

GÉPSZERKEZETEK INERCIÁLIS NEMLINEARITÁSA

ORDÓDY MÁRTON*

A dolgozat egy négycsuklós mechanizmus lengéstani vizsgálatával foglalkozik. Az általános tömeget lineáris függvénnyel közelíti; ezért a mozgásegyenletben nemlineáris kifejezések jelennek meg. A nemlinearitás mértékének jellemzésére egy ε változó bevezetését javasolja. Végül néhány példát mutat be, melyben a megoldást a Krülov—Bogoljubov-módszerrel állítja elő.

Gépek többségét merev tagokból álló kinematikai láncnak tekintik; e modelleket különböző gerjesztő, visszatérítő, csillapító stb. erőhatások érik. Az egyes szerkezetek kinetikai energiája általában

$$T = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2;$$

a q általános koordinátához tartozó általános tömeg tehát q -nak függvénye. Ha a vizsgált mozgás a $q = q_0$ egyensúlyi helyzet környezetében zajló kis amplitúdójú lengés, akkor az

$$m(q) = m(q_0) + \left. \frac{dm}{dq} \right|_{q_0} (q - q_0) + \dots$$

hatványsor helyett a mozgásegyenlet linearizálása érdekében szokás a sor első tagjával számolni, azaz az általános tömeget állandónak tekinteni. E dolgozat egy speciális esetben ennek a közelítésnek néhány következményére mutat rá.

Vizsgáljuk egy négycsuklós mechanizmussal modellezhető szerkezet lengéseit (1. ábra). A lengéseket a q szögelfordulás határozza meg.

A lengésamplitúdóról feltesszük, hogy az a $q_0 = 0$ egyensúlyi helyzet kis környezetében marad, és ezért $m(q)$ hatványsorát az

$$m(q) = m_0(1 + \varepsilon q)$$

lineáris kifejezéssel közelítjük ahol $m_0 = m(q_0)$ és

$$\varepsilon = \frac{1}{m_0} \left. \frac{dm(q)}{dq} \right|_{q_0}.$$

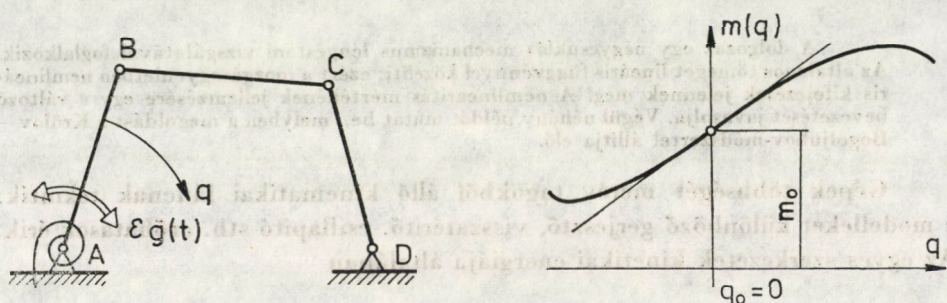
* Ordódy Márton, 1024 Budapest, Szilágyi E. fasor 13—15.

A mozgásegyenlet bal oldala tehát

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = m_0 \left[\ddot{q} + \varepsilon \left(q\ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^2 \right) \right].$$

Az általános tömeg változásából származik a kerek zárójelbe foglalt nemlineáris kifejezés, melyet ezért inerciális nemlinearitásnak neveztünk el.

Annak érdekében, hogy az inerciális nemlinearitást az egyéb nemlinearitást okozó hatásoktól külön vizsgálhassuk, feltettük, hogy az A csuklóban



1. ábra

lineáris visszatérítő, valamint kismértékű csillapító és gerjesztő erőpárok működnek. A mozgásegyenlet így

$$\ddot{q} + \omega^2 q = -\varepsilon \left[\delta \dot{q} + q\ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^2 - g(t) \right], \quad (1)$$

vagy a második deriváltat kiemelve

$$\ddot{q} + \omega^2 \frac{q}{1 + \varepsilon q} = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon q} \left[\delta \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^2 - g(t) \right]. \quad (2)$$

Ellensúlyok, lendítőkerekek alkalmazása miatt ε általában kicsi. Mivel $m(q)$ mindig pozitív, ezért az

$$\frac{1}{1 + \varepsilon q} \approx 1 - \varepsilon q + 2\varepsilon^2 q^2 + \dots \quad (3)$$

hatványsort már az első néhány tag is jól közelíti. Ezt felhasználva a mozgásegyenlet a

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \varepsilon f(q, \dot{q}, t, \varepsilon)$$

úgynevezett „standard” alakra vezethető vissza [1].

A megoldás kereshető tehát Krülov—Bogoljubov módszere alapján egy ε hatványai szerinti sor alakjában.

Mivel a mozgásegyenlet csak kevésbé különbözik a lineáristól, ezért a megoldástól is elvárható, hogy közel fog esni a lineáris egyenlet megoldásához; csak a változók bizonyos tartományaiiban várható lényeges eltérés a két megoldás között. Az eltérés mértéke ε -től függ, ε nagyságát pedig adott szerkezet esetén a q_0 egyensúlyi helyzet határozza meg.

A továbbiakban néhány speciális esetet vizsgálunk.

1. Mechanizmusok autonóm lengése

Az 1. ábra szerinti modell gerjesztés nélküli mozgását

$$\ddot{q} + \omega^2 q = -\varepsilon \left(\delta \dot{q} + q\ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^2 \right)$$

differenciálegyenlet írja le. [1] szerint a megoldást

$$q = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots \quad (4)$$

alakban lehet keresni, ahol az a és ψ mennyiségek az

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

differenciálegyenletekből határozhatók meg. A megoldást a mozgásegyenletbe helyettesítve és ε azonos hatványainak együtthatóit összegyűjtve, rekurzív megoldható egyenletek adódnak.

Az első közelítés alapján

$$u_1 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 \cos 2\psi ;$$

ezt felhasználva a második közelítésből

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon \delta a}{2}, \\ \dot{\psi} &= \omega \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{8\omega^2} + \frac{\varepsilon^2 a^2}{16} \right). \end{aligned}$$

Az inerciális nemlinearitást ε^2 pontosságig véve figyelembe az amplitúdó $a = a_0 \exp[-\varepsilon \delta t/2]$ alakban cseng le, mely megegyezik a linearizált mozgás-

egyenlet alapján nyerhető eredménnyel. A lengések frekvenciája és a lengések középhelyzete azonban függ az amplitúdó nagyságától.

2. Mechanizmusok gerjesztett lengése

A lineáris mozgásegyenlet vizsgálata alapján gerjesztő erőpár hatására állandósult amplitúdójú és frekvenciájú gerjesztett valamint csillapodó szabad lengés várható. Nemlineáris kifejezések figyelembevételével egyszerű $\varepsilon g \cos \nu t$ gerjesztés esetén is egy sor új jelenség lép fel. Az állandósult lengés harmonikusokat illetve felharmonikusokat tartalmazhat; és mozgásstabilitási kérdések is felvetődnek. Az inerciális nemlinearitás sajátossága, hogy a külső gerjesztő hatás egyúttal mindig paraméteres gerjesztést is jelent [2].

A (2) egyenletbe a (3) kifejezést behelyettesítve ugyanis a mozgásegyenlet

$$g(t)(1 - \varepsilon q + 2\varepsilon^2 q^2 + \dots)$$

alakú taggal bővül. A linearizált egyenletből adódó eredményektől eltérően rezonanciára lehet számítani minden olyan esetben, amikor

$$\nu \approx \frac{p}{q} \omega, \quad (6)$$

p és q kis egész számok [1].

2.1. Nemrezonáns lengések

Feltesszük, hogy a gerjesztő- és a sajátfrekvencia nem tesz eleget a (6) feltételnek. Ebben az esetben a gerjesztéssel kiegészített mozgásegyenlet megoldását a (4) és (5) sorok alakjában lehet keresni; az $u_1, u_2, \dots$ függvények azonban az időtől is függenek. Első közelítésben

$$q = a \cos \psi + \frac{\varepsilon g \cos \nu t}{\omega^2 - \nu^2} - \frac{\varepsilon^2 a^2}{6} \cos 2\psi,$$

ahol

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon \delta}{2} a,$$

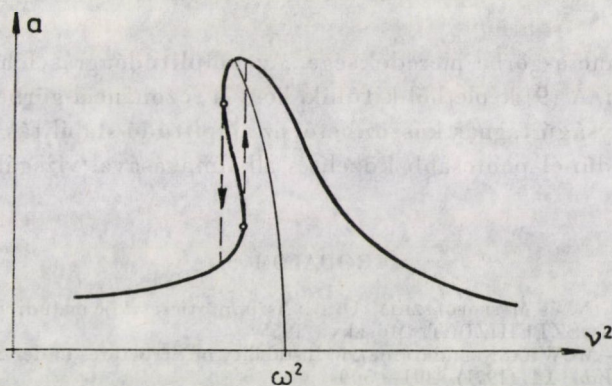
$$\dot{\psi} = \omega.$$

A megoldás tehát — nemlineáris kifejezések megtartása esetén is — ω frekvenciájú sajátlengésekből és ν frekvenciájú gerjesztett lengésekből tevődik össze. A sajátlengések a linearizált egyenletből nyerhető megoldáshoz hasonló módon csillapodnak, a gerjesztett lengés pedig első közelítésben megegyezik az inhomogén linearizált egyenlet partikuláris megoldásával.

2.2. Mechanizmusok alaprezonanciája

Rezonanciára elsősorban abban az esetben kell számítani, amikor a rendszer sajátfrekvenciája és a gerjesztő frekvencia egymást megközelítik, azaz amikor $p = 1$, $q = 1$. A megoldást ismét lehet a (4) és (5) sorok formájában keresni; u_i -ről, a -ról és ψ -ről azonban fel kell tenni, hogy az időtől explicit módon függenek. Az első közelítés alapján

$$q = a \cos \psi + \varepsilon \left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2}{4} \cos 2\psi \right),$$



2. ábra

ahol a második közelítést is figyelembe véve

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon b a}{2} - \frac{\varepsilon g}{\omega + \nu} \sin \Theta, \quad (7)$$

$$\dot{\Theta} = \omega - \nu - \frac{\varepsilon g}{a(\omega + \nu)} \cos \Theta - \frac{a^2 \varepsilon^2 \omega}{4}. \quad (8)$$

$$\psi = \nu t + \Theta.$$

Állandósult lengések esetében $\dot{a} = \dot{\Theta} = 0$. Ezt felhasználva, a rezonancia-görbe (2. ábra):

$$\nu^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} a^2 \right) \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon g)^2}{a^2} - \delta^2 a^2} \quad (9)$$

Egy mechanizmus gerjesztett lengése tehát harmonikusok sorozatát tartalmazza. Műszermechanizmusok esetében fontos lehet [3], hogy a szerkezet nem az eredeti q_0 egyensúlyi helyzet, hanem a $q_k = q_0 + \varepsilon a^2/4$ középhelyzet körül végzi a lengéseket; a második harmonikus jelenléte pedig torzíthatja a

műszer kimenő jelét. A nullponteltolódás és a torzítások mértéke ε -nal arányos; egy szerkezet munkapontjának kiválasztásakor ezért ε nagysága is szempont lehet.

A (7) és (8) képletekből levezethető a stabilitás feltétele is. Eszerint stabilis az az amplitúdó, melyre fennáll, hogy

$$a_v > 0, \text{ ha } v^2 < \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{4} \right),$$

$$a_v < 0, \text{ ha } v^2 > \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{4} \right).$$

Itt a_v a rezonancia-görbe meredeksége. Az amplitúdóugrás lehetőségét a 2. ábra szemlélteti. A (9) képletből kitűnik, hogy a rezonancia-görbe eldeformálódása egy ε^2 nagyságú tagnak köszönhető; az amplitúdó-stabilitás kérdése tehát csak az elsőrendűnél pontosabb közelítés alkalmazásával vizsgálható.

IRODALOM

1. BOGOLJUBOV, N. N. és MITROPOLSKIJ, U. A.: Aszimptoticseszkije metodi v teorii nelinejnih kolebanij; GOSZTEHIZDAT, Moszkva 1955
2. BARR, A. D. S. — McWHANNEL: Parametric Instability of Structures under Support Motion; *J. Sound Vib.* 14 (1971), 491—509
3. SIVÓ JÁNOS: Műszermechanizmusok dinamikai szintézise optimális tervezési paraméterek megállapítására. Doktori disszertáció, Budapesti Műszaki Egyetem, 1974

Inertial non-linearity of machine structures. The paper deals with the oscillation test of a four-pivot mechanism. The general mass is approximated by a linear function whereby some nonlinear expressions appear in the equation of motion. Introduction of a variable ε is suggested as characterizing the extent of non-linearity. Finally some examples are offered in which the solution is arrived at by using the Krylov-Bogolyubov method.

Inertiale Nichtlinearität von Maschinenkonstruktionen. Der Aufsatz befaßt sich mit der schwingungstechnischen Untersuchung einer Konstruktion mit vier Gelenken und nähert sich dem Problem durch die lineare Gleichung allgemeiner Massen. Daher erscheinen in der Bewegungsgleichung nichtlineare Ausdrücke. Der Verfasser schlägt vor, das Maß der Nichtlinearität mit Einführung der Veränderlichen zu kennzeichnen. Schließlich führt er einige Beispiele vor, in welchen er die Lösung nach der Krülow-Bogoljubowschen Methode erzielt.

Инерционная нелинейность конструкций машин. В статье исследуются колебания четырехшарнирного механизма. Обобщенную массу автор приближает при помощи линейной функции, вследствие чего в уравнении движения появляются нелинейные выражения. В статье предлагается введение переменной, выражающей меру нелинейности. В заключении приводятся несколько примеров, решение которых осуществляется способом Крылова—Боголюбова.