

KIEGÉSZÍTÉSEK A SZÁLERŐSÍTÉSŰ ANYAG ELEMEL KÖZTI EGYÜTTDOLGOZÁS LEÍRÁSÁHOZ

SEBŐK FERENC

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A tanulmány a szálerősítésű anyagok mechanikájából meríti tárgyát, és az irodalomban fellelhető elméleteket a nyírási alakváltozás, illetőleg a keresztkontrakció hatásának figyelembevételével egészíti ki. Az ezen alapon végzett levezetés két, határesetként is felfogható kapcsolati típus esetében ébredő belső erőkre szolgáltat összefüggéseket. A szál és az ágyazat tényleges együttműködésének bemutatása a vasbeton-építéstől vett számpéldán történik, amely az ismert, kísérleti adatokkal jó egyezést mutat.

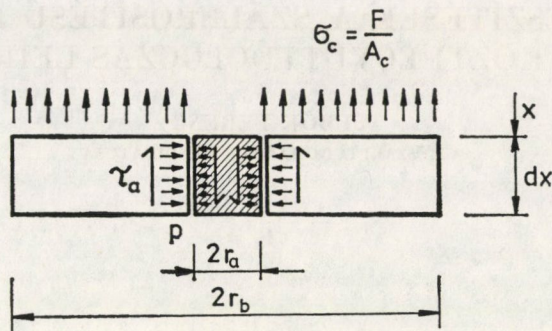
1. Bevezetés

A szálerősítésű anyagok mechanikájának alapkérdése a szál és az azt körülvevő ágyazat közti kapcsolat. A problémakör az építőmérnöki tudományban nem új, kutatása azonban általában közvetlen műszaki feladatok megoldására irányult. A hazai eredmények közül elsősorban PALOTÁS [4], valamint TASSI [6] korábbi vizsgálataira utalunk, akik a jelenséget az acélbetét, illetőleg a feszítőhuzal lehorgonyzódásaként tárgyalták. Ugyanezt a kérdést KÉZDI [2] és PETRASOVITS [5] mint a cölöp és a talaj kölcsönhatását írta le.

A jelen tanulmány célja, hogy a feladatot általános formában kezelve, némiképp egységesítse és kiegészítse a szakirodalomban [1, 3] fellelhető elméleteket. Feltételezzük, hogy mind a szál, mind az ágyazat anyaga követi a lineáris rugalmasságtan törvényeit, amelynek szokásos feltevéseit és elhanyagolásait a továbbiakban külön magyarázat nélkül alkalmazzuk. Ez egyben azt is jelenti, hogy a plasztifikálódás lehetőségét figyelmen kívül hagyjuk. Nem foglalkozunk a szerkezeti elemek esetleges stabilitásvesztésével sem.

2. Jelölések

Az alkalmazott jelöléseket az 1. ábra szemlélteti. A szálra vonatkozó adatokat a , az ágyazatra vonatkozókat b , az összetett anyagot jellemzőket c indexszel láttuk el.



1. ábra

3. Alapösszefüggések

3.1 A nyírási feszültség és alakváltozás

A kirajzolt elem egyensúlya alapján a nyírófeszültség a szál mentén

$$\tau_a = \frac{r_a}{2} \frac{d\sigma_a}{dx}, \quad (1)$$

és egy általános, r koordinátájú helyen

$$\tau_{br} = \tau_a \frac{r_a}{r} \left[1 - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{r^2}{r_a^2} - 1 \right) \right], \quad (2)$$

ahol

$$\varrho = \left(\frac{r_b}{r_a} \right)^2 - 1. \quad (3)$$

Ezek ismeretében a komponensek nyírási alakváltozása az érintkezési felületen

$$\gamma_a = \tau_a \frac{r_a}{2G_a}, \quad (4)$$

illetőleg a

$$d\gamma_{br} = \frac{\tau_{br}}{G_b} dr$$

kifejezést r_a és r_b közt integrálva

$$\gamma_b = \tau_a \frac{r_a}{2G_b} \left[\frac{\varrho + 1}{\varrho} \ln(\varrho + 1) - 1 \right]. \quad (5)$$

3.2 *A radiális normálfeszültség és az ennek hatására fellépő alakváltozás*

Bevezetve a vasbetonszerkezetek számításában használt, a rugalmassági modulusok viszonyát jellemző

$$n = \frac{E_a}{E_b} \quad (6)$$

számot, a nyomás

$$p = C_1 \frac{F}{A_b} - C_2 \sigma_a, \quad (7)$$

ahol F a terhelő derékerő, A_b az ágyazat keresztmetszeti területe; az állandók értéke pedig

$$C_1 = \frac{\mu_b}{1 + \mu_b + \frac{1 - \mu_a}{n} + \frac{2}{\rho}} \quad (8)$$

és

$$C_2 = \frac{\frac{1}{n} \mu_a + \frac{1}{\rho} \mu_b}{1 + \mu_b + \frac{1 - \mu_a}{n} + \frac{2}{\rho}} \quad (9)$$

μ a Poisson-féle szám.

A szál felületén ébredő derékfeszültség az ágyazat

$$\varepsilon_{bp} = -2p \frac{\mu_b}{\rho E_b}$$

nagyságú fajlagos alakváltozását okozza, amelyhez előjelhelyesen hozzáadódik még a külső erő által közvetlenül okozott alakváltozás:

$$\varepsilon_b = \frac{1}{E_b} \left(\sigma_b - 2p \frac{\mu_b}{\rho} \right) \quad (10)$$

Ezen mennyiséget ugyancsak F külső erővel és σ_a szálfeszültséggel fejezzük ki

$$\varepsilon_b = \frac{1}{E_b} \left(C_3 \frac{F}{A_b} - C_4 \sigma_a \right) \quad (11)$$

ahol

$$C_3 = 1 - \frac{2\mu_b}{\rho} C_1, \quad (12)$$

és

$$C_4 = \frac{1}{\rho} (1 - 2\mu_b C_2). \quad (13)$$

A szálra vonatkozóan, a hidrosztatikus feszültségi állapotból következően az

$$\varepsilon_{ap} = 2p \frac{\mu_a}{E_a}$$

összefüggés adható meg, ami a külső erő által közvetlenül okozott alakváltozással összegezve a következő eredményt adja:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_a} \left(\sigma_a + 2p \frac{\mu_a}{E_a} \right). \quad (14)$$

Az előbbihez hasonlóan a kifejezést itt is F külső erővel hozzuk kapcsolatba és így, átalakítások után

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_a} \left(C_5 \frac{F}{A_b} + C_6 \sigma_a \right), \quad (15)$$

ahol

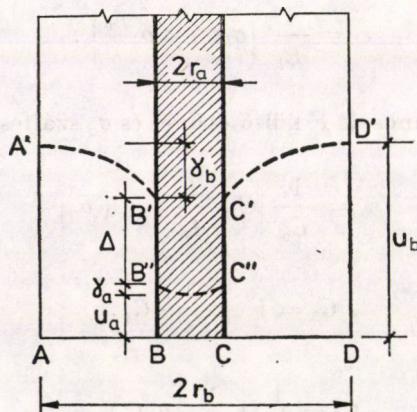
$$C_5 = 2\mu_a C_1, \quad (16)$$

és

$$C_6 = 1 - 2\mu_a C_2. \quad (17)$$

3.3. A deformációs vonal differenciálegyenlete

A szálerősítésű anyagon keresztül, terheletlen állapotban felvett $ABCD$ egyenes a terhelés hatására, általános esetben az $A'B'B''C''C'D'$ helyzetbe kerül (2. ábra). A vázlat helyes értelmezésével kapcsolatban rá kell mutatnunk arra, hogy esetünkben nem a szokásos kihúzó-kísérletről van szó; hanem éppen ellenkezőleg, a merevebb szál gátolja az ágyazat szabad alakváltozását.



2. ábra

A diszkontinuitás az ábra szerint

$$\Delta = (u_b - u_a) - (\gamma_b + \gamma_a),$$

és mivel

$$\frac{du}{dx} = -\varepsilon,$$

a deformációs vonal differenciálegyenlete

$$\frac{d\Delta}{dx} = (\varepsilon_a - \varepsilon_b) - \frac{d}{dx}(\gamma_a + \gamma_b), \quad (18)$$

ami az előzőekben levezetett összefüggések felhasználásával

$$\frac{d\Delta}{dx} = C_0 \frac{d^2 \sigma_a}{dx^2} - C_8 \sigma_a + C_7 F, \quad (19)$$

alakban írható, ahol

$$C_7 = \frac{1}{A_b} \left(\frac{C_3}{E_b} - \frac{C_5}{E_a} \right), \quad (20)$$

$$C_8 = \frac{C_4}{E_b} + \frac{C_6}{E_a}, \quad (21)$$

és

$$C_0 = \left(\frac{r_a}{2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{G_a} + \frac{1}{G_b} \left[\frac{\varrho + 1}{\varrho} \ln(\varrho + 1) - 1 \right] \right\}. \quad (22)$$

4. A szál és az ágyazat együttlétezőzése különféle kapcsolati típusok esetében

4.1. Tökéletes kapcsolat

A szál és az ágyazat közti együttlétezőzés egyik határeset a tökéletes kapcsolat. Ez úgy is megfogalmazható, hogy a két elem kontinuitása deformált állapotban sem szűnik meg. Előbbi levezetésünk differenciálegyenlete ennek értelmében a

$$\frac{d^2 \sigma_a}{dx^2} - \beta_2^2 \sigma_a + \beta_1^2 F = 0 \quad (23)$$

alakra egyszerűsödik, ahol

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{C_7}{C_0}}, \quad (24)$$

és

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{C_8}{C_0}}. \quad (25)$$

A jelölésbeli egyszerűség kedvéért ugyancsak bevezetjük a

$$B = \frac{C_7}{C_8} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \quad (26)$$

tényezőt.

A differenciálegyenlet megoldása az $F = 0$ peremfeltételekkel az $x = 0$ és $x = l$ helyen

$$\sigma_a = F \cdot B \left[1 - \frac{\cosh \beta_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta_2 \frac{l}{2}} \right], \quad (27)$$

a felületi nyomás értéke a korábbi képletekbe való behelyettesítéssel

$$p = F \left\{ \frac{C_1}{A_b} - C_2 B \left[1 - \frac{\cosh \beta_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta_2 \frac{l}{2}} \right] \right\}, \quad (28)$$

a nyírófeszültség pedig

$$\tau_a = F \cdot \frac{r_a}{2} \beta_2 B \frac{\sinh \beta_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta_2 \frac{l}{2}}. \quad (29)$$

Teljesen azonos felépítésű összefüggésekre jutott korábban Cox, Dow és ROSEN [1] is, noha az általuk közölt együtthatók értéke eltér. A különbség a keresztkontrakció, illetőleg a felületi normálfeszültség hatásának figyelembevételéből ered.

4.2. Súrlódásos kapcsolat

Az összetett anyag viselkedésének másik határállapota, ha a szál és az ágyazat között kizárólag súrlódóerő működik, vagyis

$$\tau_a = \varrho^* p, \quad (30)$$

ahol ϱ^* a súrlódási tényező. Ez következik be például egy vasbetontartó megrepedése, illetőleg a betét megcsúszása esetében.

A differenciálegyenlet a fentiek szerint a

$$\frac{d\sigma_a}{dx} - \varphi_2 \sigma_a + \varphi_1 F = 0 \quad (31)$$

alakot ölti, ahol a konstansok

$$\varphi_1 = -\frac{2\rho^*}{r_a} \cdot \frac{C_1}{A_b}, \quad (32)$$

$$\varphi_2 = -\frac{2\rho^*}{r_a} \cdot C_2, \quad (33)$$

valamint

$$\Phi = \frac{1}{A_b} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \quad (34)$$

A megoldás az előbbi peremfeltételek mellett

$$\sigma_a = F\Phi(1 - e^{\rho^*x}). \quad (35)$$

4.3. A lehorgonyzódási hossz

Az előbbieket alapján ugyancsak számítható a tartó végétől mért azon l_0 távolság, amelynél nagyobb koordinátájú pontokban már nem lép fel csúszás, vagyis a különböző rugalmassági tulajdonságokkal rendelkező két anyag megegyező alakváltozását a felületen ébredő feszültség biztosítani képes. Értéke

$$l_0 = -\frac{1}{\varphi_2} \ln \left| \frac{1 - \frac{1}{C_2} \left(\frac{\varphi_2}{\beta_2} \right)^2}{1 - A_b B \frac{C_2}{C_1}} \right|. \quad (36)$$

A fenti méret egyben iránymutatást is ad a minimális szálhossz megválasztását illetően.

5. Számpélda

5.1. Kiindulási adatok

A kapott eredményeket egy vasbeton rúd hosszanti feszültségállapotán szemléltetjük. A választott modellt egyetlen acélszál alkotja, amelyet a beton koncentrikusan vesz körül.

A tartóelemre $F = 2500$ kp nagyságú erő működik. A geometriai és rugalmassági adatokat az I. táblázat tartalmazza. E_b alacsony értékét a teher tartósnak feltételezett jellege indokolja. A súrlódási tényező értékét 0,52-re választottuk.

I. táblázat

Adat	Acél	Beton
r [cm]	1,0	3,0
E [kp/cm ²] · 10 ⁶	2,10	0,11
μ [—]	0,300	0,166

5.2. A lehorgonyzódási hossz

A felvett adatokkal a lehorgonyzódási hossz a (36) szerint 49,09 cm-re adódott.

A képlet átrendezésével érdekességképpen megvizsgáltuk, mekkora lenne az a ρ^* súrlódási tényező, amely a megcsúszás lehetőségét eleve kizárja. A kapott 1,556-os érték arra utal, hogy a szálvég kilazulása elkerülhetetlen.

5.3. Tökéletes kapcsolat

A szálfeszültségre, az érintkezési nyomásra, valamint a nyírófeszültségre vonatkozó számítás eredményeit a II. táblázatban közöljük. A felvett feltételek teljesülése esetében az erőátadás tehát viszonylag igen rövid szakaszon megy végbe. A p előjelváltása a két anyag Poisson-tényezőjének viszonyából következik.

II. táblázat

x [cm]	σ_a [kp/cm ²]	p [kp/cm ²]	r [kp/cm ²]
0	0	11,41	124,59
1	201,27	6,35	79,96
2	330,47	3,10	51,32
3	413,35	1,01	32,94
4	466,56	—0,32	21,14
5	500,71	—1,18	13,57
6	522,63	—1,74	8,71
7	536,69	—2,09	5,59
8	545,72	—2,32	3,59
10	555,24	—2,56	1,48
∞	561,90	—2,72	0

5.4. Súrlódásos kapcsolat

A 4.2. pont szerinti súrlódásos kapcsolat esetében az acélszál legnagyobb feszültsége 453,65 kp/cm², vagyis mintegy 20%-kal a tökéletes kapcsolathoz tartozó érték alatt marad. Az erőátadás mintegy ötszörös hosszúságot igényel.

A valóságos helyzet nézetünk szerint a két határérték között van.

5.5. Az acél és a beton együttműködése

Feltételezzük, hogy a lehorgonyzódás megtörténte után a tényleges szál-feszültség a két határeset középértéke, vagyis $507,8 \text{ kp/cm}^2$. Az F erő „maradékát” a beton veszi fel, és benne $36,0 \text{ kp/cm}^2$ nagyságú feszültséget okoz. A deformációk azonosságából következően ez $n = 14,10$ viszonynak felel meg, ami jó egyezést mutat a kísérletek ismert adataival.

A kapott értéket ugyanakkor szembe kell állítani az 5.1 pont szerint számítható $n = 19,09$ -es viszonytal. Az összehasonlítás így arra utal, hogy a pontosabb számítás a valóság jobb leírását engedi meg.

IRODALOM

1. HOLISTER, G. S.—THOMAS, C.: Fibre Reinforced Materials. Elsevier, Amsterdam 1966
2. KÉZDI Á.: Cölöpök és cölöpcsoportok teherbírása. Dissz. Budapest 1958
3. NEVILLE, A.: Fibre Reinforced Cement and Concrete. RILEM Symposium. Construction Press, Hornby 1975
4. PALOTÁS L.: A vasbeton elmélete. Akadémiai Kiadó, Budapest 1973
5. PETRASOVITS G.: Cölöpök és cölöpcsoportok terhelés alatti viselkedése. Dissz. Budapest 1973
6. TASSI G.: A lehorgonyzódás jelensége feszített betonban. Dissz. Budapest 1956

Contribution to the description of the co-operation between the elements of fibre reinforced materials. The subject matter of the paper is taken from the mechanics of fibre reinforced materials, and supplements the theories found in literature by taking into account the effects of shear deformation and transversal contraction. Derivation on this basis renders relations on the internal forces generated in the case of two connection types which might be regarded as extremes. Co-operation between fibre and matrix is demonstrated by a numerical example from the field of construction with reinforced concrete which showed good agreement with known test data.

Ergänzung zur Beschreibung der Mitwirkung der Elemente der faserverstärkten Stoffe. Der Gegenstand des Aufsatzes ist der Mechanik der faserverstärkten Stoffe entnommen und ergänzt die, in der Literatur angeführten Theorien durch die Berücksichtigung der Schubverformung, bzw. der Querkontraktion. Die auf dieser Grundlage vorgenommene Ableitung führt zu zwei Verbindungstypen, die auch als Grenzfälle betrachtet werden können und Zusammenhänge hinsichtlich der inneren Kräfte liefern. Die tatsächliche Zusammenwirkung von Fasern und Bettung wird an einem der Stahlbetonlehre entnommenen Zahlenbeispiel vorgeführt, dessen Resultat mit den bekannten Versuchsergebnissen gut übereinstimmt.

Дополнения к описанию содействия между элементами волокноусиленного материала. Статья берёт свой предмет из механики волокноусиленных материалов и дополняет теории, находящиеся в литературе, учетом влияния деформации сдвига и поперечной контракции. Вывод, проведённый на этой основе, подаёт соотношения для усилий двух типов сцепления, которые можно считать и предельными случаями.

Показ действительного содействия между волокнами и средой производится через примерный расчёт, взятый из тематики железобетона. Результаты хорошо совпадают с экспериментальными данными.