

FOLYTONOS ALÁTÁMASZTÁSÚ KÖRGYŰRŰK VIZSGÁLATA

SZALAI JÁNOS
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

A tanulmány tetszőleges keresztmetszetű, folytonos alátámasztású körgyűrűk állapotjellemzőinek meghatározását mutatja be szimmetrikus és antiszimmetrikus terhek esetében.

1. A tanulmány célja

A dolgozat forgáshéjak (pl. hűtőtornyok) felső peremeit merevítő körgyűrűk állapotjellemzőinek — belső erőinek és alakváltozásainak — meghatározásával foglalkozik. A gyakorlatban közvetlenül alkalmazható összefüggéseket mutat be, amelyek felhasználhatók a peremzavarok vizsgálatakor.

2. Feltevések, jelölések

A rugalmasságtan szokásos feltevéseit alkalmazzuk. A körgyűrű keresztmetszete tetszőleges, de a gyűrű mentén állandó. A keresztmetszet méretei a sugárhoz viszonyítva kicsik. A csavarási középpontot a súlyponttal azonosnak tekintjük.

Mind a külső teher, mind a támaszreakció a keresztmetszet tetszőleges pontjában hathat.

X, Y, Z a tetszőleges irányú külső teher összetevői, amelyek pozitív előjellel az 1/a ábrán láthatók.
 X_X, X_Y, X_Z, X_M a támaszvonalban fellépő ismeretlen erők (az 1/b ábrán negatív előjelűek, X_M pozitív).

Vizsgálataink során a körgyűrűre ható terheket áthelyezzük a keresztmetszet súlypontjába, ami egyben azt is jelenti, hogy a súlypontba áthelyezett terhekkal egyidejűleg az r, ϑ és z tengelyekre vonatkozó m_r, m_ϑ és m_z nyomatékokat is figyelembe kell venni. Az

u, v, w elmozdulások pozitív értelme azonos a koordináta-tengelyek pozitív irányával,
 x a keresztmetszet elfordulása.

További jelölések:

F a körgyűrű keresztmetszeti területe,
 J_R, J_Z a tehetetlenségi nyomatékok az r , ill. z tengelyekre,
 J_T csavarási tehetetlenségi nyomaték,
 $E, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ rugalmassági tényezők,
 $K_R = E J_R, K_Z = E J_Z, C_T = G J_T, \varrho = \frac{K_R}{C_T}, D = EF.$

3. A feladat differenciálegyenletei

3.1 Egyensúlyi egyenletek

A függőleges, normális és érintő irányú vetületi egyenletek (1/c–1/e ábrák):

$$\frac{dQ_R}{ds} + Y - X_Y = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{dQ_\vartheta}{ds} + \frac{N_\vartheta}{R} + Z - X_Z = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{dN_\vartheta}{ds} - \frac{Q_\vartheta}{R} + X - X_X = 0. \quad (3.3)$$

Nyomatéki egyenletek, forgatás a ϑ , r és z tengelyek körül (1/c–1/e ábrák):

$$\frac{dM_T}{ds} - \frac{M_R}{R} + m_\vartheta = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{dM_R}{ds} + \frac{M_T}{R} + m_R - Q_R = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{dM_\vartheta}{ds} - Q_\vartheta + m_Z = 0, \quad (3.6)$$

ahol

$$ds = R d\vartheta. \quad (3.7)$$

Bevezetve a

$$\frac{d}{d\vartheta} (\dots) = (\dots)' \quad (3.8)$$

jelölést, a nyíró erők kiküszöbölésével az egyensúlyi egyenletek négy egyenletre redukálhatók:

$$M_T' - M_R + R m_\vartheta = 0, \quad (3.9)$$

$$M_R'' = M_T' + R m_R' + R^2(Y - X_Y) = 0, \quad (3.10)$$

$$N_\vartheta + \frac{1}{R} M_\vartheta'' + R(Z - X_Z) + m_Z' = 0, \quad (3.11)$$

$$N_\vartheta' - \frac{1}{R} M_\vartheta' + R(X - X_X) - m_Z = 0. \quad (3.12)$$

3.2 A belső erők és alakváltozások közötti összefüggések

$$N = \frac{D}{R} (u' + w) + \frac{K_Z}{R^3} (w + w''), \quad (3.13)$$

$$M_R = \frac{K_R}{R^2} (-v'' + R\kappa), \quad x_\vartheta M_T = \frac{C_T}{R^2} (R\kappa' + v'), \quad M_\vartheta = \frac{K_Z}{R^2} (w + w''), \quad (3.14)$$

$$Q_R = \frac{C_T}{R^2} (1 + \varrho)\kappa' + \frac{C_T}{R^3} (v' - \varrho v''') + m_R \quad (3.15)$$

$$Q_\vartheta = \frac{K_Z}{R^3} (w' + w''') + m_Z. \quad (3.16)$$

3.3 Az alakváltozások differenciálegyenletei

A belső erők alakváltozásokkal kifejezett értékeit a (3.9)–(3.12) összefüggésekbe behelyettesítve, rendezés után az alábbi differenciálegyenletekre jutunk:

$$v'' = -\frac{R}{1 + \varrho} \left(\kappa'' - \varrho\kappa + \frac{R^2}{C_T} m_\vartheta \right), \quad (3.17)$$

$$\kappa'' = \frac{1}{R(1 + \varrho)} \left[\varrho v''' - v'' - \frac{R^3}{C_T} m'_R - \frac{R^4}{C_T} (Y - X_Y) \right], \quad (3.18)$$

$$\frac{D}{R} (u' + w) + \frac{K_Z}{R^3} (w''' + 2w'' + w) = -R(Z - X_Z) - m'_Z, \quad (3.19)$$

$$\frac{D}{R} (u'' + w') = -R(X - X_X) + m_Z. \quad (3.20)$$

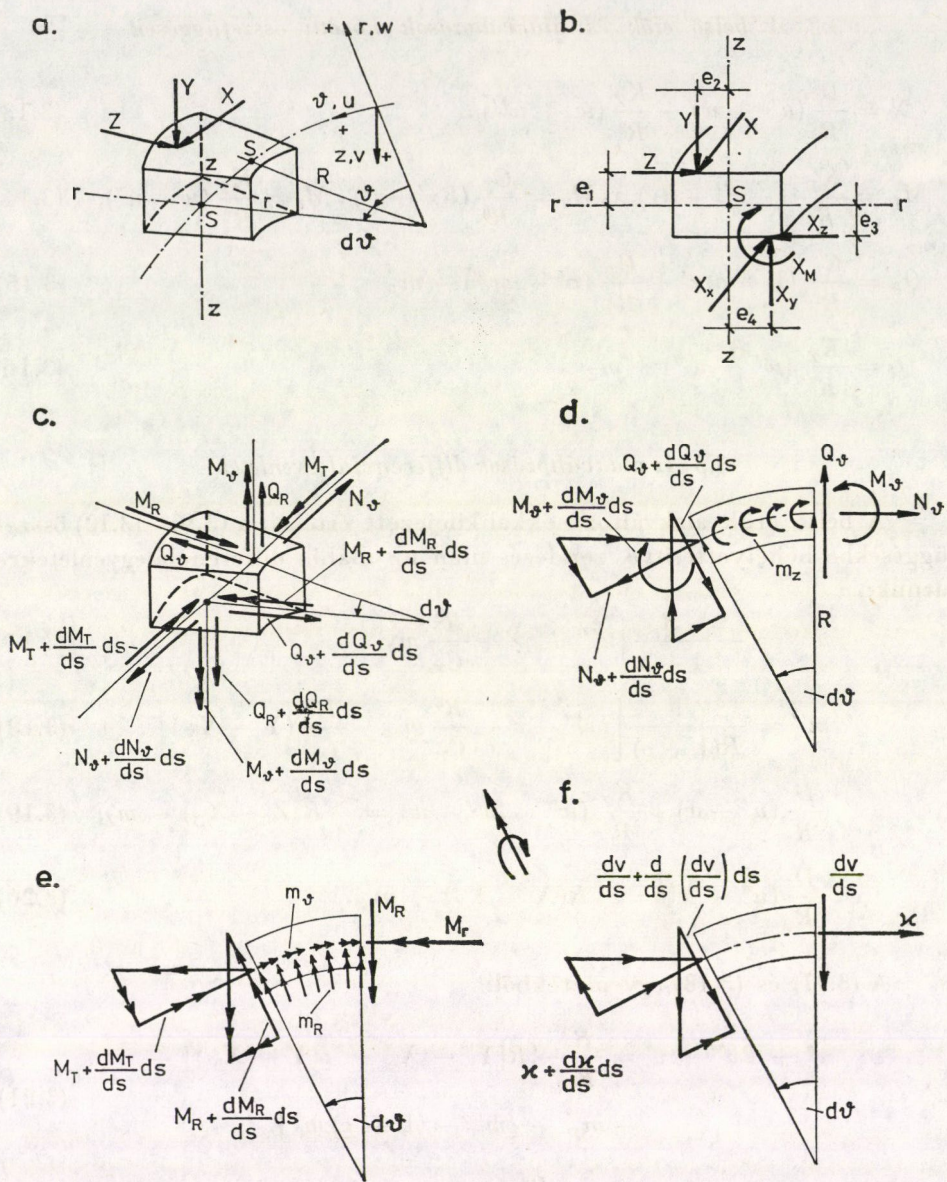
A (3.17) és (3.18) egyenletekből:

$$v'''' + 2v''' + v'' = \frac{R^3}{K_R} \{ R[Y'' - X''_Y - \varrho(Y - X_Y)] + m''_R - \varrho m'_m - (1 + \varrho) m''_\vartheta \}, \quad (3.21)$$

$$\kappa'''' + 2\kappa'' + \kappa = -\frac{R^2}{K_R} [R(1 + \varrho)(Y - X_Y) + (1 + \varrho) m'_R + \varrho m''_\vartheta - m_\vartheta]. \quad (3.22)$$

A (3.19) és (3.20)-ból:

$$w'''' + 2w''' + w' = \frac{R^2}{K_Z} [-R(Z' - X'_Z) + R(X - X_X) - m''_Z - m_Z], \quad (3.23)$$



1. ábra

$$\begin{aligned}
 u' = & -w - \frac{K_Z}{R^2 D} (w'''' + 2w'' + w) - \frac{R^2}{D} (Z - X_Z) - \\
 & - \frac{R}{D} m'_Z.
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Fenti differenciálegyenletekben

$$\begin{aligned} m_\varphi &= Ze_1 - Ye_2 + X_Ze_3 - X_Ye_4 + X_M, \\ m_Z &= -Xe_2 - X_Xe_4, \\ m_R &= -Xe_1 - X_Xe_3. \end{aligned} \tag{3.25}$$

4. A differenciálegyenletek megoldásai

4.1 Tengelyszimmetrikus terhek

$$\begin{aligned} X &= X_0 = 0, \quad Y_0 - X_{Z0} = 0, \quad m_{R0} = m_{Z0} = 0, \\ u &= 0, \quad v = \text{konst.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

A ϑ szerinti deriváltak értéke zérus. A (3.17) és (3.19) differenciálegyenletekből:

$$\kappa = \frac{R^2}{K_R} m_\varphi, \tag{4.2}$$

$$w = -\frac{R^2}{D} (Z_0 - X_{Z0}), \tag{4.3}$$

$$m\vartheta_0 = Z_0e_1 - Y_0(e_2 + e_4) + X_{Z0}e_3 + X_{M0}, \tag{4.4}$$

$$N_\varphi = \frac{D}{R} w, \quad M_\varphi = M_T = 0, \quad M_R = Rm_{\vartheta_0}. \tag{4.5}$$

Az X_{Z0} és X_{M0} ismeretlenek értékeit az alátámasztásra felírható alakváltozási követelményekből határozhatjuk meg.

4.2 Antimetrikus terhek

4.2.1 A terhekre vonatkozó korlátozások

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a körgyűrűre ható terhek — mind a külső terhek, mind a támaszreakciók — összetevői Fourier-polinómmal megadhatók. Ezek általános tagjai:

$$X = X_n \sin n\vartheta, \quad Y = Y_n \cos n\vartheta, \quad Z = Z_n \cos n\vartheta, \tag{4.6}$$

$$X_X = X_{Xn} \sin n\vartheta, \quad X_Y = X_{Yn} \cos n\vartheta, \quad X_Z = X_{Zn} \cos n\vartheta. \tag{4.7}$$

$$m_\varphi = m_{\varphi n} \cos n\vartheta, \quad m_Z = m_{Zn} \sin n\vartheta, \quad m_R = m_{Rn} \sin n\vartheta, \tag{4.8}$$

$$X_M = X_{Mn} \cos n\vartheta.$$

$$\begin{aligned}
 m_{\vartheta n} &= Z_n e_1 - Y_n e_2 - X_{Y_n} e_4 + X_{Z_n} e_3 + X_{Mn}, \\
 m_{Zn} &= -X_n e_2 - X_{X_n} e_4, \\
 m_{Rn} &= -X_n e_1 - X_{X_n} e_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Az alkalmazások során ilyen esetekben elegendő a differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldásának az ismerete, amelyeket

$$\begin{aligned}
 u &= u_n \sin n\vartheta, & v &= v_n \cos n\vartheta, & w &= w_n \cos n\vartheta, \\
 \varkappa &= \varkappa_n \cos n\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

alakban kereshetünk.

Az $n > 1$ esetben a körgyűrűre ható külső terhek önmagukban egyensúlyban vannak, míg $n = 1$ esetben nincs egyensúly.

4.22 Partikuláris megoldások $n = 1$ esetben

A körgyűrűre ható terheknek ki kell elégíteniük az alábbi feltételeket: Vetületi egyenlet:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} R(Z_1 - X_{Z_1}) \cos^2 \vartheta d\vartheta + \int_0^{2\pi} R(X_1 - X_{X_1}) \sin^2 \vartheta d\vartheta = \\
 &= \pi R(Z_1 - X_{Z_1}) + \pi R(X_1 - X_{X_1}) = 0.
 \end{aligned}$$

Ebből az összefüggésből:

$$Z_1 - X_{Z_1} = -X_1 + X_{X_1}. \tag{4.11}$$

Nyomatéki egyenlet:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{2\pi} R m_{\vartheta 1} \cos^2 \vartheta d\vartheta - \int_0^{2\pi} R m_{R1} \sin^2 \vartheta d\vartheta - \int_0^{2\pi} R^2 (Y_1 - X_{Y_1}) \cos^2 \vartheta d\vartheta = \\
 &= \pi R(m_{\vartheta 1} - m_{R1}) - \pi R^2 (Y_1 - X_{Y_1}) = 0.
 \end{aligned}$$

Ebből a követelményből

$$m_{\vartheta 1} = m_{R1} + R(Y_1 - X_{Y_1}). \tag{4.12}$$

Figyelembe véve az egyensúlyi követelményeket, $n = 1$ esetben a (3.21)–(3.23) differenciálegyenletek jobb oldalán álló tagok értéke zérus. A (4.10) alatti megoldások a homogén egyenleteket kielégítik, az állandók azonban határozatlanok maradnak. Értékeiket az alábbi megfontolások alapján számíthatjuk.

A (3.11) és (3.17) egyenletekből:

$$N_{\vartheta} = -R(Z - X_Z) - m'_Z, \quad (4.13)$$

$$v_1 + R\alpha_1 = \frac{R^3}{C_T(1 + \varrho)} m_{\vartheta 1}, \quad (4.14)$$

és így [lásd a (3.14) összefüggéseket]:

$$M_R = R \frac{\varrho}{1 + \varrho} m_{\vartheta 1} \cos \vartheta. \quad (4.15)$$

Legyenek a merevítetlen hég peremének alakváltozásai a héjra ható terhekből és a még ismeretlen peremterhekből

$$u_{1h}, v_{1h}, w_{1h} \quad \text{és} \quad \alpha_{1h} = \dot{w}_{1h} = \frac{\partial w_{1h}}{\partial z}, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{\vartheta h} = \frac{1}{R - e_4} (w_{1h} \sin \varphi + u_{1h}) \cos \vartheta.$$

A gyűrű alakváltozásai:

$$v_1 = \frac{R}{R - e_4} v_{1h}, \quad \alpha_1 = \dot{w}_{1h}, \quad w_1 = w_{1h}. \quad (4.17)$$

Az ismeretlen peremterhekből kettő az egyensúlyi egyenletekből meghatározható. Legyenek ezek X_{X1} és X_{Y1} . Az X_{Z1} és X_{M1} értékei az

$$\frac{1}{R - e_4} v_{1h} + \dot{w}_{1h} = \frac{R^2}{C_T(1 + \varrho)} m_{\vartheta 1}, \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{R - e_4} (w_{1h} \sin \varphi + u_{1h}) \cos \vartheta = \frac{N_{\vartheta}}{D} + \frac{M_R e_3}{K_R} \quad (4.19)$$

követelményekből adódnak, ahol

$$m_{\vartheta 1} = e_1 Z_1 - e_2 Y_1 + e_3 X_{Z1} + \frac{e_4}{R - e_4} [(e_1 + e_3)(Z_1 - X_1) - (R + e_2) Y_1] + \frac{R}{R - e_4} X_{M1}, \quad (4.20)$$

$$m_{Z1} = -(e_2 + e_4) X_1 - e_4 (Z_1 - X_{Z1}). \quad (4.21)$$

X_{Z1} és w_1 ismeretében u_1 a (3.24) összefüggésből számítható. Az alakváltozások értékeivel a belső erők is meghatározhatók.

4.23 Partikuláris megoldások $n > 1$ esetben

A partikuláris megoldások állandóinak meghatározására a differenciálegyenletekből az alábbi összefüggések adódnak:

$$v_n n^2(n^2 - 1)^2 = -\frac{R^3}{K_R} [R(n^2 + \varrho)(Y_n - X_{Yn}) - (n^3 + n\varrho)m_{Rn} + n^2(1 + \varrho)m_{\varrho n}], \quad (4.22)$$

$$\alpha_n(n^2 - 1)^2 = -\frac{R^2}{K_R} [(R(1 + \varrho)(Y_n - X_{Yn}) + (1 + \varrho)nm_{Rn} - (1 + n^2\varrho)m_{\varrho n}], \quad (4.23)$$

$$w_n n(n^2 - 1)^2 = -\frac{R^4}{K_Z} \left[n(Z_n - X_{Zn}) + X_n - X_{Xn} + \frac{1}{R} (n^2 - 1) m_{Zn} \right], \quad (4.24)$$

$$nu_n = -w_n - \frac{K_Z}{R^2 D} (n^2 - 1)^2 w_n - \frac{R^2}{D} (Z_n - X_{Zn}) - \frac{R}{D} nm_{Zn}. \quad (4.25)$$

Az alakváltozások ismeretében a belső erők a 3.2 pontban megadott összefüggésekből nyerhetők.

Az ismeretlen támaszerőket a peremgyűrű és a héj hézagmentés illeszkedésére vonatkozó követelményekből lehet meghatározni.

IRODALOM

- ORAVAS, G.: Beitrag zur Berechnung des Kreisringes auf elastischer Unterlage. *Der Bauingenieur* (1956), 177–180
 SCHLAICH, J.: Der kontinuierlich gelagerte Kreisring unter antimetrischer Belastung. *Beton und Stahlbetonbau* (1967), 21–23
 FLÜGGE, W.: *Stresses in Shells*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1973

Examination of continuous support type annuli. Determination of the state characteristics of continuous support type annuli of optional cross section under symmetrical and anti-metric loadings, respectively.

Untersuchung von kontinuierlich gelagerten Kreisringen. Die Studie behandelt die Bestimmung der Zustandskennwerte von kontinuierlich gelagerten Kreisringen bei symmetrischen und antimetrischen Belastungen.

Исследование сплошно опертых круглых колец. В статье приведено определение характеристик состояния сплошно опертых круглых колец любого сечения в случае осесимметричной или кососимметричной относительно одного диаметра нагрузки.