A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEKRŐL (II)*

Írta: A. SZ. KRONROD

3. §. Monoton függvények

A monoton függvény fogalmának intuitív tartalma abban áll, hogy az argumentumot „bizonyos irányban" megváltoztatva a függvény növekszik (illetve fogy). Egyenes vonalon értelmezett függvények esetén létezik ilyen „természetes irány". Már a körvonalon, vagy mondjuk, egy olyan kontinuumon értelmezett függvények esetében azonban, amely egy közös végponttal rendelkező három szakaszból áll, be kell vezetnünk a *pontra vonatkozó* monotonitás fogalmát. Ugyanez a helyzet a négyzeten vagy kétdimenziós gömbfelületen megadott függvényeknél (és akkor is, ha az értelmezési tartomány dimenziója még nagyobb).

Ebben az esetben természetes dolog azt mondani, hogy az $F(\eta)$ függvény a ξ pontra nézve monoton növekedő, ha az η pont ξ-től való „távolodásakor" az $F(\eta)$ mennyiség növekszik. Minden azon múlik, hogyan vezetjük be az η pont ξ-től való távolodásának fogalmát.

12. definíció. Az $F(\eta)$ folytonos függvényt (a ξ pontra nézve) *monoton növekedőnek* nevezzük, ha mindegyik nívóhalmazának mindegyik reguláris komponense növekedési komponens, kivéve esetleg a ξ pontot tartalmazót.

Az $F(\eta)$ folytonos függvényt (a ξ pontra nézve) *monoton fogyónak* nevezzük, ha mindegyik nívóhalmazának mindegyik reguláris komponense fogyási komponens, kivéve esetleg a ξ pontot tartalmazót.

A megadott definíció magának az $F(\eta)$ függvénynek az értelmezési tartományában bevezethető következő „földrajznak" felel meg: az η pont „közelebb" van ξ-hez, mint ζ-hoz, ha az η pontot tartalmazó nívóhalmaz-komponens a ξ, ζ pontokat elválasztja. Magától értetődően előfordulhat, hogy az η, ζ pontok „összehasonlíthatatlanok". A következő segédtétel igazolja az elmondottakat:

16. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos, a ξ pontra nézve monoton növekedő (illetve fogyó) függvény. Akkor $F(\eta)$ bármely reguláris komponensének belső karakterisztikája az $F^*(\eta)$ függvény abszolút minimumot (illetve maximumot) szolgáltató komponense.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét. Az $F(\eta)$ függvény meghatározottság kedvéért legyen növekedő. Legyen K a t nívó olyan reguláris komponense, amelyre a K^* belső karakterisztika az $F^*(\eta)$ függvénynek nem abszolút minimumot

* Успехи математических Наук, Том V, Выпуск 1 (35), 24—134. A fordítás első része a *MTA III. Osztály Közleményei* 13 (1962) 361—386. oldalán jelent meg, és tartalmazza a Függelék című fejezetet és a teljes irodalomjegyzéket, valamint az eredeti cikk I. fejezete 1—2. §-át.

A most közölt rész az I. fejezet 3—5. §-át és teljes II. fejezetét öleli fel.

szolgáltató komponense. Legyen J_1 és J_2 az a két tartomány, amelyre K szétválasztja J-t, és legyen $\xi \in J_1$. Akkor található olyan ζ pont J_2-ben, hogy $F(\zeta) < t$. Olyan komponensek, amelyek a J tartományt kettőnél több részre osztják, legfeljebb megszámlálhatóan sok nívóhalmazban fordulnak elő, tehát választhatunk olyan t' számot $(F(\zeta) < t' < t)$, hogy az $E_{t'}$ nívóhalmaz ne tartalmazzon ilyen komponenst. A ζ pontot a t' nívó elválasztja K-tól és így $E_{t'}$ bizonyos komponensei elválasztják a ζ pontot K-tól. Legyen L az $E_{t'}$ halmaz említett komponensei közül a K-hoz legközelebbi (ennek létezését a 9. segédtétel biztosítja). A t' érték megválasztása folytán az L komponens reguláris. Tekintsük az L komponens L^{**} külső karakterisztikáját. Az 1. tétel szerint L^{**} vagy félmaximumot szolgáltató komponens vagy félminimumot szolgáltató komponens, vagy pedig koncentrikus szingularitású komponens. A második és harmadik esetet kizárja az a feltevés, hogy az $F(\eta)$ függvény monoton növekedő.

Tehát L^{**} félmaximumot szolgáltató komponens. De a K-hoz megszerkesztett $F^*(\eta)$ függvény t' nívójának a ξ, ζ pontokat elválasztó komponensei közül L a ξ-hez *legközelebbi*, és a 10. segédtétel szerint az L^{**} külső karakterisztikának félminimumot szolgáltató komponensnek kell lennie, mert $t' < t = F(\xi)$.

A nyert ellentmondással a segédtételt bebizonyítottuk.

A bizonyítást arra az esetre, amikor $F(\eta)$ monoton fogyó függvény, a $-F(\eta)$ függvény vizsgálatával kapjuk.

A 16. segédtételből következik, hogy ha $F(\eta)$ a ξ pontra nézve monoton növekedő függvény és a ζ pont a fent bevezetett értelemben messzebb van ξ-től, mint az η pont, akkor $F(\zeta) \geqq F(\eta)$. Sőt, a segédtételt élesíteni is lehet annak megmutatásával, hogy ebben az esetben $F(\zeta) > F(\eta)$. Valóban, legyen K az η pontot tartalmazó komponens, és tegyük fel, hogy a $\zeta \notin K$ pontot K elválasztja ξ-től.

Ha $F(\xi) = t = F(\eta)$, akkor a 11. segédtétel szerint található valamely $t' \neq t$ nívóhoz tartozó K' komponens, amely a ζ pontot elválasztja η-tól és ugyanakkor ξ-től is. De a 16. segédtétel folytán $t' < t$ lehetetlen. Továbbá, ha $t' > t$, akkor a 16. segédtételben a K' komponenst választva K gyanánt, ismét ellentmondásra jutunk, ugyanis $F(\zeta) = t < t'$. Ennélfogva $F(\zeta) \neq t$, és így bebizonyítottuk a következőt:

16'. SEGÉDTÉTEL. *A 16. segédtétel feltételei mellett az $F^*(\eta)$ függvény bármely belső karakterisztikán kívül határozottan nagyobb (illetve kisebb), mint magán a karakterisztikán.*

Az egydimenziós fa segítségével egyszerűen le lehet írni az adott ξ pontra nézve monoton függvény fogalmát. Nyilvánvaló, hogy *az $F(\eta)$ függvény a ξ pontra nézve monoton növekszik (fogy), ha bármely T_F-beli és l_ξ végpontú egyszerű íven az $F^*(l)$ függvény l_ξ felől tekintve monoton növekszik (illetve fogy).*

A 7. tételből következik, hogy ez a megfelelés kölcsönös.

Bebizonyítunk egy tételt, amely egyszerű szükséges és elégséges feltételt ad az $F(\eta)$ függvény monotonitására.

E tétel kimondásáért köszönettel tartozunk A. Filippovnak.

8. TÉTEL. *Az $F(\eta)$ függvény monoton voltának szükséges és elégséges feltétele:*

A) *Monoton növekedő $F(\eta)$ esetén az $\underline{M}_{t_0} = \sum_{t \leqq t_0} E_t$ Lebesgue-halmaz összefüggő volta minden t_0 érték mellett.*

B) *Monoton fogyó $F(\eta)$ esetén az $\overline{M}_{t_0} = \sum_{t \geqq t_0} E_t$ Lebesque-halmaz összefüggő volta bármely t_0 értékre.*

BIZONYÍTÁS. Először bebizonyítjuk az A) feltétel szükségességét. Tegyük fel, hogy az $F(\eta)$ függvény monoton növekszik a ξ pontra nézve. Akkor a T_F fán az $F^*(l)$ függvény minden l_ξ végpontú σ egyszerű íven monoton növekszik l_ξ-re nézve. Minden ilyen σ íven a $\tau_F(\underline{M}_{t_0})$ halmaz egy l_ξ végpontú σ' egyszerű ívet alkot. Az összes σ' ívek összege egy R_{t_0} kontinuum. Akkor $\tau^{-1}(R_{t_0})$ kontinuum a J térben és az $\underline{M}_{t_0} = \tau^{-1}(R_{t_0})$ halmaz tetszés szerinti t_0 mellett összefüggő.

Most bebizonyítjuk, hogy az A) feltétel elégséges. Tegyük fel, hogy a ξ pontban az $F(\eta)$ függvény minimumot ér el. Legyen $K \neq K_\xi$ olyan reguláris komponens, amely nem növekedési komponens ξ-re nézve. Akkor van olyan l_ξ, l_ζ végpontokkal rendelkező σ egyszerű ív, amelynek az $l_0 = \tau_F(K)$ pont belső pontja és amelyen l_0 az $F^*(l)$ függvénynek nem növekedési pontja. Ezek szerint vagy az $l_\xi l_0$ íven található olyan l_1 pont, amelyre $F^*(l_1) > F^*(l_0)$, vagy az $l_0 l_\zeta$ íven található olyan l_2 pont, amelyre $F^*(l_2) < F^*(l_0)$. Az első esetben a $K_1 = \tau^{-1}(l_1)$ komponens elválasztja a ξ és a $\varkappa \in K$ pontot és az $\underline{M}_{F(\varkappa)}$ halmaz nem összefüggő (ugyanis $\xi, \varkappa \in \underline{M}_{F(\varkappa)}$), a második esetben a K komponens elválasztja a ξ és a $\lambda \in \tau^{-1}(l_2)$ pontot és az $\underline{M}_{F(\lambda)}$ halmaz nem összefüggő. Ily módon az A) feltétel szükséges és elégséges voltát bebizonyítottuk. Az $F(\eta)$ függvényről áttérve a $-F(\eta)$ függvényre nyerjük a B) feltétel szükségességét és elégségességét. A 8. tételt bebizonyítottuk.

A 8. tételből speciálisan következik azon nívóhalmazok összefüggő volta, ahol a monoton növekedő (fogyó) függvény minimumot (illetve maximumot) ér el. A 8. tételből következik továbbá, hogy ha az $F(\eta)$ függvény monoton növekszik a ξ pontra nézve és ugyanakkor monoton fogy a ζ pontra nézve, akkor e függvény mindegyik nívóhalmaza összefüggő. Valóban, ha a t nívó tartalmaz két különböző K_1, K_2 komponenst, akkor a 11. segédtétel szerint ezeket vagy a $t+\delta$, vagy a $t-\delta$ $(\delta > 0)$ nívónak valamelyik komponense elválasztja. Az első esetben $\underline{M}_t$, a másodikban pedig $\overline{M}_t$ nem összefüggő.

4. §. A Hausdorff-féle lineáris mérték. Nívóhalmazok hosszúsága

Ha a síkbeli P kontinuum egyszerű ív, akkor P hosszúságának a fogalmát nehézség nélkül bevezethetjük: felveszünk a P íven tetszés szerinti olyan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ véges pontsorozatot, hogy a_s a P íven tekintve elválasztja az a_{s-1}, a_{s+1} pontokat. Továbbá képezzük azt a poligont, amelynek egymás után következő szögpontjai $a_0, a_1, \ldots, a_n$, és az összes ilyen poligonok hosszúságának felső határát választjuk P hosszúságának. Továbbá, ha P véges számú egyszerű ívből álló kontinuum, akkor könnyen előállítható véges számú közös ponttal rendelkező $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ egyszerű ívek összegeként. Ebben az esetben természetes dolog a $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ívek hosszúságának összegét tekinteni P hosszúságának. Ha a P kontinuum lokálisan összefüggő, akkor P hosszúságának vehetjük P mindazon P' részkontinuumai hosszúságának felső határát, amelyek véges számú egyszerű ívből állnak. Ha a kontinuum nem lokálisan összefüggő, akkor meg kell változtatnunk a hosszúság definícióját.

A jelen nehézségek azonban csak akkor merülnek fel, amikor áttérünk a nem összefüggő halmazok hosszúságának bevezetésére. A mi feladatunkhoz nem tar-

tozik hozzá a hosszúság fogalmának általános vizsgálata. Az e kérdés iránt érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk például A. N. KOLMOGOROV [5] munkáját. Számunkra a halmazok hosszúsága kisegítő, de szükséges fogalom a kétváltozós függvények és nívóhalmazaik tanulmányozásánál. Ezért ebben a részben kissé lerövidítjük a tárgyalást és nem ismételjük el néhány fontos, de jól ismert, és könnyen hozzáférhető tankönyvekben kifejtett tétel bizonyítását.

Az R_n euklideszi térben *Carathéodory*-féle külső mértéknek nevezünk minden olyan $\nu(E)$ $(E \subset R_n)$ halmazfüggvényt, amelyre teljesül az alábbi három feltétel:

1. $\nu(E) \geqq 0$ (esetleg $\nu(E) = +\infty$).
2. Ha az E_1, E_2 halmazok egymástól $d > 0$ távolságra vannak, akkor $\nu(E_1 + E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)$.
3. Tetszés szerinti E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazokra

$$\nu(\sum_n E_n) \leqq \sum_n \nu(E_n).$$

Megjegyezzük, hogy sokkal általánosabb terek halmazaira is lehet *Carathéodory*-féle külső mértéket értelmezni, de számunkra teljesen elegendők a síkbeli halmazokon értelmezett külső mértékek.

13. definíció. Az E halmazt *ν-mérhetőnek* nevezzük, ha tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ és N értékhez $\nu(E) < +\infty$ esetén található olyan $F \subset E$ zárt halmaz, hogy $\nu(E) - \nu(F) < \varepsilon$, $\nu(E) = +\infty$ esetén pedig olyan $F \subset E$ zárt halmaz, amelyre $\nu(F) > N$.

A *Borel*-halmazok bármely *Carathéodory*-féle külső mértékre nézve mérhetők a 13. definíció szerinti értelemben. A *Borel*-halmazok összességén bármely *Carathéodory*-féle külső mérték teljesen additív. Ezen tételek bizonyítását az olvasó megtalálhatja SAKS „*Theory of the integral*" című [6] könyvében.

Mi egy konkrét *Carathéodory*-mértéket fogunk használni, a *Hausdorff*-féle lineáris mértéket.

14. definíció. Legyen E valamely síkbeli ponthalmaz és legyen σ_ε ε-nál nem nagyobb sugarú körökből álló és az E halmazt lefedő rendszer. Jelentse $\nu(\sigma_\varepsilon)$ a σ_ε-hoz tartozó körök átmérőinek összegét. Legyen $\nu_\varepsilon(E) = \inf \nu(\sigma_\varepsilon)$, ahol az alsó határ az összes lehetséges σ_ε rendszerekre képezendő. A $\nu(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_\varepsilon(E)$ számot az E halmaz Hausdorff-féle külső lineáris mértékének nevezzük (előfordulhat, hogy $\nu(E) = +\infty$).

A $\nu_\varepsilon(E)$ számot a $\nu(E)$ *Hausdorff*-féle külső lineáris mérték ε-közelítésének nevezzük. Ha az E halmaz mérhető ezen külső mérték szerint, akkor a $\nu(E)$ számot egyszerűen E (*Hausdorff*-féle) lineáris mértékének nevezzük. A lineáris mértéket néha a halmaz hosszúságának fogjuk nevezni.

A *Hausdorff*-féle külső lineáris mértékre majdnem triviálisan teljesül a *Carathéodory*-féle mérték mindhárom definiáló tulajdonsága.

Tehát *minden Borel-halmaz lineárisan mérhető Hausdorff szerint, és ha* $E_1, E_2, \ldots$ *egymást páronkint nem metsző Borel-halmazok, akkor*

$$\nu(\sum_n E_n) = \sum_n \nu(E_n).$$

Mostantól kezdve $\nu(E)$-vel a síkbeli E halmaz *Hausdorff*-féle lineáris mértékét fogjuk jelölni.

Tegyünk néhány egyszerű megjegyzést az általunk bevezetett lineáris mértékre vonatkozóan.

17. SEGÉDTÉTEL. *Legyen K valamely d átmérőjű kontinuum. Akkor $v(K) \geqq d$, sőt, $v_\varepsilon(K) \geqq d$ tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ értékre.*

A bizonyítás abból következik, hogy a K kontinuumnak körökkel való bármely σ lefedésénél az átmérők összege $\geqq d$, mert ha a és b a K kontinuum pontjai és $|a, b| = d$, akkor a σ-hoz tartozó köröknek az $[a, b]$ szakaszra való vetülete ezt az egész szakaszt lefedi.

9. TÉTEL. *Egyszerű ív vagy topológikus kör Hausdorff-féle lineáris mértéke egyenlő közönséges értelemben vett hosszúságával. Lokálisan nem összefüggő kontinuum Hausdorff-féle lineáris mértéke végtelen.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ az L egyszerű ív pontjainak olyan sorozata, hogy a_s elválasztja az a_{s-1}, a_{s+1} pontokat. Akkor az L egyszerű ív a_s-től a_{s+1}-ig terjedő szakaszának átmérője legalább $|a_s, a_{s+1}|$, tehát $v(L) \geqq \sum_{s=1}^{n} |a_s, a_{s-1}|$, amiből következik, hogy a Hausdorff-féle lineáris mérték nem kisebb, mint az L ív szokásos értelemben vett $|L|$ hosszúsága.

Másrészt legyen L hosszúsága $\mu < +\infty$, továbbá legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti szám, az n természetes szám pedig olyan nagy, hogy $\frac{\mu}{2n} < \varepsilon$. Válasszunk az L íven olyan $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ pontokat, hogy L hosszúsága a_s és a_{s+2} között $\frac{\mu}{2n}$ legyen. Az $a_1, a_3, a_5, \ldots$ pontok mint középpont körül rajzoljunk $\frac{\mu}{2n}$ sugarú köröket. E körök összege lefedi az L ívet, mindegyikük sugara $< \varepsilon$, és átmérőik összege μ. Ebből következik, hogy $v_\varepsilon(L) \leqq |L|$ tetszés szerinti ε-ra, és így $v(L) = |L|$.

Most megmutatjuk, hogy ha K lokálisan össze nem függő kontinuum, akkor $v(K) = +\infty$. Valóban, tegyük fel, hogy az $a \in K$ pontban K nem lokálisan összefüggő. Akkor található olyan a középpontú S kör, hogy a bármely környezetének legalább egy pontja az $S \cap K$ halmaznak más komponensében fekszik, mint a. Innen következik, hogy található az $S \cap K$ halmaz páronkint különböző komponenseiből álló $K_1, K_2, \ldots$ sorozat, amelynek elemeiből alkalmasan kiválasztva egy-egy pontot, a kapott pontsorozat a-hoz tart. JANISZEWSKI tétele szerint mindegyik K_s komponensnek van torlódási pontja S határán, és így elég nagy s_0 indextől kezdve minden K_s komponens átmérője meghaladja az S kör átmérőjének egyharmadát.

A 17. segédtételből és a lineáris mérték additív voltából következik, hogy $v(K) = +\infty$.

Most áttérünk a folytonos függvények nívóhalmazai hosszúságának a vizsgálatára. $v(E_t)$ helyett gyakran a $v(t)$ jelölést fogjuk használni. Alapvető feladatunk annak a megmutatása, hogy majdnem minden t nívóra a $v(t)$ nívóhalmaz-hosszúság egyenlő e nívó reguláris komponensei hosszúságának összegével.

18. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $M \subset J$ zárt halmaz. Legyen M' azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek az M halmaznak valamelyik, a J tartományt szét nem választó komponenséhez tartoznak. Az M' halmaz G_δ típusú.*

BIZONYÍTÁS. Jelöljük M_ε-nal mindazon $K \subset M$ komponensek pontjainak halmazelméleti összegét, amelyek mindegyikéhez található két ε sugarú, a K komponens által egymástól elválasztott és az M halmazt nem metsző nyílt kör, Q_1 és Q_2. Az M_ε halmaz zárt. Továbbá minden a J tartományt szétválasztó K komponens elég kis ε érték mellett hozzátartozik M_ε-hoz. Következésképpen $M' = M - \sum_n M_{\frac{1}{n}}$, ebből viszont következik, hogy az M' halmaz G_δ típusú.

19. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, E_t e függvény valamely nívóhalmaza és $\overset{\circ}{M}$, $\overset{+}{M}$, $\overset{-}{M}$ az E_t halmaz összes koncentrikus szingularitású komponenseihez, összes félmaximumot szolgáltató komponenseihez, illetve összes félminimumot szolgáltató komponenseihez tartozó pontok összessége. Akkor $\overset{\circ}{M}$, $\overset{+}{M}$ és $\overset{-}{M}$ Borel-mérhető halmazok.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$ azon $K \subset E_t$ komponensek egyesítése, amelyek mindegyikéhez található egy $K' \subset E_t$ komponens úgy, hogy K' elválasztja a vizsgált K komponenst a K komponens δ-környezetének kiegészítő halmazától, és a K, K' komponenseket az $E_{t+\varrho}$ halmaz elválasztja egymástól; legyen továbbá M a J tartományt szét nem választó E_t-beli komponensek egyesítése.

Megmutatjuk, hogy $\overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$ tetszés szerinti $\delta > 0$ és $\varrho > 0$ érték mellett zárt halmaz. Valóban, legyen $K_n \subset \overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$, $n = 1, 2, \ldots$. Legyen az a pont a $\{K_n\}$ sorozatra nézve torlódási pont. Legyen $K \ni a$ az E_t nívóhalmaz komponense. Minden K_n-hez található egy K'_n komponens. Válasszuk ki a természetes számok olyan $\{n_s\}$ részsorozatát, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_s K'_{n_s} \neq 0$. Akkor a $\tilde{K} = \overline{\mathrm{lt}}_s K'_{n_s}$ halmaz kontinuum. Megmutatjuk, hogy a $K' \supset \tilde{K}$ komponens elválasztja a K halmazt K δ-környezetének kiegészítő halmazától. Legyen U a K halmaz δ-környezete és $b \in C\bar{U}$. Legyen $L \ni b$ a K halmazt metsző kontinuum. Fennáll $\varrho(b, K) = \theta > \delta$. Vezessük be a $\delta_1 = \dfrac{\theta - \delta}{2}$ jelölést. Elég nagy s-re minden K_{n_s} benne van a K komponens δ_1-környezetében. Ennélfogva bizonyos s-től kezdve $\varrho(K_n, b) > \delta$ és így $K'_{n_s} \cap L \neq 0$. De akkor $\overline{\mathrm{lt}}_s K_{n_s} \cap L \neq 0$ is fennáll, vagyis bármely L kontinuum metszi a $K \subset K'$ halmazt, azaz K' elválasztja egymástól a K és a $C\bar{U}$ halmazt, ebből pedig könnyen következik, hogy K' elválasztja K-t és CU-t is.

Tegyük fel, hogy a $t_n + \varrho$ nívó K''_n komponense elválasztja a K_n, K'_n komponenseket. Legyen a természetes számok $\{n_s\}$ részsorozata már olyan ritka, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_s K''_{n_s} \neq 0$. Legyen K'' az $E_{t+\varrho}$ halmaznak az $\overline{\mathrm{lt}}_s K''_{n_s}$ halmazt tartalmazó komponense. Akkor teljesen hasonlóan ahhoz, ahogy az imént eljártunk, be lehet bozonyítani, hogy K'' elválasztja a K és a K' komponenst. Tehát $\overset{\circ}{M}(\delta, \varrho)$ zárt halmaz. Nyilvánvaló azonban, hogy

$$\overset{\circ}{M} = \prod_k \sum_l \overset{\circ}{M}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right) \cap M' + \prod_k \sum_l \overset{\circ}{M}\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{l}\right) \cap M',$$

vagyis $\overset{\circ}{M}$ legfeljebb a második Borel-osztályba tartozik.

Most bebizonyítjuk, hogy $\overset{+}{M}$ is *Borel*-halmaz. Jelölje $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ azon $K \subset E_t$ komponensek egyesítését, amelyek mindegyikéhez található az alábbi tulajdonságokkal rendelkező L kontinuum:

a) $F(\eta) \leqq t - \varepsilon$ ha $\eta \in L$;

b) L metszi az $\overline{U}_r$ halmazt, ahol U_r a K komponens r-környezete;

c) L tartalmaz olyan b pontot, hogy $F(b) \leqq t - \theta$.

Az $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ halmazok bármely $r > 0$, $\theta > 0$, $\varepsilon > 0$ mellett zártak. Valóban, legyen a az $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ halmazból vett $\{a_n\}$ pontsorozat torlódási pontja. Legyen K_n az E_{t_n} halmaznak az a_n pontot tartalmazó komponense. Legyen L_n a K_n-nek megfelelő kontinuum. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\underset{n}{\mathrm{lt}}\, L_n \neq 0$. Legyen $L = \overline{\underset{n}{\mathrm{lt}}}\, L_n$. Az L kontinuumra nyilvánvalóan teljesülnek az a), b), c) tulajdonságok (a $K \ni a$ komponensre vonatkozóan). Vezessük be az

$$\overset{+}{E}{}^* = \sum_l \prod_k \sum_m \overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \frac{1}{m}\right) \cap M'$$

jelölést.

Megmutatjuk, hogy $\overset{+}{E}{}^* = \overset{+}{E}$. Az $\overset{+}{E} \subset \overset{+}{E}{}^*$ tartalmazás nyilvánvaló.

Bebizonyítjuk, hogy $\overset{+}{E}{}^* \subset \overset{+}{E}$. Legyen $\zeta \in \overset{+}{E}{}^*$ és K az a komponens, amelyben ζ fekszik. Található olyan l, hogy a $\theta_0 = \frac{1}{l}$ jelöléssel

$$\zeta \in \prod_k \sum_m \overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, \theta_0, \frac{1}{m}\right).$$

Továbbá található a kontinuumoknak olyan $\{L_k\}$ sorozata, hogy L_k-nak van olyan b_k pontja, amelyre $F(b_k) \leqq t - \theta_0$, ezenfelül L_k metszi a K komponens $\frac{1}{k}$-környezetét, és az L_k kontinuumon mindenütt fennáll $F(\eta) < t$. Legyen $\{\zeta_k\}$ az L_k halmazok pontjaiból álló sorozat, amely tart egy $\zeta_0 \in K$ ponthoz. A ζ_k pontok között vagy található olyan, amelyet az $E_t - K$ halmazt nem metsző L kontinuum összeköt K-val, vagy mindegyik ζ_k pontot egy $C_k \subset E_t - K$ komponens elválasztja K-tól. Az első esetben K definíció szerint félmaximumot szolgáltató komponens. A második eset nem lehetséges. Valóban, a $\{C_k\}$ sorozatra $\zeta_0 \in \underset{k}{\mathrm{lt}}\, C_k$. A $C = \overline{\underset{k}{\mathrm{lt}}}\, C_k$ topológiai limes superior összefüggő, ezért $C \subset K$. De ha így áll a dolog, akkor tetszés szerinti $\delta > 0$ számhoz található olyan nagy N szám, hogy $C_N \subset U_\delta$, ahol U_δ a K komponens δ-környezete. Legyen a $\delta > 0$ szám olyan kicsiny, hogy az U_δ halmazon $F(\eta) \geqq t - \frac{\theta_0}{2}$ és U_δ nem választja szét az $E_{t-\theta_0}$ halmaz pontjait (K nem választja szét a J tartományt, mert $K \subset M'$). Akkor C_N, amely elválasztja a ζ_N pontot és a K halmazt, a K halmazt b_N-től is elválasztja. De U_δ és a fortiori a $C_N \subset U_\delta$ halmaz nem választja szét a b_N, b_s pontokat egyetlen s-re sem. Ennélfogva a C_N komponens mindegyik L_s kontinuumot elválasztja K-tól. Ez azonban elég nagy s értékekre ellentmond annak a

feltételnek, hogy L_s metszi a K komponens $\frac{1}{s}$-környezetét. Ezzel az $\overset{+}{E}=\overset{+}{E}^*$ egyenlőséget és egyben $\overset{+}{M}$ Borel-mérhetőségét bebizonyítottuk.

Végül $\overset{-}{M} = M' - \overset{\circ}{M} - \overset{+}{M}$, és így $\overset{-}{M}$ szintén Borel-halmaz.

A továbbiakban az E_t nívóhalmaz azon részhalmazaira, amelyek a félmaximumot szolgáltató, félminimumot szolgáltató, illetve koncentrikus szingularitású komponensekhez tartozó pontokból állnak, rendre az $\overset{+}{E}_t$, $\overset{-}{E}_t$, ill. $\overset{\circ}{E}_t$ jelölést fogjuk használni.

Most bebizonyítjuk, hogy ha az adott E_t nívónak megfelelő $\overset{\circ}{E}_t$ ponthalmaz lineáris mértéke különbözik nullától, akkor ezen E_t nívó szétválasztó komponenseinek összhosszúsága $+\infty$. Ehhez fel fogjuk használni adott halmaz *pszeudo-átmérőjének* kisegítő fogalmát.

15. definíció. Legyen E a sík vagy a gömbfelület tetszés szerinti halmaza, $\sigma(E)$ pedig köröknek olyan rendszere, amely lefedi az E halmazt. Jelöljük a $\sigma(E)$ rendszerhez tartozó körök átmérőinek összegét $v[\sigma(E)]$-vel. Legyen $\underline{v}(E) = \inf v[\sigma(E)]$, ahol az alsó határ az *összes lehetséges* $\sigma(E)$ rendszerekre képezendő. A $\underline{v}(E)$ számot az E halmaz *pszeudo-átmérőjének* nevezzük.

Megjegyzés. Ha $v(E)>0$, akkor $v(E) \geqq \underline{v}(E) > 0$. Itt $v(E)$ a Hausdorff-féle *külső* lineáris mértéket jelenti. E megjegyzés bizonyítása nyilvánvaló.

20. SEGÉDTÉTEL. *Legyen M és N két J-beli ponthalmaz és P valamely őket elválasztó zárt halmaz. Legyen $L(P)$ a P halmaz J-t szétválasztó komponensei hosszúságának összege. Akkor* $L(P) \geqq \frac{1}{4} \min[\underline{v}(M), \underline{v}(N)]$.

BIZONYÍTÁS. Minthogy a P halmaz M mindegyik pontját elválasztja N mindegyik pontjától, ezeket a pontokat valamely $K \subset P$ komponens is elválasztja, és így K szétválasztja a J tartományt. Feleltessünk meg minden a J tartományt szétválasztó $K \subset P$ komponensnek egy olyan $O(K)$ nyílt kört, amelynek középpontja K-ban fekszik és sugara K átmérőjének kétszerese. Azt állítom, hogy az összes ilyen körök $\sum$ összege az M, N halmazok közül legalább az egyiket tartalmazza. Valóban, legyen az állítással ellentétben $\xi \in M - \sum$, $\eta \in N - \sum$. A ξ és az η pontot a P halmaz K komponense elválasztja. Akkor az $O(K)$ kör biztosan tartalmazza a ξ, η pontok közül legalább az egyiket. Abban az esetben, amikor J a gömbfelület, ez nyilvánvaló, ugyanis valamely körön kívül fekvő két pontot a kör nem választ el, még kevésbé egy a körön belül fekvő halmaz. Tekintsük azt az esetet, amikor J négyzet. Az $O(K)$ kör a ξ, η pontok egyikét sem választja el a négyzet határától, továbbá egyiküket sem választja el legalább két szomszédos oldaltól és az ezek közt fekvő csúcstól. Következésképpen a K komponensnek volnának pontjai a J négyzet határán, méghozzá legalább két olyan oldalán, hogy ezek az oldalak vagy átellenesek, vagy $O(K)$ a ξ, η pontok közül legalább az egyiket nem választja el a szóban forgó oldalak közt fekvő α csúcstól. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $O(K)$ nem választja el a ξ, α pontokat. Az első esetben az $O(K)$ kör befedi az egész négyzetet, a másodikban pedig a közös α csúcsot és a ξ pontot. Tehát az $O(K)$ körök összege befedi vagy M-et, vagy N-et. De akkor átmérőik összege definíció szerint legalább $\min[\underline{v}(M),$

$\underline{v}(N)]$. Mindegyik K komponens hosszúsága nagyobb vagy egyenlő, mint K átmérője, amely $O(K)$ átmérőjének $\frac{1}{4}$-szerese. Ebből következik a segédtétel állítása.

21. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a szokásos J tartományon megadott folytonos függvény, E_t e függvény valamely nívóhalmaza, $\overset{\circ}{E}_t \subset E_t$ pedig a koncentrikus szingularitású komponensek pontjainak halmaza. Ha $v(\overset{\circ}{E}_t) > 0$, akkor az E_t halmaz J tartományt szétválasztó komponensei hosszúságának $L(E_t)$ összege végtelen.*

BIZONYÍTÁS. Legyen M_0 az E_t halmazt nem metsző zárt kör. Válasszuk N gyanánt $\overset{\circ}{E}_t$ olyan zárt részhalmazát, amelyre $v(N) > \frac{1}{2} v(\overset{\circ}{E}_t)$. Feleltessük meg minden $K \subset \overset{\circ}{E}_t$ komponensnek az E_t halmaz valamely, K-tól különböző és a K, M_0 halmazokat egymástól elválasztó $K'(K)$ komponensét. $K'(K)$ nem tartalmazza a K komponenst, és így annak egy $U_1(K)$ környezetét is elválasztja M_0-tól. A Heine—Borel-tétel szerint véges számú K-hoz tartozó $U_1(K)$ környezetek befedik N-et. Tekintsük az ezen K komponenseknek megfelelő $K'(K)$ halmazokat. Az utóbbiak hosszúságainak összegét L_1-gyel jelölve az előző segédtétel alapján kapjuk: $L_1 \geqq \min[\underline{v}(N), \underline{v}(M_0)] = d > 0$.

Most legyen $\tau_1 = \frac{1}{2} \varrho(S_1, N)$, ahol S_1 a választott $K'(K)$ komponensek összege. Képezzünk egy S_2 halmazt a következőképpen: minden $K \subset \overset{\circ}{E}_t$ komponensnek feleltessünk meg egy $K''(K)$ komponenst, amely a K komponenst elválasztja K τ_1-környezetének kiegészítő halmazától (és speciálisan M_0-tól). K-val együtt a $K''(K)$ komponens valamely $U_2(K) \supset K$ környezetet is elválaszt M_0-tól. A Heine—Borel-tétel alapján válasszunk ki véges számú $K''(K)$ komponenst úgy, hogy a megfelelő $U_2(K)$ környezetek befedjék N-et. E komponensek összegét nevezzük S_2-nek. Legyen L_2 az S_2-höz tartozó komponensek hosszúságainak összege. Az előbbiek szerint $L_2 \geqq d > 0$. Folytatva ugyanezt az eljárást, egymást nem metsző és az E_t nívó komponenseit szétválasztó $S_1, S_2, \ldots$ halmazokat kapunk, ahol bármelyik S_n-hez tartozó komponensek hosszúságainak összege nagyobb vagy egyenlő, mint egy közös $d > 0$ szám. Ebből következik a segédtétel állítása.

A 21. segédtételből következik, hogy *a $v(t)$ függvény nem függ attól, hogy az egész E_t nívóhalmaz Hausdorff-féle lineáris mértékét tekintjük $v(t)$-nek, vagy elhagyjuk belőle azokat a pontokat, amelyek koncentrikus szingularitású komponenshez tartoznak.*

További célunk annak a megmutatása, hogy *a félmaximumot vagy félminimumot szolgáltató komponensek szintén nem befolyásolják lényegesen a nívóhalmazok hosszúságát, kivéve esetleg megszámlálhatóan sok nívót.*

16. definíció. Az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazának a J tartományt szét nem választó K komponensét *h-félmaximumot (h-félminimumot)* szolgáltató komponensnek nevezzük, ha van olyan L kontinuum, hogy $L \cap K \neq 0$, $L \cap (E_t - K) = 0$ és található olyan $\eta \in L$ pont, amelyre $F(\eta) \leqq t - h$ (illetve $F(\eta) \geqq t + h$).

22. SEGÉDTÉTEL. *Az $F(\eta)$ folytonos függvény E_t nívóhalmazának h-félmaximumot szolgáltató komponenseihez tartozó pontok $\overset{+}{M}_t(h)$ halmaza és a h-félminimumot szolgáltató komponensekhez tartozó pontok $\overset{-}{M}_t(h)$ halmaza Borel-halmaz.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\overset{+}{E}(r, \theta, \varepsilon)$ jelentése ugyanaz, mint a 19. segédtételben. Legyen

$$\overset{+}{E}(h) = \prod_k \sum_m \overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, h, \frac{1}{m}\right) \cap M'.$$

Megmutatjuk, hogy $\overset{+}{E}(h)$ éppen a t nívó h-félmaximumot szolgáltató komponenseihez tartozó pontok $\overset{+}{M}_t(h)$ halmaza. Az $\overset{+}{M}_t(h) \subset \overset{+}{E}(h)$ összefüggés nyilvánvaló. Fordítva, legyen $\xi \in \overset{+}{E}(h)$ és K_ξ a ξ pontot tartalmazó komponens. Akkor minden természetes k-hoz található egy L_k kontinuum, amely metszi a K_ξ komponens $\frac{1}{k}$-sugarú környezetét, az $U_{\frac{1}{k}}(K_\xi)$ halmazt, továbbá tartalmaz olyan b_k pontot, amelyre $F(b_k) \leqq t - h$, végül pedig minden $\eta \in L_k$ pontra fennáll az $F(\eta) \leqq t - \frac{1}{m(k)}$ egyenlőtlenség. Legyen $\{\zeta_k\}$ olyan pontsorozat, amelynek elemei rendre az $U_{\frac{1}{k}}(K_\xi) \cap L_k$ halmazhoz tartoznak. Ha legalább egy ζ_k pontot az $E_t - K_\xi$ halmaz nem választ el K_ξ-től, akkor a $\xi \in \overset{+}{M}_t(h)$ összefüggés a B′ tételből következik. Ha viszont az $E_t - K_\xi$ halmaz bármelyik ζ_k pontot elválasztja K_ξ-től, akkor tetszés szerinti k-hoz található a ζ_k pontot és a K_ξ halmazt elválasztó $C_k \subset E_t - K_\xi$ komponens. Hogy ez az eset lehetetlen, annak bizonyítása szóról szóra megegyezik a 19. segédtétel bizonyításának végével. Megmutattuk, hogy $\overset{+}{M}_t(h)$ *Borel*-halmaz (ugyanis az M' halmaz G_δ típusú, az $\overset{+}{E}\left(\frac{1}{k}, h, \frac{1}{m}\right)$ halmazok pedig zártak). Az $F(\eta)$ függvény h-félminimumot szolgáltató pontjainak $\overline{M}_t(h)$ halmaza azonos a $-F(\eta)$ függvényhez tartozó $\overset{+}{M}_{-t}(h)$ halmazzal és így szintén Borel-halmaz.

A továbbiakban a t nívó h-félmaximumot és h-félminimumot szolgáltató komponensekhez tartozó pontjainak halmazát $\overset{+}{M}_t(h)$ és $\overset{-}{M}_t(h)$ helyett rendre $\overset{+}{E}_t(h)$-val és $\overline{E}_t(h)$-val fogjuk jelölni.

17. definíció. Két korlátos ponthalmaz, M és N *Hausdorff-féle távolságán* a

$$\delta(M, N) = \max\{\sup_{m \in M}[\inf_{n \in N}|m, n|]; \sup_{n \in N}[\inf_{m \in M}|m, n|]\}$$

számot fogjuk érteni, ahol mint mindig, $|m, n|$ az m, n pontok közönséges távolsága.

18. definíció. Legyen $\{M^{(\xi)}\}$ J-beli halmazoknak valamely nem megszámlálható rendszere (a ξ-k valós számok). Azt fogjuk mondani, hogy $M^{(\xi_0)}$ *kétoldali kondenzációs halmaz*, ha tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ esetén megszámlálhatónál több olyan $\xi < \xi_0$ és megszámlálhatónál több olyan $\xi > \xi_0$ index van, amelyre $\delta(M^{(\xi_0)}, M^{(\xi)}) < \varepsilon$.

23. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\{M^{(\xi)}\}$ síkbeli korlátos halmazokból álló rendszer. Legfeljebb megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve mindegyik $M^{(\xi)}$ kétoldali kondenzációs halmaz.*

BIZONYITÁS. Nevezzük az $M^{(\xi)}$ halmaz ε-hálójának az $M^{(\xi)}$-beli pontok valamely véges $A_\varepsilon^{(\xi)}$ halmazát, ha $\eta \in M^{(\xi)}$ esetén $\varrho(\eta, A_\varepsilon^{(\xi)}) < \varepsilon$. Ha a segédtétel nem igaz,

akkor található olyan $\varepsilon > 0$ szám és az $M^{(\xi)}$ halmazoknak olyan nem megszámlálható P rendszere, hogy $M^{(\xi_0)} \in P$ esetén vagy legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan $\xi > \xi_0$ van, vagy legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan $\xi < \xi_0$ van, amelyre $\delta(M^{(\xi)}, M^{(\xi_0)}) < \varepsilon$.

Vegyük fel mindegyik $M^{(\xi)}$-ben egy $\frac{\varepsilon}{8}$-hálót; feltehetjük, hogy mindegyik háló ugyanannyi pontból áll (valamilyen n-re azoknak a P rendszerhez tartozó $M^{(\xi)}$ halmazoknak a P' összessége, amelyeknek van n pontból álló hálójuk, nem megszámlálható, és szorítkozhatunk P'-re). Számozzuk meg mindegyik háló pontjait 1-től n-ig. Nevezzük α_1-nek a vizsgált hálók első pontjainak valamely kondenzációs pontját. Legyen P_1 a P' rendszer azon $M^{(\xi)}$ halmazainak összessége, amelyekhez tartozó hálók első pontja az α_1 pont $\frac{\varepsilon}{8}$-sugarú környezetében fekszik. Ha a P_i rendszert már megszerkesztettük, akkor válasszuk α_{i+1} gyanánt a P_i-beli $M^{(\xi)}$ halmazok hálói $(i+1)$-edik pontjainak valamely kondenzációs pontját, és P_{i+1} gyanánt a P_i rendszer azon $M^{(\xi)}$ halmazainak összességét, amelyekhez tartozó hálók $(i+1)$-edik pontja az α_{i+1} pont $\frac{\varepsilon}{8}$-sugarú környezetében fekszik. Tekintsük most a P_n rendszert. P_n nem megszámlálható, így találhatók olyan $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ számok, hogy $M^{(\xi_1)}$, $M^{(\xi_2)}$ és $M^{(\xi_3)}$ benne van P_n-ben és hogy P_n megszámlálhatónál több olyan $M^{(\xi)}$ halmazt tartalmaz, amelyre $\xi_1 < \xi < \xi_2$, és megszámlálhatónál több olyan $M^{(\xi')}$ halmazt, amelyre $\xi_2 < \xi' < \xi_3$. Könnyen látható azonban, hogy ha $M^{(\xi)} \subset P_n$ és $M^{(\eta)} \subset P_n$, akkor $\delta(M^{(\xi)}, M^{(\eta)}) < \varepsilon$. Ebből következik, hogy az $M^{(\xi_2)}$ halmazhoz megszámlálhatónál több olyan $\xi < \xi_2$, és megszámlálhatónál több olyan $\xi > \xi_2$ index van, amelyre $M^{(\xi)}$ távolsága $M^{(\xi_2)}$-től kisebb ε-nál. Ez ellentmond feltevésünknek és így bizonyítja a segédtétel helyességét.

24. SEGÉDTÉTEL. *Legyen K_1 és K_2 az $F(\eta)$ függvény E_t nívójának két különböző, h-félmaximumot szolgáltató komponense. Legyen K ugyanennek a nívónak egy, a K_1, K_2 halmazokat elválasztó komponense. Legyen a $d > 0$ szám olyan kicsiny, hogy a $|\xi, \eta| \leqq d$ egyenlőtlenség biztosítsa $|F(\eta) - F(\xi)| < h$ fennállását. Akkor a K komponens átmérője legalább $\frac{1}{8} d$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen a J értelmezési tartomány a gömbfelület. Legyen K_0 olyan kör, amelynek középpontja a K halmaz tetszés szerinti pontja és amelynek sugara egyenlő K átmérőjével. A K_0 kör biztosan tartalmazza belsejében vagy K_1-et és egy olyan L_1 kontinuumot, amely metszi K_1-et, nem metszi az $E_t - K_1$ halmazt, és legalább egy pontjában $F(\eta) \leqq t - h$, vagy a K_2 komponenst és valamely neki megfelelő L_2 kontinuumot. Ebből következik állításunk. A négyzet esetében a bizonyítás ugyanígy történik, csak a K_0 kört kétszerakkora sugarúnak kell választani.

Felhasználva a bevezetett fogalmakat és a bebizonyított 22—24. segédtételeket, megkapjuk a h-félmaximumot (h-félminimumot) szolgáltató pontokra vonatkozó, fentebb megfogalmazott eredményt.

25. SEGÉDTÉTEL. *Legyen a J tartományon megadott $F(\eta)$ folytonos függvénynek megszámlálhatónál több olyan nívója, amelyre az $\overset{+}{E}_t$ (illetve $\overset{-}{E}_t$) halmaz lineáris mértéke nullától különböző. Mindegyik ilyen nívóra, kivéve legfeljebb megszámlálhatóan sokat,*

az illető nívónak a J tartományt szétválasztó komponensei hosszúságainak összege végtelen.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük azt az esetet, amikor a nívók valamely nem megszámlálható $\mathfrak{A}$ rendszerére $\nu(\overset{+}{E}_t)>0$. Nyilvánvaló, hogy $\overset{+}{E}_t = \sum_n \overset{+}{E}_t\left(\frac{1}{n}\right)$. Továbbá minden $t\in\mathfrak{A}$ értékhez található olyan n, hogy $\nu\left[\overset{+}{E}_t\left(\frac{1}{n}\right)\right]>0$. Válasszuk a $\theta>0$ és a $h>0$ számot olyan kicsinynek, hogy megszámlálhatónál több t értékre fennálljon a $\underline{\nu}[\overset{+}{E}_t(h)]>2\theta>0$ egyenlőtlenség. Minden ilyen $\overset{+}{E}_t(h)$ halmazhoz válasszunk egy $P_t\subset\overset{+}{E}_t(h)$ zárt halmazt, amelyre $\underline{\nu}(P_t)>\theta$. Ilyen választás a 22. segédtétel és a *Borel*-halmazok ν-mérhetősége miatt lehetséges. A 23. segédtétel értelmében legfeljebb megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve mindegyik P_t kétoldali kondenzációs halmaz (a t indexre vonatkozóan). Megmutatjuk, hogy ha P_{t_0} a P_t halmazokra nézve kétoldali kondenzációs halmaz, akkor az E_{t_0} nívó *Hausdorff*-féle lineáris mértéke már a J tartományt szétválasztó komponensek révén végtelen.

Tegyük fel, hogy ez nincs így. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy akkor E_{t_0}-nak legfeljebb véges számú olyan komponense van, amely szétválasztja a P_{t_0} halmaznak a szóban forgó komponenshez nem tartozó pontjait. Ez a 24. segédtételből következik. Legyenek ezek a komponensek $K_1, \ldots, K_n$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy mindegyik K_s komponens pontosan két részre osztja J-t, ugyanis „nyolcas" típusú komponensek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő. Így a $K_1, \ldots, K_n$ komponensek a J tartományt $n+1$ számú $J_1, \ldots, J_{n+1}$ tartományra osztják fel, és két, a $J_s\cap P_{t_0}$ halmazhoz tartozó K', K'' komponenst E_{t_0} egyetlen tőlük különböző komponense sem választ el, tehát nem választja el őket $E_{t_0}-K'-K''$ sem.

Megmutatjuk, hogy tetszés szerinti $\delta>0$ számhoz található E_{t_0}-nak véges számú, a J tartományt szétválasztó és a P_{t_0} halmaz δ-környezetét metsző komponense, amelyeknek összhosszúsága legalább θ. Legyen λ a $K_1, \ldots, K_n$ komponensek hosszúságai közül a legkisebb. A P_{t_0} és $\sum_{s=1}^{n} K_s$ közötti távolságot jelöljük ϱ-val. Legyen $\delta\leqq\frac{1}{2}\varrho$. A kétoldali kondenzációs halmaz definíciója értelmében van olyan $t_1>t_0$, hogy $P_{t_1}\subset U_\delta(P_{t_0})$ (ahol $U_\delta(M)$ az M halmaz δ-környezete), sőt, a $\delta(P_{t_0}, P_{t_1})$ *Hausdorff*-féle távolság nem nagyobb, mint $\frac{1}{2}\delta$.

Minden $\eta\in P_{t_1}$ és $\xi\in P_{t_0}$ ponthoz található az E_{t_0} halmaznak őket elválasztó és a P_{t_0} halmazt nem metsző K komponense. Valóban, ellenkező esetben volna olyan L kontinuum, amely tartalmazza a $\xi\in P_{t_0}$ és $\eta\in P_{t_1}$ pontot, továbbá nem metszi az E_t-K_ξ halmazt, ahol K_ξ a ξ-t tartalmazó komponens. De akkor az $L-K_\xi$ halmazon mindenütt $F(\eta)>t$, ami nem lehetséges, mivel K_ξ *félmaximumot szolgáltató* komponens. Tehát létezik említett tulajdonságú K komponens. Minden $\eta\in P_{t_1}\cap J_s$ ponthoz rendeljünk hozzá egy, az η pontot és a $\overline{J}_s\cap P_{t_0}$ halmaz valamely pontját elválasztó $K(\eta)\subset E_{t_0}$ komponenst. Akkor K elválasztja az η pontot P_{t_0} *bármely* pontjától, mert ellenkező esetben K szétválasztaná a P_{t_0} halmazt. A K komponens

η-val együtt η-nak egy egész környezetét is elválasztja P_{t_0}-tól. Ennélfogva találhatunk véges számú ilyen típusú $K^{(1)}, \ldots, K^{(m)}$ komponenst, amelyek összege elválasztja egymástól a P_{t_0}, P_{t_1} halmazokat. Mindezek a komponensek metszik a P_{t_0} halmaz δ-környezetét, és hosszúságuk összege a 20. segédtétel szerint legalább θ. Minthogy a $\delta > 0$ szám tetszés szerinti, innen könnyen levezethető, hogy a t_0 nívó J-t szétválasztó komponensei hosszúságának összege végtelen.

Félminimumot szolgáltató komponensek esetére a bizonyítás az $F(\eta)$ függvényről a $-F(\eta)$ függvényre való áttéréssel adódik.

A 21. segédtételből következik, hogy *mihelyt a koncentrikus szingularitású komponensekhez tartozó pontok halmazának lineáris mértéke nullától különböző, az adott nívón már a szétválasztó komponensek* (közönséges értelemben vett) *összhosszúsága végtelen.* A 25. segédtétel *ugyanezt az eredményt* adja *arra az esetre, amikor a félextrémumot szolgáltató pontok halmazának lineáris mértéke pozitív, de már nem minden nívóra, hanem esetleg megszámlálhatóan sok kivétellel minden nívóra.* A megfelelő halmazoknak a 21. segédtételben kimutatott *Borel*-mérhetősége, és a *Borel*-halmazoknak a (*Hausdorff*-féle lineáris mértékre vonatkozó) mérhetősége alapján innen a következők adódnak:

10. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a J négyzeten vagy gömbfelületen értelmezett folytonos függvény. Akkor legfeljebb megszámlálhatóan sok t érték kivételével minden E_t nívóhalmaz Hausdorff-féle lineáris $\nu(t)$ mértéke egyenlő e nívó teljesen reguláris komponensei hosszúságának összegével. Speciálisan (esetleg megszámlálhatóan sok kivételtől eltekintve) minden véges hosszúságú nívó csak egy pontból álló komponenseket tartalmaz nem szétválasztó komponensként.*

BIZONYÍTÁS. A 3. tétel értelmében nem reguláris komponensek, amelyek J-t kettőnél több részre osztják, továbbá reguláris, de nem teljesen reguláris komponensek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő. Ezeket a nívókat figyelmen kívül fogjuk hagyni. A 21. és 25. segédtételből következik, hogy minden nívóra, esetleg megszámlálhatóan soktól eltekintve, amelyeket elhanyagolunk, fennáll:

$$\nu(t) = \nu(E_t - \overset{0}{E_t} - \overset{+}{E_t} - \overset{-}{E_t}).$$

Következésképpen legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden t nívóra teljesül a $\nu(t) = \nu(E_t^*)$ egyenlőség, ahol E_t^* a t nívó teljesen reguláris komponenseinek egyesítése. Ha E_t^* *megszámlálhatónál több* komponensből áll, akkor nyilván $\nu(E_t^*) = +\infty$ és e komponensek hosszúságának összege szintén végtelen. Ha viszont $E_t^* = \sum_n K_n$, ahol K_n az E_t halmaz reguláris komponense, akkor $\nu(E_t^*) = \sum_n \nu(K_n)$.

5. §. Sima függvények nívóhalmazai

Ebben a paragrafusban *egyszer* és *kétszer differenciálható* kétváltozós függvények nívóhalmazainak tipikus szerkezetéről fogunk bizonyos ismereteket szerezni.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy éppen úgy, mint az egyszerűen csak folytonos függvények esetében, valamely többször differenciálható függvény önállóan tekintett E_t nívóhalmazára vonatkozó egyetlen megszorítás az, hogy E_t zárt halmaz legyen. Sőt, Whitney [7] megfelelő tételéből következik, hogy lehet szerkeszteni olyan végtelen sokszor differenciálható függvényt, amelynek az adott zárt halmaz nívóhalmaza.

Minthogy azonban a későbbiekben sehol sem használjuk fel ezt a fontos tételt, bizonyítása pedig elég terjedelmes, a megfelelő példát itt nem fogjuk ismertetni.

Most tegyük fel, hogy az $F(\eta)$ függvénynek a J négyzet minden pontjában létezik teljes differenciálja és a parciális deriváltak folytonosak. (Ennek a paragrafusnak a folyamán az előadás egyszerűsége érdekében fel fogjuk tenni, hogy a J értelmezési tartomány négyzet. A bizonyítások gömbfelület esetén szükségessé váló módosítását az olvasó nehézség nélkül elvégezheti.) Akkor YOUNGnak az implicit függvényekről szóló nevezetes tétele [13] értelmében, ha az $F(\eta)$ függvénynek a ξ pontban vett grad $F(\xi)$ gradiense különbözik nullától, akkor a ξ pont környezetében az $F(\eta)$ függvény nívógörbéje egyértelmű és folytonosan differenciálható ív. Azokban a pontokban, ahol grad $F(\eta)=0$, YOUNG tétele nem ad semilyen megszorítást. Ily módon YOUNG tétele *lokális* jellegű.

Megmutatjuk, hogy egyszer *differenciálható* kétváltozós függvénynek *majdnem mindegyik nívóhalmaza lokálisan összefüggő*, és hogy majdnem minden nívóra azok a pontok, amelyekre grad $F(\eta)=0$, az illető nívón nulla lineáris mértékű halmazt alkotnak.

Továbbá kétszer differenciálható függvényekre be fogjuk bizonyítani, hogy a grad $F(\eta)=0$ tulajdonságú pontok a nívók valamely nulla mértékű halmazán helyezkednek el, és bármely más nívó *véges számú folytonosan differenciálható egyszerű ívből és topológikus körből* áll.

11. TÉTEL. (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $F(\eta)$ a J egységnégyzeten értelmezett folytonos függvény, amelynek minden pontban van teljes differenciálja. Legyen Ω azon pontok halmaza, amelyekben* grad $F(\eta)=0$. *Legyen T azon t értékek halmaza, amelyekre $v(E_t \cap \Omega)>0$, ahol $v(E)$ a Hausdorff-féle lineáris mérték. Akkor* mes $T=0$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\overline{\text{mes}}\, T=d>0$, ahol $\overline{\text{mes}}$ a Lebesgue-féle külső mérték jele. Akkor található olyan $\alpha>0$, hogy T'-vel jelölve azon t értékek halmazát, amelyekre $v(E_t \cap \Omega)>\alpha$, fennáll a $\overline{\text{mes}}\, T'>\frac{d}{2}$ egyenlőtlenség. Minden $t \in T'$ nívóval kapcsolatban járjunk el a következőképpen. Minden $\eta \in E_t \cap \Omega$ ponthoz található olyan $\delta_\eta>0$ szám, hogy $|\zeta, \eta|<\delta_\eta$ esetén $|F(\zeta)-F(\eta)|<\frac{|\eta, \zeta|}{A}$, ahol A tetszés szerinti rögzített szám. Legyen $U_{t,\delta}$ az $E_t \cap \Omega$ halmaz azon pontjainak összessége, amelyekre $\delta_\eta \geqq \delta$. Legyen δ_0 oly kicsiny, hogy $v(U_{t,\delta_0})>\frac{3}{4}\alpha$. Legyen a $\varrho>0$ szám olyan kicsiny, hogy $v_{4\varrho}(U_{t,\delta_0})>\frac{\alpha}{2}$ és $\varrho<\min(1, \delta_0)$. Rajzoljunk U_{t,δ_0} minden pontja mint középpont körül egy-egy ϱ sugarú kört. Egymást nem metsző körökből álló maximális $\mathfrak{A}_t$ részrendszerben a sugarak összege $\geqq \frac{\alpha}{12}$. Valóban, ha az $\mathfrak{A}_t$ rendszer mindegyik körének sugarát megháromszorozzuk, akkor a kapott rendszer befedi az egész U_{t,δ_0} halmazt és a körök sugara $\leqq 3\varrho<4\varrho$, ezért az átmérők összege nagyobb, mint $\frac{\alpha}{2}$, következésképpen az eredeti körök átmérőinek összege nagyobb, mint $\frac{\alpha}{6}$. Meg fogjuk becsülni az $\mathfrak{A}_t$ rendszerhez tartozó körök összegének területét. Ennek nagysága $S_t=n\pi\varrho^2$, ahol n a körök száma, és nyilván $n \geqq \frac{\alpha}{12\varrho}$.

Ezek szerint $S_t \geqq \frac{\pi\varrho^2\cdot\alpha}{12\varrho} > \frac{\alpha\varrho}{4}$. Továbbá a függvény ingadozása egyik körben sem haladja meg a $\frac{2\varrho}{A}$ értéket. Ennélfogva $\mathfrak{A}_t$ minden pontja a $j_t = \left[t - \frac{\varrho}{A}, t + \frac{\varrho}{A}\right]$ intervallumbeli nívókhoz tartozik. Elvégezve ezt a szerkesztést minden $t \in T'$ értékre, válasszuk ki a j_t számközöknek egy véges rendszerét, amely a t tengelynek legalább $\frac{d}{4}$-nyi részét fedi be. Vegyük ezeknek az intervallumoknak valamely részrendszerét, amelynek elemei nem metszik egymást és összhosszúságuk legalább $\frac{d}{8}$. Legyenek ezek $j_{t_1}, \ldots, j_{t_k}$. Megbecsüljük az összes $\mathfrak{A}_{t_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ rendszerekhez tartozó körök területének S összegét. Kapjuk:

$$S > \sum_{s=1}^{k} \frac{\alpha\varrho_s}{4} = \frac{\alpha}{4} \sum_{s=1}^{k} \varrho_s,$$

de a j_{t_s} intervallum hosszúsága nem nagyobb, mint $\frac{2\varrho_s}{A}$, és így

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{2\varrho_s}{A} = \frac{2}{A} \sum_{s=1}^{k} \varrho_s \geqq \frac{d}{4} \quad \text{vagy} \quad \sum_{s=1}^{k} \varrho_s \geqq \frac{Ad}{8}.$$

Ebből következik, hogy $S \geqq \frac{\alpha\cdot d}{32} A$ bármilyen nagy A-ra. Ez azonban lehetetlen, mert ugyanazon $\mathfrak{A}_{t_s}$-hez tartozó körök szerkesztés szerint nem metszik egymást, különböző $\mathfrak{A}_{t_s}$ rendszerekhez tartozó körök pedig azért nem metszik egymást, mert az $F(\eta)$ függvény különböző értékeket vesz fel rajtuk (ugyanis $F(\eta) \in j_{t_s}$, ha η az $\mathfrak{A}_{t_s}$ rendszerhez tartozó körben fekszik). Ennélfogva (tekintetbe véve még, hogy $\varrho < 1$) fennáll $S < 9$, és elég nagy A esetén ellentmondásra jutunk, ami bizonyítja tételünket.

Differenciálható $F(\eta)$ függvények esetében néhány kijelentést tehetünk nívóhalmazok komponenseinek tipikus topológiai szerkezetéről. Ehhez egy segédtételre lesz szükségünk.

26. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $u(x, y)$ tetszés szerinti függvény. Akkor bármely y_0-ra (illetve x_0-ra) azon t értékek T_{y_0} (illetve T_{x_0}) halmaza, amelyekhez található olyan $(x, y_0) \in E_t$ (illetve $(x_0, y) \in E_t$) pont, hogy $u_x(x, y_0) = 0$ (illetve $u_y(x_0, y) = 0$), nulla mértékű.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha $\overline{\text{mes}}\, T_{y_0} = \mu > 0$, akkor az $\varepsilon > 0$ számot tetszés szerint rögzítve, feleltessünk meg minden olyan (x, y_0) pontnak, ahol $u_x = 0$, egy intervallumot, amelyben $|u(x, y_0) - u(x', y_0)| < \varepsilon|x - x'|$. Ezen intervallumok közül kiválaszthatunk véges számú egymást nem metszőt úgy, hogy a t tengelyen vett képeik összegének a mértéke $\geqq \frac{\mu}{3}$ legyen. Akkor az intervallumok hosszúságának összege nagyobb lesz, mint $\frac{\mu}{3\varepsilon}$, ami elég kicsiny ε értékekre lehetetlen.

12. TÉTEL. (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $u(x, y)$ a J tartományon értelmezett folytonos függvény, és legyen m és M e függvény minimuma és maximuma. Akkor a t tengely $[mM]$ szakasza tartalmaz olyan teljes mértékű T^* halmazt, hogy mindegyik $t \in T^*$ értékhez tartozó E_t nívóhalmazra*

1 *azon pontok W_1 halmazának az x tengelyen vett vetülete, amelyekben $u_y = 0$, nulla mértékű, és*

2 *azon pontok W_2 halmazának az y tengelyen vett vetülete, amelyekben $u_x = 0$, nulla mértékű.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az l_c $(x = c)$ egyenesek rendszerét. Jelentse T_c azon t nívók halmazát, amelyekre az $E_t \cap l_c$ metszetnek legalább egy pontjában $u_y = 0$. A 26. segédtétel szerint a T_c halmaz tetszés szerinti c esetén nulla mértékű. Legyen P az xt sík azon (x_0, t_0) pontjainak a halmaza, amelyekre $E_{t_0} \cap l_{x_0}$ tartalmaz $u_y = 0$ tulajdonságú pontot. FUBINI tétele [6] értelmében az $[mM]$ szakasz tartalmaz olyan teljes mértékű T_1 halmazt, hogy minden $t_0 \in T_1$ értékhez tartozó $t = t_0$ egyenesnek a P halmazzal képezett metszete nulla mértékű. Felcserélve megfontolásunkban az x és y mennyiséget, egy T_2 halmazt kapunk. A $T^* = T_1 \cap T_2$ halmaz megfelel a tétel követelményeinek.

13. TÉTEL (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $u(x, y)$ a J tartományon értelmezett folytonos függvény, és T^* a nívóknak az a halmaza, amelynek létezését a 12. tételben bizonyítottuk. Akkor bármely $t \in T^*$ értékre az E_t halmaz mindegyik komponense lokálisan összefüggő.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K az E_t halmaz valamely komponense, és a a K komponens lokális össze nem függési pontja. Akkor található olyan a középpontú és C_a határú R_a kör, hogy az R_a körben a K kontinuumnak van egy $\{K_i\}$ komponens-sorozata, amelynek minden tagja tartalmazza a C_a határ valamely b_i pontját, és az a pont benne van a $\{K_i\}$ sorozat topológiai limes inferiorában. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a b_i pontok tartanak egy $b \in C_a$ ponthoz. Meghatározottság kedvéért az a, b pontok x koordinátái, x_1 és x_2 legyenek rendre különbözők $(x_1 < x_2)$, majd egyenlők. Akkor mindegyik l_{x_0} egyenest $(x = x_0; x_1 < x_0 < x_2)$ megszámlálhatóan sok K_i metszi. De $K_i \cap K_j = 0$, tehát mindegyik l_{x_0} egyenesen található olyan (x_0, y_{x_0}) pont, amely a $K_i \cap l_{x_0}$ halmazokhoz tartozó pontok torlódási pontja és amelyre ennélfogva $u_y(x_0, y_{x_0}) = 0$.

A 12. tétel 1. pontjával kapott ellentmondás bizonyítja a 13. tételt.

27. SEGÉDTÉTEL. *Bármely síkbeli, korlátos, lokálisan összefüggő K kontinuum, amely nem egyszerű ív vagy topológikus kör, tartalmaz elágazási pontot.*

BIZONYÍTÁS. 1°. Tegyük fel, hogy K tartalmaz egy $L \neq K$ topológikus kört. Az $a \in K - L$ pont tetszés szerinti $b \in L$ ponttal összeköthető valamely l egyszerű ív segítségével. Tekintsük az $l \cap L$ metszet (a-tól b felé számított) első pontját. Ez elágazási pont.

2°. Tegyük fel, hogy K nem tartalmaz topológikus kört. Legyen $a \in K$, $b \in K$, $c \in K$. Találhatók olyan $l_a \subset K$, $l_b \subset K$, $l_c \subset K$ egyszerű ívek, amelyek végpontjai rendre b és c, c és a, a és b. Ha az l_a, l_b, l_c ívek közül egyik sem tartalmazza a másik kettő összegét, akkor $l_a + l_b + l_c$ tartalmaz vagy topológikus kört, vagy elágazási pontot. Ha viszont ez a körülmény egyetlen K-beli ponthármasra sem áll fenn, akkor K pontjainak a halmaza rendezett, és K egyszerű ív.

14. TÉTEL (G. M. ADELSZON—VELSZKIJ és A. SZ. KRONROD). *Legyen $u(x, y)$ a J tartományon értelmezett folytonos függvény, amelynek J minden pontjában vannak parciális deriváltjai. Legyen m és M az $u(x, y)$ függvény minimuma és maximuma. Akkor az $[mM]$ szakaszon található olyan teljes mértékű T^* halmaz, hogy $t \in T^*$ esetén az E_t nívóhalmazok csak a következő komponenseket tartalmazzák:*

a) *topológikus körök,*
b) *egyszerű ívek, amelyek végpontjai J határán fekszenek,*
c) *pontok.*

Minden $t \in T^*$ értékre az egyetlen pontból álló komponensek összességének az x tengelyen és az y tengelyen vett vetülete is nulla mértékű.

BIZONYÍTÁS. A 13. tételnek megfelelően válasszuk ki a nívóknak egy $\tilde{T}$ rendszerét, amelyre $t \in \tilde{T}$ esetén minden $K \subset E_t$ komponens lokálisan összefüggő. KOMAREVSZKIJ tétele (lásd a 8. segédtételt) szerint a sík egymást nem metsző, elágazási pontot tartalmazó kontinuumainak bármely rendszere legfeljebb megszámlálható. Így a 27. segédtétel értelmében e komponensek közt legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan van, amelyik nem pont, egyszerű ív vagy topológikus kör.

Hagyjuk el a $\tilde{T}$ rendszerből mindazon t nívókat, amelyekre E_t tartalmaz ilyen kivételes komponenst. Legyen a megmaradó rendszer T^*. Legyen $a(x_0, y_0) \in E_{t_0}$ $(t_0 \in T^*)$ és $u_x(a) \neq 0$ vagy $u_y(a) \neq 0$. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $u_y(a) > 0$. Vegyük fel a $\varrho(x_0, y_0 - \varepsilon)$, $\gamma(x_0, y_0 + \varepsilon)$ végpontokkal rendelkező L szakaszt úgy, hogy $0 < \delta \leqq \varepsilon$ esetén teljesüljön az $u(x_0, y_0 + \delta) > u(a) = t_0$ és az $u(x_0, y_0 - \delta) < u(a) = t_0$ egyenlőtlenség.

A γ és a ϱ pontot az E_{t_0} halmaz, és így annak egy K komponense is elválasztja. Következésképpen K nem állhat egyetlen pontból. A $K \subset E_{t_0}$ komponens metszi az L szakaszt, tehát tartalmazza az a pontot. Ha K nem topológikus kör, akkor K egyszerű ív, és minthogy K szétválasztja a J tartományt, K végpontjai J határán fekszenek. Minthogy minden, nem egyetlen pontból álló $K \subset E_t$ komponensnek $t \in T^*$ esetén a 12. tétel értelmében van olyan pontja, amelyben $u_x \neq 0$ vagy $u_y \neq 0$, az E_t $(t \in T^*)$ nívóhalmazok komponenseinek összessége csak pontokat, topológikus köröket és olyan egyszerű íveket tartalmaz, amelyek végpontjai J határán fekszenek. Az egymagukban komponenst szolgáltató pontokban mindkét parciális derivált értéke nulla, ezért minden $t \in T^*$ nívóra e pontok halmazának vetületei a 12. tétel értelmében nulla mértékűek.

A 14. tétel megadja a parciális deriváltakkal rendelkező, tehát az egyszer differenciálhatóknál (teljes differenciállal rendelkezőknél) tágabb osztályba tartozó, függvények nívóhalmazai komponenseinek tipikus topológiai szerkezetét.

A 11. tételt szintén általánosítani lehetne erre az esetre. Ezt nem fogjuk elvégezni; csak arra mutatunk rá, hogy a tétel bizonyításának megváltoztatása során az ott szereplő köröket két-két egymásra merőleges szakaszból álló „keresztekkel" kell helyettesíteni.

A kétváltozós függvények nívóhalmazainak a szerkezetét még pontosabban a kétszer differenciálható függvények esetében lehet leírni. Megjegyezzük, hogy eltérően az előző paragrafusoktól, e paragrafus tételeinek bizonyítása során lényegesen kihasználjuk az értelmezési tartomány kétdimenziós voltát. Az n-változós függvények esete iránt érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk E. M. LANGYISZ és a szerző közös cikkét [8].

19. definíció. Legyen M síkbeli halmaz. Az $\eta \in M$ pontot *szabad körcikkel rendelkezőnek* nevezzük, ha található olyan η csúcsú és r sugarú teljes A körcikk, amelyben η az egyetlen M-beli pont.

28. SEGÉDTÉTEL. (I. JA. VERCSENKO és A. N. KOLMOGOROV [9]). *Legyen M olyan síkbeli halmaz, amelynek minden pontja szabad körcikkel rendelkező pont. Akkor M megszámlálhatóan sok rektifikálható görbén helyezkedik el.*

BIZONYÍTÁS. Osszuk fel az M halmazt megszámlálhatóan sok $M(r, \varphi, \varepsilon)$ osztályra, ahol r, φ és ε racionális számok és az M-beli η pont akkor tartozik az $M(r, \varphi, \varepsilon)$ osztályba, ha abban az r sugarú, η csúcsponttal rendelkező teljes körcikkben, amelynek tengelye az x tengellyel φ szöget alkot és amelynek a csúcsnál fekvő szöge 2ε, az M halmaznak nincs más pontja az η ponton kívül. Megmutatjuk, hogy a J egységnégyzetben bármelyik $M(r, \varphi, \varepsilon)$ halmaz pontjai véges számú rektifikálható görbén helyezkednek el. Ebből azonnal következik a segédtétel állítása. Legyen $x'y'$ az a derékszögű koordinátarendszer, amelynek y' tengelye az x tengellyel φ szöget alkot. Rajzoljuk meg az $x' = nh$ egyeneseket, ahol $h < r \cos \varepsilon$ $(n = \pm 1, 2, \ldots, N)$. Mindegyik az $y' = (n-1)h$ és $y' = nh$ egyenesek közötti P_n sávban az $M(r, \varphi, \varepsilon)$ halmazhoz tartozó pontok olyan $f(x')$ függvény grafikonját adják, amely $\bar{K} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ állandójú *Lipschitz*-feltételnek tesz eleget. Az $f(x')$ függvény értelmezését a $J \cap M(r, \varphi, \varepsilon) \cap P_n$ metszet x' tengelyen vett vetületének lezárására folytonosság útján, a kapott zárt halmazzal határos intervallumokra pedig lineárisan kiterjesztve, megkapjuk a keresett rektifikálható görbét.

29. SEGÉDTÉTEL. *Legyen S rektifikálható görbe a J négyzetben, és legyen $F(\eta)$ a J négyzeten értelmezett folytonos függvény. Legyen Ω azon pontok halmaza, amelyekben $F(\eta)$-nak van teljes differenciálja és azonkívül* grad $F(\eta) = 0$. *Akkor az $F(\eta)$ függvény Ω halmazon felvett értékeinek halmaza nulla mértékű (a t tengelyen).*

BIZONYÍTÁS. Az S görbén vezessük be változóként a τ ívhosszúságot. Akkor az S görbén $F(\eta)$-ból egyváltozós $f(\tau)$ függvény lesz, és Ω pontjaiban $f(\tau) = 0$. A 26. segédtétel szerint ebből következik a jelen segédtétel állítása.

15. TÉTEL (A. SZ. KRONROD és E. M. LANGYISZ). *Legyen $F(\eta)$ a J négyzeten értelmezett és J minden pontjában kétszer differenciálható függvény. Akkor azok a pontok, ahol* grad $F(\eta) = 0$, *a nívóknak egy (a t tengelyen mérve) nulla mértékű halmazán helyezkednek el.*

BIZONYÍTÁS. Legyen Ω_1 azon pontok halmaza, amelyekben grad $F(\eta) = 0$, vagyis $F_x(\eta) = F_y(\eta) = 0$, Ω_2 pedig azon Ω_1-beli pontok halmaza, amelyekben még $F_{xx}(\eta) = F_{xy}(\eta) = F_{yx}(\eta) = F_{yy}(\eta) = 0$ is teljesül.

$\Omega_1 - \Omega_2$ minden pontjához tartozik szabad körcikk, így a 28. segédtétel értelmében $\Omega_1 - \Omega_2$ megszámlálhatóan sok rektifikálható görbén helyezkedik el. A 29. segédtétel szerint ebből következik, hogy $\Omega_1 - \Omega_2$ pontjai a nívók valamely nulla mértékű rendszerén helyezkednek el. Vizsgálni kell még az Ω_2 halmazt. Legyen T azon nívók összessége, amelyek tartalmaznak Ω_2-beli pontot. Legyen a feltevéssel ellentétben $\overline{\text{mes}}\, T = \mu > 0$. Minthogy az $F(\eta)$ függvény minden $\eta \in \Omega_2$ pontban Taylor-sorba fejthető, tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan η-tól függő $\delta > 0$ szám, hogy $|\eta - \xi| \leqq \delta < 1$ esetén $|F(\eta) - F(\xi)| \leqq \varepsilon |\eta - \xi|^2$.

Rajzoljuk meg mindegyik $\eta \in \Omega_2$ ponthoz a fenti δ-környezetet. Minden t_0 értékre, amelyhez van olyan $\eta \in \Omega$, hogy $F(\eta) = t_0$, rögzítsünk *egy* ilyen η pontot említett δ-környezetével együtt. A t tengelyen a t_0 pont körül jelöljünk ki egy $\varepsilon\delta^2$ sugarú intervallumot. Ezen intervallumok rendszeréből, amely az egész T halmazt befedi, válasszunk ki véges számú egymást nem metsző intervallumot, amelyek összhosszúsága legalább $\frac{\mu}{3}$. Az értelmezési síkon a megfelelő körök nyilván nem metszik egymást, mert különböző körökhöz tartozó pontokban az $F(\eta)$ függvény különböző értékeket vesz fel.

A t tengelyen fekvő $\varepsilon\delta^2$ sugarú intervallumnak a síkban valamely δ sugarú, azaz $\pi\delta^2$ területű kör felel meg. Minthogy a kiválasztott intervallumok hosszúságának összege nagyobb vagy egyenlő mint $\frac{\mu}{3}$, fennáll a $\sum_s \varepsilon\delta_s^2 \geqq \frac{\mu}{3}$, vagyis $\sum_s \pi\delta_s^2 \geqq \frac{\pi\mu}{3\varepsilon}$ egyenlőtlenség. Az $\varepsilon > 0$ mennyiség megválasztása önkényes volt. Ily módon $\varepsilon < \frac{\pi \cdot \mu}{30 \text{ mes } J}$ esetén $\sum_s \pi\delta_s^2 > 10 \text{ mes } J$, ez pedig lehetetlen, mert köreink nem metszik egymást. Tehát valóban mes $T = 0$, ami a bizonyítani kívánt tétel helyességét mutatja.

15. tételünkből és YOUNGnak a nívógörbékről szóló tételéből [13] gyorsan adódik a következő.

16. TÉTEL (A. SZ. KRONROD és E. M. LANGYISZ). *Legyen $F(\eta)$ a J négyzeten értelmezett, kétszer differenciálható függvény. Akkor majdnem minden t-re az E_t nívóhalmaz véges számú, minden pontjában kétszer differenciálható topológikus körből és olyan egyszerű ívből áll, amelynek végpontjai J határán vannak.*

BIZONYÍTÁS. Legyen E_t olyan nívóhalmaz, amelynek minden pontjában grad $F(\eta) = 0$. Mindenekelőtt YOUNG tétele szerint az E_t nívóhalmaz bármely $\eta \in E_t$ pont környezetében kétszer differenciálható egyszerű ív. Ebből következik, hogy a t nívó komponenseinek száma véges. Mindegyik komponens lokálisan egyszerű ív, és így a 27. segédtétel értelmében minden komponens topológikus kör vagy olyan egyszerű ív, amelynek végpontjai J határán vannak.

Megjegyzés. A 11—16. tételek nehézség nélkül átvihetők a J kétdimenziós gömbfelületen értelmezett függvények esetére.

II. fejezet

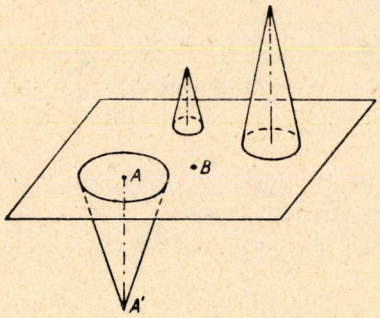
LINEÁRIS VARIÁCIÓ

1. §. A lineáris variáció értelmezése. Ponttól pontig vett variáció. Pozitív és negatív, belső és határ-variáció

A variáció az egyváltozós függvények esetében jól ismert tulajdonságokkal rendelkező funkcionál. Kétváltozós függvényeknél a variációnak nincs általánosan elfogadott definíciója. Sőt, azoknak a definícióknak a többsége, amelyek kétváltozós függvények variációjára az irodalomban előfordulnak (lásd [10]), intuitive, kisebb-nagyobb mértékben, a függvény-grafikon területe fogalmának, helyesebben e grafi-

konnak valamilyen módon megválasztott függőleges síkokon vett vetületei területének felel meg. Minket azonban most az érdekel, lehetséges-e olyan variációt szerkeszteni, amely egy másik intuitív elképzelésnek — a függvény egyik ponttól a másikig való változásának — felel meg, amely megadja azon emelkedők és ereszkedők minimális összegét, amelyeket az utazónak be kell járni, ha függvényünk grafikonja mentén egy megadott pontból egy másikig el akar jutni. Ennek során természetesen igyekezni fogunk elkülöníteni a pozitív variációt — az emelkedők összegét — és a negatív variációt — az ereszkedők összegét. Ezek a ponttól pontig vett pozitív, negatív és teljes variációra vonatkozó intuitív követeléseink.

Szeretnénk továbbá egy olyan variációt is, amely a függvénynek nemcsak valamely ponttól pontig vezető út mentén, hanem, hogy úgy mondjuk, az egész tartományban való változását fejezi ki. Ha a függvény grafikonja véges számú különálló „kúpból" áll (4. ábra), akkor azt akarjuk, hogy az egész tartományon vett variáció az összes ilyen kúpok magasságának összege legyen, alaktól függetlenül. Ha most külön akarjuk választani, hogy úgy mondjuk, a tartományon vett pozitív és negatív variációt, akkor nyilvánvaló, hogy az ábránkon szereplő A pontra vonatkozóan azt a kúpot, amelynek csúcsa az A' pontban van, felfelé emelkedőnek kell tekinteni, a B pontra vonatkozóan viszont lefelé süllyedőnek. Ilyenformán már jó előre látjuk, hogy a tartományon vett variáció szétesése pozitív és negatív részre bizonyos fokig függ a kiindulási ponttól.



4. ábra

Végül az összes esetekben lehetségesnek látszik a (teljes, pozitív vagy negatív, ponttól pontig vagy az egész tartományon vett) variáció azon részének megkülönböztetése, amely „kúpszerű" kiemelkedésekből és bemélyedésekből származik, és annak a résznek, amely a határig terjedő „ráncokból" adódik. Így már most látjuk, hogy a kétváltozós függvények esetében az említett típusú összes lehetséges variációk gyűjteményének valamivel terjedelmesebbnek kell lennie, mint egyetlen változó esetében.

Egyváltozós függvények esetén folytonos függvények variációját megadhatjuk a „multiplicitás függvény" segítségével a következőképpen.

Legyen $f(x)$ folytonos függvény. Jelentse $\Phi_f(t)$ azon pontok számát, amelyekben $f(x)=t$.

Nevezzük az a pontot az $f(x)$ függvény *növekedési pontjának*, ha elég kicsiny $\delta>0$ számra $x<x'<x+\delta$ esetén $f(x)<f(x')$, és $x-\delta<x'<x$ esetén $f(x')<f(x)$. Az a pontot *fogyási pontnak* nevezzük, ha a $-f(x)$ függvénynek növekedési pontja.

Legyen $\Phi_f^+(t)$ egyenlő azon pontok számával, amelyekben $f(x)=t$ és amelyek nem fogyási pontok, $\Phi_f^-(t)$ pedig azon pontok számával, amelyekben $f(x)=t$ és amelyek nem növekedési pontok.

Ekkor meg lehet mutatni, hogy

$$V(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_f(t)\,dt \quad \text{és} \quad V^{\pm}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_f^{\pm}(t)\,dt,$$

ahol $V(f)$, $V^+(f)$ és $V^-(f)$ rendre az $f(x)$ függvény teljes, pozitív ill. negatív variációját jelenti. Ennek a tételnek a bizonyítását a következő paragrafusban fogjuk megadni.

Kétváltozós függvény esetében is a variáció definiálásához felhasználjuk a multiplicitás függvény fogalmát.

Legyen $F(\eta)$ a J tartományon értelmezett folytonos függvény és $\xi \in J$ valamely rögzített pont. Jelöljük $\Phi_F(t)$-vel a t nívóhalmaz J-t szétválasztó komponenseinek a számát. Ily módon $\Phi_F(t)$ nemnegatív függvény, amely egész értékeket vagy a $+\infty$ értéket veheti fel. Ezt a függvényt (az $F(\eta)$ függvényre vonatkozó, szétválasztó komponensek szerinti) *multiplicitás függvénynek* fogjuk nevezni.

Továbbá, ha előre kitüntetjük az $F(\eta)$ függvény nívóhalmazai komponenseinek valamely S osztályát, akkor $\Phi_F^{(S)}(t)$*-vel fogjuk jelölni a t nívóhalmaz S-hez tartozó komponenseinek számát.* Speciálisan S-sel fogjuk jelölni 1) abban az esetben, amikor J négyzet: a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ függvény értelmezésénél *a síkot (és nemcsak a J tartományt) szétválasztó azon reguláris komponensek osztályát, amelyek a ξ pontra nézve nem fogyási (illetve nem növekedési) komponensek;* a $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvény értelmezésénél *a síkot szét nem választó azon reguláris komponensek osztályát, amelyek ξ-re vonatkozóan nem fogyási (illetve nem növekedési) komponensek*; 2) abban az esetben, amikor J gömbfelület: a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ függvény értelmezésénél *a J-t szétválasztó azon reguláris komponensek osztályát, amelyek a ξ pontra nézve nem fogyási (illetve nem növekedési) komponensek.* A $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvények gömbefelület esetén legyenek azonosan nullával egyenlők.

A 2. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy bármely folytonos $F(\eta)$ függvényre *a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ és $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ multiplicitás függvények mind a négyen mérhetők mint t függvényei.* A jelen paragrafus hátra levő részében az említett multiplicitás függvények *mérhetőségét fel fogjuk tételezni* anélkül, hogy ezt külön kikötnénk.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$V(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_F(t)dt,\quad V_\xi^{b\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)dt \quad \text{és} \quad V_\xi^{h\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)dt.$$

Ezeket a funkcionálokat rendre az $F(\eta)$ függvény *lineáris variációjának*, az $F(\eta)$ függvény ξ pontra vonatkozó *pozitív (negatív) belső variációjának*, illetve *pozitív (negatív) határ-variációjának* fogjuk nevezni.

Legyen

$$V_\xi^{\pm}(F)=V_\xi^{b\pm}(F)+V_\xi^{h\pm}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)\}dt.$$

A $V_\xi^+(F)$, $V_\xi^-(F)$ funkcionálokat *teljes pozitív, ill. negatív variációnak* nevezzük (ξ-re vonatkozóan). Továbbá a $V^b(F)=V_\xi^{b+}(F)+V_\xi^{b-}(F)$ funkcionált az $F(\eta)$ függvény teljes *belső variációjának*, a $V^h(F)=V_\xi^{h+}(F)+V_\xi^{h-}(F)$ funkcionált pedig $F(\eta)$ teljes *határ-variációjának* nevezzük.

30. SEGÉDTÉTEL.

$$V^b(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)\}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_F^b(t)dt,$$

ahol $\Phi_F^b(t)$ a t nívó síkot szétválasztó összes reguláris komponenseinek a száma abban az esetben, amikor J négyzet, és egyszerűen a t nívó összes reguláris komponenseinek száma, ha J gömbfelület. Ily módon $V^h(F)$ nem függ ξ-től.

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha a t nívó nem tartalmaz kvázi-extrémális komponenst és „nyolcasokat", akkor a növekedési és fogyási komponensek vagy kimerítik e nívó összes a síkot szétválasztó reguláris komponenseit, úgyhogy $\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)=$ $=\Phi_F^b(t)$, vagy az utóbbiak közül legalább egy K komponensnek a külső vagy belső karakterisztikája koncentrikus szingularitású komponens. Ha még azt is tekintetbe vesszük, hogy K-nak egyetlen pontja sem fekszik J határán (ami a 7. segédtétel értelmében igaz minden t-re, kivéve esetleg megszámlálható sok értéket), akkor ebben az esetben a t nívó az 5. segédtétel szerint végtelen sok, a síkot szétválasztó reguláris komponenst tartalmaz, ennélfogva $\Phi_F^b(t)=\infty$ és így $\Phi_F^b(t)=\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+$ $+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)$, mert

$$\Phi_{F,\xi}^{b+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{b-}(t)\geqq\Phi_F^b(t).$$

Tehát az integrálandó függvények majdnem minden t-re egyenlők, amivel segédtételünket bebizonyítottuk.

31. SEGÉDTÉTEL.

$$V^h(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)\}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_F^h(t)\,dt,$$

ahol $\Phi_F^h(t)$ az E_t nívó síkot szét nem választó reguláris komponenseinek a száma. Ily módon $V^h(F)$ nem függ ξ-től.

BIZONYÍTÁS. Először is nyilvánvaló, hogy $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)\geqq\Phi_F^h(t)$, ugyanis mindegyik a síkot szét nem választó reguláris komponens vagy nem növekedési komponens, vagy nem fogyási komponens.

Továbbá, ha a t nívó tipikus, vagyis nem tartalmaz kvázi-extrémális komponenst, „nyolcast" és a síkot szétválasztó, a J tartomány C határát metsző komponenst (ami a 3. tétel értelmében igaz minden t értékre, kivéve esetleg megszámlálható sokat), akkor a t nívó vagy csupa növekedési és fogyási komponenst tartalmaz és ekkor $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)=\Phi_F^h(t)$, vagy a t nívó valamely K komponensének külső vagy belső karakterisztikája koncentrikus szingularitású komponens. Ekkor a t nívó végtelen sok reguláris, a síkot szét nem választó komponenst tartalmaz, mert ha K^* olyan koncentrikus szingularitású komponens, amelynek J határával van közös pontja, akkor minden olyan K' komponensnek is, amely K^*-ot egy elég kis $U\supset K^*$ környezet külsejétől elválasztja, kell hogy legyen pontja J határán. Minthogy $K'\cap C\neq 0$, a K' komponens nem választja szét a síkot. Tehát ebben az esetben $\Phi_F^h(t)=\infty$ és még inkább $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t)+\Phi_{F,\xi}^{h-}(t)=\infty$. Abban az esetben, amikor K^* helyett K^{**} szerepel, a bizonyítás szóról szóra megismételhető.

Most még definiáljuk a „ξ ponttól az η pontig vett" ${}_\xi^\eta V^{b\pm}(F)$, ${}_\xi^\eta V^{h\pm}(F)$ variációkat oly módon, hogy a megfelelő multiplicitás függvények értelmezésénél csak a ξ, η pontokat elválasztó komponensekre szorítkozunk.

Ezek szerint például

$${}_\xi^\eta V^{b+}(F)=\int_{-\infty}^{+\infty}{}_\xi^\eta\Phi_F^{b+}(t)\,dt,$$

ahol ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{b+}(t)$ egyenlő E_t összes olyan reguláris és *a síkot szétválasztó* komponenseinek számával, ha J négyzet, és egyszerűen E_t összes olyan reguláris komponenseinek a számával, ha J gömbfelület, amelyek nem fogyási komponensek ξ-re vonatkozóan és elválasztják egymástól a ξ és az η pontot.

Analóg módon értelmezhetők a ${}^{\eta}_{\xi}V^b(F)$; ${}^{\eta}_{\xi}V^h(F)$; ${}^{\eta}_{\xi}V^+(F)$; ${}^{\eta}_{\xi}V^-(F)$; ${}^{\eta}_{\xi}V(F)$ variációk.

32. SEGÉDTÉTEL.

$$
\begin{aligned}
{}^{\eta}_{\xi}V(F) &= {}^{\eta}_{\xi}V^{b+}(F) + {}^{\eta}_{\xi}V^{b-}(F) + {}^{\eta}_{\xi}V^{h+}(F) + {}^{\eta}_{\xi}V^{h-}(F) = \\
&= {}^{\eta}_{\xi}V^{+}(F) + {}^{\eta}_{\xi}V^{-}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{+}(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{-}(t)\,dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{r}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

ahol ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{+}(t)$, ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{-}(t)$, ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{r}(t)$ *és* ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F(t)$ *az* E_t *nívóhalmaz* ξ, η *pontokat elválasztó nemfogyási, nem-növekedési (valamennyi a* ξ *pontra vonatkozóan), reguláris, illetve tetszés szerinti komponenseinek számát jelenti.*

BIZONYÍTÁS. Először is megemlítjük, hogy ${}^{\eta}_{\xi}V^{b\pm}(F) + {}^{\eta}_{\xi}V^{h\pm}(F) = {}^{\eta}_{\xi}V^{\pm}(F)$, mert minden t-re ${}^{\eta}_{\xi}\Phi^{b\pm}(t) + {}^{\eta}_{\xi}\Phi^{h\pm}(t) = {}^{\eta}_{\xi}\Phi^{\pm}(t)$. Továbbá nyilvánvaló, hogy minden t-re ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{+}(t) + {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{-}(t) \geqq {}^{\eta}_{\xi}\Phi^{r}(t)$, ugyanis a t nívónak minden reguláris és a ξ, η pontokat elválasztó komponense vagy nem növekedési, vagy nem fogyási komponens a ξ pontra nézve. Ha most hasonlóan ahhoz, ahogyan a 30. és a 31. segédtételben tettük, kizárunk legfeljebb megszámlálhatóan sok nem tipikus nívót, köztük az $F(\xi)$ és az $F(\eta)$ nívót, akkor bármelyik megmaradt t nívóra a ξ, η pontokat elválasztó reguláris komponensek vagy mindannyian növekedési és fogyási komponensek, és akkor a ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{+}(t) + {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{-}(t) = {}^{\eta}_{\xi}\Phi^{r}(t)$ egyenlőséget bebizonyítottuk, vagy a t nívó legalább egy, a ξ, η pontokat elválasztó K komponensére a K^*, K^{**} karakterisztikák egyike koncentrikus szingularitású komponens. Akkor mindegyik, K^*-hoz (ill. K^{**}-hoz) elég közeli K' komponens, amely elválasztja K^*-ot és egy elég kicsiny $U \supset K^*$ környezet külsejét, az η pontot is elválasztja K^*-tól (illetve ξ-t K^{**}-tól) és egyúttal elválasztja ξ-t és η-t. Minden ilyen K' komponens reguláris, ezért ebben az esetben ${}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{r}(t) = \infty$, következésképpen ismét fennáll a bizonyítandó egyenlőség. Minthogy ez az egyenlőség legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden t-re fennáll, kapjuk:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{+}(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{-}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{r}(t)\,dt.
$$

Hátra van még az

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F^{r}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{\eta}_{\xi}\Phi_F(t)\,dt
$$

egyenlőség bebizonyítása. De a ξ, η pontokat elválasztó és nem reguláris komponen-

sek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő (ugyanis, mint ismeretes, szétválasztják a J tartományt), ennélfogva ${}^{\eta}_{\xi}\Phi^{r}_{F}(t)={}^{\eta}_{\xi}\Phi_{F}(t)$ legfeljebb megszámlálható sok kivételtől eltekintve minden t-re, ebből pedig következik állításunk helyessége.

Végül nyilván igaz a következő:

33. SEGÉDTÉTEL.

$$ {}^{\eta}_{\xi}V^{b}(F)={}^{\eta}_{\xi}V^{b+}(F)+{}^{\eta}_{\xi}V^{b-}(F) $$

és

$$ {}^{\eta}_{\xi}V^{h}(F)={}^{\eta}_{\xi}V^{h+}(F)+{}^{\eta}_{\xi}V^{h-}(F). $$

A 30—33. segédtételek azt mondják, hogy a bevezetett variációkra érvényesek a szokásos összefüggések: *a* (tartományon vett, ponttól pontig vett, belső, határ- vagy általános) *teljes variáció egyenlő a megfelelő pozitív és negatív variáció összegével.* Továbbá igaznak bizonyul egy másik természetes összefüggés is: *a* (teljes, pozitív, negatív, az egész tartományon vett vagy a ponttól pontig vett) *variáció egyenlő a megfelelő belső és határ-variáció összegével.*

2. §. A lineáris variáció mint a függvény variációja az egydimenziós fán. A multiplicitás függvények mérhetősége

A továbbiakhoz szükségünk van néhány, egyszerű íven vagy ami ugyanaz, a [0, 1] szakaszon értelmezett függvényekre vonatkozó tételre.

34. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(x)$ a* [0, 1] *szakaszon értelmezett folytonos függvény. Akkor a $\Phi_f(t)$, $\Phi_f^+(t)$, $\Phi_f^-(t)$ multiplicitás függvények* (lásd II. fejezet 1. §) *mérhetők.*

BIZONYÍTÁS. Először mutassuk meg a $\Phi_f(t)$ függvény mérhetőségét. Jelentse $T(\varepsilon, n)$ azon t értékek összességét, amelyeknek mindegyikéhez található a t nívónak n számú pontja úgy, hogy távolságuk páronkint $\geqq\varepsilon$. A $T(\varepsilon, n)$ halmaz nyilván zárt. Legyen $T(n)=\sum_k \left(\frac{1}{k}, n\right)$ és $T(\infty)=\prod_n T(n)$. A $\Phi_f(t)$ függvény $\underset{t}{E}\{\Phi_f(t)\geqq n\}$ *Lebesgue*-halmazai a mérhető $T(n)$, $T(\infty)$ halmazok.

Most tegyük fel, hogy a t nívó nem tartalmaz maximum- és minimum-helyet. Megmutatjuk, hogy ha ebben az esetben $\Phi_f(t)=\infty$, akkor egyúttal $\Phi_f^+(t)=\Phi_f^-(t)=\infty$. Valóban, ha E_t nem izolált pontjainak a halmaza végtelen, akkor $\Phi_f^+(t)=\Phi_f^-(t)=\infty$. Ha viszont E_t nem izolált pontjainak halmaza véges, akkor található E_t izolált pontjainak egy $a_1, a_2, \ldots$ monoton sorozata, amelynek elemeit E_t más pontjai nem választják el. De akkor az (a_1, a_2), (a_2, a_3), ... intervallumokon $f(x)$ nem veszi fel a t értéket és váltakozva egyszer határozottan nagyobb, mint t, egyszer határozottan kisebb, mint t (másképp az a_s pontok egyike extrémumhely lenne). Következésképpen az a_s pontok váltakozva növekedési és fogyási pontok, és ezzel a kívánt egyenlőséget bebizonyítottuk.

Maximum- és minimum-helyek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón fordulnak elő, így az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t)=\infty\}$, $\underset{t}{E}\{\Phi_f^-(t)=\infty\}$ *Lebesgue*-halmazok legfeljebb egy megszámlálható halmazzal térnek el a mérhető $T(\infty)$ halmaztól, tehát maguk is mérhetők.

Most megmutatjuk, hogy az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t) \geqq n\}$ és az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^-(t) \geqq n\}$ *Lebesgue*-halmazok mérhetők. E célból bevezetjük a h-növekedési (h-fogyási) pont fogalmát. Tegyük fel, hogy vannak olyan $a < x_0 < b$ pontok, amelyekre $f(a) + h \leqq f(x_0) \leqq \leqq f(b) - h$ (illetve $f(a) - h \geqq f(x_0) \geqq f(b) + h$) és $x \in (a, x_0)$ esetén $f(x) \leqq f(x_0)$, $x \in (x_0, b)$ esetén pedig $f(x) \geqq f(x_0)$ (illetve $x \in (a, x_0)$ esetén $f(x) \geqq f(x_0)$, $x \in (x_0, b)$ esetén $f(x) \leqq f(x_0)$). Ekkor az x_0 pontot h-növekedési (illetve h-fogyási) pontnak nevezzük. Legyen T azon t nívók halmaza, amelyek nem tartalmaznak extrémum-helyet, és amelyekre $\Phi_f(t) = \infty$. Amint kimutattuk, T mérhető halmaz. Legyen α a h-növekedési pontok valamely torlódási pontja. Akkor α nem fogyási pont. Jelentse $T(h, \varepsilon, n, +)$ azon t értékek halmazát, amelyekre E_t tartalmaz legalább n olyan $a_1, \ldots, a_n$ h-növekedési pontot, amelyek páronkinti távolsága $\geqq \varepsilon$. Akkor $\overline{T}(h, \varepsilon, n, +)$ csak olyan nívókat tartalmaz, amelyek mindegyikének legalább n pontja nem fogyási pont.

Legyen

$$T(h, n, +) = \sum_k T\left(h, \frac{1}{k}, n, +\right) \quad \text{és} \quad T(n, +) = \sum_l T\left(\frac{1}{l}, n, +\right).$$

A $T(n, +)$ halmaz mérhető és mindegyik $t \in T(n, +)$ nívó legalább n számú nemfogyási pontot tartalmaz. Másrészt, ha $t \in T$, akkor a t nívó csak növekedési és fogyási pontokat tartalmaz. Minden növekedési pont elég kis h-ra h-növekedési pont. Ebből következik, hogy ha $\Phi_f^+(t) \geqq n$ és $t \in T$, akkor $t \in T(n, +)$. Tehát $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t) \geqq n\}$ a mérhető $T(n, +) \cap T$ halmaztól legfeljebb megszámlálhatóan sok t' ponttal tér el (amelyekre a t' nívó tartalmaz extrémum-helyet). Ebből következik az $\underset{t}{E}\{\Phi_f^+(t) \geqq n\}$ halmaz mérhetősége minden n-re és ezzel együtt a $\Phi_f^+(t)$ függvény mérhetősége. A $\Phi_f^-(t)$ függvény mérhetősége analóg módon bizonyítható. A 34. segédtételt teljesen bebizonyítottuk.

35. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon értelmezett folytonos függvény, $f(a) = t_1$, $f(b) = t_2$. Akkor $t_1 < t_2$ esetén minden t-hez $(t_1 < t < t_2)$ található a t nívónak olyan $c \in [a, b]$ pontja, amely nem fogyási pont, $t_1 > t_2$ esetén pedig minden t-hez $(t_1 > t > t_2)$ található a t nívónak olyan pontja, amely $f(x)$-nek nem növekedési pontja.*

BIZONYÍTÁS. Legyen meghatározottság kedvéért $t_1 < t < t_2$. Legyen c az E_t halmaz leginkább jobbra fekvő pontja. Ha c fogyási pont, akkor a $[c, b]$ szakaszon található olyan d pont, amelyben $f(d) < t$, ennélfogva a $[d, b]$ szakaszon van olyan e pont, ahol $f(e) = t$, vagyis c az E_t halmaznak nem a leginkább jobbra fekvő pontja. A $t_1 > t_2$ esetben a bizonyítás analóg módon történik.

Most be tudjuk bizonyítani a variációnak a multiplicitás függvény integrálja segítségével történő előállításáról szóló nevezetes tételt (lásd [6]).

17. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ a $[0, 1]$ szakaszon értelmezett folytonos függvény. Legyen $V(f)$, $V^+(f)$ és $V^-(f)$ e függvény teljes, pozitív, illetve negatív variációja. Akkor*

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(t)\,dt, \quad V^+(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^+(t)\,dt \quad \text{és} \quad V^-(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^-(t)\,dt.$$

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt tételünk igaz bármely szakaszonként lineáris függvényre. Most jelentse $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ azt a függvényt, amely a $\frac{k}{n!}$ helyeken $(k=0, 1, 2, \ldots, n!)$ az $f\left(\frac{k}{n!}\right)$ értékeket veszi fel, a közbenső intervallumokon pedig lineáris. Akkor fennáll

$$V^+(f_n) \leqq V^+(f), \quad V^-(f_n) \leqq V^-(f), \quad V(f_n) \leqq V(f),$$

valamint

$$V^\pm(f) = \lim_n V^\pm(f_n) \quad \text{és} \quad V(f) = \lim_n V(f_n).$$

Továbbá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_n}^\pm(t)\,dt = V^\pm(f_n) \leqq V^\pm(f) \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_n}(t)\,dt = V(f_n) \leqq V(f).$$

Az n index növelésével a $\Phi_{f_n}^\pm(t)$, $\Phi_{f_n}(t)$ függvények minden egyes t-re monoton növekednek. Meg fogjuk mutatni, hogy majdnem minden t-re

$$\lim_n \Phi_{f_n}^\pm(t) = \Phi_f^\pm(t), \quad \lim_n \Phi_{f_n}(t) = \Phi_f(t).$$

Ebből következik, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^\pm(t)\,dt = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_n}^\pm(t)\,dt = \lim_n V^\pm(f_n) = V^\pm(f)$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(t)\,dt = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{f_n}(t)\,dt = \lim_n V(f_n) = V(f).$$

Legyen t olyan nívó, amely nem tartalmazza $f(x)$ és az $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ függvények egyetlen extrémum-helyét sem. Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ az E_t halmazhoz tartozó és nem fogyási pontok. Legyen δ az a_s pontok páronkinti távolságai közül a legkisebb. Akkor mindegyik a_s pont $\frac{\delta}{4}$-sugarú környezetében található két olyan $b_s < c_s$ pont, hogy $f(b_s) < f(a_s) = t < f(c_s)$. Az $f_n(x)$ függvények egyenletesen tartanak $f(x)$-hez és ezért elég nagy n értékekre $f_n(b_s) < t < f_n(c_s)$ $(s=1, 2, \ldots, k)$. Akkor elég nagy n mellett bármely s-hez található a (b_s, c_s) intervallumnak olyan pontja, amely az $f_n(x)$ függvény t nívójához tartozik és növekedési pont; következésképpen $\lim_n \Phi_{f_n}^+(t) \geqq \Phi_f^+(t)$ minden olyan t nívóra, amely nem tartalmazza az $f(x), f_n(x)$ függvények egyetlen extrémum-helyét sem, azaz legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden t-re. Most legyen $\Phi_{f_n}^+(t) = k$, és t-re teljesüljenek az előbbi megkötések. Akkor található k számú $a_1 < b_1 \leqq \ldots \leqq a_k < b_k$ pontpár úgy, hogy $f_n(a_s) = f(a_s) < t$ és $f_n(b_s) = f(b_s) > t$ $(s=1, 2, \ldots, k)$. A 35. segédtétel szerint mindegyik (a_s, b_s) intervallumon az $f(x)$ függvény t nívójának van legalább egy pontja, amely nem fogyási pont, tehát $\Phi_f^+(t) \geqq \lim_n \Phi_{f_n}^+(t)$. Ily módon majdnem minden t-re $\Phi_f^+(t) = \lim_n \Phi_{f_n}^+(t)$.

Ezzel a $V^+(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^+(t)\,dt$ egyenlőséget bebizonyítottuk. Áttérve a $-f(x)$ függvényre, azonnal kapjuk:

$$V^-(f) = V^+(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{-f}^+(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f^-(t)\,dt.$$

Most térjünk vissza a kétváltozós függvényekhez. Legyen $F(\eta)$ a J tartományon értelmezett folytonos függvény, ξ és ζ a J tartomány két pontja, T_F pedig az egydimenziós fa. Legyen $F^*(l)$ a megfelelő függvény T_F-en, és σ az l_ξ, l_ζ pontokat összekötő minimális egyszerű ív T_F-ben. Akkor a 7. tétel szerint a σ íven tekintett $F^*(l)$ függvény (l_ξ-re vonatkozó) növekedési és fogyási pontjainak egyértelműen megfelelnek az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazainak (ξ-re vonatkozó) növekedési és fogyási komponensei. Ebből következik, hogy ${}_\xi^\zeta\Phi_F^+(t) = \Phi_{F^*}^+(t)$ és ${}_\xi^\zeta\Phi_F^-(t) = \Phi_{F^*}^-(t)$, ahol $\Phi_{F^*}^\pm(t)$ a σ egyszerű íven tekintett $F^*(l)$ függvényhez tartozik. Ezek szerint a ${}_\xi^\zeta\Phi_F^\pm(t)$ multiplicitás függvények mérhetők. Mutassuk meg a ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{b\pm}(t)$, ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{h\pm}(t)$ függvények mérhetőségét arra az esetre, amikor J négyzet. Ehhez előbb egy segédtételt bizonyítunk be.

36. SEGÉDTÉTEL. *Legyen a J tartomány négyzet, $F(\eta)$ folytonos függvény J-n és T_F az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája. Legyen σ egy T_F-hez tartozó egyszerű ív. Akkor σ azon pontjai, amelyek J határát metsző komponenseknek felelnek meg, egy $\sigma_1 \subset \sigma$ egyszerű ívet alkotnak* (előfordulhat, hogy $\sigma_1 = 0$, $\sigma_1 = \sigma$ vagy σ_1 a σ ív valamely pontja).

BIZONYÍTÁS. Legyen $l_1 \in \sigma$, $l_2 \in \sigma$ a J tartomány határát metsző K_1, K_2 komponenseknek megfelelő két pont. Akkor bármely a K_1, K_2 komponenseket elválasztó komponens is metszi J határát. Ebből következik, hogy σ minden l_1 és l_2 között fekvő pontja σ_1-hez tartozik, vagyis σ_1 valóban egyszerű ív.

A 36. segédtételből azonnal következik a $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$, $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvények mérhetősége. Valóban, tekintsük T_F-nek egy végpontokra és $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ egyszerű ívekre való szabályos felbontását (lásd I. fej. 2. §); válasszuk ki mindegyik σ_s íven azokat a pontokat, amelyek J határát metsző komponenseknek felelnek meg. A 36. segédtétel szerint ezek egy σ_s' egyszerű ívet alkotnak. Akkor a $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ multiplicitás függvény majdnem mindenütt egyenlő a $\sum_s \Phi_{F^*,s}^\pm(t)$ összeggel, ahol $\Phi_{F^*,s}^\pm(t)$ a σ_s' íven tekintett $F^*(l)$ függvénynek az l_ξ-re nézve nem fogyási (illetve nem növekedési) pontok szerint képezett multiplicitás függvénye, mert $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t) - \sum_s \Phi_{F^*,s}^\pm(t)$ csak azon t értékekre különbözhet nullától, amelyek T_F elágazási pontjainak felelnek meg, ilyen pont pedig az 1. segédtétel értelmében legfeljebb megszámlálhatóan sok van. Analóg módon $\sigma_s - \sigma_s'$ egy vagy két egyszerű ívből áll, esetleg végpontok nélkül. Legyenek ezek az ívek $\sigma_s^{(1)}$ és $\sigma_s^{(2)}$. Legyen az $F^*(l)$ függvénynek az l_ξ-re nézve nem fogyási (nem növekedési) pontok szerint képezett multiplicitás függvénye (a $\sigma_s^{(1)}$, ill. $\sigma_s^{(2)}$ íven) $\Phi_{F^*,s}^{\pm(1)}(t)$, ill. $\Phi_{F^*,s}^{\pm(2)}(t)$. Akkor, ismét legfeljebb megszámlálhatóan sok t érték kivételével, amelyek $\sigma_s^{(1)}$ és $\sigma_s^{(2)}$ végpontjainak és T_F elágazási pontjainak

felelnek meg, minden t-re fennáll:

$$\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t) - \sum_s [\Phi_{F^*,s}^{\pm(1)} + \Phi_{F^*,s}^{\pm(2)}] = 0.$$

A $\Phi_{F^*,s}^{\pm}(t)$, $\Phi_{F^*,s}^{\pm(1)}(t)$ és $\Phi_{F^*,s}^{\pm(2)}(t)$ függvények mérhetősége következtében a $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$, $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$ függvények mérhetők.

Most legyen ξ és ζ a J tartomány két pontja. Legyen σ az l_ξ, l_ζ pontokat összekötő minimális egyszerű ív. Legyen $\sigma' \subset \sigma$ a σ ív azon pontjaiból álló egyszerű ív, amelyek J határát metsző komponenseknek felelnek meg. Legyen $\sigma = \sigma' + \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$, ahol $\sigma^{(1)}$ és $\sigma^{(2)}$ két egyszerű ív, esetleg végpontok nélkül. Ha $\Phi_{F^*}^{h\pm}(t)$, $\Phi_{F^*}^{b\pm(1)}(t)$, $\Phi_{F^*}^{b\pm(2)}(t)$ az $F^*(l)$ függvény, σ' $\sigma^{(1)}$, ill. $\sigma^{(2)}$ ívhez tartozó multiplicitás függvényét jelenti azon pontok szerint, amelyek l_ξ-re nézve nem fogyási (nem növekedési) pontok, akkor fennáll ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{h\pm}(t) = \Phi_{F^*}^{h\pm}(t)$ és ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{b\pm}(t) = \Phi_{F^*}^{b\pm(1)}(t) + \Phi_{F^*}^{b\pm(2)}(t)$, ahol az első egyenlőség minden t-re, a második pedig a σ' végpontjainak megfelelő t_1, t_2 értékek esetleges kivételével minden t-re érvényes. Ebből következik a ${}_\xi^\zeta\Phi^{b\pm}(t)$, ${}_\xi^\zeta\Phi_h^{\pm}(t)$ függvények mérhetősége.

A kapott eredményeket összefoglalva, a multiplicitás függvények mérhetőségéről az alábbi tételt nyerjük.

18. TÉTEL. *Tetszés szerinti, a J tartományon értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvényre és tetszés szerinti ξ, ζ pontokra a ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{\pm}(t)$, ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{b\pm}(t)$, ${}_\xi^\zeta\Phi_F^{h\pm}(t)$, $\Phi_{F,\xi}^{\pm}(t)$, $\Phi_{F,\xi}^{b\pm}(t)$, $\Phi_{F,\xi}^{h\pm}(t)$ függvények t mérhető függvényei.*

Ezenfelül a ponttól pontig vett variációk és az $F(\eta)$ függvény valamely tartományon vett lineáris variációja új definícióját kaptuk.

20. definíció. A $\xi = a_0, a_1, \ldots, a_n = \zeta$ pontsorozatot *$\xi - \zeta$-láncnak* nevezzük (az adott $F(\eta)$ folytonos függvényre vonatkozóan), ha a $K_s \ni a_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ nívóhalmaz-komponens elválasztja a K_{s-1}, K_{s+1} komponenseket.

19. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos tartományon. Legyen $|A|^+ = A$, ha $A \geqq 0$; $|A|^+ = 0$, ha $A \leqq 0$ és $|A|^- = |-A|^+$. Akkor*

$${}_\xi^\zeta V(F) = \sup \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|$$

és

$${}_\xi^\zeta V^{\pm}(F) = \sup \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1}|^{\pm},$$

ahol a felső határ mindenütt az összes lehetséges, tetszés szerinti n számú pontból álló, $\xi - \zeta$-láncra képezendő.

BIZONYÍTÁS. Valóban, legyen T_F az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája. Legyen l_ξ és l_ζ a T_F fa azon két pontja, amely a ξ, ill. ζ pontot tartalmazó komponensnek felel meg. Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ valamely $\xi - \zeta$-lánc a 20. definícióban megadott értelemben. Legyen T_F megfelelő pontjainak sorozata $l_\xi = l_0, l_1, \ldots, l_n = l_\zeta$. Akkor

$${}_\xi^\zeta V^{\pm}(F) = {}_\xi^\zeta V^{\pm}(F^*) \geqq \sum_{s=1}^{n} |F^*(l_s) - F^*(l_{s-1})|^{\pm} = \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|^{\pm},$$

ahol $F^*(l)$ az $F(\eta)$-nak megfelelő függvény T_F-en, ${}_\xi^\zeta V^\pm(F^*)$ pedig $F^*(l)$ pozitív (negatív) variációja az l_ξ, l_ζ pontokat összekötő minimális σ egyszerű íven. Analóg módon, ha $l_0 = l_\xi, l_1, \ldots, l_n = l_\zeta$ monoton pontsorozat a σ íven, akkor az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozat, ahol a_s az E_t nívóhalmaz l_s-nek megfelelő K_s komponenséhez tartozik, $\xi - \zeta$-láncot alkot. Ennélfogva

$$ {}_\xi^\zeta V^\pm(F) = V^\pm(F^*) = \sup \sum_{s=1}^{n} |F^*(l_s) - F^*(l_{s-1})|^\pm = \sup \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|^\pm, $$

és ezt kellett bebizonyítani.

Analóg módon

$$ {}_\xi^\zeta V(F) = \sup \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|. $$

A ${}_\xi^\zeta V^{b\pm}(F)$, ${}_\xi^\zeta V^{h\pm}(F)$ variációk és az egész tartományon vett variációk definíciójának analóg módon való megfogalmazását az olvasóra bízzuk.

E paragrafus befejezéseként bebizonyítjuk még a következő, csaknem nyilvánvaló tételt négyzeten értelmezett függvény *határ*-variációjáról.

20. TÉTEL. *Legyen J a négyzet és $F(\eta)$ folytonos függvény J-n. Akkor $V^h(F) = \frac{1}{2} V_C(F)$ (ahol $V_C(F)$ az F függvény variációja a J négyzet C határán), ha $V^h(F) < +\infty$ és $V^h(F) = V_C(F) = +\infty$ az ellenkező esetben.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\Phi_C(t)$ a J négyzet C határán tekintett $F(\eta)$ függvényre vonatkozó multiplicitás függvény. Akkor a 17. tétel értelmében $V_C(F)$ kifejezhető a következőképpen:

$$ V_C(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_C(t)\,dt. $$

Továbbá

$$ V^h(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F^h(t)\,dt. $$

Hasonlítsuk össze a $\Phi_C(t)$ és a $\Phi_F^h(t)$ függvényt. Mindenekelőtt olyan t nívó, amely a J-n tekintett és a C-n tekintett $F(\eta)$ függvénynek is tartalmazza legalább egy extrémum-helyét, legfeljebb megszámlálhatóan sok van. Legyen továbbá $\zeta \in C \cap E_t$ és tegyük fel, hogy ζ, bár az $F(\eta)$ függvénynek nem extrémum-helye C-n, mégis valamely J-t szét nem választó $K \subset E_t$ komponenshez tartozik. Akkor ζ-hoz bármilyen közel található olyan ζ_1 és ζ_2 pont a C határon, hogy $F(\zeta_1) < t < F(\zeta_2)$. De a ζ_1, ζ_2 pontokat az E_t nívóhalmaz, és így valamely $K' \subset E_t$ komponens is elválasztja. Ennélfogva $K' \neq K$ és $K' \cap C \neq 0$. Ily módon a C határon ζ-hoz tetszés szerinti közelségben található olyan pont, amely E_t-nek egy J-t szétválasztó komponenséhez tartozik. Ezért $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$.

Végül tegyük fel, hogy a K komponens metszi C-t és a közös pontok száma kettőnél több. Legyen $aK \cap \in C$, $b \in K \cap C$ és $c \in K \cap C$. Akkor vagy az ab, bc, ca ívek egyike teljesen E_t-ben fekszik, vagy C-n található a CE_t kiegészítő halmaznak három α, β, γ pontja, amely rendre a bc, ca és ab ívhez tartozik. Ebben az esetben

K páronkint elválasztja az α, β, γ pontokat (ez *Jordan* tételéből következik), és így K legalább három tartományra választja szét a J négyzetet. Az 1. segédtétel szerint ilyen komponensek legfeljebb megszámlálható sok nívón fordulnak elő. Olyan K komponens, amely tartalmazza C-nek valamely ívét, szintén legfeljebb megszámlálhatóan sok van.

Ily módon, esetleg megszámlálható sok nívón elhelyezkedő komponensek kivételével, minden komponens metszi C-t, de legfeljebb két közös pontja van vele. Ebből következik, hogy $\Phi_C(t) \leqq 2\Phi_F^h(t)$ majdnem minden t-re. Továbbá ha a K komponensnek C-vel csak egy közös pontja van, akkor vagy K szétválasztja J-t, ami a 7. segédtétel szerint legfeljebb megszámlálható sok nívóhoz tartozó komponensekre állhat fenn, vagy K nem választja szét J-t, és akkor, amint fentebb megmutattuk, $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$ minden ilyen t-re, kivéve esetleg megszámlálhatóan sokat.

Tehát majdnem minden t-re vagy $\Phi_C(t) = 2\Phi_F^h(t)$, vagy $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$. Ha az utóbbi egyenlőség nulla mértékű halmazon teljesül, akkor

$$V^h(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F^h(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_C(t)\,dt = \frac{1}{2}\,V_C(F).$$

Ha viszont $\Phi_C(t) = \Phi_F^h(t) = \infty$ a nívók valamely pozitív mértékű rendszerén, akkor

$$V_C(t) = V_F^h(t) = \infty.$$

Foglaljuk össze ennek a paragrafusnak az eredményeit. Bebizonyítottuk, hogy a $V(F)$ lineáris variáció, továbbá az $F(\eta)$ függvény ponttól pontig vagy az egész tartományon vett (adott pontra vonatkozó) pozitív és negatív, belső és határ-variációja visszavezethető az $F(\eta)$ függvény T_F egydimenziós fáján értelmezett $F^*(l)$ függvény megfelelő variációira. Azonkívül bebizonyítottuk az összes multiplicitás függvények mérhetőségét. Ezáltal bebizonyítottuk a variációk definíciójának jogosságát és a variációk közötti $V(F) = V^+(F) + V^-(F)$ típusú szokásos összefüggéseket is, amelyeket az előző paragrafus végén a multiplicitás függvények mérhetőségének feltételezése mellett kaptunk.

Végül az $F(\eta)$ függvény határ-variációját kifejeztük a határon vett variációja segítségével, ami talán kissé indokolja az elnevezést.

3. §. A ${}_\xi^\zeta V(f)$ lineáris variációnak mint a ζ pont függvényének tulajdonságai. Korlátos lineáris variációjú függvény felbontása két monoton függvény különbségére

Legyen $F(\eta)$ rögzített folytonos függvény a szokásos tartományban (négyzet vagy gömbfelület), és legyen ξ tetszés szerinti pont. Megmutatjuk, hogy a ${}_\xi^\zeta V^{\cdot\cdot}(F)$ mennyiségek (ahol a pontok helyébe a $b^\pm$ és $h^\pm$ indexpárok bármelyike írható) *a ζ pont függvényeként* tekintve folytonosak és ξ-re nézve monoton növekedők, hacsak *$F(\eta)$ korlátos lineáris variációjú* függvény, vagyis ha $V(F) < +\infty$.

Továbbá meg fogjuk mutatni, hogy ebben az esetben

$${}_\xi^\zeta V^+(F) - {}_\xi^\zeta V^-(F) = F(\zeta) - F(\xi),$$

és hogy ez a felbontás bizonyos értelemben minimális.

Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy ha nem követeljük meg $F(\eta)$ lineáris variációjának korlátosságát, hanem mondjuk csak a ${}^{\zeta}_{\xi}V(F)$ variációk (ζ pontok szerinti) egyenletes korlátosságát, akkor előfordulhat, hogy a ${}^{\zeta}_{\xi}V(F)$ variáció mint a ζ pont függvénye nem folytonos. Ismertetünk egy erre vonatkozó példát.

Legyen $\{K_n\}$ az $\frac{1}{2^{4n}}$ sugarú, $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right) = a_n$ középpontú K_n körök sorozata. Legyen

$$F(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \eta \notin \sum_n K_n, \\ \frac{1}{2^{4n+1}} \sin(2^{8n}\pi\varrho_n) & \text{ha} \quad \eta \in K_n, \end{cases}$$

ahol ϱ_n az η pont a_n-től mért távolsága.

Akkor ${}^{a_n}_{\xi}V^{\pm}(F) = 1$ $(\xi = (0, 0))$; *minden* ζ pontra ${}^{\zeta}_{\xi}V^{+}(F) \leqq 1$; és ${}^{\zeta}_{\xi}V^{+}(F)$, ${}^{\zeta}_{\xi}V^{-}(F)$, ${}^{\zeta}_{\xi}V(F)$ mint ζ függvényei nem folytonosak a $\zeta = \xi = (0, 0)$ helyen.

Bebizonyítjuk, hogy ha $V(F) < +\infty$, akkor ilyen eset nem fordulhat elő.

37. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a szokásos J tartományon értelmezett, folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $F(\eta)$ lineáris variációja korlátos: $V(F) < +\infty$. Akkor ${}^{\eta}_{\xi}V^{b\pm}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{h\pm}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{b}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{h}(F)$, ${}^{\eta}_{\xi}V^{\pm}(F)$ és ${}^{\xi}_{\eta}V(F)$ az η pontnak folytonos függvényei.*

BIZONYÍTÁS. Minthogy $V(F) < +\infty$ és $V(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_F(t)dt < +\infty$, a $\Phi_F(t)$ függvény t szerint integrálható és az

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi_F(t)dt$$

függvény abszolút folytonos. Az abszolút folytonos függvény definíciója szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|t_2 - t_1| < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi_F(t)dt < \varepsilon.$$

Most legyen a $\theta(\varepsilon) > 0$ szám olyan, hogy az $F(\eta)$ függvényre $|\eta_2, \eta_1| < \theta(\varepsilon)$ esetén fennáll $|F(\eta_2) - F(\eta_1)| < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$. Legyenek a, b a J tartomány tetszés szerinti pontjai, amelyekre $\varrho(a, b) < \theta(\varepsilon)$. Akkor ${}^{a}_{\xi}V^{\cdot\cdot} = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{a}_{\xi}\Phi^{\cdot\cdot}(t)dt$ és ${}^{a}_{\xi}V^{\cdot\cdot} = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{b}_{\xi}\Phi^{\cdot\cdot}(t)dt$; minden a ξ, a pontokat elválasztó, de a ξ, b pontokat nem elválasztó komponens elválasztja a-t és b-t, és ugyanez vonatkozik a ξ, b pontokat elválasztó, de ξ-t és a-t nem elválasztó komponensekre. De az a, b pontokat elválasztó komponensek mindnyájan $F(a) - \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$ és $F(a) + \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$ közötti nívókhoz tartoznak és így a t változónak egy $\delta(\varepsilon)$ hosszúságú intervallumához tartoznak. De akkor a multiplicitás függvénynek

az összes ilyen komponenseken vett integrálja nem haladja meg az ε értéket, következésképpen $|{}^a_\xi V^{\cdot\cdot}(F) - {}^b_\xi V^{\cdot\cdot}(F)| < \varepsilon$, ugyanis minden más komponens egyszerre választja el vagy nem választja el ξ-t a-tól és ξ-t b-től, és ezért egyszerre járul vagy nem járul hozzá a ${}^a_\xi\Phi_{\ddot{F}}(t)$ és a ${}^b_\xi\Phi_{\ddot{F}}(t)$ multiplicitás függvényhez.

Tehát $\varrho(a, b) < \theta(\varepsilon)$ fennállásából következik $|{}^a_\xi V^{\cdot\cdot}(F) - {}^b_\xi V^{\cdot\cdot}(F)| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy az összes variációk valóban folytonosak.

Most megmutatjuk, hogy az $F(\eta)$ függvény ξ-től ζ-ig vett pozitív és negatív variációja monoton növekvő függvény (a ξ pontra nézve). Ehhez szükségünk lesz a következő nyilvánvaló segédtételre.

38. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a J tartományon értelmezett folytonos függvény, $\xi \in J$ tetszés szerinti pont és K valamely nívóhalmaz tetszés szerinti komponense. A ${}^\lambda_\xi V^{b\pm}(F)$, ${}^\lambda_\xi V^{h\pm}(F)$ variációk mint a λ pont függvényei állandók a K halmazon.*

39. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos J tartományon és legyen $V(F) < +\infty$. Akkor bármely $\xi \in J$ pontra a $\varphi(\eta) = {}^\eta_\xi V^+(F)$, $\psi(\eta) = {}^\eta_\xi V^-(F)$ függvények monoton növekednek (ξ-re vonatkozóan).*

BIZONYÍTÁS. A $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ függvények a 37. segédtétel értelmében folytonosak. Legyen $\tilde{K} \not\ni \xi$ a $\varphi(\eta)$ függvény t nívójának valamely reguláris komponense, továbbá $J_1 \ni \xi$ és J_2 azok a komponensek, amelyekre $\tilde{K}$ felosztja J-t. Legyen $\zeta \in J_2$. Megmutatjuk, hogy $\varphi(\zeta) \geqq t$. Az $F(\eta)$ függvény nívóhalmazainak a ξ, ζ pontokat elválasztó komponensei egyesítve egy D kontinuumot alkotnak (az l_ξ, l_ζ pontokat összekötő minimális $\sigma \subset T_F$ egyszerű ív inverz képét). Fennáll $D \supset \xi + \zeta$, ezért $\tilde{K} \cap D \neq 0$. Legyen $a \in \tilde{K} \cap D$. Akkor az $F(\eta)$ függvény $K \ni a$ nívóhalmaz-komponensén a $\varphi(\eta)$ függvény állandó és $\varphi(a) = t$. Minthogy $\tilde{K}$ elválasztja ξ-t és ζ-t, ebből, tekintettel a 19. tételre, következik, hogy $\varphi(\zeta) \geqq \varphi(a) = t$. Legyen továbbá $\varkappa \in J_1 \cap D$. Legyen $K \ni \varkappa$ az $F(\eta)$ függvény nívóhalmaz-komponense; K elválasztja a ξ és az $a \in \tilde{K} \cap D$ pontot. Akkor K nem metszi a $\tilde{K}$ komponenst, mert különben a 38. segédtétel szerint $K \subset \tilde{K}$ lenne. Következésképpen K elválasztja a ξ pontot és a $\tilde{K}$ komponenst, és a fentebb bizonyítottak értelmében $\varphi(\varkappa) \leqq \varphi(a) = t$. A bizonyítottakból következik, hogy az l_ξ, l_ζ pontokat összekötő $\sigma \subset T_\varphi$ egyszerű íven, ahol $\zeta \in J_2$, a $\varphi^*(l)$ függvény monoton növekszik l_ξ-re vonatkozóan. Minthogy a ζ pont tetszés szerinti, a 7. tétel alapján ez azt jelenti, hogy $\varphi(\eta)$ a ξ pontra nézve monoton növekedő függvény.

A $\psi(\eta)$ függvényre a bizonyítás analóg módon történik.

40. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ korlátos lineáris variációjú folytonos függvény. Legyen ξ és ζ két tetszés szerinti pont. Akkor*

$$F(\zeta) - F(\xi) = {}^\zeta_\xi V^+(F) - {}^\zeta_\xi V^-(F).$$

BIZONYÍTÁS. Valóban, legyen T_F az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája, l_ξ és l_ζ a T_F fa azon pontjai, amelyek a ξ, ill. ζ pontot tartalmazó komponenseknek felelnek meg, σ pedig az l_ξ, l_ζ pontokat összekötő minimális egyszerű ív T_F-ben. Legyen $F^*(l)$ az $F(\eta)$-nak megfelelő függvény T_F-en. Tekintsük az $F^*(l)$ függvényt csak a σ íven. E fejezet 2. §-ának eredményei értelmében $V^\pm(F^*) = {}^\zeta_\xi V^\pm(F)$. De $F(\zeta) - F(\xi) = F^*(l_\zeta) - F^*(l_\xi)$. Minthogy $F^*(l)$ korlátos variációjú függvény a σ egyszerű íven,

fennáll:

$$F^*(l_\zeta) - F^*(l_\xi) = V^+(F^*) - V^-(F^*),$$

ennélfogva $F(\zeta) - F(\xi) = {}_\xi^\zeta V^+(F) - {}_\xi^\zeta V^-(F)$, és ezt kellett bebizonyítani.

21. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a J tartományon értelmezett, korlátos lineáris variációjú, folytonos függvény, és $\xi \in J$ tetszés szerinti pont. Akkor:*

1. *Az $F(\eta)$ függvény előállítható két, a ξ pontra nézve monoton növekedő, folytonos függvény különbségeként.*

2. *Ilyen függvényeket szolgáltat a ξ-től η-ig vett pozitív és negatív variáció mint a változó η pont függvényei: $F(\xi) + {}_\xi^\eta V^+(F)$ és ${}_\xi^\eta V^-(F)$.*

3. *Az $F(\eta) = F(\xi) + {}_\xi^\eta V^+(F) - {}_\xi^\eta V^-(F)$ előállítás minimális, vagyis ha $\varphi_1(\eta)$ és $\varphi_2(\eta)$ két, ξ-re nézve monoton növekedő, folytonos függvény, $F(\eta) = \varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)$ és $\varphi_1(\xi) = F(\xi)$, akkor minden $\eta \in J$ pontban $\varphi_1(\eta) \geqq F(\xi) + {}_\xi^\eta V^+(F)$ és $\varphi_2(\eta) \geqq {}_\xi^\eta V^-(F)$.*

BIZONYÍTÁS. Az 1. és 2. pontot és az $F(\eta) = F(\xi) + {}_\xi^\eta V^+(F) - {}_\xi^\eta V^-(F)$ egyenlőséget már bebizonyítottuk a 37., 39. és 40. segédtételben. Hátra van még a 3. állítás bebizonyítása. Felhasználjuk a 19. tétel eredményét. Legyenek $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ folytonos és a ξ pontra nézve monoton növekedő függvények, $F(\eta) = \varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)$, $\varphi_1(\xi) = F(\xi)$. Legyen $\xi = a_0, \ldots, a_n = \eta$ valamely $\xi - \eta$-lánc a 20. definícióban megadott értelemben, és az előre megadott $\varepsilon > 0$ számra teljesüljön

$${}_\xi^\eta V^\pm(F) \leqq \sum_{s=1}^{n} |F(a_s) - F(a_{s-1})|^\pm + \varepsilon.$$

Legyen $K_s \ni a_s$ az $F(\eta)$ függvény megfelelő nívóhalmaz-komponense. Minthogy K_s zárt halmaz és $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ folytonos függvények, K_s-nek van olyan b_s pontja, amelyben a $\varphi_1(\eta)$ függvény K_s-ben minimális értéket vesz fel. Mivel $\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta) = F(\eta)$ és $F(\eta)$ a K_s halmazon állandó, a b_s pontban $\varphi_2(s)$ is felveszi K_s-beli minimális értékét. Helyettesítsük az $\{a_s\}$ láncot a $\{b_s\}$ lánccal. Megjegyezzük, hogy ennek során lehetséges a $b_0 = a_0 = \xi$ választás. Valóban, ellenkező esetben $\varphi_1(b_0) < \varphi_1(a_0)$ és ugyanakkor $\varphi_2(b_0) < \varphi_2(a_0) = \varphi_2(\xi) = 0$ lenne. De $\varphi_2(\eta)$ a feltevés szerint ξ-re nézve monoton növekedő függvény, következésképpen a ξ pontban a $\varphi_2(\eta)$ függvény (a 8. tételt követő megjegyzés értelmében) minimális, tehát $\varphi_2(b_0) < 0$ nem lehetséges és feltehetjük, hogy $\varphi_2(b_0) = \varphi_2(a_0) = \varphi_2(\xi)$.

Most bebizonyítjuk a $\varphi_1(b_{s+1}) - \varphi_1(b_s) \geqq 0$, $\varphi_2(b_{s+1}) - \varphi_2(b_s) \geqq 0$ egyenlőtlenségeket. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben az egyik egyenlőtlenség nem érvényes. Meghatározottság kedvéért legyen $\varphi_1(b_{s+1}) < \varphi_1(b_s)$. A K_s komponens elválasztja a ξ, b_{s+1} pontokat. Továbbá a K_s halmazon mindenütt $\varphi_1(\eta) \geqq \varphi_1(b_s)$. Ezek szerint a ξ, b_{s+1} pontokat elválasztja az az $\overline{M}_{\varphi_1(b_s)}$ halmaz, amely a $\varphi_1(\eta) \geqq \varphi_1(b_s)$ tulajdonságú pontokból áll. De akkor az $\underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$ halmaz, amely a $\varphi_1(\eta) \leqq \varphi_1(b_{s+1})$ egyenlőtlenséget kielégítő összes pontokból áll, nem összefüggő, mert $\xi \in \underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$, $b_{s+1} \in \underline{M}_{\varphi_1(b_s)}$, és az $\underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$ halmazt nem metsző $\overline{M}_{\varphi_1(b_s)}$ halmaz elválasztja ξ-t és b_{s+1}-et. Az $\underline{M}_{\varphi_1(b_{s+1})}$ halmaz össze nem függő volta a 8. tétel értelmében ellentmond $\varphi_1(\eta)$ monotonitásának, és így a $\varphi_1(b_{s+1}) \geqq \varphi_1(b_s)$ egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

A második egyenlőtlenség bizonyítása analóg módon történik.

Fennáll

$$F(b_{s+1})-F(b_s)=[\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s)]-[\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s)].$$

A bizonyítottak szerint a jobb oldalon álló szögletes zárójelek mindegyike *nem-negatív*. Tehát ha $F(b_{s+1})-F(b_s)\geqq 0$, akkor

$$\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s)\geqq F(b_{s+1})-F(b_s).$$

Ha pedig

$$F(b_{s+1})-F(b_s)\leqq 0,$$

akkor

$$\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s)\geqq -\{F(b_{s+1})-F(b_s)\}.$$

Tekintetbe véve még a

$$\varphi_1(b_{s+1})\geqq\varphi_1(b_s),\quad \varphi_2(b_{s+1})\geqq\varphi_2(b_s)$$

egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy mindig fennáll

$$\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s)\geqq|F(b_{s+1})-F(b_s)|^+$$

és

$$\varphi_2(b_{s+1})-\varphi_2(b_s)\geqq|F(b_{s+1})-F(b_s)|^-.$$

Ily módon

$$\varphi_1(\eta)\geqq\varphi_1(b_n)=\varphi_1(\xi)+\sum_{s=1}^{n-1}[\varphi_1(b_{s+1})-\varphi_1(b_s)]\geqq$$

$$\geqq F(\xi)+\sum_{s=1}^{n-1}|F(b_{s+1})-F(b_s)|^+\geqq F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F)+\varepsilon.$$

Minthogy ε tetszőlegesen kicsi, innen következik, hogy

$$\varphi_1(\eta)\geqq F(\xi)+{}_\xi^\eta V^+(F).$$

Analóg módon találjuk:

$$\varphi_2(\eta)\geqq{}_\xi^\eta V^-(F),$$

és ezzel a 21. tételt teljesen bebizonyítottuk.

4. §. A lineáris variáció mint funkcionál tulajdonságai

Ebben a paragrafusban függvények tartományon (nem pedig ponttól pontig) vett variációjának tulajdonságait vizsgáljuk. Mindenekelőtt definícióink értelmében *mindegyik variáció* a J tartományon folytonos függvényeken értelmezett *nem-negatív funkcionál.*

Most vizsgáljuk meg, hogyan viselkednek a variációk az értelmezési tartomány önmagára való homeomorf leképezése során. Ez pontosabban a következőt jelenti.

Legyen J az értelmezési tartomány és τ a J tartomány önmagára való homeomorf leképezése, amely az $\eta\in J$ pontot a $\tau(\eta)$ pontba viszi át. Legyen $F(\eta)$ a J tartomány pontjaiban megadott függvény. Vezessük be az $\tilde{F}[\tau(\eta)]=F(\eta)$ jelölést. Ily módon az értelmezési tartománnyal együtt mintegy elmozdítottuk a függvény grafikonját is.

A maximumot, félmaximumot, minimumot, félminimumot szolgáltató és a koncentrikus szingularitású komponensek definíciója invariáns a J tartomány önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben. Valamely kontinuumnak az a tulajdonsága, hogy két pontot elválaszt egymástól, illetve hogy a síkot szétválasztja vagy nem választja szét (abban az esetben, amikor J négyzet), szintén invariáns J önmagára való homeomorf leképezésével szemben. Ennélfogva a szétválasztó komponenseknek a 2. tételben megadott osztályozása *invariáns a J tartomány önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben.*

Ennek során ha a homeomorf leképezés előtt az osztályozás a ξ pontra vonatkozott, akkor a τ homeomorfizmus után az osztályozást a $\tau(\xi)$ pontra vonatkozóan kell megadni. Speciálisan, a nívóhalmaz-komponensek osztályozása és ezzel együtt a variációk definíciója invariáns J azon homeomorf leképezéseivel szemben, amelyek a ξ pontot a helyén hagyják. Nézzük meg azonban, *nem függetlenek-e* egyes variációk *a ξ ponttól.* Gömbfelület esetében csak a teljes variáció ilyen. Négyzet esetében viszont a helyzet kissé bonyolultabb. Mindenekelőtt ilyen a $V^b(F)$ *belső és a $V^h(F)$ határvariáció,* és természetesen összegük, a $V(F)$ *lineáris variáció.*

A $V_\xi^{h\pm}(F)$ variációk a ξ pont semmilyen megválasztása esetén sem invariánsak J önmagára való homeomorf leképezéseivel szemben, ha a leképezés a ξ pontot nem hagyja a helyén. Másképpen áll a dolog a *belső* pozitív és negatív variációval. Ebben az esetben, érthető módon, a ξ pont *tetszés szerinti* megválasztása mellett a $V^{b\pm}(F)$ variációk *függnek ξ-től.* Ha azonban ξ a határ valamely pontja, akkor a J értelmezési tartomány önmagára való τ homeomorfizmusánál a ξ pont $\tau(\xi)$ képe ismét határpont. Meg fogjuk mutatni, hogy a $V_\xi^{b\pm}(F)$ *mennyiségek, ha a határon fekvő ξ pontokra szorítkozunk, nem függnek attól, hogy a határnak éppen melyik pontját választottuk ξ-nek.* Ily módon (abban az esetben, amikor J négyzet) *nem függ a ξ ponttól a teljes határ-variáció, továbbá a* csak határpontokra vonatkozóan tekintett *pozitív és negatív belső variáció.* Természetes, hogy ezeknek a lineáris kombinációi is rendelkeznek az említett tulajdonsággal. Tehát a következő segédtételt kell bebizonyítanunk:

41. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a J négyzeten értelmezett folytonos függvény és ξ_1, ξ_2 a J négyzet határán fekvő pontok. Akkor*

$$V_{\xi_1}^{b\pm}(F) = V_{\xi_2}^{b\pm}(F).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen K az E_t nívóhalmaznak a J négyzet határát nem metsző, reguláris komponense. A K komponens J-t két tartományra, J_1-re és J_2-re osztja. Nyilvánvaló, hogy ξ_1 és ξ_2 ugyanahhoz a tartományhoz tartozik, például J_1-hez. De akkor K egyszerre növekedési (fogyási) komponens ξ_1-re és ξ_2-re nézve, tehát ha K nem növekedési (fogyási) komponens a ξ_1, ξ_2 pontok egyikére nézve, akkor a másikra nézve sem növekedési (ill. fogyási) komponens.

Majdnem minden nívónak azok a komponensei, amelyek a síkot szétválasztják, nem metszik J határát. Ennélfogva majdnem minden t-re $\Phi_{\xi_1}^{b\pm}(t) = \Phi_{\xi_2}^{b\pm}(t)$ és így

$$V_{\xi_1}^{b\pm}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\xi_1}^{b\pm}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\xi_2}^{b\pm}(t)dt = V_{\xi_2}^{b\pm}(F).$$

A segédtételt bebizonyítottuk.

Tehát az összes variációk invariánsak J önmagára való olyan homeomorf leképezéseivel szemben, amelyek a ξ pontot a helyén hagyják, a V^h, V^b, V variációk pedig (és $V_\xi^{b\pm}$ is, ha ξ határpont) invariánsak J önmagára való *összes* homeomorf leképezéseivel szemben.

Megjegyezzük, hogy az általunk bevezetett variációk, hasonlóan az egyváltozós függvények esetéhez, nem lineáris funkcionálok. Az egyváltozós függvények esetében azonban az F_1, F_2 függvények összeadásakor variációik összeadódnak, feltéve, hogy F_1 és F_2 *különböző* szakaszokon változtak, vagyis ha az $[a, b]$ értelmezési intervallum előállítható két szakasz $[a, c]+[d, b] = [a, b]$ összegeként úgy, hogy az F_1 függvény állandó az $[a, c]$ szakaszon, F_2 pedig a $[d, b]$ szakaszon. Analóg módon legyen $J = J_1+J_2$, ahol J_1 és J_2 két zárt tartomány; legyenek $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ folytonos függvények, amelyekre

$$F_1(\eta)=\text{const}_1 \quad \text{ha} \quad \eta\in J_2$$

és

$$F_2(\eta)=\text{const}_2 \quad \text{ha} \quad \eta\in J_1.$$

Akkor az $F(\eta) = F_1(\eta)+F_2(\eta)$ függvény variációja *egyenlő F_1 és F_2 variációjának összegével.* Itt variáción bármelyik variációt értjük — a pozitív, negatív vagy teljes, határ- vagy belső variációt. Ennek a ténynek a bizonyítása nyilvánvaló, ezért a bizonyítást elhagyjuk.

Most megmutatjuk, hogy a $V_\xi^{b\pm}$, $V_\xi^{h\pm}$ variációk és a belőlük képezett V^b, V^h, V^+, V^-, V összegek mindegyike mint funkcionál *alulról félig folytonos az egyenletes konvergenciára nézve,* vagyis érvényes a következő tétel.

22. TÉTEL *(a V, $V^{b\pm}$, $V^{h\pm}$ variációk alulról félig folytonos voltáról). Legyen $\{F_s(\eta)\}$ folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens sorozat és $F(\eta)=\lim_s F_s(\eta)$. Akkor tetszés szerinti $\xi\in J$ pontra*

$$V_\xi^{\cdot\cdot}(F)\leqq \varliminf_s V_\xi^{\cdot\cdot}(F_s),$$

ahol a két pont helyébe a

$$b+,\ b-,\ h+,\ h-$$

kombinációk bármelyike írható. Továbbá fennállnak a

$$V^b(F)\leqq \varliminf_s V^b(F_s), \quad V^h(F)\leqq \varliminf_s V^h(F_s),$$

$$V_\xi^{\pm}(F)\leqq \varliminf_s V_\xi^{\pm}(F_s), \quad V(F)\leqq \varliminf_s V(F_s)$$

egyenlőtlenségek.

Mielőtt a 22. tételt bebizonyítanánk, előrebocsátunk egy segédtételt.

42. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos J tartományon, ξ tetszés szerinti pont és T a tipikus nívók halmaza $(F(\xi)\notin T)$. Legyen K a t tipikus nívó olyan reguláris komponense, amely nem fogyási (ill. nem növekedési) komponens. Legyen $J_1\ni\xi$ és J_2 az a két tartomány, amelyre K felosztja J-t. Legyen U a K komponens bármilyen kis környezete. Akkor vagy találhatók olyan $a\in U\cap J_1$, $b\in U\cap J_2$ pontok, hogy $F(a)<t$ és $F(b)>t$ (illetve $F(a)>t$ és $F(b)<t$), vagy K helyettesíthető ugyan-*

annak a nívónak valamely, U-ban fekvő K′ komponensével, amelyre az említett körülmény már fennáll, azaz találhatók $a \in U \cap J_1'$ $b \in U \cap J_2'$ *pontok, amelyekben* $F(a) < t$ *és* $F(b) > t$ *(ill.* $F(a) > t$ *és* $F(b) < t$*); itt* $J_1' \ni \xi$ *és* J_2' *azokat a tartományokat jelenti, amelyekre K′ osztja fel J-t.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\zeta \in J_2$, T_F az egydimenziós fa és σ egyszerű ív T_F-ben az l_ξ, l_ζ végpontokkal. Tegyük fel, hogy a K komponens nem fogyási komponens és $\tau_F(K) = l_0$. Akkor l_0 az $F^*(l)$ függvénynek nem fogyási pontja a σ íven l_ξ-re vonatkozóan. Legyen $\tilde{U}(l_0)$ az l_0 pont azon környezete, amelyet az $U(K)$ környezet generál. Ha az $l_\xi l$ ív és az $\tilde{U}(l_0)$ halmaz metszete tartalmaz olyan l' pontot, amelyre $F^*(l') < t$, akkor az $l'l_\zeta$ ív és $\tilde{U}(l_0)$ metszetében található olyan l'' pont, ahol $F^*(l'') > t$ (mert különben l_0 maximumhely lenne a σ íven) és az $l'l''$ íven a t nívónak van olyan $\tilde{l}$ pontja, amelynek a $\tau_F^{-1}(\tilde{l})$ inverz képe eleget tesz a segédtétel követelményeinek. Most legyen $l_\xi l_0$ és $\tilde{U}(l_0)$ metszetének minden pontjában $F^*(l) \geqq t$. Akkor ebben a környezetben mindenütt $F^*(l) > t$, mert különben az $\tilde{l} \in \breve{l_\xi l_0} \cap \tilde{U}(l_0)$ pontnak, ahol $F(\tilde{l}) = t$, kvázi-extrémális $\tau_F^{-1}(\tilde{l})$ komponens felelne meg.

Analóg módon, l_ξ és l_ζ helyét felcserélve azt találjuk, hogy vagy az $\breve{l_\zeta l_0}$ ívnek az $\tilde{U}(l_0)$ környezettel való metszete tartalmaz olyan l'' pontot, amelyre $\tau_F^{-1}(l'')$ a keresett komponens, vagy az $\breve{l_\zeta l_0} \cap \tilde{U}(l_0)$ metszeten mindenütt $F^*(l) < t$.

Tehát ha $\tilde{U}(l_0) \cap \sigma$ nem tartalmaz nekünk szükséges l'' pontot, akkor l_0 fogyási pont.

Ha K nem növekedési komponens, akkor a bizonyítást a $-F(\eta)$ függvényre való áttéréssel nyerjük. A segédtételt bebizonyítottuk.

A 22. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Legyen T az $F(\eta)$ függvény tipikus nívóinak halmaza és T_s az $F_s(\eta)$ függvény tipikus nívóinak halmaza. Legyen $T^* = T \cap \prod_s T_s$.

Minthogy a T, T_s $(s = 1, 2, \ldots)$ halmazok mindegyikének kiegészítő halmaza legfeljebb megszámlálható, T^* kiegészítő halmaza szintén legfeljebb megszámlálható; itt CT_s-hez és CT-hez számítjuk az $F_s(\xi)$, ill. $F(\xi)$ értéket is.

Most legyen $t \in T^*$. Bebizonyítjuk, hogy ha $\Phi_{F,\xi}^{b+}(t) \geqq N$, akkor $\varliminf_s \Phi_{F_s,\xi}^{b+}(t) \geqq N$, és ha $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t) \geqq N$, akkor $\varliminf_s \Phi_{F_s,\xi}^{h+}(t) \geqq N$ is fennáll, ahol $\Phi_{F,\xi}^{b+}$ és $\Phi_{F_s,\xi}^{b+}$ (hasonlóan $\Phi_{F,\xi}^{h+}$ és $\Phi_{F_s,\xi}^{h+}$) a megfelelő multiplicitás függvényeket jelenti az F, ill. F_s függvényekre vonatkozóan. Tehát legyen $\Phi_{F,\xi}^{b+}(t) \geqq N$ (illetve $\Phi_{F,\xi}^{h+}(t) \geqq N$). Legyenek $K_1, \ldots, K_N$ az F függvény t tipikus nívójának olyan reguláris komponensei, amelyek nem fogyási komponensek és amelyek szétválasztják (ill. nem választják szét) a síkot. Akkor a 11. segédtétel értelmében található olyan $\delta > 0$, hogy az $M = E_{t+\delta} + E_{t-\delta}$ halmaz páronkint elválasztja a K_s, K_m $(s, m = 1, 2, \ldots, N)$ komponenseket. Jelölje $J_1^{(s)}$ és $J_2^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ azokat a tartományokat, amelyekre a K_s komponens felosztja J-t, mégpedig olyan sorrendben, hogy $\xi \in J_1^{(s)}$. Legyen U_s a K_s komponens olyan kicsiny környezete, hogy U_s-ben $t - \frac{\delta}{2} \leqq F(\eta) \leqq t + \frac{\delta}{2}$. A 42. segédtétel szerint a K_s komponensek helyettesíthetők ugyanannak a nívónak olyan K_s' komponenseivel (lehet, hogy

$K_s' = K_s$), amelyek a megfelelő U_s-ben fekszenek és amelyekhez találhatók szintén U^s-ben fekvő a_s, b_s pontok úgy, hogy

1. $F(a_s) < t < F(b_s)$;
2. K_s' elválasztja az a_s, ξ pontokat b_s-től.

Legyen a_s, b_s és K_s' rögzített ($s = 1, 2, \ldots, N$). Ha a K_s komponensek nem metszették J határát, akkor az U_s környezeteket választhatjuk olyan kicsiknek, hogy U_s és következésképpen $K_s' \subset U_s$ szintén ne messe J határát. Ha pedig a K_s komponensek nem választották szét a síkot, akkor a K_s' komponensek, amelyek elég kis U_s környezetek esetén elválasztják egymástól a K_s és a CU_s halmazt (feltesszük, hogy U_s a J tartomány határának legalább egy pontját nem tartalmazza; ez mindig elérhető, mert J határa nem tartozik teljesen a síkot szét nem választó K_s komponenshez), feltétlenül metszik J határát, és minthogy t tipikus, nem választják szét a síkot.

Az $F_n(\eta)$ függvények egyenletesen tartanak $F(\eta)$-hoz, tehát valamely n indextől kezdve $F_n(a_s) < t$, $F_n(b_s) > t$. Ennélfogva valamely n_0 indextől kezdve az $F_n(\eta)$ függvények $E_t^{(n)}$ nívóhalmazai ($n \geqq n_0$) elválasztják az a_s, b_s ($s = 1, 2, \ldots, N$) pontokat. Ebből következik, hogy $E_t^{(n)}$ bizonyos $K_1^{(n)}, \ldots, K_N^{(n)}$ komponensei rendre elválasztják az a_1 és $b_1, \ldots, a_N$ és b_N pontot. A $K_p^{(n)}$, $K_m^{(n)}$ komponenseknek nem kell eleve különbözniük. Meg fogjuk azonban mutatni, hogy valamely n_0 indextől kezdve az összes $K_s^{(n)}$ komponensek különbözők ($s = 1, 2, \ldots, N$). Valóban, a t nívó a_s, b_s pontokat elválasztó $K_s^{(n)}$ komponense szükségképp metszi az U_s halmazt. Tegyük fel, hogy $K_s^{(n)} = K_m^{(n)}$ ($s \neq m$) az indexek valamely végtelen n_k sorozatára. Az $\{n_k\}$ részsorozatot választhatjuk úgy, hogy $\underset{k}{\mathrm{lt}}\, K_s^{(n_k)} \neq 0$. Legyen $K = \overline{\underset{k}{\mathrm{lt}}}\, K_s^{(n_k)}$. A K halmaz kontinuum, és minthogy $\eta \in K_s^{(n)}$ esetén $F_n(\eta) = t$ és az $F_n(\eta)$ függvények egyenletesen tartanak az $F(\eta)$ függvényhez, $F(\eta)$ a K kontinuumon mindenütt egyenlő t-vel. Nyilvánvaló, hogy K metszi az U_s és az U_m halmazt is. Ha azonban az U_s, U_m halmazokat úgy választottuk, amint fentebb mondtuk, akkor $F(\eta)$ az U_s, U_m halmazokon legfeljebb a $\frac{\delta}{2}$ értékkel különbözik t-től. Ily módon az $R = K + \overline{U}_s + \overline{U}_m$ kontinuum metszi K_s'-t is, K_m'-t is (sőt, tartalmazza őket), és az R kontinuumon az $F(\eta)$ függvény t-től való eltérése sehol sem haladja meg a $\frac{\delta}{2}$ értéket. Ebből következik, hogy az $M = E_{t+\delta} + E_{t-\delta}$ halmaz nem választja el a K_s', K_m' komponenseket.

Tehát megmutattuk, hogy valamilyen n-től kezdve a $K_s^{(n)}$ komponensek mind különbözők ($s = 1, 2, \ldots, N$). Legyen $\widetilde{K}_s^{(n)}$ az $F_n(\eta)$ függvény $E_t^{(n)}$ nívóhalmazának az a_s, b_s pontokat elválasztó komponensei közül a b_s-hez legközelebbi. Meg fogjuk mutatni, hogy elég nagy n indexekre mindegyik $\widetilde{K}_s^{(n)}$ nem fogyási komponens.

Mindenekelőtt mutassuk meg, hogy $\widetilde{K}_s^{(n)}$ nem választja el a ξ, a_s pontokat, ha n elég nagy. Végezzük a bizonyítást indirekt módon. Legyen $\{\widetilde{K}_s^{(n_k)}\}$ olyan komponensek sorozata, amelyek elválasztják a ξ, a_s pontokat.

Feltehetjük, hogy e sorozat topológiai limes inferiora nem üres és a $K = \overline{\underset{k}{\mathrm{lt}}}\, \widetilde{K}_s^{(n_k)}$ halmaz kontinuum. Akkor a t nívó $\widetilde{K} \supset K$ komponense szintén elválasztja a ξ, a_s pontokat. Azonkívül $\widetilde{K}$ elválasztja az a_s, b_s pontokat, mert a $\widetilde{K}_s^{(n_k)}$ halmazok ezt teszik. A t nívó két, az a_s, b_s pontokat elválasztó $\widetilde{K}$, K_s' komponense közül valamelyik

közelebb fekszik b_s-hez. Ha $\widetilde{K}$ elválasztja a ξ pontot a_s-től és az a_s pontot b_s-től, akkor $\widetilde{K}$ a ξ pontot nem választja el b_s-től (ugyanis t tipikus volta miatt $\widetilde{K}$ reguláris). Ekkor K_s' közelebb van b_s-hez, mint $\widetilde{K}$, mert K_s' *elválasztja* a ξ, b_s pontokat.

Megmutatjuk, hogy K_s' kvázi-extrémális komponens.

Legyen R_{n_k} olyan kontinuum, amely a $\widetilde{K}_s^{(n_k)}$ komponenst összeköti a b_s ponttal és nem metszi az $E_t^{(n_k)} - \widetilde{K}_s^{(n_k)}$ halmazt. Az F tétel alapján ilyen kontinuum létezik, ugyanis $\widetilde{K}_s^{(n_k)}$ az $E_t^{(n_k)}$ nívóhalmaz a_s, b_s pontokat elválasztó komponensei közül a b_s-hez legközelebbi. Feltehetjük, hogy az $\{n_k\}$ részsorozat olyan ritka, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_k\, R_{n_k} \neq 0$ és így az $R = \overline{\mathrm{lt}}_k\, R_{n_k}$ halmaz kontinuum. Nyilvánvaló, hogy $R \ni b_s$ és $R \cap \widetilde{K} \neq 0$. Továbbá egyik $F_{n_k}(\eta)$ függvény *sem kisebb* a megfelelő R_{n_k} halmazon, *mint* t. De akkor $F(\eta)$ az R halmazon szintén nem kisebb t-nél. Minthogy K_s' elválasztja a b_s pontot a $\widetilde{K}$ komponenstől, K_s' nyilván kvázi-extrémális komponens: az R halmazon mindenütt $F(\eta) \geqq t$, és a K_s' által leválasztott tartományban éppúgy, mint a K_s' és $\widetilde{K}$ által határolt tartományban találhatók R-nek olyan pontjai, amelyekben $F(\eta) > t$ (az egyik esetben $F(b_s) > t$, a másik esetben pedig ez azért igaz, mert különben a K_s', $\widetilde{K}$ komponensek R-nek a köztük levő tartományban fekvő részével együtt *egyetlen* komponenst adnának).

Tehát elég nagy n indexekre az $F_n(\eta)$ függvény t nívójának az a_s, b_s pontokat elválasztó komponensei közül a b_s-hez legközelebb fekvő $\widetilde{K}_s^{(n)}$ komponens elválasztja a ξ, b_s pontokat. A 10. segédtétel értelmében ezek a komponensek nem fogyási komponensek. Korábban bebizonyítottuk, hogy valamely n_0-tól kezdve az összes $\widetilde{K}_s^{(n)}$ halmazok különbözők. Ebből következik, hogy valamely n_1-től kezdve $\Phi_{F_n,\xi}^{b+}(t) \geqq N$, illetve $\Phi_{F_n,\xi}^{h+}(t) \geqq N$. Minthogy t tetszés szerinti tipikus nívó, ebből következik, hogy majdnem minden t-re (sőt, legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel mindegyikre) fennáll

$$\underline{\lim}_s\, \Phi_{F_s,\xi}^{b+}(t) \geqq \Phi_{F,\xi}^{b+}(t), \quad \underline{\lim}_s\, \Phi_{F_s,\xi}^{h+}(t) \geqq \Phi_{F,\xi}^{h+}(t).$$

A valós függvénytan ismert tétele szerint ebből következik:

$$V_\xi^{b+}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F,\xi}^{b+}(t)\,dt \leqq \underline{\lim}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F_s,\xi}^{b+}(t)\,dt = \underline{\lim}_s\, V_\xi^{b+}(F_s)$$

és

$$V_\xi^{h+}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F,\xi}^{h+}(t)\,dt \leqq \underline{\lim}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{F_s,\xi}^{h+}(t)\,dt = \underline{\lim}_s\, V_\xi^{h+}(F_s).$$

Az F függvényről áttérve a $-F$ függvényre, könnyen adódik:

$$V_\xi^{b-}(F) \leqq \underline{\lim}_s\, V_\xi^{b-}(F_s)$$

és

$$V_\xi^{h-}(F) \leqq \underline{\lim}_s\, V_\xi^{h-}(F_s).$$

Végül a megfelelő egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk:

$$V^b(F) \leqq \varliminf_s V^b(F_s); \quad V^h(F) \leqq \varliminf_s V^h(F_s);$$

$$V_\xi^\pm(F) \leqq \varliminf_s V_\xi^\pm(F_s); \quad V(F) \leqq \varliminf_s V(F_s).$$

A 22. tételt bebizonyítottuk.

Teljesen analóg módon bizonyítható a következő.

23. TÉTEL. *Legyen* $\{F_s(\eta)\}$ *folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens sorozat és* $F(\eta) = \lim_s F_s(\eta)$.

Akkor bármely J-beli ξ, ζ *pontpárra*

$$\overset{\zeta}{\xi}V^{b\pm}(F) \leqq \varliminf_s V^{b\pm}(F_s); \quad \overset{\zeta}{\xi}V^{h\pm}(F) \leqq \varliminf_s \overset{\zeta}{\xi}V^{h\pm}(F_s);$$

$$\overset{\zeta}{\xi}V^b(F) \leqq \varliminf_s \overset{\zeta}{\xi}V^b(F_s); \quad \overset{\zeta}{\xi}V^h(F) \leqq \varliminf_s \overset{\zeta}{\xi}V^h(F_s);$$

$$\overset{\zeta}{\xi}V^\pm(F) \leqq \varliminf_s \overset{\zeta}{\xi}V^\pm(F_s); \quad \overset{\zeta}{\xi}V(F) \leqq \varliminf_s \overset{\zeta}{\xi}V(F_s).$$

Ezt a bizonyítást elhagyjuk.

Tehát megmutattuk, hogy a $V_\xi^{b\pm}$, $V_\xi^{h\pm}$, $V_\xi^\pm$, V^b, V^h és V variációk mind olyan funkcionálok, amelyek a négyzeten vagy gömbfelületen folytonos függvényekre vannak értelmezve (gömbfelület esetén a $V^{h\pm}$, V^h határ-variációk elesnek) és amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek:

1. $V(F) \geqq 0$.

2. Ha $J = J_1 + J_2$, ahol J_1, J_2 zárt tartományok, továbbá az $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ folytonos függvényekre

$$F_1(\eta) = C_1 \quad \text{ha} \quad \eta \in J_2,$$

$$F_2(\eta) = C_2 \quad \text{ha} \quad \eta \in J_1,$$

akkor $V(F_1 + F_2) = V(F_1) + V(F_2)$.

3. Ha $F(\eta) = \varliminf_s F_s(\eta)$, akkor $V(F) \leqq \varliminf_s V(F_s)$ *(felülről való félig folytonosság)*.

4. Ha τ a J tartomány önmagára való homeomorf leképezése, amely a ξ pontot a helyén hagyja, és $\widetilde{F}[\tau(\eta)] = F(\eta)$, akkor $V(\widetilde{F}) = V(F)$. A V^h, V^b, V variációkra, és abban az esetben, amikor a ξ pont J határához tartozik, a V_ξ^{b+}, V_ξ^{b-} variációkra is, teljesül az az erősebb 4* követelmény, amely abban különbözik 4-től, hogy a τ homeomorfizmustól nem kívánja meg, hogy a ξ pontot a helyén hagyja.

Fordította: Bognár János
a matematikai tudományok kandidátusa