábbi követelményeknek:

IP 1.: $i(X)f = 0, f \in \mathscr{F}_M$,

IP 2.: $i(X)\omega = \omega(X)$, ha ω Pfaff-forma (ld.: (3. 4)),

IP 3.: Ha ω_1 és ω_2 q-, illetve r-forma, $i(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^q \omega_1 \wedge (i(X)\omega_2)$.

Felsoroljuk a d, $L(X)$, $i(X)$ operátorok legfontosabb tulajdonságait:

(4. 1) $$L([X, Y]) = L(X)L(Y) - L(Y)L(X)$$

(4. 2) $$L(X)i(Y) - i(Y)L(X) = i([X, Y])$$

(4. 3) $$L(X) = i(X)d + di(X)$$
(ez a reláció $L(X)$ definíciójának is tekinthető)

(4. 4) $$i(X)i(X) = 0.$$

A DF definícióban szereplő $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ az $i(X)$ segítségével így írható:

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!} i(X_1)i(X_2)\ldots i(X_r)\omega.$$

Ha ω Pfaff-forma (1-forma), akkor

(4. 5) $$(d\omega)(X_1, X_2) = X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \frac{1}{2}\omega([X_1, X_2]).$$

5. Differenciálható leképezések. Egyparaméteres globális és lokális transzformáció-csoportok

5. 1. DEFINÍCIÓ. Legyenek $\mathfrak{M} = \{M, \mathfrak{A}\}$ és $\mathfrak{M}' = \{M', \mathfrak{A}'\}$ differenciálható sokaságok. A

$$\varphi : \quad M \to M', \qquad x \to \varphi(x) \in M'$$

leképezést *differenciálhatónak* nevezzük az $x \in M$ pontban, ha bármely $f' \in \mathscr{F}'_{\varphi(x)}$ függvényre fennáll: $f'(\varphi(x)) \in \mathscr{F}_x$. ($\mathscr{F}_x$, illetve $\mathscr{F}'_{\varphi(x)}$ az M sokaság x, illetve az M' sokaság $\varphi(x)$ pontja környezetében értelmezett differenciálható függvények gyűrűje.) A φ leképezés differenciálható, ha minden $x \in M$ pontban differenciálható. Ha φ az M-et homeomorf módon képezi le M'-re, φ és φ^{-1} differenciálhatók, φ-t *differenciál-*

ható homeomorfizmusnak (diffeomorfizmusnak) nevezzük. (Ekkor nyilván $\dim M = \dim M'$.)

Lokális koordináták bevezetésével a definíció így formulázható: ha (x^i) koordinátarendszer x-nek U környezetében és (x'^i) a $\varphi(x)$ valamely U' környezetében, akkor az $x \to \varphi(x)$ leképezés az

$$x'^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{5.1}$$

függvényrendszerrel adható meg. A φ leképezés differenciálható akkor és csak akkor, ha a $\varphi^i(x)$ függvények differenciálhatóak az x^i változók szerint.

A φ leképezés, mint látni fogjuk, a T_x érintőtérnek $T_{\varphi(x)}$-be való lineáris leképezését indukálja. Legyen $Y_x \in T_x$ és $f' \in \mathscr{F}'_{\varphi(x)}$. Az

$$Y'_{\varphi(x)}(f') = Y_x(f' \circ \varphi) \tag{5.2}$$

relációval értelmezett $f' \to Y'_{\varphi(x)}(f')$ leképezés nyilván lokális érintővektor $\varphi(x)$-ben: $Y'_{\varphi(x)} \in T_{\varphi(x)}$. Ezt a vektort az Y_x vektor φ-képének nevezzük s így jelöljük:

$$Y'_{\varphi(x)} = \varphi'_x(Y_x) = \varphi'_x \cdot Y_x. \tag{5.3}$$

A $\varphi'_x : T_x \to T_{\varphi(x)}$ leképezés nyilván lineáris, következésképpen T_x-et $T_{\varphi(x)}$-be homomorf módon képezi le.

A φ leképezés *reguláris*, ha bármely x pontban φ'_x monomorf (kernel $\varphi'_x = 0$). Ha φ diffeomorfizmus, φ'_x a megfelelő érintőtereket egymásra izomorf módon képezi le. Lokális koordináták felhasználásával (5. 3) így írható:

$$\eta'^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^s} \eta^s \begin{cases} i = 1, \ldots, \dim M' \\ s = 1, \ldots, \dim M, \end{cases} \tag{5.4}$$

tehát φ'_x reguláris, ha a $\dfrac{\partial(\varphi)}{\partial(x)}$ matrix rangja maximális.

Szokás a φ' leképezést φ *lineáris bővítésének* (vagy φ *differenciáljának*, $\varphi' = d\varphi$) is nevezni.

Ha $\omega \in T^*_{\varphi(x)}$ (duális érintőtér a $\varphi(x)$ pontban), a $\varphi^*_x \omega \in T^*_x$ formát a

$$(\varphi^*_x \omega)(Y_x) = \omega(\varphi'_x(Y_x)) = \omega(\varphi'_x \cdot Y_x)$$

relációval definiáljuk. Ez a definíció könnyen kiterjeszthető $\omega \in \mathfrak{D}^r$ esetére is. A $\varphi^*_x : T^*_{\varphi(x)} \to T^*_x$ lineáris leképezést φ *duális bővítésének* (φ *kodifferenciáljának:* $\varphi^* = \delta\varphi$) nevezzük. Ha

$$\varphi : \quad M \to M' \quad \text{és} \quad \psi : \quad M' \to M'',$$

akkor $\psi \circ \varphi : \quad M \to M''$ és

$$(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi', \quad (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \tag{5.5}$$

továbbá

$$d \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot d, \tag{5.6}$$

ahol d a külső differenciálás operátora.

A fenti fogalomalkotások nyilván érvényesek $M=M'$ esetében is. Különösen fontosak azok az (egy paramétertől függő) differenciálható leképezései M-nek, amelyek M vektormezőivel állanak szoros összefüggésben.

5. 2. DEFINÍCIÓ. M önmagába való differenciálható leképezéseinek φ_t, $(-\infty<t<\infty)$ serege *M egyparaméteres globális transzformáció-csoportja*, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

GTG 1.: Rögzített t esetén a $\varphi_t: \quad M\to M,\ x\to\varphi_t(x)$ leképezés differenciálható ($\varphi_0=$identikus leképezés).

GTG 2.: A $(t,x)\in R\times M\to\varphi_t(x)\in M$ leképezés mindkét változóban differenciálható.

GTG 3.: $\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s,\ s,t\in R.$

A φ_t csoporthoz kanonikus módon egy $X\in\mathfrak{V}_M$ vektormező rendelhető az

$$(Xf)(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[f(\varphi_t(x))-f(x)]$$

módon. Azt mondjuk, hogy X-et *φ_t indukálja*. Az $f\in\mathscr{F}_M$ függvény *φ_t-invariáns*, ha $Xf=0$.

Ha X az M tetszőleges vektormezője, nem létezik általában olyan φ_t globális csoport, amely X-et a fenti értelemben indukálja. Létezik azonban egy *egyparaméteres lokális transzformáció-csoport*, amelyet *X generál*. Pontosabb fogalmazásban: az M sokaság bármely x pontjához található egy U környezet és egy $\varepsilon=\varepsilon(x)>0$ szám, továbbá leképezéseknek egy φ_t, $|t|<\varepsilon$ serege az alábbi tulajdonságokkal:

LTG 1.: Rögzített $|t|<\varepsilon$ esetén a $\varphi_t: \quad U\to\varphi_t(U)$ leképezés differenciálható,

LTG 2.: A $(t,x)\to\varphi_t(x): \quad I_\varepsilon\times U\to\varphi_t(U)$ leképezés a változóktól differenciálható módon függ, $I_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)$.

LTG 3.: Ha $t,s\in I_\varepsilon$ és $t+s\in I_\varepsilon$, akkor teljesül $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$, (feltéve, hogy $x,\varphi_t(x)\in U$).

Ismeretes, hogy ha $X|U=\Sigma f^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, akkor a φ_t sereget a

$$\frac{d\varphi^i}{dt}=f^i(\varphi^i(t),\ldots,\varphi^n(t)) \tag{5.7}$$

egyenletrendszer $\varphi^i(t,x)$ megoldása szolgáltatja a $\varphi^i(0;x)=x^i$ kezdeti feltételek mellett. A $\{\varphi^i(t;x)\}=\varphi_t(x)$ leképezés lesz a lokális csoport t-hez tartozó leképezése. Ezt a leképezést, nyilvánvaló okokból, szokás

$$\varphi(t;x)=x(t)=\exp(tX)x \tag{5.8}$$

módon is jelölni. LTG 3. ezek szerint az

$$\exp(sX)\circ\exp(tX)x=\exp[(s+t)X]x$$

relációval fejezhető ki. Az $\exp(tX)$ lineáris folytatásait $\exp(tX)'$-vel, illetve $\exp(tX)^*$-gal jelöljük.

X és Y legyen két vektormező M fölött. Az

$$x(t) = \exp(-tY)\exp(-tX)\exp(tY)\exp(tX)x \tag{5.9}$$

görbét, egy, a Lie-csoportok elméletéből ismert fogalom analogonjaként az (X, Y) kettőshöz tartozó „kommutátor-görbének" nevezzük. Ismeretes, hogy az (5.9) érintővektora a $t=0$ pontban:

$$\dot{x}_0 = 2([X, Y]_0), \tag{5.10}$$

azaz, az X és Y mezők kommutátor-mezője értékének kétszerese a görbe kezdőpontjában.

II. A FINSLER-FÉLE FIBRÁLT TÉR

1. Differenciálható fibrált terek*

Az előző fejezetben a

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x$$

halmazt az M differenciálható sokaság érintőnyalábjának neveztük. Most kimutatjuk, hogy ez a halmaz, természetes módon, differenciálható struktúrával látható el s így $T(M)$ differenciálható sokasággá tehető. Értelmezzük evégből a

$$\pi : \quad T(M) \to M \tag{1.1}$$

leképezést, az ún. projekciót, az alábbi módon: ha $L_x \in T(M)$ lokális érintővektor,

$$\pi(L_x) = x \in M,$$

azaz, a π leképezés a lokális érintővektorokhoz azok támadási pontját rendeli. Nevezzünk két lokális vektort ekvivalensnek, ha projekciójuk azonos:

$$(L_x \sim Y_{x'}) \Leftrightarrow (x \equiv x').$$

Ez a reláció nyilván ekvivalencia-reláció, s azonnal látható, hogy az L_x-et tartalmazó ekvivalencia-osztály éppen $\pi^{-1}(x) = T_x$, azaz, a lokális érintőtér az x pontban. A $\pi^{-1}(x)$ halmazt x feletti *fibrumnak* nevezzük. Következésképpen $T(M) = \bigcup_{x \in M} \pi^{-1}(x)$, azaz, a $T(M)$ fibrumok egyesítési halmazaként fogható fel s mint ilyen, speciális esete a *fibrált tér* néven ismert fogalomalkotásnak. Mielőtt ezt a fogalmat teljes általánosságban értelmeznénk, mutassunk rá a $T(M)$ halmaz néhány fontos tulajdonságára. Legyen $U \subset M$ és tekintsük $T(M)$-nek U feletti részét, azaz, az

$$U' = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} \pi^{-1}(x) \subset T(M)$$

halmazt. Ezt a halmazt koordinátakörnyezetté tehetjük, ha a koordinátafüggvényeket az

$$L_x \to (x^i, y^i), \qquad \left(L_x = \sum y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \tag{1.2}$$

* [7], [14], [5].

hozzárendeléssel értelmezzük. Kissé általánosabb fogalmazással élve, a következőket mondhatjuk. Az x és x' feletti fibrumok, mint topologikus terek, nyilván homeomorfak, közös homeomorfjuk az F n-dimenziós (absztrakt) vektortér (mint topologikus tér). Az F teret *fibrum-típusnak* nevezzük. Válasszunk ebben a térben egy $\{\varepsilon^i\}$ bázist. Az (1. 2) formulában fellépő y^i számokkal (x legyen most rögzített) elkészíthetjük az $l=\Sigma y^i\varepsilon_i$ vektort. Miközben L_x befutja a $\pi^{-1}(x)=T_x$ fibrum elemeit, addig az l vektorok nyilván kitöltik F-et. Ha most x befutja U-t, nyilvánvaló, hogy $\pi^{-1}(U)$ az $U\times F$ direkt szorzattal homeomorf, más szavakkal a $T(M)$, mint topologikus tér, lokálisan, (de nem globálisan) direkt szorzatra esik szét, *lokálisan triviális.* Ha $\{U_\alpha;\ \alpha\in I\}$ az M lefedése, akkor a fentiek alapján az $\{U'_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ rendszer lefedi $T(M)$-et. A

$$\varphi_\alpha:\quad U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$$

homeomorfizmusokat *koordináta-homeomorfizmusoknak* nevezzük. Legyen $x\in U_\alpha$, akkor a

$$\varphi_{\alpha,x}:\quad (x)\times F\to\pi^{-1}(x)\qquad [x\times F\rightleftarrows F]$$

homeomorfizmus F-et az x feletti fibrumba viszi át, következésképpen a

$$\varphi_{\beta,x}^{-1}\circ\varphi_{\alpha,x}:\quad F\to F,\qquad x\in U_\alpha\cap U_\beta$$

homeomorfizmus az F fibrum-típus *transzformáció-csoportjának* valamely eleme (esetünkben a $GL(n, R)$ csoport eleme). A $T(M)$ sokaság felépítésében tehát az alábbi matematikai elemek fordulnak elő: $T(M)$, M, π, F, $GL(n, R)$, $\Phi=\{\varphi_\alpha\}$. E példát szem előtt tartva értelmezhetjük a differenciálható fibrált tér fogalmát.

1. 1. DEFINÍCIÓ. A $\mathfrak{B}=\{B, M, p, F, G, \Phi\}$ kollekciót *differenciálható fibrált térnek* nevezzük M fölött, ha teljesülnek az alábbi követelmények:

1. B : *a fibrált tér*, differenciálható sokaság;
2. M: *a bázistér*, differenciálható sokaság;
3. p : *a projekció*, B-t differenciálható módon képezi le M-re: $p:B\to M$;
4. F : *a fibrum-típus*, differenciálható sokaság;
5. G : *a strukturális csoport*, mint F transzformáció-csoportja, Lie-csoport;
6. Φ : *a koordináta-homeomorfizmusok* rendszere, $\Phi=\{\varphi_{U_\alpha}|U_\alpha\subset M, \alpha\in I\}$, elemei kielégítik a következő kirovásokat:

   a) a $\varphi_{U_\alpha}:\quad U_\alpha\times F\to p^{-1}(U_\alpha)\subset B$ leképezések differenciálható homeomorfizmusok;
   b) ha $x\in U_\alpha$, $y\in F$, akkor $(p\circ\varphi_{U_\alpha})(x, y)=x$;
   c) ha φ_{U_α}, $\varphi_{U_\beta}\in\Phi$, akkor a $\varphi_{U_\alpha,x}:\ x\times F\to p^{-1}(x)=F_x$ (fibrum) módon értelmezett leképezésekből származtatható $\varphi_{U_\beta,x}^{-1}\circ\varphi_{U_\alpha,x}:\quad F\to F$, $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ transzformációk a G strukturális csoport elemei;
   d) a $p^{-1}(U_\alpha)$-k lefedik B-t.

Az M sokaság érintővektorainak összessége tehát egy $\mathfrak{T}=\{T(M), \pi, M, F, GL(n, R), \Phi\}$ szimbólumú fibrált tér. Ugyancsak fibrált tér az n-élek halmaza is. Láttuk, hogy egy adott x pontban az n-élek R_x halmaza a $GL(n, R)=G_n$ csoporttal állt kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban. Az $R(M)$ fibrált tér szimbóluma tehát

$$\mathfrak{R}=\{R(M),\ M, p,\ G_n,\ G_n,\ \Psi\},$$

ahol $R(M)$ a fibrált tér, az n-élek halmaza, p az a leképezés, amely egy n-élhez annak érintési pontját rendeli, fibrumtípusa a G_n, strukturális csoportja ugyancsak G_n, amely önmagán operál az ismert módon.

Azokat a fibrált tereket, amelyek fibrum-típusa homeomorf a strukturális csoporttal, *principális fibrált tereknek* szokás nevezni. Ezek a terek, éppen egyszerűbb struktúrájuk miatt, fontos szerepet játszanak a fibrált terek elméletében.

2. Az M sokasághoz rendelt Finsler-féle fibrált tér

Kiindulásult ekintsük az M differenciálható sokaságot, valamint M felett a $V=T(M)$ érintőnyalábot. E paragrafusban a V bázissokaságon egy fibrált teret kívánunk értelmezni, amely a továbbiakban fundamentális szerepet játszik. A $GL(n,R)$ csoportot röviden G_n-nel jelöljük, egy elemét R-rel. A V felett értelmezendő Q fibrált tér (pontatlan fogalmazásban) úgy áll elő, hogy V minden $v=(x, y)$ pontjához fibrumként az n-élek összességét rendeljük. A Q tér tehát principális fibrált tér lesz.

2. 1. DEFINÍCIÓ. Az $\mathscr{F}=\{Q, p, V, G_n, G_n, \Psi\}$ principális fibrált teret az M sokaság V érintőnyalábjához tartozó *Finsler-féle fibrált térnek*, röviden: *Finsler-nyalábnak* nevezzük.

Az M sokaság $\{U_\alpha\}$ lefedéséből kiindulva az $\mathscr{F}$-nyaláb (vagy ami lényegében ugyanaz), a Q tér konstruálása a következőképpen történik. A $\{\pi^{-1}(U_\alpha), \alpha\in I\}$ rendszer, ezt az előző pontban már láttuk, lefedi V-t. Az $U_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)$ jelölést használva tekintsük az

$$U''_\alpha=p^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha))\subset Q \tag{2. 1}$$

halmazt. A Q tér koordinátafüggvényeit a

$$\psi_\alpha : \quad U'_\alpha\times G_n\to U''_\alpha, \qquad \psi_\alpha\in\psi$$

homeomorfizmusok segítségével értelmezzük. Ha $(x, y)\in U_\alpha$, $R\in G_n$, a

$$\psi_\alpha\{(x, y), R\}\to\left(x^i, y^i;\ R_1^s\frac{\partial}{\partial x^s}, \ldots, R_n^s\frac{\partial}{\partial x^s}\right) \tag{2. 2}$$

hozzárendelés, ahol R_m^s az $R\in G_n$ matrix elemei, koordinátarendszer bevezetését teszi lehetővé. Ha (x, y)-t rögzítjük s R változik, megkapjuk a Q sokaság (x, y) feletti $G_{(x,y)}$ fibrumát.

A p leképezés a (2. 2) lokális koordinátarendszerben

$$p(q) = p(x, y; R) = (x, y)\in V \tag{2. 3}$$

alakú, ahol (bár szabálytalanul), a $q=(x, y; R)$ jelöléssel Q-nak az $(x, y)\in V$, ill. $R\in G_n$ adatokkal meghatározott pontját jelöljük.

A $GL(n, R)$ a Q sokaság transzformáció-csoportjaként fogható fel az alább ismertetendő leképezés, az ún. *jobboldali eltolás* alapján. Legyen $\beta\in G_n$. A $\varphi_\beta: Q\to Q$:

$$\varphi_\beta : \quad q\to\varphi_\beta(q)\in Q, \qquad (q\in U''_\alpha) \tag{2. 4}$$

leképezést a ψ_α homeomorfizmus segítségével értelmezzük: ha $q=\psi_\alpha\{(x, y), R\}$,

akkor, definíció szerint,

$$\varphi_\beta(q) = q\beta = \psi_\alpha\{(x, y), R\beta\},$$

vagy lokális koordinátákban

$$(2.5) \qquad q\beta = (x, y; R)\,\beta = (x, y; R\beta) \to (x^i, y^i; R^1_s\beta^s_1, \ldots, R^n_s\beta^s_n).$$

Világos, hogy a G_n csoport egyszeresen tranzitív bármely $G_{(xy)} = G_v$ fibrumon (azaz, bármely $q \in G_v$, $q' \in G_v$ pár esetén van egy és csak egy olyan β, hogy $q' = q\beta$).

Szükségünk lesz még a Q tér homogén transzformációinak nevezett leképezéseire. Legyen $z \in R^+ \subset R$, (R^+ a pozitív valós számok halmaza). A

$$(2.6) \qquad z : \quad Q \to Q, \qquad q \to zq$$

homogén transzformáció, definíció szerint, a $q = (x, y; R)$ pontnak a $zq = (x, zy; R)$ pontot felelteti meg. Lokális koordinátarendszerben: $z : (x^i, y^i; R^i_k) \to (x^i, zy^i; R^i_k)$.

3. Lineárisan összefüggő Finsler-féle fibrált tér

Az előző paragrafusban láttuk, hogy a $\{Q, V, p, G_n, G_n\}$ szimbólumú, ún. *Finsler*-féle fibrált tér természetes módon differenciálható struktúrával látható el és $\dim Q = 2n + n^2$. Az I. fejezetben vázolt módon képezhetjük a Q sokaság érintőnyalábját:

$$(3.0) \qquad T(Q) = \bigcup_{q \in Q} T_q, \qquad (\dim T_q = 2n + n^2).$$

Azon a közvetlenül belátható tényen túl, miszerint a T_q vektortér (algebrailag) izomorf bármely $T_{q'}$-vel, a differenciálható struktúra egymagában nem nyújt lehetőséget a $q \neq q'$ pontokban értelmezett T_q, ill. $T_{q'}$ terek egymásra vonatkoztatására. A továbbiakban a Q téren egy geometriai természetű struktúrát értelmezünk (a lineáris összefüggés struktúráját), amely lehetőséget nyújt arra, hogy a fentebb említett egymásra vonatkoztatást (bizonyos feltételek mellett) megvalósítsuk. Mivel ez a vonatkozás (párhuzamos eltolás) a V alapsokaság görbéitől függ, térjünk ki röviden az idevágó fogalmak ismertetésére.

Jelentse $I = \{t | 0 \leqq t \leqq 1\}$ az R tér egységintervallumát. A

$$(3.1) \qquad c : \quad I \to V, \qquad t \to c(t) \subset V$$

leképezést, amely egyrészt topologikus, másrészt (szakaszonként) differenciálható, a V sokaság (szakaszonként) *sima görbéjének* nevezzük. A $v_0 = c(0), v_1 = c(1)$ a c görbe *kezdő-*, ill. *végpontja*. Lokális koordinátarendszerben a (3.1) leképezés a

$$(3.2) \qquad c(t) = (x(t), y(t)) = \{x^i(t), y^i(t)\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

függvényekkel írható le, s a (szakaszonkénti) differenciálhatóság az $x^i(t)$, $y^i(t)$ függvények t szerinti differenciálhányadosának létezésével ekvivalens.

Legyen $q_0 \in Q$ és $p(q_0) = v_0$. A

$$(3.3) \qquad \bar{c} : \quad I \to Q, \qquad \bar{c}(0) = q_0$$

differenciálható görbét a (3. 1) görbe *fedőgörbéjének* nevezzük, ha

$$p(\bar{c}(t)) = c(t), \qquad t \in I \tag{3.4}$$

teljesül.

Lokális koordinátarendszerben (3. 3) a

$$\bar{c}(t) = (x(t), y(t); R(t)) = \{x^i(t), y^i(t); R^i_k(t)\}$$

függvényrendszerrel adható meg.

A fibrált terek homotopia-elméletéből ismeretes*, hogy a $c(t) \subset V$, $q_0 \in Q$, $p(q_0) = v_0$ adatok előírása mellett mindig létezik olyan $\bar{c}(t) \subset Q$ görbe, amely a q_0 pontban kezdődik s a fenti értelemben fedi $c(t)$-t. A $\bar{c}(t)$ görbéről azt mondjuk, hogy a $\bar{c}(0) = q_0$-t $c(1) = q_1$-gyel összeköti. A $c(t)$-t fedő $\bar{c}(t)$ görbe azonban nincs egyértelműen meghatározva, pótlólagos feltételek szükségesek tehát, amelyek a (görbétől függő) $q_0 \to q_1$ hozzárendelést egyértelművé teszik. Ezt (egyelőre pontatlan fogalmazásban) azáltal érjük el, hogy a $c(t)$ fedőgörbéi közül egyet *egyértelműen* kitüntetünk. Legkényelmesebben ezt oly módon tehetjük, hogy a kitüntetendő fedőgörbe érintővektorainak viselkedését alkalmasan korlátozzuk (pl. azzal az előírással, hogy ezek a vektorok mindig a megfelelő pontban vett T_q érintőtér bizonyos részterébe essenek). Az így kitüntetett görbe q_1 végpontjáról azt mondjuk, hogy a q_0 pontból keletkezett, párhuzamos eltolás révén.

A párhuzamos eltolástól bizonyos feltételek teljesülését követeljük meg, amelyek geometriai tartalma nyilvánvaló. Ha az $(x(t), y(t); R(t))$ görbe kitüntetett, megköveteljük, hogy vele együtt az $(x(t), y(t); R(t)\alpha)$ görbe is legyen kitüntetett, azaz, a kitüntetés művelete a G_n csoporttal szemben legyen invariáns. Természetes az is, hogy a kitüntetett görbék, differenciálgeometriáról lévén szó, a (szakaszonként) sima görbék osztályából legyenek választhatók.

Ezek után rátérünk a lineáris összefüggés pontos értelmezésére.

Tekintsük a $\{Q, V, p, G_n, G_n\}$ fibrált tér $T(Q)$ érintőnyalábját, amely a T_q érintőterek egyesítési halmaza. A T_q vektortér egy bizonyos részterét értelmezi az alábbi meggondolás. A $p: Q \to V$ projekció a $p(q) = v$ feletti fibrum minden q pontját a $v \in V$ pontba vetíti, azaz, a p leképezés a v feletti fibrumon *konstans*. Ebből adódik, hogy a p' lineáris leképezés a fibrumot érintő vektorokat a 0-ba viszi át.

3. 1. DEFINÍCIÓ. A T_q vektortér mindazon X_q vektorait, amelyek a $p(q) = v$ feletti fibrumot érintik, (más szavakkal: $p'(X_q) = 0$) *vertikális vektoroknak*, ezek $\mathcal{V}_q$ halmazát pedig T_q *vertikális részterének* nevezzük.

Az előző pontban láttuk, hogy a $GL(n, R)$ csoport a Q sokaság transzformációcsoportjaként tekinthető a

$$\varphi_\alpha : \quad Q \to Q, \qquad q \to \varphi_\alpha(q) = (x, y; R\alpha) = q\alpha$$

hatás alapján. Vegyük a φ_α lineáris bővítést:

$$\varphi'_\alpha : \quad T(Q) \to T(Q), \qquad \varphi'_\alpha : \quad T_q \to T_{q\alpha}.$$

3. 2. DEFINÍCIÓ. A Q Finsler-féle fibrált tér *h lineáris összefüggésén* olyan

$$h : \quad T(Q) \to T(Q)$$

* [14].

lineáris és differenciálható leképezést értünk, amelynek bármely $h_q = h|T_q$ leszűkítésére az alábbiak teljesülnek:

LC 1.: a) $h|T_q = h_q : T_q \to T_q, \quad q \in Q;$
b) $h_q \circ h_q = h_q;$
c) $p_q'(X_q) = 0 \Leftrightarrow h_q(X_q) = 0$, más szavakkal Kernel p_q' = Kernel h_q;

LC 2.: $h_{q\alpha} \circ \varphi_\alpha' = \varphi_\alpha' \circ h_q, \quad \alpha \in GL(n, R)$. (Invariancia-feltétel.)

3. 1. *Megjegyzés.* E két feltétel lényegében a paragrafus elején támasztott követelményeket fejezi ki szigorú megfogalmazásban. Az LC 1. feltétel a $h_q : T_q \to T_q$ leképezés természetét határozza meg. Eszerint h_q a T_q vektortér olyan önmagába való projekciója, amely a $\mathcal{V}_q \subset T_q$ vertikális résztér vektorait a 0-vektorba, T_q egyéb vektorait pedig T_q valamely részterébe vetíti. Különösen fontosak számunkra azok a vektorok, amelyeket h_q invariánsan hagy. Ezekre vonatkozik a

3. 3. DEFINÍCIÓ. Az $X_q \in T_q$ vektor *horizontális*, ha

$$h_q(X_q) = X_q.$$

A h_q leképezés tulajdonságaiból következik, hogy T_q horizontális vektorai T_q-nak egy részterét feszítik ki. A

$$\mathcal{H}_q = \{X_q \in T_q | h_q(X_q) = X_q\}$$

vektortér a T_q *horizontális résztere*.

3. 2. *Megjegyzés.* Legyen $X_q \in \mathcal{H}_q$, akkor $(\varphi_\alpha' \circ h_q)(X_q) = \varphi_\alpha'(X_q)$. LC. 2 szerint viszont $(h_{q\alpha} \circ \varphi_\alpha')(X_q) = (\varphi_\alpha' \circ h_q)(X_q)$ áll fenn, azaz, $h_{q\alpha}(\varphi_\alpha'(X_q)) = \varphi_\alpha'(X_q)$ teljesül, más szavakkal, $\varphi_\alpha'(X_q) \in \mathcal{H}_{q\alpha}$. Tehát LC 2. így is fogalmazható: $X_q \in \mathcal{H}_q$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_\alpha'(X_q) \in \mathcal{H}_{q\alpha}$. Ez az invariancia-követelmény szemléletes tartalma.

3. 3. *Megjegyzés.* Az LC. 1. b) feltételekből következik, hogy $h_q(X_q) = 0$ és $X_q \notin \mathcal{V}_q$ egyidejűleg csak akkor állhat fenn, ha $X_q = 0$. Ez annyit jelent, hogy $\mathcal{H}_q \cap \mathcal{V}_q = 0$ (T_q zérusvektora).

3. 4. *Megjegyzés.* A T_q tér dimenziója, dim $T_q = 2n + n^2$, dim $\mathcal{V}_q = n^2$, következésképpen $\mathcal{H}_q = h_q(T_q)$ dimenziója, dim $\mathcal{H}_q \leq 2n$ lehet.

3. 4. DEFINÍCIÓ: A h lineáris összefüggés *reguláris*, ha

$$\dim \mathcal{H}_q = 2n, \qquad q \in Q$$

teljesül.

3. 5. *Megjegyzés.* E definíció s a 3. 3. Megjegyzés következménye, hogy reguláris h esetén

$$T_q = \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q, \qquad q \in Q, \tag{3. 3}$$

következésképpen bármely $Y_q \in T_q$ egyértelműen az

$$Y_q = h_q(Y) + v_q(Y) \tag{3. 4}$$

alakban állítható elő. A $h_q(Y) \in \mathcal{H}_q$ az Y_q *horizontális*, $v_q(Y) \in \mathcal{V}_q$ az Y_q *vertikális része, komponense.*

Az előző pontban értelmeztük a Q nyaláb z homogén leképezését. Emlékeztetőül: legyen $z \in R^+$. A $q=(x, y; R) \to zq=(x, zy; R)$ leképezést Q homogén transzformációjának nevezzük. Mivel $z: Q \to Q$, azért $z': T(Q) \to T(Q)$, speciálisan:

$$z'_q = z'|T_q : \quad T_q \to T_{zq}. \tag{3.5}$$

3. 5. DEFINÍCIÓ. A h lineáris összefüggés *homogén invariáns*, ha

$$z'_q \circ h_q = h_{zq} \circ z'_q, \qquad q \in Q.$$

A Q Finsler-féle fibrált tér h lineáris összefüggései közül a homogén invariáns összefüggések a legfontosabbak.

Felmerül az az (elvileg) fontos kérdés, vajon megadható-e Q felett mindig egy, az LC feltételeket kielégítő h összefüggés? Mielőtt erre választ adnánk, bizonyítjuk az alábbi tételt.

3. 1. TÉTEL. *A Q nyaláb homogén invariáns lineáris összefüggéseinek $H=\{h\}$ halmaza konvex halmaz.*

Bizonyítás: Ha $h^1 \in H$, $h^2 \in H$, akkor a

$$\begin{aligned} (h^1+h^2)(X) &= h^1(X)+h^2(X) \\ (ch)(X) &= ch(X), \quad c \in R \end{aligned} \tag{3.6}$$

definiáló relációk alapján beszélhetünk két összefüggés összegéről, egy összefüggés skalárszorosáról. Általában

$$h^1+h^2 \notin H, \qquad ch \notin H. \tag{3.7}$$

(A következő pontban látni fogjuk, hogy a Γ összefüggési objektum éppen e tulajdonság miatt nem tenzor.) Kimutatjuk azonban, hogy ha $h^i \in H$, és $\Sigma\gamma_k=1$, $\gamma_k \geqq 0$, $(i, k=1, \ldots, N)$, $\gamma_k \in R$, akkor a

$$h=\sum_{k=1}^{N} \gamma_k h^k \tag{3.8}$$

konvex lineáris kombináció H-hoz tartozik. Igazolnunk kell, hogy a (3. 8) által értelmezett h eleget tesz az LC követelményeknek. Legyen $h_q=h|T_q$. Nyilvánvalóan

$$h^k_q \circ h^l_q = h^k_q. \tag{3.9}$$

Ennek felhasználásával egyrészt

$$h \circ h = \sum_k \gamma_k h^k \circ \sum_s \gamma_s h^s = \sum_{k,s} \gamma_k \gamma_s (h^k \circ h^s) =$$

$$= \sum \gamma_k \gamma_s h^k = \sum \gamma_s \sum \gamma_k h^k = \sum_{\gamma_k} h^k = h,$$

másrészt

$$h \circ \varphi'_\alpha = (\sum \gamma_k h^k) \circ \varphi'_\alpha = \sum \gamma_k (h^k \circ \varphi'_\alpha) = \sum \gamma_k (\varphi'_\alpha \circ h^k) =$$

$$= \varphi'_\alpha \circ (\sum \gamma_k h^k) = \varphi'_\alpha \circ h.$$

Továbbá

$$h \circ z' = (\sum \gamma_k h^k) \circ z' = \sum \gamma_k (h^k \circ z') = \sum \gamma_k (z' \circ h^k) =$$

$$= z' \circ \sum \gamma_k h^k = z' \circ h.$$

Ha fennáll $h_q(X) = \Sigma \gamma_k h_q^k(X) = 0$, és $X_q \notin \mathcal{V}_q$, akkor $h_q^k(X) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Tehát $X_q = 0$. Ebből következik, hogy Kernel $h =$ Kernel p'. Ezzel viszont bizonyítást nyert, hogy $h \in H$.

A dolgozat utolsó fejezetében bizonyítandó egzisztenciatétel szempontjából a H halmaznak a 3. 1 Tételben kimondott tulajdonsága döntő jelentőségű.

3. 6. DEFINÍCIÓ. A

$$\bar{c} : \quad I \to Q, \qquad (\bar{c}(t) = q(t) \subset Q)$$

differenciálható görbét *horizontálisnak* nevezzük, ha $\dot{q}(t)$-vel jelölt érintővektoraira

$$\dot{q}(t) \in \mathcal{H}_{q(t)}, \qquad t \in I$$

teljesül.

E fogalomra épül, amint ezt később látni fogjuk, a párhuzamos eltolásnak nevezett konstrukció minden tulajdonsága. E paragrafust a párhuzamosság értelmezésével zárjuk.

3. 7. DEFINÍCIÓ. Legyen $q(t)$ horizontális görbe. Azt mondjuk, hogy $q(1)$ a $q(0)$ pontból *párhuzamos eltolással* keletkezett.

4. Kapcsolat a klasszikus elmélettel*

A II. 2. részben láttuk, hogyan vezethetők be lokális koordinátarendszerek a Q differenciálható sokaságban. Emlékeztetőül: ha $(x^1, \ldots, x^n)$ lokális koordinátarendszer $U \subset M$ fölött, akkor az $U' = \pi^{-1}(U) \subset V$ környezetet a

$$v = (x, y) \to (x^i, y^i), \qquad y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{4. 1}$$

hozzárendelés koordinátakörnyezetté teszi. Ezt alapul véve az $U'' = (p^{-1} \circ \pi^{-1})(U) \subset Q$ környezeten a

$$q = (x, y; R) \to (x^i, y^i; R_k^i), \quad R = \left\{ R_1^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \ldots, R_n^s \frac{\partial}{\partial x^s} \right\} \tag{4. 2}$$

megfeleltetéssel vezethetünk be lokális koordinátarendszert. A (4. 1) és (4. 2) segítségével értelmezett koordinátákat *kanonikus koordinátáknak* nevezzük U', ill. U'' fölött. Ha $\{U_\alpha\}$ lefedi M-et, nyilvánvaló, hogy $\{U'_\alpha\}$, illetve $\{U''_\alpha\}$ lefedik V-, illetve Q-t.

Az I. fejezet 2. pontja értelmében, mivel (4. 2) koordinátarendszer U'' felett, a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q, \quad \left(\frac{\partial}{\partial R_k^i}\right)_q \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4. 3}$$

* [1], [15].

vektorok a q pontban T_q bázisát alkotják. Bármely $X_q \in T_q$ tehát a

$$X_q = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + X^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q + X^i_k \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q \tag{4.4}$$

alakban áll elő. Ha q variál U''-ben, az $X \to X_q$ vektormező lokális koordinátái: X^i, $X^{(i)}$, X^i_k a q koordinátáinak differenciálható függvényei. A

$$p : \quad Q \to V, \qquad p(x, y; R) = (x, y) = p(q)$$

projekciót lokális koordinátákban az

$$(x^i, y^i; R^s_k) \to (x^i, y^i)$$

leképezés adja. Nyilvánvalóan

$$p'_q \left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right) = 0, \quad \text{mert} \quad \mathcal{V}_q = \left\{\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right\}_q, \tag{4.5}$$

továbbá

$$p' \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p(q)}, \quad p' \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{p(q)}. \tag{4.6}$$

A $\varphi_\alpha : Q \to Q$ leképezés U'' felett a

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(q) &= q\alpha = (x, y; R)\alpha = (x, y; R\alpha) \\ (x^i, y^i; R^i_k) &\to (x^i, y^i; R^1_s \alpha^s_1, \ldots, R^n_s \alpha^s_n) \end{aligned} \tag{4.7}$$

hozzárendeléssel adható meg. A $\varphi_\alpha : q \to q_\alpha$ leképezés lineáris bővítése a $\varphi'_\alpha : T_q \to T_{q\alpha}$ leképezés. (4. 7) alapján

$$\varphi'_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha}, \quad \varphi'_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{q\alpha}, \tag{4.8}$$

míg az

$$X^i_k \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q \in \mathcal{V}_q$$

vertikális vektor φ'_α-képe:

$$\varphi'_\alpha \left\{ X^i_k(q) \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q \right\} = X^i_s(q) \alpha^s_k \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_{q\alpha}. \tag{4.9}$$

Ezen előkészítő megjegyzések után számítsuk ki $h_q(X_q)$-t. LC 1.a. és b. alapján (4. 5) miatt

$$h_q(X) = X^i h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + X^{(i)} h_q \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q \in \mathcal{H}_q, \tag{4.10}$$

elég tehát a h_q összefüggésnek a $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial y^i}$ bázisvektorokon előidézett hatásával foglalkoznunk. Mivel $h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in T_q$, ezért

$$h_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = a^j_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + b^j_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q + g^s_{ki}(q) \left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q. \tag{4.11}$$

Az LC 1.b. alapján

$$(h_q \circ h_q)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = a_i^j h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b_i^j h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q = h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q,$$

rendezve

$$(a_i^j - \delta_i^j)\, h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b_i^j h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q = 0,$$

vagy más alakban

$$h_q\left\{(a_i^j - \delta_i^j)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_q + b_i^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q\right\} = 0.$$

A zárójelben álló vektor $\notin \mathcal{V}_q$, ezért a 3. 3 Megjegyzés, valamint amiatt, hogy a $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial y^i}$ vektorok lineárisan függetlenek,

$$a_i^j = \delta_i^j, \quad b_i^j = 0.$$

(4. 11) szerint tehát

$$h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + g_{ki}^s(q)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q. \tag{4. 12}$$

Analóg módon jutunk a

$$h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q + c_{ki}^s(q)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q \tag{4. 13}$$

képlethez. A h_q összefüggés tehát U'' felett a

$$q \to g_{ki}^s(q), \quad q \to c_{ki}^s(q) \tag{4. 14}$$

függvények egzisztenciáját jelenti. A h_q differenciálhatósága (U'' felett) a (4. 14) függvények deriválhatóságát jelenti a lokális koordináták szerint. Megvizsgáljuk, hogy az LC 2. invariancia-követelmény milyen feltételt szab ki a (4. 14) függvényekre.

Alkalmazzuk a (4. 8) és (4. 9) képleteket. Ezek alapján

$$\begin{aligned}(\varphi'_\alpha \circ h_q)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q &= \varphi'_\alpha\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q + g_{ki}^s(q)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_q\right] = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha} + g_{mi}^s(q)\alpha_k^m\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_{q\alpha}, \quad (\alpha_k^m) \in G_n.\end{aligned} \tag{4. 15}$$

Másrészt

$$(h_{q\alpha} \circ \varphi'_\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = h_{q\alpha}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q\alpha} + g_{ki}^s(q\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial R_k^s}\right)_{q\alpha}. \tag{4. 16}$$

A (4. 15) és (4. 16) egyenlítéséből

$$g_{ki}^s(q\alpha) = g_{mi}^s(q)\alpha_k^m. \tag{4. 17}$$

Megismételve ezt az eljárást $\frac{\partial}{\partial y^i}$ esetére, a

$$c^s_{ki}(q\alpha) = c^s_{mi}(q)\alpha^m_k \tag{4.18}$$

képlethez jutunk.

Az invariancia-követelmény tehát a (4. 17) ill. (4. 18) tulajdonságokkal ekvivalens. Más szavakkal, ha ismerjük a g és c függvények értékét egy adott $\tilde{q}$ pontban, akkor ismerjük a $\tilde{q}$ feletti fibrum bármely $\tilde{q}\alpha$ pontjában.

Válasszuk a $\tilde{q}$ pontot az alábbi módon:

$$\tilde{q} = (x, y; \tilde{R}), \quad \text{ahol} \quad \tilde{R} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}.$$

Számítsuk ki g és c értékét a $\tilde{q}$ pontban:

$$g^s_{ik}(\tilde{q}) = g^s_{ik}(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n; \delta^1_1, \ldots, \delta^n_n) = -\Gamma^s_{ik}(x, y),$$

$$c^s_{ik}(\tilde{q}) = c^s_{ik}(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n; \delta^1_1, \ldots, \delta^n_n) = -C^s_{ik}(x, y),$$

ahol a Γ és C függvények csupán (x, y)-tól függenek. (4. 17) és (4. 18) alapján tehát

$$\begin{aligned} g^s_{ki}(q) &= -R^m_k \Gamma^s_{mi}(x, y), \\ c^s_{ki}(q) &= -R^m_k C^s_{mi}(x, y), \end{aligned} \qquad q \in U''. \tag{4.19}$$

Eddigi eredményeink összefoglalásaként tehát

$$h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q - R^m_k \Gamma^s_{mi}\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q \tag{4.20}$$

$$h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q - R^m_k C^s_{mi}(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q. \tag{4.20}$$

4. 1. DEFINÍCIÓ. A $\{\Gamma^s_{ik}(x, y), C^s_{ik}(x, y)\}$ függvényrendszert a h összefüggés *lokális komponenseinek*, vagy *összefüggési objektumnak* nevezzük.

Érvényes tehát az alábbi

4. 1. TÉTEL. *A Q sokaságon a h lineáris összefüggés megadása a*

$$U'_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \to \{\underset{(U'_\alpha)}{\Gamma^s_{ik}(x, y)}, \underset{(U'_\alpha)}{C^s_{ik}(x, y}\} \qquad \alpha \in I$$

hozzárendelés megadásával ekvivalens, ahol a $\Gamma(x, y)$ és $C(x, y)$ fügvénynek az $U'_\alpha \cap U'_\beta = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ közös rész felett az ismert transzformációs törvényeknek tesznek eleget.

Vizsgáljuk meg, milyen további feltételeknek tesznek eleget egy homogén invariáns lineáris összefüggés lokális komponensei. A $z: q \to zq$ leképezés a

$$(x^i, y^i; R^i_k) \to (x^i, zy^i; R^i_k) \tag{4.21}$$

hozzárendeléssel adható meg U'' felett. A $z'_q = z'|T_q: \; T_q \to T_{zq}$ leképezés hatása a bázisvektorokon:

$$z'_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{zq}, \quad z'_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq}, \quad z'_q\left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_q = \left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_{zq}. \tag{4.22}$$

Ezek szerint

$$(z'_q \circ h_q)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = z'_q\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q - R^m_k C^s_{mi}(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_q\right] =$$

$$= z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq} - R^m_k C^s_{mi}(x, y)\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_{qz}.$$

Másrészt

$$(h_{zq} \circ z'_q)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = h_{zq}\left[z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq}\right] = zh_{zq}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq} =$$

$$= z\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{zq} - C^s_{mi}(x, zy) R^m_k\left(\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)_{zq}\right].$$

A két egyenlet összevetéséből

$$C^s_{ik}(x, zy) = z^{-1}\, C^s_{ik}(x, y) \tag{4.23}$$

adódik. Hasonló eljárással a Γ-függvényekre vonatkozóan a

$$\Gamma^s_{ik}(x, zy) = \Gamma^s_{ik}(x, y) \tag{4.24}$$

relációt kapjuk. Eredményünket összefoglalja a

4. 2. TÉTEL. *A h lineáris összefüggés akkor és csak akkor homogén invariáns, ha bármely lokális koordinátarendszerben a Γ ill. C objektumok az y^i változók 0-adfokú illetve (−1)-edfokú homogén függvényei.*

Ezek az eredmények a kanonikus koordinátarendszerre vonatkoznak. Ha a

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\} \to \left\{R^k_i \frac{\partial}{\partial x^k}\right\} = \{e_i\}; \quad \left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\} \to \left\{R^k_i \frac{\partial}{\partial y^k}\right\} = \{\varepsilon_i\}$$

transzformációval más vonatkoztatási rendszerre térünk át, a (4. 12) ill. (4. 13) relációk így változnak:

$$\begin{cases} h_q(e_i)_q = R^k_i h_q\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_q \\ h_q(\varepsilon_i)_q = R^k_i h_q\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}\right)_q. \end{cases} \tag{4.25}$$

A (4. 12), ill. (4. 13) vektorok (s természetesen a (4. 25) vektorok is) $\mathcal{H}_q$ vektorai $h_{q0}h_q = h_q$ miatt. Ezek száma éppen $2n$. Vizsgáljuk meg, milyen feltételek mellett lesznek a (4. 25) vektorok lineárisan függetlenek (azaz, mikor tartoznak egy reguláris h összefüggéshez). Képezzük a (4. 25) vektorok egy tetszőleges lineáris kombinációját a q pontban és tegyük fel, hogy

$$Z_q = \sum [\lambda^i h_q(e_i) + \mu^i h_q(\varepsilon_i)] = 0, \qquad \lambda^i, \mu^i \in R.$$

Mint differenciáloperátor, az Z_q vektor köteles minden $f(q)$ függvényt annullálni, tehát speciálisan az x^i, $\eta^i = \overset{(-1)}{R^i_r}\, y^r$ koordinátafüggvényeket is.

$$Z_q(x_j) = 0 \to \lambda_j = 0. \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$Z_q(\eta^i)$ számítása a

$$\frac{\partial \overset{(-1)}{R}{}^{\lambda}_{\varepsilon}}{\partial R^{\sigma}_{\tau}} = -\overset{(-1)}{R}{}^{\lambda}_{\sigma}\overset{(-1)}{R}{}^{\tau}_{\varepsilon}, \qquad (\overset{(-1)}{R}{}^{\lambda}_{\varepsilon} R^{\varepsilon}_{\varkappa} = \delta^{\lambda}_{\varkappa}) \tag{4.26}$$

reláció felhasználásával az

$$Z_q(\eta^m) = \left(\sum \mu^i h_q(\varepsilon_i)\right)(\eta^m) = \sum \mu^i R^{\sigma}_i \left(h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^{\sigma}}\right)\right)(\eta^m) =$$

$$= \sum \mu^i R^s_i \overset{(-1)}{R}{}^m_r (\delta^r_s + y^k C^r_{ks}) = 0$$

módon történik. Ebből a $\mu^i = 0$ következtetésre csak akkor juthatunk, ha

$$\det(\delta^r_s + y^k C^r_{ks}) \neq 0,$$

azaz, ha a

$$C = (C^r_s), \quad C^r_s = \delta^r_s + C^r_{0s}, \quad C^r_{0s} = C^r_{ks} y^k \tag{4.27}$$

matrix *reguláris*. Ez bekövetkezik triviálisan, ha

$$C^r_{0s} = 0. \tag{4.28}$$

4. 3. TÉTEL. *A h lineáris összefüggés reguláris és a* (4. 25) *vektorok lineárisan függetlenek, ha a* (4. 27) *matrix reguláris, vagy* (4. 28) *teljesül.*

4. 2. DEFINÍCIÓ. Reguláris h összefüggés esetén a

$$h_q(e_i), \quad h_q(\varepsilon_i) \in \mathcal{H}_q \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vektorokat *horizontális bázisvektoroknak* nevezzük. Ezek a

$$G^i_k = R^s_k \left(\frac{\partial}{\partial R^s_i}\right)_q \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{4.29}$$

vertikális bázisvektorokkal együtt T_q bázisát adják meg (bármely $q \in Q$ pontban).

A továbbiakban csak a (4. 28) feltételt kielégítő reguláris összefüggésekre szorítkozunk. Ezeket két további feltétellel kiegészítve *Cartan—Varga-féle összefüggéseknek** nevezzük.

5. Párhuzamosság. Az érintőterek direkt szétbontása

A 3. pontban a $\bar{c}: I \to Q$ görbét horizontálisnak neveztük, ha $\bar{c}(t) = q(t) \subset Q$ érintővektoraira

$$\dot{q}(t) \in \mathcal{H}_{q(t)}$$

teljesül. Vizsgáljuk meg, mit jelent analitikusan a horizontalitás követelménye. Vegyük evégből $q(t)$-nek egy koordinátakörnyezetbe eső ívét. A

$$q(t) = (x(t), y(t); R(t)) \to (x_i(t), y_i(t); R^i_k(t)) \tag{5.1}$$

* [1], [15].

parameteres előállításból világos, hogy U''-ben

$$\dot{q}(t)=\dot{x}^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{q(t)}+\dot{y}^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{q(t)}+\dot{R}^i_k(t)\left(\frac{\partial}{\partial R^i_k}\right)_{q(t)}. \tag{5.2}$$

A $\dot{q}(t)$ vektor horizontális, ha $h(\dot{q})=\dot{q}$. Az előző paragrafus eredményeit felhasználva, leegyszerűsített írásmóddal:

$$h(\dot{q})=\dot{x}^i h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+\dot{y}^i h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=\dot{x}^i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-R^m_k\Gamma^s_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right]+$$

$$+\dot{y}^i\left[\frac{\partial}{\partial y^i}-R^m_k C^s_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right]=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\dot{y}^i\frac{\partial}{\partial y^i}-R^m_k(\Gamma^s_{mi}\dot{x}^i+C^s_{mi}\dot{y}^i)\frac{\partial}{\partial R^s_k},$$

tehát a $h(\dot{q})=\dot{q}$ követelés (5. 2) alapján

$$\{\dot{R}^s_k+R^m_k(\Gamma^s_{mi}\dot{x}^i+C^s_{mi}\dot{y}^i)\}\frac{\partial}{\partial R^s_k}=0$$

alakban fejezhető ki. Mivel a $\frac{\partial}{\partial R}$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért

$$\frac{dR^s_k}{dt}+R^m_k\left(\Gamma^s_{mi}\frac{dx^i}{dt}+C^s_{mi}\frac{dy^i}{dt}\right)=\frac{DR^s_k}{dt}=0. \tag{5.3}$$

Igaz tehát az

5. 1. TÉTEL. *A $q(t)\subset Q$ görbe akkor és csak akkor horizontális, ha érintővektorainak lokális koordinátái az* (5. 3) *differenciálegyenletrendszert kielégítik.*

Az (5. 3) felépítéséből kitűnik, hogy $x(t)$, $y(t)$ ismeretében az $R^s_k(t)$-k *egyértelműen* meghatározhatók az $\underset{0}{R}{}^s_k$ kezdeti feltétel előírása esetén. Más fogalmazásban: ha adott az $(x(t), y(t))\subset V$ görbe $(0\leqq t\leqq 1)$, akkor mindig létezik egy és csak egy $(x(t), y(t); R(t))\subset Q$ horizontális görbe, amely a $q_0=(x_0, y_0; R_0)$ pontból indul ki s fedi $(x(t), y(t))$-t, azaz

$$p(q(t))=(x(t), y(t)) \qquad 0\leqq t\leqq 1.$$

5. 1. DEFINÍCIÓ. A $q(t):p(q(t))=(x(t), y(t))$ horizontális görbe $q(1)$ végpontjáról azt mondjuk, hogy a $q(0)$ pontból keletkezett az $(x(t), y(t))\subset V$ görbe mentén történő *párhuzamos eltolás* révén.

A lokális bázisokra értelmezett párhuzamossági fogalom módot nyújt az M alapsokaság vektorai párhuzamos eltolásának érelmezésére. Legyen $x(t)$ adott s tekintsük az $y(t)=y^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t)}$ vektormezőt. Végrehajtva a $\frac{\partial}{\partial x^i}\to R^s_i\frac{\partial}{\partial x^s}$ transzformációt s felhasználva az (5. 3) relációt, az

$$\frac{dy^i}{dt}+y^s\left(\Gamma^i_{sk}\frac{dx^k}{dt}+C^i_{sk}\frac{dy^k}{dt}\right)=0 \tag{5.4}$$

egyenletekhez jutunk. Az összefüggés regularitása miatt $y^s C^i_{sk}=0$ s így

$$\frac{dy^i}{dt}+y^s\Gamma^i_{sk}\frac{dx^k}{dt}=\frac{Dy^i}{dt}=0 \tag{5.5}$$

fejezi ki az $y(t)$ mező párhuzamosságát $x(t)$ mentén.

5. 2. DEFINÍCIÓ. Az $x(t)\subset M$ görbe mentén értelmezett $y(t)$ vektormezőt (vonalelem-mezőt) *párhuzamosnak* nevezzük, ha (5. 5) teljesül.

A továbbiakban a $\mathcal{H}_q\subset T_q$ horizontális teret két résztér direkt összegére bontjuk. A szétbontás alapját az alábbi definíció képezi.

5. 3. DEFINÍCIÓ. A $q(t)=(x(t), y(t); R(r))$ horizontális görbét *főhorizontális görbének* nevezzük, ha $y(t)$ eleget tesz az (5. 5) egyenleteknek.

Legyen $q(t)$ főhorizontális görbe. Számítsuk ki a $\dot{q}(t)$ érintővektort. (5. 5) miatt

$$\dot{q}(t)=\dot{x}^i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-y^s\Gamma^k_{si}\frac{\partial}{\partial y^k}\right]+\dot{R}^i_k\frac{\partial}{\partial R^i_k}.$$

Mivel $\dot{q}(t)$ horizontális, azért $h(\dot{q})=\dot{q}$, azaz

$$\dot{x}^i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}-R^m_k\Gamma^s_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}-y^l\Gamma^m_{li}\left(\frac{\partial}{\partial y^m}-R^r_kC^s_{rm}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right)\right]=\dot{q}(t).$$

Vezessük be, Cartan nyomán, az

$$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-C^i_{js}\Gamma^s_{mk}y^m \tag{5.6}$$

új összefüggési objektumot. Ennek segítségével a főhorizontalitás tulajdonsága végül is így írható: $q(t)$ főhorizontális, ha

$$\dot{q}(t)=\dot{x}^i\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}-y^s\Gamma^m_{si}\frac{\partial}{\partial y^m}-R^m_k\Gamma^{*s}_{mi}\frac{\partial}{\partial R^s_k}\right\}_{q(t)}\in\mathcal{H}_{q(t)}.$$

Jelöljük a zárójelben álló vektorokat E'_i-vel. Az $E_i=R^s_iE'_s$ relációval bevezetett

$$E_i=R^s\left(\frac{\partial}{\partial x^s}-y^k\Gamma^m_{ks}\frac{\partial}{\partial y^m}-R^m_k\Gamma^{*r}_{ms}\frac{\partial}{\partial R^r_k}\right)_q\in\mathcal{H}_q \tag{5.7}$$

vektorokat $\mathcal{H}_q$ *főhorizontális bázisvektorainak* nevezzük.

5. 4. DEFINÍCIÓ. A főhorizontális bázisvektorok által generált $\mathcal{H}'_q=\{E_i\}\subset\mathcal{H}_q$ teret $\mathcal{H}_q$ *főhorizontális részterének* nevezzük.

Vezessük be az

$$F_i=R^s_i\left(\frac{\partial}{\partial y^s}-R^m_kC^r_{ms}\frac{\partial}{\partial R^r_k}\right)_q \tag{5.8}$$

kohorizontális bázisvektorokat. A $\mathcal{H}''_q=\{F_i\}\subset\mathcal{H}_q$ *vektortér* $\mathcal{H}_q$ *kohorizontális résztere.*

Könnyű igazolni a fentiek alapján a következő állítást.

5. 2. TÉTEL. *Reguláris h összefüggés esetén a T_q ill. $\mathcal{H}_q$ vektorterek bármely $q \in Q$ pontban a*

$$T_q = \mathcal{H}_q' \oplus \mathcal{H}_q'' \oplus \mathcal{V}_q, \quad \mathcal{H}_q = \mathcal{H}_q' \oplus \mathcal{H}_q''$$

direkt összegekre bonthatók. A $\mathcal{H}_q'$ teret az (5. 7), *a $\mathcal{H}_q''$-t az* (5. 8), *a $\mathcal{V}_q$ vertikális teret pedig az*

$$G_k^i = R_k \frac{\partial}{\partial R_i^s} \tag{5. 9}$$

vertikális bázisvektorok feszítik ki.

KOROLLÁRIUM. Bármely $X_q \in T_q$ vektor egyértelműen az

$$X_q = h'(X_q) + h''(X_q) + v(X_q)$$

alakban állítható elő. A szétbontásban szereplő vektorokat rendre az X_q vektor *főhorizontális, kohorizontális,* illetve *vertikális komponensének (részének)* nevezzük. Nyilván $\dim \mathcal{H}_q' = \dim \mathcal{H}_q'' = n$, $\dim \mathcal{V}_q = n^2$ bármely $q \in Q$ pontban.

Tekintsük most a Q *Finsler-féle* fibrált tér V bázissokaságát (a vonalelem-sokaságot). A $p: Q \to V$ projekció p' lineáris folytatása

$$p' : \quad T(Q) \to T(V)$$

a T_q vektorteret $T_{p(q)}$-ba projiciálja. Ha $p(q) = v$, akkor a p leképezés tulajdonságaiból következik, hogy $p'(\mathcal{V}_q) = 0$, $p'(\mathcal{H}_q) = T_v$, hiszen $\dim T_v = \dim \mathcal{H}_q = 2n$. A $\mathcal{H}_q$ tér direkt szétbontása a T_v, $v = p(q)$ direkt szétbontását indukálja.

5. 5 DEFINÍCIÓ. Az $(e_i^*)_v = R_i^s \left(\frac{\partial}{\partial x^s} - y^k \Gamma_{ks}^{*m} \frac{\partial}{\partial y^m} \right)_v$, illetve az $(\varepsilon_i^*)_v = R_i^s \left(\frac{\partial}{\partial y^s} \right)_v$ vektorokat a T_v tér *szubhorizontális,* illetve *szubvertikális bázisvektorainak* nevezzük. A $H_v^* = \{(e_i^*)\}_v$, illetve a $V_v^* = \{(\varepsilon_i^*)_v\}$ részterek T_v *szubhorizontális,* illetve *szubvertikális* része.

5. 6. DEFINÍCIÓ. A V sokaság v pontjában a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v$, vagy *az* $e_i = R_i^s \left(\frac{\partial}{\partial x^s} \right)_v$ vektorok által generált részteret *Minkowski-féle érintőtérnek* nevezzük, jelölése: $T_v^{(\mu)}$. E tér

$$X_v = X^i(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v, \qquad v = (x, y) \in V$$

vektorai a *Minkowski-vektorok.* Az

$$Y : v \to Y_v = y^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v$$

vektormezőt a V (vonalelem)-sokaság *fundamentális vektormezőjének* nevezzük.

A továbbiakban a T_v^μ s a $\mathcal{H}_v^*$, $\mathcal{V}_v^*$ terek kapcsolatával foglalkozunk.

Tekintsük az

$$(e_i)_v = R_i^s \left(\frac{\partial}{\partial x^s} \right)_v \begin{matrix} \nearrow (e_i^*)_v \\ \searrow (\varepsilon_i^*)_v \end{matrix} \tag{5. 10}$$

megfeleltetéseket. Ennek alapján bármely $X_v \in T_v^\mu$ vektorához egyértelműen egy $X_v^{sh} \in \mathcal{H}_v^*$ és egy $X_v^{sv} \in \mathcal{V}_v^*$ vektor rendelhető. Ha $X_v = \tilde{X}^s e_s$, akkor definíció szerint,

$$X_v^{sh} = \tilde{X}^s e_s^*, \quad X_v^{sv} = \tilde{X}^s \varepsilon_s^*. \tag{5.11}$$

Az X^{sh}, illetve X^{sv} vektorok az X Minkowski-vektor *szubhorizontális*, illetve *szubvertikális fedővektorai*. Az

$$\begin{aligned} (e_i^*)_v &\to (E_i)_q, \\ (\varepsilon_i^*)_v &\to (F_i)_q, \end{aligned} \qquad p(q) = v, \tag{5.12}$$

megfeleltetés alapján viszont bármely *szubhorizontális*, illetve szubvertikális vektorhoz egy főhorizontális, illetve egy kohorizontális vektor rendelhető. Speciálisan, ha X_v Minkowski-vektor, az

$$X_q^{ph} = \tilde{X}^s (E_s)_q, \quad X_q^{ch} = \tilde{X}^s (F_s)_q \tag{5.13}$$

vektorokat X_v *főhorizontális*, illetve *kohorizontális*, *fedővektorainak* nevezzük. E két vektor nyilván úgy is nyerhető, hogy X_v-t először a $\mathcal{H}_v^*$, majd a $\mathcal{H}_q'$ térbe, illetve először a $\mathcal{V}_v^*$, majd a $\mathcal{H}_q''$-térbe „emeljük fel" (lifting). Szemléletesen

$$X_v \begin{cases} \nearrow X_v^{sh} \to X_q^{ph} \\ \searrow X_v^{sv} \to X_q^{ch}, \end{cases} \qquad p(q) = v. \tag{5.14}$$

Végezetül megjegyezzük, hogy az M sokaság $X_x = X^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ vektorai is „felemelhetők" mind a V, mind a Q sokaság érintőtereibe oly módon, hogy X_x-et először a T_v^μ térbe „emeljük fel" az

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v, \qquad x = \pi(v) = \pi(x, y) \tag{5.15}$$

hozzárendelés alapján.

Könnyű belátni, hogy a fedővektorok egyértelműen vannak meghatározva („alulról felfelé haladva"), ha adott a kiinduló Minkowski-vektor. Az is nyilvánvaló, hogy a v-ben vett vektorok csak a $p(q) = v$ tulajdonságú q pontokba, (a v feletti $p^{-1}(v)$ fibrum pontjaiba) emelhetők fel.

A következő pontban a lineáris összefüggéssel ellátott tér geometriai szerkezetével foglalkozunk.

6. A lineárisan összefüggő Finsler-féle fibrált tér struktúrája (Torzió- és görbületelmélet)

Tekintsünk a Q tér fölött két horizontális vektormezőt:

$$\begin{aligned} X &: \ q \to X_q \in \mathcal{H}_q, \\ Y &: \ q \to Y_q \in \mathcal{H}_q, \end{aligned} \qquad q \in Q.$$

Nevezzük az $\{X, Y\}_q$ rendezett vektorpárt *horizontális kételnek* (horizontális bi-

vektornak) a q pontban. Az I. fejezet 5. pontja szerint az X mező a

$$\tilde{q}(t)=\exp(tX)q, \qquad |t|<\varepsilon_1$$

az Y mező pedig a

$$\tilde{\tilde{q}}(t)=\exp(tY)q \qquad |t|<\varepsilon_2$$

egyparameteres lokális transzformáció-csoportot generálja.

A görbületi és torziómennyiségek értelmezésének alapjául a horizontális paralelogramma fogalma szolgál. Ezt értelmezi a

6. 1. DEFINÍCIÓ. A $q\in Q$ pontból kiinduló $t\to q(t)$ görbét, ahol

$$q(t) = \exp(-tY)\exp(-tX)\exp(tY)\exp(tX)q, \quad |t|<\varepsilon \tag{6. 1}$$

az $\{X, Y\}_q$ horizontális kétélhez tartozó *horizontális paralelogrammának* nevezzük a $q\in Q$ pontban.

A definíció geometriai tartalma világos. A paralelogramma „oldalai" horizontális görbék, azaz bármelyik oldal kezdőpontjából a végpontba a q pont párhuzamos eltolással megy át. A (6. 1) görbe, általában, nem zárul, sőt az sem következik be, hogy q és $q(t)$ ugyanazon G_v fibrum pontjai lennének. A paralelogrammának ez a viselkedése a Q tér szerkezetének tulajdonítható. Célunk az, hogy a tér szerkezetét torzió-, illetve görbületi mennyiségekkel jellemezzük. Világos, hogy az egyetlen szóbajövő objektum, amelyet a paralelogramma meghatároz és amelynek geometriai jelentése van, a $q(t)$ görbe érintővektora a kezdőpontban.

6. 2. DEFINÍCIÓ. Az

$$S_{\{X,Y\}_q}=\frac{1}{2}[\dot{q}(t)]_{t=0}\in T_q$$

vektort a Q nyaláb $\{X, Y\}_q$ horizontális kétéléhez tartozó *struktúravektorának* nevezzük a q pontban.

Az 5. pont 5. 2 Tétele szerint érvényes az

$$S_{\{X,Y\}_q}=S_q=h'(S_q)+h''(S_q)+v(S_q)$$

direkt szétbontás.

6. 3. DEFINÍCIÓ. Az $S_{\{X,Y\}_q}$ struktúravektor főhorizontális részét a tér *torzióvektorának* nevezzük az $\{X, Y\}_q$ kétélre vonatkozóan. Az S_q kohorizontális, illetve vertikális komponensei a tér *redukált görbületi*, illetve teljes *görbületi vektorai* az $\{X, Y\}_q$ kétélben.

Az I. fejezet (5. 10.) szerint a q-ból kiinduló horizontális paralelogramma érintővektora a q kezdőpontban a $2([X, Y])_q$ vektor. Igaz tehát a

6. 1. TÉTEL. Az $\{X, Y\}_q$ kétélhez tartozó S_q struktúravektor az

$$S_{\{X,Y\}_q}=[X, Y]_q, \qquad X_q,\ Y_q\in\mathcal{H}_q$$

képlet szerint számítható.

A T_q érintőtér direkt felbontása alapján bármely $[X, Y]_q$ kommutátor ismert, ha ismerjük az $[E_i, E_j]$, $[E_i, F_j]$, $[F_i, F_j]$ kommutátorok értékét, hiszen E_i és F_i

a $\mathcal{H}_q$ tér bázisvektorai. Ha tehát e kommutátorokat rendre kiszámítjuk s a 6. 3 Definíció szerinti szétbontást végrehajtjuk, a szétbontás koefficienseiként olyan mennyiségekhez jutunk, amelyek a tér torzió-, illetve görbületi viszonyait visszatükrözik. Ezek lesznek a tér torzió-, illetve görbületi tenzorai. Az $[E_i, E_j]$ kommutátor direkt szétbontása az

$$[E_i, E_j] = \tilde{T}^s_{ij} E_s + \tilde{R}^s_{oij} F_s + \tilde{R}^s_{kij} G^k_s \tag{6. 2}$$

képletet eredményezi. Hasonló módon eljárva jutunk az

$$[E_i, F_j] = \tilde{C}^s_{ij} E_s + \tilde{P}^s_{oij} F_s + \tilde{P}^s_{kij} G^k_s, \tag{6. 3}$$

illetve az

$$[F_i, F_j] = \tilde{S}^s_{oij} F_s + \tilde{S}^s_{kij} G^k_s \tag{6. 4}$$

relációkhoz.

6. 4. DEFINÍCIÓ. A $\tilde{T}^s_{ij}$, $\tilde{C}^s_{ij}$ mennyiségek a Q Finsler-nyaláb *torziótenzorai.* Az $\tilde{R}^s_{kij}$, $\tilde{P}^s_{kij}$, illetve $\tilde{S}^s_{kij}$ tenzorok a tér *teljes görbületi tenzorai;* az $\tilde{R}^s_{oij}$, $\tilde{P}^s_{oij}$, $\tilde{S}^s_{oij}$ tenzorokat pedig a tér *redukált görbületi tenzorainak* nevezzük.

A $\tilde{T}$, $\tilde{S}$, $\tilde{P}$, $\tilde{R}$ tenzorok kiszámítása a h összefüggés Γ és C (vagy Γ^* és C) objektumaiból az ismert módon történik. Az $\tilde{S}$, $\tilde{P}$, $\tilde{R}$ tenzorok *ferde szimmetriája* az (i, j) párban az $[X, Y] = -[Y, X]$ reláció következménye. Megjegyezzük, hogy a $T, \ldots, \tilde{R}$ tenzorok a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v$ természetes n-él szerinti $T, \ldots, R$ alakokból származnak a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v \to R^s_i \left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_v$ áttérés végrehajtásával (Beindarstellung). Természetes bázisban pl. $T^s_{ij} = \Gamma^{*s}_{ij} - \Gamma^{*s}_{ji}$, a C^s_{ij} pedig éppen a h összefüggésben fellépő koefficiensek. (6. 3) alapján C^s_{ij} tenzori jellege világos.

A vonalelem-sokaságok klasszikus elméletében csak olyan reguláris összefüggéseket szoktak tekintetbe venni, amely a

$$T^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} - \Gamma^{*i}_{kj} = 0, \quad S^i_{jk} = S^i_{ojk} = 0 \tag{6. 5}$$

feltételeket kielégíti. Ezeket *Cartan—Varga*-összefüggéseknek nevezzük. Az S_0 tenzor eltűnése a

$$C^i_{jk} = C^i_{kj} \tag{6. 6}$$

reláció teljesülésével függ össze. További speciális esetek (így pl. a *Minkowski-féle nyaláb*), a strukturális mennyiségekre tett újabb kikötések révén keletkeznek. Ezekre itt részletesen nem térünk ki.

7. Differenciáloperátorok. (Kovariáns deriváltak)

A Finsler-terek Cartan-féle elméletében három fontos differenciáloperátor (kovariáns deriváció) lép fel. Ezeknek közös jellemzője, hogy tenzorokhoz tenzort rendelnek, pontosabban: (s, r)-típusú tenzorhoz $(s+1, r)$-típusú tenzort, azaz a tenzorok kovariáns fokszámát eggyel növelik.

Látni fogjuk, hogy ezek a műveletek mind fogalmilag, mind pedig formailag igen egyszerűen illeszkednek az általunk követett tárgyalásmód kereteibe. A lényeg abban áll, hogy a deriválandó objektumot az $e_s = R_s^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v$ bázisból a Q tér érintőnyalábjába emeljük fel. Ezen a szinten a kovariáns deriválásnak egyszerűen Lie-deriválás felel meg.

Az egyszerűség kedvéért a definíciókat egy $X = \tilde{X}^s(e_s)_v$ Minkowski-vektorra fogalmazzuk meg. (Emlékeztetőül: $\tilde{X}^s = \overset{(-1)}{R}{}_i^s X^i$, ahol X^i az X mező komponensei a természetes bázisra vonatkozólag.)

Vegyük az X vektor X^{ph}, illetve X^{ch} főhorizontális, illetve kohorizontális fedővektorait. Képezzük ezek kommutátorait az E_i, illetve F_i bázisvektorokkal.

7. 1. DEFINÍCIÓ. A

$$h'([E_i, X^{ph}]) = \nabla_i'(X) \in \mathcal{H}_q' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vektort az X i-edik *főhorizontális deriváltjának* vagy *elsőfajú kovariáns deriváltjának* nevezzük.

7. 2. DEFINÍCIÓ. A

$$h''([F_i, X^{ch}]) = \nabla_i''(X) \in \mathcal{H}_q'' \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

vektor az X i-edik *kohorizontális* vagy *másodfajú kovariáns deriváltja.*

(A $\nabla_i'(X)$, ill. $\nabla_i''(X)$ jelölések jogosultak, hiszen az $X \to X^{ph}$, $X \to X^{ch}$ hozzárendelések egyértelműek.)

Az I. fejezet 3. pontjának (3. 3) képlete szerint

$$[E_i, X^{ph}] = [E_i, \tilde{X}^s E_s] = \tilde{X}^s[E_i, E_s] + E_i(\tilde{X}^s)E_s. \tag{7. 1}$$

Rövid számítás eredményeként

$$\begin{aligned} E_i(\tilde{X}^s) &= R_i^k \overset{-1}{R}{}_j^s \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^k} - \frac{\partial X_j}{\partial y^m}\Gamma_{xk}^{*m} + X^m \Gamma_{mk}^{*j}\right) = \\ &= R_i^k \overset{-1}{R}{}_j^s X_{|k}^j = \tilde{X}_{|i}^s. \end{aligned} \tag{7. 2}$$

A (6. 2) formula szerint $[E_i, E_s]$ főhorizontális része éppen $\tilde{T}_{is}^k E_k$, így (7. 1) főhorizontális része:

$$h'([E_i, X^{ph}]) = \nabla_i'(X) = (\tilde{X}_{|i}^s + \tilde{T}_{ik}^s \tilde{X}^k)E_s. \tag{7. 3}$$

A (7. 3) összefüggésből látni, hogy E_s koefficiensei egy (1, 1)-típusú tenzor komponensei. Lokális természetes bázisban

$$\nabla_i' X^s = X_{|i}^s + T_{im}^s X^m. \tag{7. 4}$$

Ha a Γ^* mennyiségek szimmetrikusak, akkor a

$$\nabla_i' X^s = X_{|i}^s \tag{7. 5}$$

jól ismert formulát nyerjük.

Számítsuk ki a másodfajú (kohorizontális) derivált komponenseit.

$$[F_i, X^{ch}] = [F_i, \tilde{X}^s F_s] = \tilde{X}^s [F_i, F_s] + F_i(\tilde{X}^s) F_s. \tag{7.6}$$

Azonban egyrészt

$$F_i(X^s) = R_i^k \overset{-1}{R}{}_j^s \left(\frac{\partial X^j}{\partial y^k} + X^m C_{mk}^j \right) = R_i^k \overset{-1}{R}{}_j^s X_{;k}^i = \tilde{X}_{;i}^s, \tag{7.7}$$

másrészt (6. 4) alapján $[F_i, F_s]$ kohorizontális része: $\tilde{S}_{is}^k F_k$. Ezeket (7. 6)-ba helyettesítve a

$$\nabla_i'' X^s = X_{;i}^s + S_{im}^s X^m \tag{7.8}$$

formulához jutunk, amely (reguláris összefüggés esetén) a C-k szimmetrikus voltát feltételezve a

$$\nabla_i'' X^s = X_{;i}^s \tag{7.9}$$

képletre redukálódik.

7. 3. DEFINÍCIÓ. A

$$h'([F_i, X^{ph}]) = \dot{\nabla}_i X \in \mathcal{H}_q' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

módon értelmezett vektort az X mező (i-edik) *harmadfajú kovariáns deriváltjának* nevezzük.

Határozzuk meg $\dot{\nabla}_i X$ lokális komponenseit.

$$[F_i, X^{ph}] = \tilde{X}^s [F_i, E_s] + F_i(\tilde{X}^s) E_s.$$

Azonban (7. 7) szerint $F_i(\tilde{X}^s) = \tilde{X}_{;i}^s$ és (6. 3) alapján $[F_i, E_s] = -[E_s, F_i]$ főhorizontális része $-\tilde{C}_{si}^k E_k$. Ezek felhasználásával $\dot{\nabla}_i X$ a lokális természetes bázisban a

$$\dot{\nabla}_i X^s = X_{;i}^s - C_{mi}^s X^m = \frac{\partial X^s}{\partial y^i} = \dot{\partial}_i X^s \tag{7.10}$$

komponensekkel rendelkezik.

Az értelmezés módjából közvetlenül adódik a (7. 4), (7. 8) és (7. 10) operációk tenzori karaktere. A kovariáns deriválás művelete minden nehézség nélkül kiterjeszthető tetszőleges típusú tenzorra is.

Befejezésül értelmezzük még egy X vektor vonalelem-irányú kovariáns deriváltjait.

7. 4. DEFINÍCIÓ. Az X vektor *vonalelem-irányú* kovariáns deriváltjain a

$$h'([Y^{ph}, X^{ph}]) = \nabla_0' X, \quad h''([Y^{ch}, X^{ch}]) = \nabla_0'' X, \quad h'([Y^{ch}, X^{ph}]) = \dot{\nabla}_0 X$$

vektorokat értjük, ahol $Y = y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ a fundamentális mező.

Azonnal látni, hogy Cartan—Varga-összefüggés esetén

$$\nabla_0' X^i = X_{|s}^i y^s = X_{|0}^i, \quad \nabla_0'' X^i = \dot{\nabla}_0 X^i = 0. \tag{7.11}$$

Nem térünk ki részletesen a kovariáns deriváció műveleti szabályainak bizonyítására. Segítségükkel azonban könnyen bizonyíthatjuk a *Finsler*-féle fibrált terek esetén is a *Ricci*-formulákat, a *Bianchi*-identitást stb.

III. A FINSLER-FÉLE FIBRÁLT TÉR AUTOMORFIZMUS-CSOPORTJÁNAK GEOMETRIÁJA

1. Automorfizmusok. Automorfizmus-csoport

A lineárisan összefüggő *Finsler*-féle fibrált tér önmagára való diffeomorf leképezései közül különös figyelmet érdemelnek azok, amelyek a nyaláb lineáris összefüggését megőrzik. Kimutatjuk, hogy ezek a leképezések, a lineárisan összefüggő struktúra ún. automorfizmusai, csoportot alkotnak, a struktúra $A(h)$ automorfizmus-csoportját. Általánosabb tétel specializálásával adódik, hogy az $A(h)$ csoport *Lie*-csoport.

Tekintsük a h összefüggéssel ellátott Q tér

$$\psi : Q \to Q, \qquad q \to \psi(q) \tag{1. 1}$$

diffeomorfizmusát s ennek

$$\psi' : T(Q) \to T(Q)$$

lineáris bővítését.

1. 1. DEFINÍCIÓ. A $\psi : Q \to Q$ diffeomorfizmust a Q tér *automorfizmusának* nevezzük, ha

$$h \circ \psi' = \psi' \circ h \tag{1. 2}$$

teljesül. Jelöljük az (1. 2) relációnak eleget tevő ψ-k halmazát $A_Q(h)$-val, vagy röviden $A(h)$-val.

Ha ψ diffeomorfizmus, nyilván ψ^{-1} is az. A ψ_1 és ψ_2 diffeomorfizmusok $\psi_2 \circ \psi_1$ szorzata ismét Q diffeomorfizmusa.

1. 1 TÉTEL. *Az* (1. 2) *feltételnek eleget tevő ψ-k $A(h)$ halmaza csoportot alkot.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ψ_1, $\psi_2 \in A(h)$. Igazoljuk, hogy $\psi_2 \circ \psi_1 \in A(h)$. Valóban, I. (5. 5) alapján $(\psi_2 \circ \psi_1)' = \psi_2' \circ \psi_1'$, következésképpen

$$h \circ (\psi_2 \circ \psi_1)' = h \circ (\psi_2' \circ \psi_1') = (h \circ \psi_2') \circ \psi_1' = (\psi_2' \circ h) \circ \psi_1' =$$

$$\psi = {}_2' \circ (k \circ \psi_1') = \psi_2' \circ (\psi_1' \circ h) = (\psi_2 \circ \psi_1)' \circ h,$$

azaz teljesül (1. 2). Igazolni kell továbbá, hogy $\psi^{-1} \in A(h)$, ha $\psi \in A(h)$. A $\psi \circ \psi^{-1} = I$ ($= Q$ identikus leképezése) relációból $\psi' \circ \psi' = I$ ($= T(Q)$ identikus leképezése) következik s így egyrészt

$$h \circ (\psi' \circ \overset{-1}{\psi'}) = (k \circ \psi') \circ \overset{-1}{\psi'} = \psi' \circ (h \circ \overset{-1}{\psi'}) = h \circ I' = h,$$

másrészt

$$(\psi' \circ \overset{-1}{\psi'}) \circ h = \psi' \circ (\overset{-1}{\psi'} \circ h) = I' \circ h = h$$

áll fenn. A két reláció egyenlítéséből $h \circ \overset{-1}{\psi'} = \overset{-1}{\psi'} \circ h$ adódik, tehát $\overset{-1}{\psi} \in A(h)$. Az I identikus leképezés nyilván $\in A(h)$. Ezzel az 1. 1. Tételt bebizonyítottuk.

Bonyolult és hosszadalmas annak bizonyítása, hogy $A(h)$ Lie-csoport. Azonban Kobayashi ismert tétele [6] esetünkben is érvényes, tehát ezt a bizonyítást itt nem reprodukáljuk. A gondolatmenet a következő: legyen $q_0 \in Q$ rögzített s tekintsük a

$$\varrho : \quad A(h) \to Q, \qquad \psi \in A(h) \to \psi(q_0) \in Q$$

leképezést. E leképezés alapján $A(h)$ elemei parametrizálhatók s az így nyert koordinátarendszer bevezetésével $A(h)$ Lie-csoporttá tehető.

1. 2. TÉTEL. *Az $A(h)$ csoport elemei a horizontális (vertikális) vektorokat ismét horizontális (vertikális) vektorokba transzformálják, röviden: $A(h)$ megőrzi a T_q érintőterek direkt felbontását.*

Bizonyítás. Legyen $\psi \in A(h)$ és $X_q \in \mathcal{H}_q$, azaz $h(X_q) = X_q$. Számítsuk ki $(\psi' \circ h)$ (X_q)-t.

$$(\psi' \circ h)(X_q) = \psi'(h(X_q)) = \psi'(X_q). \tag{1. 3}$$

Másrészt

$$(h \circ \psi')(X_q) = h(\psi'(X_q)). \tag{1. 4}$$

E két egyenlet egybevetéséből $h(\psi'(X_q)) = \psi'(X_q) \in T_{\psi(q)}$ adódik, azaz $\psi'(X_q)$ is horizontális. Legyen $W_q \in T_q$ tetszőleges érintővektor: $W_q = h(W_q) + v(W_q)$. Ennek alapján

$$\psi'(W_q) = (\psi' \circ h)(W_q) + (\psi' \circ v)(W_q) = (h \circ \psi')(W_q) + (\psi' \circ v)(W_q)$$

áll fenn, ami így is írható

$$\psi'(W_q) - h(\psi'(W_q)) = \psi'(v(W_q)).$$

A bal oldalon éppen $v(\psi'(W_q))$ áll, tehát

$$\psi' \circ v = v \circ \psi'. \tag{1. 5}$$

1. 1. *Megjegyzés.* Az (1. 2. Tételből közvetlenül adódik, hogy ha $q(t)$ horizontális görbe és $\psi \in A(h)$, akkor a $\psi(q(t))$ görbe is horizontális, azaz *a párhuzamosság invariáns* az $A(h)$ csoporttal szemben.

1. 2. *Megjegyzés.* Az $A(h)$ csoport megőrzi a $\mathcal{H}_q = \mathcal{H}'_q \oplus \mathcal{H}''_q$ direkt felbontást. Ugyanis, ha $X_q = h'(X_q) + h''(X_q)$, akkor

$$\psi'(h(X_q)) = (\psi' \circ h')(X_q) + \psi' \circ h''(X_q).$$

Másrészt

$$(\psi' \circ h)(X_q) = h(\psi'(X_q)) = h'(\psi'(X_q)) + h''(\psi'(X_q)).$$

A fenti két relációból, mivel X tetszőleges és a felbontás egyértelmű, állításunk következik.

1. 3. TÉTEL. *A Q tér struktúrája (struktúravektora) invariáns az $A(h)$ csoporttal szemben.*

Bizonyítás. A Q tér bármely differenciálható leképezésének lineáris folytatására, így tehát ψ'-re is teljesül a

$$\psi'([W, Z]_q) = [\psi'(W), \psi'(Z)]_{\psi(q)}. \tag{1.6}$$

Ha tehát W és Z horizontális vektormezők, akkor így is írható

$$\psi'(S_{\{W,Z\}_q}) = S_{\{\psi'(W), \psi'(Z)\}_q}.$$

Az (1. 5), valamint az 1. 2. Megjegyzés alapján az is adódik, hogy a Q tér torzió- és görbületi tenzorai invariánsak az $A(h)$ csoporttal szemben.

Vizsgáljuk meg, hogyan függnek össze az $A(h)$ transzformációi a φ_α jobb oldali transzlációkkal, $\alpha \in GL(n, R)$.

Erre a problémára ad választ az

1. 4. TÉTEL. *Legyen $\psi \in A(h)$ és $\alpha \in GL(n, R)$. Tekintsük a*

$$\psi_* : \quad q \to (\psi(q\alpha))\alpha^{-1} \qquad q \in Q \tag{1.7}$$

leképezést. Állítás: $\psi_* \in A(h)$.

Az (1. 7) leképezés a szokott jelölésekkel

$$\psi_*(q) = (\varphi_{\alpha^{-1}} \circ \psi \circ \varphi_\alpha)(q)$$

alakban írható, tehát

$$\psi'_* = \varphi'_{\alpha^{-1}} \circ \psi' \circ \varphi'_\alpha.$$

Innen, mivel $h \circ \varphi'_\alpha = \varphi'_\alpha \circ h$,

$$\psi'_* \circ h = \varphi'_{\alpha^{-1}} \circ \psi' \circ (\varphi'_\alpha \circ h) = \varphi'_{\alpha^{-1}} \circ (\psi' \circ h) \circ \varphi'_\alpha =$$
$$= (\varphi'_{\alpha^{-1}} \circ h) \circ \psi' \circ \varphi'_\alpha = h \circ (\varphi'_{\alpha^{-1}} \circ \psi' \circ \varphi'_\alpha) = h \circ \psi'_*,$$

s ezzel a tétel bizonyítást nyert. Azonnal látható, hogy $\psi_* = \psi$ akkor és csak akkor, ha ψ bármely jobb oldali transzlációval felcserélhető. Jelöljük ezek összességét $A^*(h)$-val.

Legyen $q_0 \in Q, p(q_0) = (x_0, y_0) = v_0$. $A(h)$ azon elemei, amelyek az (x_0, y_0) feletti fibrumot önmagába transzformálják, nyilván $A(h)$ részcsoportját alkotják. Jelöljük ezt a részcsoportot $A(h; v_0)$-lal.

1. 2. DEFINÍCIÓ. Az $A(h; v_0)$ csoportot $A(h)$ *izotropia-részcsoportjának* nevezzük a v_0 pontban.

Ha $\psi \in A(h; v_0)$ és $p(q) = v_0$, akkor nyilván

$$\psi(q) = q\sigma, \qquad \sigma \in GL(n, R).$$

Az izotropia-részcsoport nyilván zárt részcsoportja $A(h)$-nak.

Tekintsük a $\mu: M \to M$ diffeormorfizmust. Ennek lineáris folytatása az y-t $\mu'(y)$-ba, az $\{e_i\}$ n-élt a $\{\mu'(e_i)\}$-élbe viszi át. Értelmezhető tehát a $\tilde{\mu}: Q \to Q$ leképezés az alábbi hozzárendeléssel:

$$\tilde{\mu} : \quad q = (x, y; \{e_i\}) \to [\mu(x), \mu'(y); \{\mu'(e_i)\}]. \tag{1.8}$$

1. 3. DEFINÍCIÓ. Az (1. 8) szerint értelmezett $\tilde{\mu}$: $Q \to Q$ leképezést a μ: $M \to M$ által *indukált leképezésnek*, vagy *bővített transzformációnak* nevezzük.

Legyen X_x vektormező M fölött. Az I. 5. pontjában láttuk, hogy ez a mező M differenciálható leképezéseinek egyparaméteres φ_t lokális csoportját generálja. Az 1. 3 Definíció alapján képezhetjük a $\tilde{\varphi}_t$ bővített transzformációkat. Ezek nyilván Q egyparaméteres lokális transzformáció-csoportját szolgáltatják. Nevezzük ezt röviden bővített csoportnak. A következő pontban egyparaméteres lokális automorfizmus-csoportokkal foglalkozunk.

2. Lokális automorfizmusok. (Affinitások)

A *Lie*-csoportok elméletéből ismert az egyparaméteres részcsoportok fontos szerepe. Mielőtt részletesebben foglalkoznánk egyparaméteres lokális automorfizmus-csoportokkal, előkészítésül rámutatunk arra, miként lépnek fel ilyen természetű vizsgálatokban geometriai objektumoknak (az adott csoportra vonatkozó) *Lie*-féle deriváltjai. Látni fogjuk, hogy bizonyos objektumok invarianciája *Lie*-deriváltjuk eltűnésével ekvivalens.

Az M differenciálható sokaságon tekintsük az X vektormező által generált

$$x(t) = \exp(tX)x \quad x(0)=x \tag{2. 1}$$

lokális transzformáció-csoportot. A (2. 1) transzformáció $\exp(tX)'$, illetve $\exp(tX)^*$ lineáris bővítései a T_x, illetve T_x^* vektortereken (illetve ezek tenzori szorzatain) operálnak. Legyen Φ (az egyszerűség kedvéért) differenciálforma.

2. 1. DEFINÍCIÓ. A Φ formának a (2. 1) csoportra vonatkozó, $L(X)\Phi$-vel jelölt *Lie-deriváltján* az

$$\{L(X)\Phi\}_x = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\exp(tX)^*\Phi_{x(t)} - \Phi_x] \tag{2. 2}$$

módon értelmezett formát értjük.

Jelöljük $\Phi(t)$-vel a

$$\Phi(t) = \exp(tX)^*\Phi \quad \Phi(0)=\Phi$$

formát. $\Phi(t)$ *invariáns* a (2. 1) csoporttal szemben, ha $\Phi(t)=\Phi$, azaz a (2. 1) trajektóriái mentén $\Phi(t)$ nem változik. Állapítsuk meg az invariancia szükséges és elégséges feltételét. Számítsuk ki evégből $\Phi(t)$ t szerinti deriváltját.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}[\Phi(t+t') - \Phi(t)] =$$

$$= \lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}\{\exp[(t+t')]^*\Phi - \exp(tX)^*\Phi\} =$$

$$= \exp(tX)^* \lim_{t'\to 0} \frac{1}{t'}[\exp(t'X)^*\Phi - \Phi] = \exp(tX)^* L(X)\Phi.$$

Innen következik, hogy $\dfrac{d\Phi}{dt} = 0 \Leftrightarrow L(X)\Phi = 0$.

Ahhoz tehát, hogy a Φ forma (vagy általában bármely geometriai objektum) invariáns legyen, az $L(X)\Phi$ derivált eltűnése szükséges és elegendő.

Az 1. pont végén láttuk, hogy az M-nek bármilyen önmagára való ψ leképezése a Q tér $\tilde{\psi}$ leképezésévé bővíthető. Speciálisan tehát bármely $\tilde{\psi}_t$ lokális csoporthoz Q-nak egy $\tilde{\psi}_t$ egyparaméteres lokális transzformáció-csoportja tartozik. Ha ψ_t-t az X mező generálja, valamely $\tilde{X}$ fogja generálni a $\tilde{\psi}_t$ csoportot. Számítsuk ki $\tilde{X}$ komponenseit. Általában, ha $x'^i=\psi^i(x)$ a ψ: $M\to M$ leképezés egyenletrendszere, akkor a $\tilde{\psi}$: $Q\to Q$ leképezést az

$$x'^i=\psi^i(x),\quad y'^i=\frac{\partial\psi^i}{\partial x^m}y^m,\quad R'^i_k=\frac{\partial\psi^i}{\partial x^m}R^m_k$$

rendszer határozza meg.

Speciálisan, ha a leképezést az

$$x\to x(t)=\exp(tX)x,\quad X=X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

csoport eleme adja meg, akkor a

$$q\to\tilde{q}(t)=\exp(t\tilde{X})q$$

bővítés $\tilde{X}$ generáló vektora a Q tér kanonikus koordinátarendszerében így írható:

$$\tilde{X}=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^m}y^m\right)\frac{\partial}{\partial y^i}+\frac{\partial X^i}{\partial x^s}R^s_k\frac{\partial}{\partial R^i_k}.$$

Áttérve főhorizontális és kohorizontális bázisvektorokra,

$$\tilde{X}=\tilde{X}^sE_s+(\hat{\nabla}_0\tilde{X}^s)F_s-\hat{\nabla}_i\tilde{X}^s)G^i_s, \tag{2.3}$$

ahol a $\hat{\nabla}_j$ operáció, a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ bázisban számítva

$$\hat{\nabla}_jX^i=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}-\Gamma^{*i}_{kj}X^k+C^i_{jm}\left(\frac{\partial X^m}{\partial x^s}+\Gamma^{*m}_{ks}X^k\right)y^s. \tag{2.4}$$

Tekintetbe véve, hogy az X^i komponensek nem függnek y-tól, a (2.4) jobb oldala így is írható:

$$\hat{\nabla}_jX^i=\nabla'_jX^i+C^i_{jm}\nabla'_0X^m. \tag{2.5}$$

Ha a Γ^*-k, illetve a C-k szimmetrikusak (s ezt a továbbiakban feltételezzük), akkor

$$\hat{\nabla}_jX^i=X^i_{|j}+C^i_{js}X^s_{|0}. \tag{2.6}$$

2.2. DEFINÍCIÓ. A (2.6) segítségével értelmezett $\hat{\nabla}_i$ műveletet az X mező *negyedfajú kovariáns deriváltjának* nevezzük.

(A 3. pontban majd megadjuk e deriváció geometriai jelentését.)

Mindeddig nem foglalkoztunk a T_q érintőtér $\{E_i, F_i, G^i_k\}$ bázisának duális bázisával.

2.3. DEFINÍCIÓ. A

$$\tilde{\theta}^i(E_k)=\delta^i_k,\quad \tilde{\omega}^i(F_k)=\delta^i_k,\quad \tilde{\omega}^i_k(G^m_s)=\delta^i_s\delta^k_m \tag{2.7}$$

relációkkal értelmezett formákat rendre a $\mathcal{H}_q'^*$, $\mathcal{H}_q''^*$, $\mathcal{V}_q^*$ duális terek *duális bázisainak* nevezzük. Egyszerű számítással adódik, hogy reguláris összefüggés esetén

$$\tilde{\theta}^i = \overset{(-1)}{R}{}^i_s dx^s; \quad \tilde{\omega}^i = \overset{(-1)}{R}{}^i_s (dy^s + y^m \Gamma^{*s}_{mk} dx^k) = \overset{(-1)}{R}{}^i_s \omega^s$$

(2. 8)

$$\tilde{\omega}^i_k = \overset{(-1)}{R}{}^i_s \{dR^s_k + R^j_k (\Gamma^{*s}_{jm} dx^m + C^s_{jm} \omega^m)\}.$$

2. 4. DEFINÍCIÓ. A

$$\tilde{\Theta}^i = d\tilde{\theta}^i + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^k \wedge \tilde{\omega}^i_k) \tag{2. 9}$$

$$\tilde{\Omega}^i_k = d\tilde{\omega}^i_k + \frac{1}{2}(\tilde{\omega}^s_k \wedge \tilde{\omega}^i_s) \tag{2. 10}$$

módon értelmezett formákat a Q nyaláb *torzió-*, illetve *görbületi formáinak* nevezzük.

A $\tilde{q}(t) = \exp(t\tilde{X})q$ egyparaméteres lokális transzformáció-csoport elemeit lokális automorfizmusoknak, affinitásoknak, nevezzük, ha megőrzik a Q tér lineáris összefüggését. Pontosabban fogalmazza ezt meg a

2. 5. DEFINÍCIÓ. Az $\tilde{X}$ mező által generált lokális transzformációk lokális automorfizmusai Q-nak, ha

$$L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_j = 0 \quad (\Leftrightarrow L(\tilde{X})\Gamma^{*i}_{jk} = L(\tilde{X})C^i_{jk} = 0) \tag{2. 11}$$

teljesül, azaz, ha az $\tilde{\omega}^i_j$ forma invariáns.

2. 1. *Megjegyzés.* A 2. 3. Definícióból világos, hogy ha $Z = Z^i_k G^i_k$ vertikális vektor, $\tilde{\omega}^i_k(Z) = Z^i_k$, tehát $\tilde{\omega}^i_j$ zérus értéket vesz fel bármely $X_q \in \mathcal{H}_q$ horizontális vektoron:

$$\tilde{\omega}^i_j(X) = 0, \quad \text{ha} \quad X \in \mathcal{H}_g. \tag{2. 12}$$

2. 1. TÉTEL. *Az $\tilde{X}$ vektormező lokális automorfizmus-csoportot generál akkor és csak akkor, ha bármely $W_q \in \mathcal{H}_q$ horizontális vektormező esetén*

$$[\tilde{X}, W] = 0.$$

Bizonyítás. Az I. fejezet (4. 3) képlete, valamint a fenti 2. 1. Megjegyzés alapján, ($\tilde{\omega}^i_j$ helyett rövidség kedvéért $\tilde{\omega}$-t írva):

$$i([\tilde{X}, W])\tilde{\omega} = L(\tilde{X})\{i(W)\tilde{\omega}\} - i(W)\cdot L(\tilde{X})\tilde{\omega} = -i(W)L(\tilde{X})\tilde{\omega},$$

tehát

$$[\tilde{X}, W] = 0 \rightarrow L(\tilde{X})\tilde{\omega} = 0.$$

A fordított állítás szintén könnyen belátható.

2. 2. TÉTEL. *Bármely lokális automorfizmus megőrzi a tér torzió-, illetve görbületi formáit.*

Bizonyítás. (2. 9), ill. (2. 10) alapján a $dL(\tilde{X})=L(\tilde{X})d$ felcserélési formula, valamint a triviális $L(\tilde{X})\tilde{\theta}=0$ reláció miatt

$$L(\tilde{X})\tilde{\Theta}^i=d(L(\tilde{X})\theta^i)+\frac{1}{2}\{(L(\tilde{X})\tilde{\theta}^k)\wedge\tilde{\omega}^i_k+\tilde{\theta}^k\wedge L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_k\}=0,$$

$$L(\tilde{X})\tilde{\Omega}^i_j=d(L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_k)+\frac{1}{2}\{(L(\tilde{X})\tilde{\omega}^s_k)\wedge\tilde{\omega}^i_s+\tilde{\omega}^s_k\wedge L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_s\}=0.$$

Az $L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_j=0$ relációból $L(\tilde{X})\tilde{y}^i=0$ miatt $L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i=0$ adódik. Ezeket felhasználva az alábbi következmény azonnal belátható.

Következmény. A klasszikus elméletből* ismert

$$\tilde{\Theta}^i=\frac{1}{2}\tilde{T}^i_{kl}\tilde{\theta}^k\wedge\tilde{\theta}^l+\tilde{C}^i_{kl}\tilde{\theta}^k\wedge\tilde{\omega}^l,$$

$$\tilde{\Omega}^i_j=\frac{1}{2}\tilde{S}^i_{jkl}\tilde{\omega}^k\wedge\tilde{\omega}^l+\tilde{P}^i_{jkl}\tilde{\omega}^k\wedge\tilde{\theta}^l+\frac{1}{2}\tilde{R}^i_{jkl}\tilde{\theta}^k\wedge\tilde{\theta}^l$$

felbontásból kiindulva a (fenti tételt felhasználva) rendre a $L(\tilde{X})\tilde{S}^i_{jkl}=L(\tilde{X})\tilde{P}^i_{jkl}=L(\tilde{X})\tilde{R}^i_{jkl}=0$ relációk adódnak.**

3. Endomorfizmus-csoport az érintőtérben

A (2. 6) pontban értelmezett, negyedfajú kovariáns deriváltnak nevezett $\hat{\nabla}_i X^j$ tenzornak érdekes geometriai interpretációja adható meg. Látni fogjuk, hogy bármely X vektormező (2. 6) közvetítésével a $\mathcal{H}'_q$, $\mathcal{H}''_q$, ill. a T^μ_ν vektorterek egy-egy $E'(X)$, $E''(X)$, $E(X)$ endomorf leképezését indukálja.

3. 1. DEFINÍCIÓ. Legyen $W\in T^\mu$, X pedig M valamely vektormezője. Jelölje $\tilde{X}$ a (2. 3) vektort, $\hat{\nabla}_n\tilde{X}^s$ ennek vertikális komponensét. A $\mathcal{H}'_q$, $\mathcal{H}''_q$, illetve a $T^\mu_{(x,y)}$ vektorterek X által generált $E'(X)$, $E''(X)$, $E(X)$ *endomorf leképezésein* rendre az alábbi megfeleltetéseket értjük:

$$E'(X):\quad W^{ph}\to-(W^k\hat{\nabla}_k\tilde{X}^s)E_s\in\mathcal{H}'_q$$

$$E''(X):\quad W^{ch}\to-(W^k\hat{\nabla}_k\tilde{X}^s)F_s\in\mathcal{H}''_q$$

$$E(X):\quad W\to-(W^k\hat{\nabla}_kX^s)\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{(x,y)}\in T^\mu_{(x,y)}.$$

Az $E'(X)$, $E''(X)$, ill. $E(X)$ leképezéseket rendre *főhorizontális*, *kohorizontális*, illetve *Minkowski-endomorfizmusnak* nevezzük.

* [1].
** [13].

Az alábbiakban megadjuk az $E(X)_i^j = E_i^j = -\hat{\nabla}_i X^j$ operátornak, amely tehát az

$$E(X): \quad W \to E(X)W, \qquad W^i \to E_j^i W^j = -W^s \hat{\nabla}_s X^i \tag{3.1}$$

módon hat, geometriai származtatását. Emlékeztetőül:

$$\hat{\nabla}_i X^j = X^j_{|i} + C^j_{is} X^s_{|0}. \tag{3.2}$$

Vegyük az M sokaságon az

$$x(t) = \exp(tX)x_0, \qquad |t| < \varepsilon_1 \tag{3.3}$$

csoportnak az x_0 pontból kiinduló trajektóriáját. Jelöljük a trajektóriának azt az ívét, amelyet a mozgó pont a $0 \leqq t < \varepsilon < \varepsilon_1$ intervallumban leír, l_ε-nal. Az l_ε mentén való párhuzamos eltolás operátorát jelöljük $\tau(l_\varepsilon)$-nal. Az x_0 pontban tekintsük az $(x_0, Y_0):(x_0^i, y_0^i)$ vonalelemet. Az

$$Y'_{(\varepsilon)} = \tau(l_\varepsilon) Y_0 \tag{3.4}$$

mennyiség nyilván vonalelem az $x(\varepsilon) = \exp(\varepsilon X)x_0$ pontban. Hajtsuk végre a (3. 3) leképezés inverzét. Ennek eredményeként az x_0 pontban az

$$Y_0(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon X)' \cdot \tau(l_\varepsilon) Y_0 \tag{3.5}$$

vonalelemhez jutunk. Az

$$\varepsilon \to Y_0(\varepsilon) \tag{3.6}$$

hozzárendelés a

$$\Lambda_\varepsilon = (x_0, Y_0(\varepsilon)) \subset V \tag{3.7}$$

görbét értelmezi. Speciális természete alapján a Λ_ε görbe nyilván szubvertikális. A Λ_ε fontos szerepet fog játszani a következő konstrukcióban.

Tekintsük az (x_0, Y_0) vonalelemhez tartozó $T^\mu_{(x_0, Y_0)}$ *Minkowski*-tér $W_0(x_0, Y_0)$ vektorát. A W_0 vektoron egymás után három operációt hajtunk végre.

1. Eltoljuk W_0-t az l_ε trajektória mentén párhuzamosan úgy, hogy közben Y_0 vonaleleme is párhuzamosan eltolódik. Jelöljük e művelet operátorát $\tau^*(l_\varepsilon)$-nal. Az eredményül kapott

$$W'(\varepsilon) = \tau^*(l_\varepsilon) W_0 \tag{3.8}$$

vektor támasztó eleme nyilván $[x(\varepsilon), Y'(\varepsilon)]$, azaz, $W'(\varepsilon) \in T^\mu_{(x(\varepsilon), Y'(\varepsilon))}$.

2. A (3. 8) vektorra alkalmazzuk a (3. 3) transzformáció inverzének $\exp(-\varepsilon x)'$ lineáris bővítését. A

$$W_0(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon X)' \tau^*(l_\varepsilon) W_0 \tag{3.9}$$

vektor támasztó eleme $(x_0, Y_0(\varepsilon))$ lesz (3. 5) alapján, tehát $W_0'(\varepsilon) \in T^\mu_{(x_0, Y_0(\varepsilon))}$.

3. Avégből, hogy a kiindulási (x_0, Y_0) vonalelemben értelmezett vektorhoz jussunk, toljuk el párhuzamosan a (3. 9) vektort (rögzített x_0 centrum mellett) a (3. 7) alatt értelmezett Λ_ε szubvertikális görbe Λ_ε^{-1} inverz görbéje mentén. Mivel

Λ_ε^{-1} végpontja Y_0, azért a

$$W_0(\varepsilon)=\tau(\Lambda_\varepsilon^{-1})\exp(-\varepsilon X)'\tau^*(l_\varepsilon)W_0 \tag{3.10}$$

vektor támasztó eleme az (x_0, Y_0) vonalelem, azaz, $W_0(\varepsilon)\in T^\mu_{(x_0,Y_0)}$. Ezekután lehetőség nyílik W_0 és $W_0(\varepsilon)$ összehasonlítására, hiszen mindkét vektor a $T^\mu_{(x_0,Y_0)}$ vektortér eleme.

Jelöljük Σ_ε-nal a

$$\sum\nolimits_\varepsilon : \quad W_0\to\sum\nolimits_\varepsilon(W_0)=W_0(\varepsilon)=\tau(\Lambda_\varepsilon^{-1})\exp(-\varepsilon X)'\tau^*(l_\varepsilon)W_0$$

hozzárendelést, ahol

$$\Sigma_0(W_0) = W_0 \qquad \text{(identikus leképezés).}$$

Képezzük a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[(\sum\nolimits_\varepsilon-\sum\nolimits_0)(W_0)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{W_0(\varepsilon)-W_0\}=\overline{W}_0$$

határértéket. Nyilván $\overline{W}_0\in T^\mu_{(x_0,Y_0)}$.

3. 1. TÉTEL. *A W_0 vektor nem más, mint*

$$\overline{W}_0=E(X)W_0=E^i_jW^j_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(x_0,Y_0)}=-(\hat{\nabla}_jX^i)W^j_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0,$$

tehát az a vektor, amelyet az $E(X)$ Minkowski-endomorfizmus rendel a W_0 vektorhoz.

Bizonyítás: A tétel lokális jellege miatt legyen szabad ezúttal az igazolást is klasszikus eszközökkel végrehajtani. Ismeretes, hogy a párhuzamos eltolás differenciálegyenlete az $(x(t), y(t))$ görbe mentén

$$\frac{DW^i}{dt}=\frac{dW^i}{dt}+W^s\left(\Gamma^{*i}_{sk}\frac{dx^k}{dt}+C^i_{sk}\frac{\omega^k}{dt}\right)=0. \tag{3.11}$$

Másrészt a (3. 3) leképezés lokális koordinátarendszerben

$$\exp(tX)x_0 \ : \quad x^i(t)=x^i_0+tX^i+t0(t), \tag{3.12}$$

tehát az inverz transzformáció:

$$x^i_0=x^i(t)-tX^i+t0(t). \tag{3.13}$$

Az 1. lépés (analitikusan) abban áll, hogy megoldjuk a (3. 11) egyenletet az $\omega^i=0$ feltétel mellett. (Ez utóbbi annyit jelent, hogy a vonalelem párhuzamosan eltolódik $x(t)$ mentén.) A $W'(\varepsilon)$ lokális komponensei

$$[W'(\varepsilon)]^i=W^i_0-\varepsilon W^s_0\Gamma^{*i}_{sk}X^k+\varepsilon 0(\varepsilon).$$

A (3. 13) inverzének lineáris bővítését alkalmazva:

$$[W'_0(\varepsilon)]^i=\left(\delta^i_m-\frac{\partial X^i}{\partial x^m}\varepsilon+\varepsilon 0(\varepsilon)\right)(W^m_0-\varepsilon W^s_0\Gamma^{*m}_{sk}X^k+\varepsilon 0(\varepsilon))=$$

$$=W^i_0-\varepsilon\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^m}+\Gamma^{*i}_{mk}X^k\right)W^m_0+\varepsilon 0(\varepsilon)=$$

$$=W^i_0-\varepsilon X^i_{|m}W^m_0+\varepsilon 0(\varepsilon).$$

A harmadik lépésben a centrum rögzített, $\frac{dx^i}{dt} = 0$, a növekmény kiszámítása a $-\varepsilon C^i_{sk} W^s_0 X^k_{|0} \ldots$ mennyiséget eredményezi. Így tehát

$$[W_0(\varepsilon)]^i = [\tau(\Lambda_\varepsilon^{-1}) W_0'(\varepsilon)]^i = (W^i_0 - \varepsilon X^i_{|m} W^m_0 + \varepsilon 0(\varepsilon)) -$$

$$- \varepsilon C^i_{mk} W^m_0 X^k_{|0} + \varepsilon 0(\varepsilon) = W^i_0 - \varepsilon \{X^i_{|m} + C^i_{mk} X^k_{|0}\} W^m_0 + \varepsilon 0(\varepsilon).$$

Következésképpen

$$[W_0(\varepsilon) - W_0]^i = -\varepsilon \{X^i_{|m} + C^i_{mk} X^k_{|0}\} W^m_0 + \varepsilon 0(\varepsilon).$$

Végül is

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} [W_0(\varepsilon) - W_0]^i = -(X^i_{|m} + C^i_{mk} X^k_{|0}) W^m_0 = [E(X) W_0]^i,$$

s ezzel tételünk bizonyítást nyert.

Vizsgáljuk a Σ_ε : $W_0 \to W_0(\varepsilon)$ endomorfizmus-sereget az esetben, ha az X vektormező egyparaméteres lokális automorfizmus-csoportot generál. Ebben az esetben látni fogjuk, hogy a Σ_ε maga is egyparaméteres lokális endomorfizmus-csoport a $T^\mu_{(x_0, Y_0)}$ térben.

A bizonyítás az alábbi lemmára támaszkodik.

3. 1. LEMMA. *Ha Y_0 a kezdő-vonalelem, akkor*

$$Y_0(\varepsilon + \varepsilon') = \exp(-\varepsilon' X)' \tau(l_{\varepsilon'}) \cdot Y_0(\varepsilon). \tag{3. 14}$$

Valóban,

$$Y_0(\varepsilon + \varepsilon') = \exp[-(\varepsilon + \varepsilon') X]' \tau(l_{\varepsilon + \varepsilon'}) Y_0.$$

A párhuzamos eltolás tulajdonsága miatt

$$Y_0(\varepsilon + \varepsilon') = \exp(-\varepsilon' X)' \cdot \exp(-\varepsilon X)' \tau[\exp(\varepsilon X) l_{\varepsilon'}] \tau(l_\varepsilon) Y_0. \tag{3. 15}$$

Mivel X lokális automorfizmus, az $\exp(-\varepsilon X)'$ és a τ operációk felcserélhetők, tehát

$$\exp(-\varepsilon X)' \tau[\exp(\varepsilon X) l_{\varepsilon'}] = \tau(l_{\varepsilon'}) \exp(-\varepsilon X)'.$$

Ezt (3. 15)-be helyettesítve, éppen (3. 14)-et kapjuk eredményül. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. Más megfogalmazásban

$$\Lambda_{\varepsilon + \varepsilon'} = \Lambda_\varepsilon \circ \Lambda_{\varepsilon'}, \tag{3. 16}$$

azaz az $\varepsilon + \varepsilon' \to \Lambda_{\varepsilon + \varepsilon'}$ szubvertikális görbét úgy kapjuk, hogy először Λ_ε-t írjuk le s ennek végpontjából kiindítjuk $\Lambda_{\varepsilon'}$-t.

A lemmára támaszkodva most már könnyen bizonyítható a

$$\sum_\varepsilon = \tau(\Lambda_\varepsilon^{-1}) \exp(-\varepsilon X)' \tau(l_\varepsilon) \tag{3. 17}$$

egyparaméteres endomorfizmus-sereg csoport-tulajdonsága. Az (egyébként formális) bizonyítást mellőzzük.

Eddigi eredményeinket foglalja össze a

3. 2. TÉTEL. *Ha az X vektormező lokális automorfizmusok egyparaméteres csoportját generálja, akkor a* (3. 17) *alatti* Σ_ε *leképezések, (bármely Minkowski-érintőtérben) egyparaméteres lokális csoportot alkotnak.*

Ezt a csoportot az X mezőhöz tartozó egyparaméteres endomorfizmus-csoportnak nevezzük. A 3. 2. Tétel alapján e csoportot az $E(X)$ operátor segítségével a

$$W_0(\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon(W_0) = \exp[\varepsilon E(X)]\, W_0$$

alakba írhatjuk.

Legyenek $\exp(tX_1)x$, illetve $\exp(tX_2)x$ lokális automorfizmus-csoportok. Akkor, természetes módon, az $x(t) = \exp([X_1, X_2])x$ csoport is lokális automorfizmusokból áll. (A Lie-féle csoportok általános elméletéből ismeretes, hogy ezek az egyparaméteres automorfizmus-csoportok az $A(h)$ automorfizmus-csoportot *generálják*, ha $A(h)$ összefüggő, egyébként $A(h)$ egységelemének komponensét.) Jelöljük a lokális automorfizmusokat generáló X vektormezők *Lie*-algebráját $\underline{A}$-sal, s tekintsük az $\underline{\mathscr{E}}_{\underline{A}} = \{E(X), X \in \underline{A}\}$ halmazt. Értelmezzük ebben a halmazban az $E(X_1)$, $E(X_2)$ elemek kommutátorát az

$$[E(X_1), E(X_2)]\, W = \{E(X_2) \circ E(X_1) - E(X_1) \circ E(X_2)\}\, W \tag{3. 18}$$

módon, ahol az $E(X_2) \circ E(X_1)$ kapcsolás úgy értendő, hogy először a W vektor $E(X_1)\, W$ képét, majd ennek $E(X_2)$-képét vesszük. Az $\underline{\mathscr{E}}_{\underline{A}}$ halmaz tehát *Lie-algebrát* alkot. A Lie-csoportok alaptételei szerint e Lie-algebrához egy, $\mathscr{E}_{\underline{A}}$-val jelzett, Lie-csoport tartozik, amelynek egyparameteres részcsoportjai nyilván a 3. 2. Tételben szereplő $\exp(tE(X))$ szimbólumú leképezések.

3. 2. DEFINÍCIÓ. Az $\mathscr{E}_{\underline{A}}$ Lie-csoportot az $\underline{A}$-algebrához tartozó *endomorfizmus-csoportnak* nevezzük.

Az $\mathscr{E}_{\underline{A}}$ csoport viselkedése szorosan összefügg a Finsler-nyaláb görbületi viszonyaival. Csupán technikai problémát jelent a következő tétel bizonyítása.

3. 3. TÉTEL. *Legyen* $X, Y \in \underline{A}$. *Akkor*

$$\Omega(X, Y) = E(X) \circ E(Y) - E(Y) \circ E(X) - E([X, Y]), \tag{3. 19}$$

ahol $E(X), E(Y), E([X, Y]) \in \underline{\mathscr{E}}_{\underline{A}}$ *és*

$$\{\Omega(X, Y)\}^i_j = R^i_{jkl} X^k Y^l + S^i_{jkl} X^k_{|0} Y^k_{|0} + P^i_{jkl}(X^k Y^l_{|0} - Y^k X^l_{|0}).$$

A (3. 18) *jelöléssel* (3. 19) *így is írható:*

$$\Omega(X, Y) - [E(X), E(Y)] + E([X, Y]) = 0. \tag{3. 20}$$

A részletes bizonyítást, annak viszonylag egyszerű volta miatt mellőzzük.

4. Automorfizmusok Finsler-féle metrikus terekben

4. 1. DEFINÍCIÓ. A Q Finsler-féle fibrált teret *Finsler-féle metrikus térnek** nevezzük, ha a Q tér V bázisterén adott az $\mathfrak{L}(x, y) > 0$, az $\mathfrak{L}(x, yz) = z\mathfrak{L}(x, y)$, $z \in R^+$, feltételt kielégítő függvény, az ún. *alapfüggvény*, amely eleget tesz az ismert

* [1].

Cartan-féle követelménynek: az $F=\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2$ függvényből származtatott

$$g_{ij}(x, y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \tag{4. 1}$$

koefficiensekkel képzett kvadratikus forma *pozitív definit.*

A (4. 1) által értelmezett metrikához *kanonikus módon* tartozik a Q nyalábnak egy lineáris összefüggése. Az összefüggés Γ^*, ill. C összefüggési objektumainak a g_{ij} mennyiségekből való származtatása Cartan alapvető munkája alapján jól ismert.

4. 2. DEFINÍCIÓ. Az M sokaság $\varphi: M \to M$ diffeomorfizmusát *mozgásnak* nevezzük, ha a V-n indukált φ' leképezésre

$$F(\varphi(x), \varphi(y)) = F(x, y) \tag{4. 2}$$

teljesül. A mozgások a Finsler-tér automorfizmusai.

Könnyű kimutatni, hogy ha a *Finsler*-féle teret a kanonikus lineáris összefüggéssel látjuk el, akkor bármely mozgás egyúttal az $A(h)$ csoport eleme is, tehát affinitás.

Ismeretes, hogy a φ_t lokális csoport *lokális mozgásokból* áll, ha

$$L(X)g_{ij} = 0 \tag{4. 3}$$

teljesül, ahol X a φ_t-t generáló vektormező. Lokális koordinátákban a (4. 3) feltételek, (az ún. *Killing-egyenletek**) a

$$X_{i|j}+X_{j|i}+2C_{ijm}X^m_{|0}=0 \tag{4. 4}$$

alakban írhatók. Az előző pontban bevezetett $\hat{\nabla}_i$ negyedfajú kovariáns deriváció segítségével ezek az egyenletek az alábbi, igen egyszerű formára hozhatók:

$$\hat{\nabla}_i X_j + \hat{\nabla}_j X_i = 0. \tag{4. 5}$$

Ugyanúgy, ahogyan ezt a 3. pontban tettük, értelmezhetjük, lokális mozgások esetén is az érintőtér endomorfizmusait a

$$W \to E(X)W : W_i \to -(\hat{\nabla}_m X_i) W^m$$

segítségével. Az $E(X)_{ij}$ komponensek bevezetésével átírhatjuk a Killing-egyenleteket az

$$E(X)_{ij}+E(X)_{ji} = 0 \tag{4. 6}$$

alakba. Igaz tehát az alábbi

4. 1. TÉTEL. *A Minkowski-féle érintőtér Killing-vektorokhoz tartozó endomorfizmusainak $E(X)_{ij}$ operátorai ferdén szimmetrikusak.*

Bizonyítjuk az alábbi állítást.

4. 2. TÉTEL. *Legyen ψ_t lokális affinitás és tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) fix vonalelemben teljesül a* (4. 6) *reláció. (Azt mondjuk, hogy a ψ_t leképezés izometrikus az (x_0, y_0) pontban.) Akkor* (4. 6) *mindenütt teljesül, következésképpen ψ_t a tér lokális mozgása.*

* [13].

Bizonyítás: Jelölje E^i_j a lokális affinitáshoz tartozó $E(X)$ endomorfizmus komponenseit. Kiszámítva $E(X)^i_j = E^i_j$ invariáns differenciálját, az $(x(t), y(t))$ görbe mentén a

$$\frac{DE^i_j}{dt} = R^i_{jhs}X^s \frac{dx^h}{dt} + P^i_{jhs}X^s_{|0} \frac{dx^h}{dt} - \tag{4.7}$$
$$- P^i_{jsk}X^s \frac{Dy^h}{dt} + S^i_{jsh}X^s_{|0} \frac{Dy^h}{dt}$$

összefüggést kapjuk. Ez a reláció egyszerű következménye az $L(\tilde{X})\tilde{\omega}^i_j = 0$ definiáló egyenletnek. Mivel $\frac{Dg_{ij}}{dt} = 0$, azért (4. 7) bal oldala $\frac{DE_{ij}}{dt}$ alakban is írható. Ezt feltételezve adjuk (4. 7) bal oldalához a $\frac{DE_{ji}}{dt}$ kifejezést. A R_{ijsh}, stb. tenzorok ferde szimmetriája miatt a jobb oldalon zérust kapunk, tehát

$$\frac{DE_{ij}}{dt} + \frac{DE_{ij}}{dt} = \frac{D}{dt}(E_{ij} + E_{ji}) = \frac{DH_{ij}}{dt} = 0, \tag{4.8}$$

Felhasználva azt, hogy $E_{ij} + E_{ji} = 0$ az (x_0, y_0) vonalelemben, továbbá azt, hogy a (4. 8) egyenlet részletesen kiírva a Hi_j ismeretlen függvényekben lineáris, ezért $H_{ij} \equiv 0$. Ezzel a tétel bizonyítást nyert.

5. Záró megjegyzések

Tárgyalásainkat két probléma felvetésével zárjuk. Az egyik a lineáris összefüggés egzisztenciájával, a másik a holonomia-csoport fogalmával kapcsolatos.

5. 1 TÉTEL. *Bármely Q Finsler-féle fibrált tér elláthatóó lineáris összefüggéssel, ha Q a II. megszámlálhatósági axiómának eleget tesz.*

Ezt a tételt teljes részletességgel, több ok miatt, nem bizonyítjuk. A döntő ok az, hogy a bizonyítás során szükség van a fibrált terek általános elméletének mondhatni teljes apparátusára, beleértve a fibrált terek homotopia-elméletét is. A II. fejezet elején a fibrált tereknek csupán az értelmezésére tértünk ki, mellőznünk kellett a részletesebb bevezetést. Éppen ezért az alábbiakban vázolt *heurisztikus* gondolatmenet, ha nem is tekinthető 5. 1. szigorú bizonyításának, a követendő eljárás lényegére többé-kevésbé rámutat.

A Q sokaság lineáris összefüggéseinek $H = \{h\}$ halmazáról kimutattuk, hogy konvex halmaz. Jelölje H_q a $h_q = h|T_q$ leszűkítések halmazát: $H_q = \{h_q\}$. E halmazt kívánjuk elöljáróban kissé részletesebben tanulmányozni. Legyen h_q, $\bar{h}_q \in H_q$. Akkor, ha q fix,

$$\bar{h}_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - h_q\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = [(\bar{\Gamma}^s_{ji} - \Gamma^s_{ji}) R^j_k] \frac{\partial}{\partial R^s_k},$$

$$\bar{h}_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) - h_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = [(\bar{C}^s_{ji} - C^s_{ji}) R^j_k] \frac{\partial}{\partial R^s_k}.$$

A zárójelben álló mennyiségek nyilván tenzorok, jelöljük ezeket rendre G^s_{ji}-vel, illetve H^s_{ji}-vel. Akkor nyilván

$$\bar{\Gamma}=\Gamma+G, \quad \bar{C}=C+H. \tag{5.1}$$

Ebből a relációból tehát azt kapjuk, hogy a h_q lokális Γ, ill. C komponenseinek ismeretében bármely más $\bar{h}_q \in H_q$ úgy áll elő, hogy h_q megfelelő komponenseihez a G, illetve H tenzorok komponenseit adjuk. A

$$\Lambda_q : \quad H_q \to R^{2n^3} \qquad (q \text{ fix}) \tag{5.2}$$

leképezést így értelmezzük:

$$h_q \to \{\Gamma^i_{sj}R^s_k,\ C^i_{sj}R^s_k\},$$

azaz h_q-nak az R^{2n^3} térnek azt a pontját feleltetjük meg, amelynek derékszögű koordinátái éppen a zárójelben álló $2n^3$ számú (valamilyen sorrendet egyszer s mindenkorra rögzítve) mennyiségek. Az (5. 2) leképezés tehát H_q-nak R^{2n^3} valamely részhalmazát feleltheti meg, tehát a leképezés alapján H_q topologikus térré tehető. Ha $\Lambda_q(h_q) \in R^{2n^3}$ ismert, akkor (5. 1) alapján bármely más $\bar{h}_q$ képét úgy kapjuk, hogy a $\Lambda_q(h_q)$ vektorhoz hozzáadjuk a $\{G, H\}$ koordinátájú vektorokat. Ez annyit jelent, hogy a $\Lambda_q(H_q)$ halmazon egy additív transzformáció-csoport (jelöljük A^N-nel) operál. Ha $h_q \in H_q$, jelentse p a $p: h_q \to q$ projekciót. Összefoglalva: a Q tér lineáris összefüggéseinek H halmaza $\{H, Q, p, H_q, A^N\}$ szimbólumú fibrált térré tehető. Nevezzük ezt *összefüggés-nyalábnak*. Ebben a terminológiában akkor Q valamely h összefüggése nem más, mint egy

$$h : \quad Q \to H, \qquad q \to h_q \in H_q \tag{5.3}$$

ún. *keresztmetszet* [14]. Az egzisztencia-probléma tehát az (5. 3) alakú keresztmetszetek létezésével ekvivalens. Ezek (hangsúlyozzuk, *nagybani*) létezése a fibrált terek elméletének egyik központi problémája. Ismeretes azonban egy elég általános tétel [14], amely homotopiailag egyszerűen viselkedő fibrum esetén az egzisztenciát biztosítja. Szerencsére amiatt, hogy a H_q halmaz az (5. 2) alapján valamely euklideszi tér konvex halmazával áll kapcsolatban, az említett általános egzisztenciatétel követelései teljesülnek, hacsak a Q bázistér a II. megszámlálhatósági axiómának eleget tesz. Ez viszont bekövetkezik, ha M rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

A másik fontos probléma a holonomia-csoporttal kapcsolatos. Legyen Q lineárisan összefüggő Finsler-nyaláb.

5. 1. DEFINÍCIÓ. A Q tér Φ_q (homogén) *holonomia-csoportja* a q pontban mindazon $\alpha \in GL(n, R)$ elemek halmaza, amelyekre a q és $q\alpha$ pontok *horizontális úttal* összeköthetők.

Könnyű igazolni, hogy a Φ_q halmaz valóban csoport.

A definíció egyszerűsége ellenére e fogalommal kapcsolatosan problémáknak egész sora vetődik fel. Ezek egy része interpretációs jellegű, s akkor lépnek fel, ha a Q teret V-re, s ennek megfelelően $T(Q)$-t a Minkowski-érintőtérre szűkítjük le. E leszűkített változatban bonyolultnak látszik a Φ_q holonomia-csoport *Lie*-algebrájának előállítása, ennek összefüggése az $\mathscr{E}_{\underline{A}}$ endomorfizmus-csoport Lie-algebrájával stb. Ezekre vonatkozóan csak néhány speciális természetű részeredményt említhetnénk meg.

IRODALOM

[1] CARTAN, É., *Les espaces de Finsler*, Hermann, Paris, 1934.
[2] CHEVALLEY, C., *Theory of Lie Groups I.*, Princeton, 1946.
[3] EHRESMANN, C., Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable., *Coll. de Topologie (Espaces fibrés)*, Bruxelles, 1951., 29–55.
[4] EHRESMANN, C., Introduction a la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Internat. de Géom. Différentielle*, Strasbourg, 1953.
[5] HU, SZE-TSEN, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, London, 1959.
[6] KOBAYASHI, S., Groups de transformations qui laissent invariante une connexion infinitésimale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **238** (1954), 644–645.
[7] LICHNEROWICZ, A., *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma et Dunod, Paris, 1955.
[8] LICHNEROWICZ, A., *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
[9] MONTGOMERY, D.–ZIPPIN, *Topological Transformation Groups*, Interscience Publ., New York, 1955.
[10] NOMIZU, K., *Lie Groups and Differential Geometry*, Math. Soc. of Japan, 1956.
[11] OTSUKI, T., Theory of affine connections of the space of tangent directions of a differentiable manifold I–II., *Math. J. Okayama Univ.* **7** (1957), 1–74.
[12] RUND, H., *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer, Berlin, 1959.
[13] SOÓS, GY., Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954), 73–84.
[14] STEENROD, N. E., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, 1951.
[15] VARGA, O., Affinzusammenhängende Räume von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math.* **1** (1949), 1–17.
[16] YANO, K., *The Theory of Lie Derivatives and its Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1957.