FELÜLETI GÖRBÉK AFFIN GEODETIKUS GÖRBÜLETÉNEK ÚJ JELLEMZÉSE

Írta: MERZA JÓZSEF

A háromdimenziós affin térbe ágyazott $x=x(u^1, u^2)$ felületen az unimoduláris affin metrikát a

$$\varphi = G_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$$

alapforma definiálja[1], ahol a $G_{\alpha\beta}$ mennyiségek a szokott

$$G_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{|a|^{1/4}}$$

módon képzendők és

$$a_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} \right|,$$

továbbá

$$a = \det \| a_{ij} \|.$$

Mint ismeretes, emellett bevezetik a *Fubini* és *Pick* által definiált

$$\psi = A_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma$$

köbös alapformát, amelyet a

$$\psi = \frac{1}{|a|^{1/4}} \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, d^3 x \right| - \frac{3}{2}\, d\varphi$$

formában is írhatunk. A felület *Gauss*-féle derivációs képleteit ezek után a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta}\, n$$

alakban nyerjük,[2] ahol

$$\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} = \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} + A^\varrho_{\alpha\beta},$$

és a $\Gamma_{\alpha\beta}$ mennyiségek a $G_{\alpha\beta}$ tenzorból az ismert módon képezett *Christoffel*-szimbólumok. Az így nyert Γ^* konnexió a felületen szimmetrikus affin összefüggést definiál. Ezen összefüggéshez tartozó autoparalel görbéket a

$$\frac{d^2 u^\varrho}{dt^2} + \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = \alpha(t) \frac{du^\varrho}{dt}$$

[1] Lásd: [1], [6].
[2] Lásd: [4].

differenciálegyenlettel jellemezhetjük, majd bevezethetünk egy ilyen görbén oly σ affin parametert, amely segítségével az autoparalel görbe differenciálegyenlete a

$$\frac{d^2u^\varrho}{d\sigma^2}+\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{d\sigma}\frac{du^\beta}{d\sigma}=0$$

alakot ölti.[3]

Ezen előzmények után rátérünk a dolgozat céljának megjelölésére. Ismeretes, hogy valamely felületi görbe affin geodetikus görbületét a

$$\varkappa_g=-\varepsilon\frac{\sqrt{|G|}}{|\varphi|^{3/2}}\cdot\delta;\quad \varepsilon=-\operatorname{sgn} G;\quad G=\det\|G_{\alpha\beta}\|$$

formulával értelmezhetjük,[4] ahol a $\frac{du^\alpha}{ds}=t^\alpha$ jelölés alkalmazásával

$$\delta=\left|t^\alpha,\ \frac{Dt^\alpha}{ds}\right|.$$

A $\frac{D}{ds}$ szimbólum a Γ^* segítségével képezett invariáns derivált operátora. A dolgozat célja annak kimutatása, miként lehet valamely görbe affin geodetikus görbületét az őt érintő autoparalel görbétől való eltérése mértékével definiálni. E célból tekintsük az ekviaffin s ívhosszra vonatkoztatott $x=x^*(s)=x(u(s))$ felületi görbét. Rögzítsük a görbe egy pontját és legyen az az ívhosszmérés kezdőpontja, azaz

$$x^*(o)=x(u(o))=x(\underset{(0)}{u}).$$

E pontban a görbe egyenlete harmadrendig sorbafejtve

$$x^*(s)=x^*(o)+x^{*\prime}(o)\cdot s+x^{*\prime\prime}\frac{s^2}{2}+x^{*\prime\prime\prime}(o)\frac{s^3}{3!}+O(4),$$

($O(4)$ az s-ben legalább negyedfokú tagokat jelöl). Felhasználva az autoparalel görbe differenciálegyenletét, az $u^\alpha(o)=\underset{(0)}{u^\alpha}$ és

$$\left(\frac{d\bar{u}^\alpha}{d\sigma}\right)_{\sigma=o}=\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)_{s=o}$$

kezdeti feltételek mellett meghatározható az az $x(\bar{u}(\sigma))$ autoparalel görbe, amely kielégíti a

$$\frac{d^2\bar{u}^\varrho}{d\sigma^2}+\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}\frac{d\bar{u}^\alpha}{d\sigma}\frac{d\bar{u}^\beta}{d\sigma}=0 \tag{1}$$

differenciálegyenletet. Az autoparalel görbe egyenlete végtelen sor alakjában legyen

$$\bar{x}(\sigma)=\bar{x}(o)+\bar{x}'(o)\sigma+\bar{x}''(o)\frac{\sigma^2}{2!}+\bar{x}'''(o)\frac{\sigma^3}{3!}+O(4).$$

[3] Lásd: [3].
[4] Lásd: [2].

Rendeljük egymáshoz az egyenlő parameterértékű pontokat, tehát nevezzük az $s=\sigma$-hoz tartozó párokat megfelelő pontpároknak. E pontokban vegyük a görbék érintővektorait. Blaschke idézett munkájában értelmezi két vonalelem affin távolságát a következő módon. Két vonalelem affin távolsága azon tetraéder térfogatának hatodik gyökével egyenlő, amelyet az érintővektorok két támadási pontja, továbbá az érintővektoroknak a másik görbe megfelelő pontjabeli simulósíkjával való metszéspontjai alkotnak.

A számolás céljára jelöljük az $s=\sigma$ értékhez tartozó pontot a görbén P-vel, az autoparalel görbén pedig $\bar{P}$-sal. A P, ill. $\bar{P}$ ponton áthaladó érintő egyenlete

$$y = x^*(s)+\mu\cdot x^{*\prime}(s), \quad \text{ill.} \quad y = \bar{x}(\sigma)+\tau\bar{x}'(\sigma)$$

és az ugyanezen pontokban vett simulósíkok egyenlete

$$|z-x^*(s),\ x^{*\prime}(s),\ x^{*\prime\prime}(s)| = 0, \quad \text{ill.} \quad |z-\bar{x}(\sigma),\ \bar{x}'(\sigma),\ \bar{x}''(\sigma)| = 0.$$

A $\sigma=s$ feltételt kihasználva a P pontbeli érintő a $\bar{P}$ pontbeli simulósíkot a

$$\mu_0=\frac{|\bar{x}(s)-x^*(s),\ \bar{x}'(s),\ \bar{x}''(s)|}{|x^{*\prime}(s),\ \bar{x}'(s),\ \bar{x}''(s)|}$$

parameterhez tartozó M_2 pontban metszi. A $\bar{P}$ ponton áthaladó érintő és a P pontbeli simulósík M_1 metszéspontjának parameterértéke pedig

$$\tau_0=\frac{|x^*(s)-\bar{x}(s),\ x^{*\prime}(s),\ x^{*\prime\prime}(s)|}{|\bar{x}'(s),\ x^{*\prime}(s),\ x^{*\prime\prime}(s)|}.$$

Rövid számolás után a $P\bar{P}M_1M_2$ tetraéder V térfogatára a

$$6V = \tau_0\mu_0\cdot|\bar{x}(s)-x^*(s),\ \bar{x}'(s),\ x^{*\prime}(s)|$$

kifejezést kapjuk. Ennek becslése során fontoljuk meg, hogy

$$x^*(o)=\bar{x}(o) \quad \text{és} \quad x^{*\prime}(o)=\bar{x}'(o).$$

A τ_0 és μ_0 esetében elégséges a sorfejtésben a másodrendű deriváltakig elmenni, azonban a harmadik tényező esetében a harmadrendű tagokat is figyelembe kell venni. Viszonylag egyszerű számítás révén kapjuk, hogy

$$\mu_0=-\frac{s}{2}\cdot(1+O(1)); \quad \tau_0=-\frac{s}{2}\cdot(1+O(1)),$$

míg

$$|\bar{x}(s)-x^*(s),\ \bar{x}'(s),\ x^{*\prime}(s)|=\frac{s^4}{12}\cdot\big[|x^{*\prime}(o);\ \bar{x}''(o)-x^{*\prime\prime}(o);\ \bar{x}'''(o)-x^{*\prime\prime\prime}(o)|+O(1)\big].$$

A fentiek összevetésével a tetraéder térfogata tehát

$$6V=\frac{s^6}{48}\cdot|x^{*\prime}(o);\ \bar{x}''(o)-x^{*\prime\prime}(o);\ \bar{x}'''(o)-x^{*\prime\prime\prime}(o)|+O(7). \tag{2}$$

A képletben szereplő determináns meghatározására állítsuk elő a benne szereplő vektorokat egy alaptriéderre vonatkozólag. Mivel az x^* görbe nem autoparalel görbe, azért arra minden további nélkül alkalmazhatók az [5]-ben levezetett képletek s ezért a

$$\underset{(1)}{t} = t^{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u^{\alpha}} = x^{*\prime}$$

$$\underset{(2)}{t} = \left(\frac{dt^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} t^{\beta} t^{\gamma}\right)\frac{\partial x}{\partial u^{\alpha}}$$

$$\underset{(3)}{t} = n \qquad (n\text{: a felület affin normálisa})$$

triéderben fennállnak az alábbi összefüggések:

$$x^{*\prime} = \underset{(1)}{t}$$

$$x^{*\prime\prime} = \underset{(2)}{t} + \varphi \underset{(3)}{t}$$

$$x^{*\prime\prime\prime} = F^{\alpha} \underset{(\alpha)}{t} + A \cdot \underset{(3)}{t}.$$

Az autoparalel görbe esetében

$$\underset{(1)}{\bar{t}}(o) = \bar{x}'(o) = x^{*\prime}(o) = \underset{(1)}{t}(o),$$

mivel azonban a görbére fennáll az (1) differenciálegyenlet, azért $\underset{(2)}{\bar{t}} \equiv O$, vagyis

$$\bar{x}'' = \varphi \underset{(3)}{\bar{t}},$$

ahol $\underset{(3)}{\bar{t}}$ a megfelelő görbepontban veendő. Ennek deriválása az

$$\bar{x}''' = \varphi' \underset{(3)}{t} + \varphi \underset{(3)}{\bar{t}'}$$

eredményt szolgáltatja. Mivel azonban $\underset{(3)}{\bar{t}}$ a felület affin normálisa, azért a

$$\frac{\partial n}{\partial u^{\alpha}} = B^{\varrho}_{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u^{\varrho}}$$

derivációs képlet felhasználásával[5] látjuk, hogy a

$$\underset{(3)}{\bar{t}'} = \frac{\partial \underset{(3)}{t}}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{d\bar{u}^{\alpha}}{d\sigma} = \frac{\partial n}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{d\bar{u}^{\alpha}}{d\sigma} \overset{\text{def}}{=} \tau$$

vektor az érintősíkban fekszik. Ha a $\sigma = O$ pontot tekintjük, akkor a τ vektor felbontható a $\underset{(1)}{t}(o)$ és $\underset{(2)}{t}(o)$ vektorok segítségével

$$\tau = \alpha \underset{(1)}{t}(o) + \beta \underset{(2)}{t}(o)$$

alakban. Végezzük el ezek után a (2) determinánsba való behelyettesítést:

$$\Delta = |x^{*\prime}(o), \bar{x}''(o) - x^{*\prime\prime}(o), \bar{x}'''(o) - x^{*\prime\prime\prime}(o)| =$$

$$= |\underset{(1)}{t}(o), \varphi \underset{(3)}{t}(o) - \underset{(2)}{t}(o) - \varphi \underset{(3)}{t}(o), \varphi' \underset{(3)}{t}(o) + \varphi[\alpha \underset{(1)}{t}(o) + \beta \underset{(2)}{t}(o)] - F^{\alpha} \underset{(\alpha)}{t} - A \underset{(3)}{t}|.$$

[5] Lásd: [1].

Egyszerűbb írásmód kedvéért hagyjuk el az $s=\sigma=o$ hely állandó kiírását, majd egyszerűbb alakra hozva a determinánst a

$$\Delta=|\underset{(1)}{t},\underset{(2)}{t},(\varphi'-A)\underset{(3)}{t}|$$

kifejezést nyerjük. Használjuk még fel a

$$|\underset{(1)}{t},\underset{(2)}{t},\underset{(3)}{t}|=|G|^{1/2}\cdot\delta$$

és az

$$A=\frac{3}{2}\varphi'+\psi$$

összefüggéseket[6] s ily módon a

$$\Delta=-\left(\frac{\varphi'}{2}+\psi\right)\delta|G|^{1/2}$$

alakhoz jutunk. A Čech által bevezetett affin geodetikus görbület kifejezéséből a $\delta\cdot|G|^{1/2}$ helyettesíthető s így

$$\Delta=\varepsilon\left(\psi+\frac{\varphi'}{2}\right)\cdot\varphi^{3/2}\cdot\varkappa_g$$

lesz. Ha a determináns értékét a tetraéder térfogatképletébe írjuk és a

$$c(u)=c(u^1,u^2)=\frac{288\,\varepsilon}{\varphi^{3/2}\cdot\left(\psi+\frac{\varphi'}{2}\right)}$$

csupán felületi helytől függő állandót bevezetjük, akkor

$$c(u)\cdot\frac{V}{s^6}=\varkappa_g+O(1).$$

A W. Blaschke által definiált affin távolság[7]

$$d=c\cdot|V|^{1/6},\qquad c=\text{const.}$$

felhasználásával és az

$$\alpha=\frac{|c(u)|^{1/6}}{|c|}$$

jelöléssel határátmenetre térve

$$|\varkappa_g|^{1/6}=\alpha\cdot\lim_{s\to0}\left|\frac{d}{s}\right|$$

adódik.

Tétel: *Valamely felületi görbe affin geodetikus görbülete az őt érintő, alkalmasan választott, autoparalel görbétől való eltérésének mértékét szolgáltatja, amint azt az előző képlet kifejezi.*

[6] Lásd: [5].
[7] Lásd: [1].

IRODALOM

[1] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* II., Berlin, 1923.

[2] E. ČECH, Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine, *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* **28** (1923), 1–47.

[3] L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, New York, 1927.

[4] J. MERZA, L'introduction de la différentiation absolue dans l'espace affin, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 330–337.

[5] J. MERZA, Sur les trièdres affines associés aux courbes, (sous presse).

[6] P. A. SHIROKOV–A. P. SHIROKOV, *Géométrie différentielle affine*, Moscou, 1959. (en russe)

(Beérkezett: 1962. XI. 25.)