A KVÁZICSOPORTOK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: DÉNES JÓZSEF és PÁSZTOR ENDRÉNÉ

Bevezetés

Latin négyzeten EULER óta egy olyan négyzetes matrixot értünk, amelynek n^2 mezőjében n különböző betű, illetve szám úgy foglal helyet, hogy egy sorban és egy oszlopban sem fordul elő két azonos. A *Cayley*-féle csoporttáblák, mint ismeretes, speciális latin négyzetek.

Egy G csoport CAYLEY táblája a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Latin négyzet, vagyis olyan $\|a_{ik}\|$ négyzetes matrix, amelynek minden sora, illetve oszlopa G elemeinek egy permutációja.

2. Érvényes a négyszög kritérium, vagyis minden $i, j, \ldots$ index esetén az $a_{ik} = a_{i_1k_1}$, $a_{il} = a_{i_1l_1}$, $a_{jk} = a_{j_1k_1}$ egyenletekből következik, hogy $a_{jl} = a_{j_1l_1}$.

Megfordítva, tetszőleges $\|a_{ik}\|$ matrix, amely rendelkezik az 1. 2. tulajdonságokkal, egy G csoport művelettáblája.

Az S véges halmazt akkor nevezzük kvázicsoportnak, ha S-ben értelmezve van egy művelet és tetszőleges a, b esetén az $ax = b$, $ya = b$ egyenleteknek pontosan egy megoldása van. Két kvázicsoportot Q_1-et és Q_2-t (a Q_1-ben értelmezett műveletet jelöljük $\mathbf{1}$-gyel, a Q_2-ben értelmezett műveletet $\mathbf{2}$-vel), akkor nevezünk izotopnak, ha tetszőleges $x, y \in Q_1$ esetén létezik olyan σ, η, ϱ leképzés, hogy $\sigma(x \mathbf{1} y) = \eta(x) \mathbf{2} \varrho(y)$.

A kvázicsoportok művelettáblája latin négyzet és megfordítva, minden latin négyzethez izotópiától eltekintve egyértelműen található olyan kvázicsoport, amelynek ez a művelettáblája. A kvázicsoportok definíciójából következik, hogy a kvázicsoportok és a latin négyzetek elmélete igen szoros kapcsolatban áll egymással.

A kérdés irodalmából ez a kapcsolat nem tűnik ki eléggé, mert a kutatók a latin négyzetekhez legtöbbnyire kombinatorikai problémák megoldása közben jutottak (mint pl. a 36 tiszt problémája, bűvös négyzetek szerkesztése), míg a kvázicsoportok elmélete az utolsó évtizedekben mint a csoportelmélet egy általánosítása fejlődött ki. Jelen dolgozat egyik célja e kapcsolat kidomborítása.

E dolgozat szerzőinek egyike más helyen (lásd [8]) megoldotta a következő problémát:

„Hagyjunk el egy G véges n-ed rendű csoport csoporttáblájából tetszőleges k számú elemet. Határozzuk meg a legnagyobb $k = k(n)$ számot, amelyre a tábla megmaradó része a művelettáblát egyértelműen meghatározza."[1] [8]-ban megtalálható a következő eredmény: $k(n) = 2n - 1$ ha $n \neq 4$ és $k(4) = 3$.

A dolgozatban az előző probléma kvázicsoportokra vonatkozó analogonjaként a következő kérdésre adunk választ: *Hány elemet hagyhatunk el tetszőlegesen egy n-ed rendű latin négyzetből úgy, hogy a megmaradó elemek az eredeti latin négyzetet egyértelműen meghatározzák?*

[1] Ezt a problémát FUCHS LÁSZLÓ vetette fel könyvében (lásd [10]).

Más szavakkal: *Hány elemet hagyhatunk el tetszőlegesen egy n-ed rendű kvázicsoport művelettáblájából úgy, hogy a megmaradó elemek az eredeti művelettáblát egyértelműen meghatározzák?*

Kérdésünkre a 1. tételhez tartozó korollárium adja meg a választ. Tetszőleges n-re ($n \neq 3$) létezik két különböző olyan n-ed rendű latin négyzet, amelyek pontosan 4 helyen különböznek egymástól; míg 3 elemet akárhogy elhagyva egy tetszőleges n-ed rendű latin négyzetből ($n \neq 3$), a megmaradó elemekből a latin négyzet egyértelműen rekonstruálható. $n=3$ esetén a latin négyzet 9 eleme közül bárhogyan is adunk meg 4-et, a hiányzó 5 elem rekonstruálható.

Az 1. tétel bizonyításához felhasznált konstrukciós módszer segítségével egyszerű bizonyítást adunk R. SCHAUFFLER egy tételére és megcáfoljuk D. W. WALLnak egy sejtését. (2. §, 3. §.)

A 4. §-ban FUCHS LÁSZLÓnak néhány kvázicsoportokkal kapcsolatos problémájával foglalkozunk.

Az 5. §-ban a latin négyzetek diagonálisaival analóg gráfelméleti fogalmat mutatjuk be. Az említett analógia segítségével a diagonálisok gyakorlati kikeresésére adódik egyszerű módszer.

A szerzők köszönetüket fejezik ki RÉNYI ALFRÉD és FUCHS LÁSZLÓ professzoroknak értékes megjegyzéseikért.

1. §. Egy konstrukciós módszer

1. TÉTEL: *Tetszőleges n-re ($n \geqq 4$) létezik olyan n-ed rendű kvázicsoport, amely tartalmaz másodrendű részkvázicsoportot.*

BIZONYÍTÁS: Ha n páros, akkor a tételben kimondott állítás következik CAUCHYnak következő tételéből: *Legyen G n-rendű csoport és p n-nek prímosztója, akkor G tartalmaz p-ed rendű elemet.* Vagyis, ha n páros, akkor van 2-rendű alcsoportja, így csak annak bizonyítása marad hátra, hogy páratlan n-re is igaz a tétel.

Ha n páratlan, megmutatjuk, hogy minden páratlan $n > 3$-ra lehet ilyen kvázicsoportot konstruálni.

Szükségünk lesz a *diagonális* fogalmára, ezt a következőképpen definiáljuk:

Egy n-ed rendű latin négyzetben (kvázicsoport művelettáblájában) diagonálisnak[2] *nevezünk n olyan különböző elemet, amelyek a latin négyzet különböző soraiban és oszlopaiban helyezkednek el.*

Az általunk használt elnevezést a diagonális elemeinek a művelettáblában való elhelyezkedése indokolja.

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ egy n-ed rendű G csoport elemeinek három permutációja és $a_ib_i = c_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ G-nek egy diagonálisa, akkor $a_ib_ia_1 = c_ia_1$ is diagonális és $a_ib_ia_1 = c_ia_1$, $a_ib_ia_2 = c_ia_2$, ... $a_ib_ia_n = c_ia_n$ diagonálisok páronként diszjunktak. Vagyis, tetszőleges véges n-ed rendű csoportban egyetlen diagonális létezéséből következik n diszjunkt diagonális létezése.

[2] A diagonálist J. SINGER 1-1 permutációnak nevezi cikkében. (Lásd [21]-ben.) M. HALL és L. J. PAIGE complete mapping-nek nevezi a [13] és [17] dolgozatban.

Ha n páratlan, akkor nyilvánvalóan $a_i a_i = a_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ diagonálist alkot. Az előzőkből következik, hogy a páratlan n-ed rendű ciklikus csoportok művelettáblái n diszjunkt diagonálissal rendelkeznek, $n+2$ rendű (n páratlan) kívánt tulajdonságú kvázicsoportot nyerhetünk az n-ed rendű ciklikus csoportból, ha egyik diagonálisának minden eleme helyébe $n+1$-et, egy másik diagonálisának minden eleme helyébe $n+2$-t írunk és a két kiválasztott diagonálist $n+1$-edik, $n+2$-edik sorként, illetve oszlopként csatoljuk a konfigurációhoz. A jobb alsó sarokban levő négy üres helyre az $n+1$, $n+2$ elemeket írjuk a következő elrendezésben:

$$\begin{matrix} n+1 & n+2 \\ n+2 & n+1 \end{matrix}$$

Az így létrejött négyzetes matrix latin négyzet és egy olyan $n+2$-ed rendű kvázicsoport művelettáblája, amely tartalmaz másodrendű részkvázicsoportot.

Mivel $n=1$ esetben a diagonálisok száma egy és a konstrukcióhoz két kiválasztott diagonálisra van szükség, $n=3$-ra nem tudunk kívánt tulajdonságú latin négyzetet konstruálni.[3]

KORROLÁRIUM: *Tetszőleges n-re* ($n \neq 3$) *létezik két olyan n-ed rendű latin négyzet, amelyek pontosan* 4 *helyen különböznek egymástól, míg* 3 *elemet akárhogy elhagyva egy tetszőleges n-ed rendű latin négyzetből* ($n \neq 3$) *a latin négyzet egyértelműen rekonstruálható.*

Tekintsük ugyanis azt az n-ed rendű Q kvázicsoportot, amelynek van másodrendű részkvázicsoportja. Akkor Q művelettáblája a következő alakú:

$$\begin{array}{|l} a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \\ a_2\, a_1 \\ \vdots \end{array}$$

1. ábra

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel Q elemeit jelöljük.

Négy elem megváltoztatása esetén egy Q-tól különböző n-ed rendű kvázicsoport következő alakú művelettáblájához juthatunk:

$$\begin{array}{|l} a_2\, a_1 \ldots a_n \\ a_1\, a_2 \\ \vdots \end{array}$$

2. ábra

[3] RÉNYI ALFRÉD hívta fel figyelmünket az 1. tétel egy másik bizonyítására:
Ha $n>3$, akkor minden másodrendű latin négyzet kiegészíthető $n \times 2$ latin téglalappá. H. B. MANN [16] könyvében található tétel szerint, tetszőleges $n \times m$ latin téglalap kiegészíthető $n \times n$ latin négyzetté. E tételből következik, hogy az $n \times 2$ latin téglalap kiegészíthető $n \times n$ latin négyzetté és ez a latin négyzet eleget tesz követelményünknek. Hasonló módon bizonyítható a 2. tétel is.

Három elem tetszőlegesen elhagyható, mivel ebben az esetben van a latin négyzetnek egy olyan sora vagy oszlopa, amelyből egyetlen elem hiányzik és ez egyértelműen pótolható, hasonló módon a még hiányzó két elem is.

MEGJEGYZÉS: M. HALL-tól származik a következő tétel (lásd [12]).

G n-ed rendű Abel-csoport tetszőleges elemei legyenek $c_1, c_2, \ldots, c_n$. *Akkor és csak akkor létezik két G összes elemeiből álló* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ *permutáció, amelyre fennáll, hogy*

$$c_i = a_i - b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

ha

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 0.$$

M. HALL eredményét FUCHS L. végtelen *Abel*-csoportokra is kiterjesztette. (Lásd: [11].)

Ha (1)-re fennáll, hogy c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ is permutációt alkot, akkor (1)-et diagonálisnak nevezzük.

M. HALL és FUCHS L. a diagonális létezésének szükséges és elégséges feltételét adta meg, a feltétel szükségességét már korábban L. J. PAIGE véges esetre bebizonyította. (Lásd [18].) P. BATEMANN (lásd [1]) bebizonyította, hogy tetszőleges végtelen csoport művelettáblájában van diagonális.

Később a problémát vizsgálták nem *Abel*-csoportokra is. M. HALL és L. J. PAIGE bebizonyította (lásd [13]), hogy feloldható csoportnál tetszőleges n-re szükséges és elégséges, feloldhatatlan csoportoknál szükséges feltétele annak, hogy a csoporttáblában legyen diagonális az, hogy a 2-*Sylow*-alcsoport nem ciklikus. M. HALL és L. J. PAIGE azt sejtik, hogy a feltétel feloldhatatlan csoportok esetében is elégséges.

MEGJEGYZÉS: Ha egy n-ed rendű G véges csoport csoporttáblájában levő diszjunkt diagonálisok száma d, akkor $d \equiv 0 \bmod n$. Azonban abból, hogy egy latin négyzetnek n diszjunkt diagonálisa van, nem következik, hogy ez egyben csoporttábla is.

Könnyen belátható ugyanis, hogy létezik olyan n diszjunkt diagonálisú latin négyzet, amely nem csoporttábla.

A már említett, M. HALL és L. J. PAIGE által bebizonyított tételből következik, hogy $n = 4k + 2$ esetén n-ed rendű csoport csoporttáblája nem tartalmaz diagonálist.

Másrészt, R. C. BOSE és S. S. SHRIKANDE megcáfolta az ortogonális latin négyzetekre vonatkozó *Euler*-sejtést[4] $n > 10$-re és E. T. PARKER $n = 10$ esetre. (Lásd [4], [5], [19].)

D. M. JOHNSON, A. L. DULMAGE, N. S. MENDELSOHN (lásd [15]) és L. J. PAIGE (lásd [17]) bebizonyították, hogy ortogonális latin négyzetpárt csak n diszjunkt diagonálisú latin négyzethez lehet konstruálni.

Van tehát olyan latin négyzet, amely n diszjunkt diagonálisú és nem csoporttábla. Az alább közölt 10-ed rendű latin négyzet n diszjunkt diagonálisú és, mint az

[4] EULER azt sejtette, hogy ha $n = 4k + 2$ és $n > 6$, akkor nem létezik n-rendű ortogonális latin négyzetpár, BOSE és SHRIKANDE azonban minden $4k + 2$ alakú $n > 10$-re, PARKER pedig $n = 10$-re konstruáltak ortogonális latin négyzetpárt.

könnyen látható, nem csoporttábla:

0	4	1	7	2	9	8	3	6	5
8	1	5	2	7	3	9	4	0	6
9	8	2	6	3	7	4	5	1	0
5	9	$\boxed{8}$	3	0	4	7	6	$\boxed{2}$	1
7	6	9	8	4	1	5	0	3	2
6	7	$\boxed{0}$	9	8	5	2	1	$\boxed{4}$	3
3	0	7	1	9	8	6	2	5	4
1	2	3	4	5	6	0	7	8	9
2	3	4	5	6	0	1	8	9	7
4	5	6	0	1	2	3	9	7	8

(A négyszög kritérium a megjelölt elemekre nem teljesül.)

MEGJEGYZÉS: Ha $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_r^{a_r}$, valamint $\min(p_1, p_2, \dots, p_n)$ jelöli a $p_1, p_2, \dots, p_r$ különböző prímszámok közül a legkisebbet, azt sejtjük, hogy

$$k(s) \leqq 2 \min(p_1, p_2, \dots, p_r) - 1,$$

ahol $k(s)$ egy n-ed rendű kvázicsoport művelettáblájából olyan módon elhagyható elemek legnagyobb számát jelöli, hogy a tábla megmaradó része a művelettáblát egyértelműen meghatározza.

Az 1. tétel bizonyításánál felhasznált módszer segítségével belátható a következő T. EVANS [24] és S. K. STEIN által bebizonyított tétel:

2. TÉTEL: *Minden n-re létezik olyan n-ed rendű kvázicsoport, amely tartalmaz k-ad rendű részkvázicsoportot, ha* $k \leqq \frac{n}{2}$.

MEGJEGYZÉS: Az előzőkben láthattuk, hogy az *Abel*-csoportok között van 0 diagonálisú, pl. minden páros rendű ciklikus csoport ilyen. Könnyen belátható, hogy létezik nem kommutatív 0 diagonálisú csoport, ilyen pl. a diéder csoport.

Nem sikerült bebizonyítanunk, hogy egy G csoport művelettáblája akkor és csak akkor 0 diagonálisú, ha a csoport egységeleme nem állítható elő a csoport összes elemeit tényezőként pontosan egyszer tartalmazó szorzatként. Továbbá a következő kérdést nem sikerült megválaszolni: Igaz-e, hogy minden 0 diagonálisú latin négyzet csoporttábla?

2. §. A csoportizotóp kvázicsoportok

A 2. tétel alkalmazásaként be fogjuk bizonyítani R. SCHAUFFLER egy tételét (lásd [20]-ban).

Legyen M az $1, 2, \dots, n$ természetes egész számok nem üres, véges részhalmaza. Az M halmazon értelmezett T_1 latin négyzet által meghatározott $\mathbf{1}$ művelet kvázicsoportot alkot és ezt $(M)_1$-gyel jelöljük.

Jelölje Ω_n az összes n-ed rendű M halmazon értelmezett kvázicsoportból álló halmazt. Ω_n-t akkor nevezzük egészében asszociatívnak, ha tetszőleges $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ $((M)_1, (M)_2 \in \Omega_n)$ műveletekhez található olyan $\mathbf{1}^*, \mathbf{2}^*$ $((M)_{1^*}, (M)_{2^*} \in \Omega_n)$ művelet, hogy M tetszőleges x, y, z elemére fennáll a következő összefüggés:

$$x\,\mathbf{1}\,(y\,\mathbf{2}\,z) = (x\,\mathbf{1}^*\,y)\,\mathbf{2}^*\,z. \tag{2}$$

R. SCHAUFFLER tétele a következő:

3. TÉTEL: *Ω_n akkor és csak akkor egészében asszociatív, ha $n \leqq 3$.*

BIZONYÍTÁS: Számolással könnyen belátható, hogy $n \leqq 3$ esetben Ω_n egészében asszociatív (lásd [20]-ban). A tétel bizonyítása azzal válik teljessé, ha kimutatjuk, hogy $n > 3$ esetében Ω_n nem egészében asszociatív. Ennek kimutatásához szükségünk lesz a következő tételre:

Legyen Σ egy olyan részhalmaza Ω_n-nek, amelyre (2) *teljesül. Ekkor tetszőleges T_1-re $((M)_1 \in \Sigma)$ érvényes a következő:*

$$x\,\mathbf{1}\,y = \varphi(x)\,\mathbf{2}\,z\,\mathbf{2}\,\psi(y),$$

ahol $\mathbf{2}$ művelet az M halmazon csoportot alkot, ennek a $(M)_2$ csoportnak φ, ψ két automorfizmusa, z pedig M-nek egy rögzített eleme, x, y két tetszőleges eleme M-nek.[5]

Másképpen fogalmazva SCHAUFFLER tétele így hangzik:

Ω_n akkor és csak akkor egészében asszociatív, ha minden eleme csoportizotóp.

(Egy kvázicsoportot akkor nevezünk csoportizotópnak, ha létezik vele izotóp csoport.) Mivel minden n $(n > 3)$ pozitív egész számhoz található olyan n' $\left(n' < \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ egész szám, hogy n' nem osztója n-nek, így a 2. tételből következik, hogy $n > 3$ esetén létezik olyan n-ed rendű kvázicsoport, amelyre nem érvényes a *Lagrange*-tétel, vagyis nem csoportizotóp. Tehát $n > 3$ esetén Ω_n nem lehet egészében asszociatív.

3. §. D. W. Wall egy sejtéséről

D. W. WALL [22] cikkében közölte a következő sejtését:

Jelölje Q az olyan n-ed rendű kvázicsoportot, amely m diszjunkt s-ed rendű részkvázicsoportot tartalmaz, akkor fennáll a következő összefüggés.[6]

$$n \geqq (m+1)s \tag{3}$$

[5] A tételt BELOUSZOV mondta ki egyik előadásában a moszkvai egyetem 1958. február 3—6-ig megtartott algebrai kollokviumán. Az előadás kivonata megtalálható bizonyítás nélkül BELOUSZOV [2] dolgozatában. Hosszú M. bizonyította be a tételt [14] dolgozatában. Hasonló állítás szerepel R. H. BRUCK [6] dolgozatában is.

A csoportizotóp kvázicsoportokra vonatkozó feltételekkel foglalkozik A. FRIGERIO [9] dolgozata is.

[6] (3)-ban leírt összefüggést Wall sejtésnek fogjuk nevezni abban az esetben, ha $m > 2$, mivel az $m = 1$ és $m = 2$ esetre (3) érvényességét D. W. Wall bebizonyította, a bizonyítás megtalálható [22]-ben.

Ennek a paragrafusnak az a célja, hogy megcáfoljuk WALL sejtését és bebizonyítsuk a következő tételt:

4. TÉTEL. *Ha $m > 2$, akkor létezik olyan kvázicsoport, amely m diszjunkt tetszőleges azonos rendű részkvázicsoport egyesítése.*

BIZONYÍTÁS: R. H. BRUCK bebizonyította (lásd [7]), hogy tetszőleges n-re ($n > 2$) létezik idempotens kvázicsoport.[7] Nyilvánvaló, hogy egy idempotens m-ed rendű kvázicsoport minden elemét helyettesíthetjük egy s-ed rendű kvázicsoporttal és így egy új ms rendű kvázicsoporthoz jutunk,[8] amelyre fennáll a következő összefüggés

$$n = ms.$$

MEGJEGYZÉS: Az 1. tételben felhasznált konstrukciós eljárás alkalmazásaként megmutatjuk, hogy minden $n > 2$-re létezik idempotens kvázicsoport.

Példaképpen a leírt módszer segítségével a harmadrendű ciklikus csoportból (lásd 5. ábra) létrehozunk egy negyedrendű idempotens kvázicsoportot (lásd 6. ábra).

	1	2	3
1	1	$\boxed{3}$	2
2	3	2	$\boxed{1}$
3	$\boxed{2}$	1	3

5. ábra

	1	2	3	4
1	1	4	2	3
2	3	2	4	1
3	4	1	3	2
4	2	3	1	4

6. ábra

[7] Az 1. tétel kapcsán bizonyítást nyert az is, hogy tetszőleges $n > 2$ és $n \neq 6$-ra van olyan latin négyzet, amely n diszjunkt diagonálist tartalmaz. Idempotens n-ed rendű kvázicsoport létezése ennek speciális esete.

[8] A leírt konstrukciós eljárásra példaképpen vegyük azt az esetet, amikor $n = 6$, $m = 3$, $s = 2$. Vegyünk egy harmadrendű idempotens kvázicsoportot, amely a következő művelettáblával írható le:

	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

3. ábra

Ha 1 helyébe az $\begin{smallmatrix}1&4\\4&1\end{smallmatrix}$ latin négyzetet, 2 helyébe $\begin{smallmatrix}2&5\\5&2\end{smallmatrix}$ végül 3 helyébe $\begin{smallmatrix}3&6\\6&3\end{smallmatrix}$ latin négyzetet helyettesítjük, akkor egy olyan hatodrendű kvázicsoportot kapunk, amely három diszjunkt másodrendű részkvázicsoportot tartalmaz (lásd 4. ábra).

	1	4	2	5	3	6
1	1	4	3	6	2	5
4	4	1	6	3	5	2
2	3	6	2	5	1	4
5	6	3	5	2	4	1
3	2	5	1	4	3	6
6	5	2	4	1	6	3

4. ábra

A $\square$ jelzett diagonális elemei helyébe 4-et írtunk. Mivel tetszőleges páratlan n-re, az n-ed rendű ciklikus csoporttal izotóp idempotens kvázicsoport létezik és az n-ed ($n>1$) rendűből $n+1$-ed rendű idempotens kvázicsoport az előzőkhöz hasonló módon konstruálható, következik, hogy minden n-re ($n>2$) létezik idempotens kvázicsoport.

4. §. Fuchs László néhány kvázicsoportokkal kapcsolatos problémája

FUCHS LÁSZLÓ vetette fel a következő problémákat:

1. Tetszőleges n esetén található-e n minden k tagú particiójához ($n = n_1+n_2+ +\ldots+n_k$), ahol $n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_k$ és $n_1 \leqq \sum_{i=2}^{n} n_i$ olyan Q_n n-ed rendű kvázicsoport, ahol

$$Q_n = Q_{n_1} \cup Q_{n_2} \cup \ldots \cup Q_{n_k}.$$

2. Tetszőleges n-nek egy adott

$$n = n_1+n_2+\ldots+n_k$$

particiójához létezik-e olyan Q_n n-ed rendű kvázicsoport, amelyre fennáll, hogy

$$Q_n = Q_{n_1} \cup \ldots \cup Q_{n_k}.$$

3. Tetszőleges n-hez létezik-e olyan Q_n n-ed rendű kvázicsoport, amelynek minden m-re $\left(m \leqq \frac{n}{2}\right)$ van m-ed rendű részkvázicsoportja.

Az 1. probléma speciális esetként tartalmazza a 2. és 3. problémákat.

Az 1. és 2. probléma esetén $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ feltétel miatt a szereplő $Q_{n_1}, Q_{n_2}, \ldots, Q_{n_k}$ részkvázicsoportok páronként elemidegenek.

Legyen $n_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$, akkor latin négyzet tulajdonságok miatt[9] Q_{n_i} ($i=2, \ldots, k$) egyetlen idempotens elemből áll és ezzel bizonyítottuk, hogy az 1. és 2. problémára adott válasz tagadó.[10]

A 3. problémát illetően a szerzőknek nem sikerült eredményt elérni.

A 3. problémát csoportok esetén, vagyis amikor m osztója n-nek, C. HOBBY, H. RUMSEY és P. M. WEICHSEL vizsgálták (lásd [25]) és a következő tételt bizonyították be:

G véges n-ed rendű csoport akkor és csak akkor tartalmaz az összes lehetséges m-ed rendű (m osztója n-nek) elemekből legalább egyet, ha a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül:

(1) G ciklikus

(2) G p-csoport és tartalmaz p indexű ciklikus alcsoportot

(3) $n=p^\alpha q$, ahol p és q különböző prímszámok. G csak egyetlen q-*Sylow* alcsoportot tartalmaz és ez G-nek kommutator alcsoportja, valamint akkor is, ha S, G-nek p-*Sylow* alcsoportja, és b S-nek generátor eleme, és b^p G-nek a centrumában van.

[9] Lásd [22].

[10] A részletes bizonyítás a problémakörre vonatkozó egyéb eredményekkel együtt egy későbbi alkalommal fog megjelenni.

5. §. A diagonális fogalmának gráfelméleti analogonja

Minden n-ed rendű latin négyzethez hozzárendelhető egy gráf a következőképpen:

Jelölje a_{ij} az A latin négyzet i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elemet. a_{ij}-hez rendeljük hozzá a gráf P_{ij} szögpontját. A gráfban két szögpontot akkor kötünk össze egy éllel, ha a két szögpontnak megfelelő A-beli elemek azonosak, vagy egy sorban, illetve egy oszlopban vannak. Jelöljük az A-hoz rendelt gráfot $G(A)$-val.

Egy gráfban a független pontok maximális rendszerének nevezik azon pontok halmazát, amelyek közül nincs két olyan, amelyet él köt össze és bármely, e halmazon kívül levő pontból vezet él a halmaz valamelyik eleméhez.

Könnyen belátható, hogy amennyiben A-ban van diagonális, úgy a diagonálisnak megfelelő $G(A)$-beli szögpontok a független pontoknak egy maximális rendszerét alkotják.

A latin négyzetek és bizonyos gráfok között leírt kapcsolat lehetőséget nyújt gráfelméleti eredmények alkalmazására.

C. BERGE könyvében [3] foglalkozik a maximális független pontrendszerek kiválasztásával.

Ortogonális latin négyzetek egyszerű előállításához szükséges olyan algoritmus, amelynek segítségével kiválasztható adott latin négyzetből egy diagonális.

C. BERGE eredményeinek megfelelő átfogalmazása segítségével a diagonális kiválasztása elektronikus számológépre programozható. A diagonálisok kiválasztására szolgáló programot készített több szerző, részletesebb tájékoztatás [26]-ban található.

[21] dolgozatában J. SINGER foglalkozik a következő problémával: az n-ed rendű ciklikus csoport művelettáblájából (n páratlan) hányféleképpen választható ki diagonális.

Bizonyos gráfokra vonatkozóan is foglalkoztak hasonló kérdéssel. Vagyis azt vizsgálták, hogy bizonyos gráfokban hányféleképpen lehet maximális független pontrendszert kiválasztani.

A bevezetett megfeleltetés lehetőséget nyújt a gráfelméleti eredmények alkalmazására.

IRODALOM

[1] P. BATEMANN: Complete mappings of infinite groups. *Amer. Math. Monthly*. 1950., 623—624. o.

[2] В. Д. Белоусов: Ассоциативные системы квазигрупп. Успехи Мат. Наук 1958., 243. o.

[3] C. BERGE: *Theorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.

[4] R. C. BOSE and S. S. SHRIKANDE: On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squeres of order $4k+2$ *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 1959. 734—737. o.

[5] R. C. BOSE and S. S. SHRIKANDE: Mutually orthogonal Latin squares, *Transactions of the Amer. Math.* Soc., 1960, 191—209. o.

[6] R. H. BRUCK: Some results in the theory of quasigroups, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 1944, 19—52. o.

[7] R. H. BRUCK: Some results in the Theory of Quasigroups, *Ann. of Math.*, 1946., 50—55. o.

[8] J. DÉNES: On a problem of L. Fuchs., Acta Sci. Mat. Univ. Szegediensis 1962., 237—242. o.

[9] A. FRIGERIO: Sui Quasi gruppi associati ai gruppi., *Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Padova* 1958., 107—111. o.

[10] L. FUCHS: *Abelian groups*, Budapest 1958.
[11] L. FUCHS: Ein Kombinatorisches Problem bezüglich abelscher Gruppen., *Math. Nachrichten*, 1958., 292–297. o.
[12] M. HALL: A combinatorial problem on abelian groups., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952., 584–587. o.
[13] M. HALL and L. J. PAIGE: Complete mapping of finite groups., *Pacific Journ. of Math.*, 1955., 541–549. o.
[14] HOSSZÚ, M.: Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról., *Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, 1959., 51–56. o.
[15] D. M. JOHNSON, A. L. DULMAGE, N. S. MENDELSOHN: Orthomorphism of groups and orthogonal latin squares, I., *Canadian Journ. of Math.*, 1961., 356–372. o.
[16] H. B. MANN: *Analysis and Design of Experiments.*, Dover, New-York 1949.
[17] L. J. PAIGE: Complete mappings of finite groups., *Pacific Journ. of Math.*, 1951., 111–115. o.
[18] L. J. PAIGE: A note of finite abelian groups., *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 1947., 590–593. o.
[19] E. T. PARKER: Ortogonal latin squares. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 1959., 859–862. o.
[20] R. SCHAUFFLER: Die Associativität im Ganzen, besonders bei Quasigruppen., *Mat. Z.*, 1957., 428–435.
[21] J. SINGER: A class of groups associated with Latin squares. *Amer. Math. Monthly* 1960., 235–240. o.
[22] D. W. WALL: Sub-quasigroups of finite quasigroups., *Pacific. Journ. Math.*, 1957., 1711–1714.
[23] K. YAMAMOTO: Generation principles of Latin squares. *Rep. Stat. Appl. Res. Union Sap. Sci. Eng.* 1961., 73–76. o.
[24] T. EVANS: Embedding incomplete Latin squares. *Amer. Math. Monthly* 1960., 958–961. o.
[25] C. HOBBY, H. RUMSEY, P. M. WEICHSEL: Finite groups having elements of every possible order. *Journ. Washington Acad. Sci.* 1960., 11–12. o.
[26] R. C. BOSE, I. M. CHAKRAVARTI, D. E. KNUTH: On methods of constructing sets of mutually orthogonal Latin squares using a computer I–II, *Technometrics* 1960., 507–516. o.; 1961., 111–117. o.

(Beérkezett: 1962. II. 20.)