

A VÉGES SÁVOK MÓDSZERÉNEK ALKALMAZÁSA TÁMASZELMOZDULÁSOK ESETÉN

SZILÁGYI GYÖRGY*

A szerző az előírt elmozdulások figyelembevételét ismerteti derékszögű lemez-ill. tárcsasáv esetén; a tehervektor a (8), a (14) összefüggéssel határozható meg. A tanulmány kéttámaszú lemez egyik támaszának parabolaalakú süllyedésére vonatkozó számszerű példával fejeződik be.

1. Általános ismertetés

A véges sávok módszere a mozaikmódszer (más néven: a véges elemek módszere) és egy analitikus eljárás kombinációjának tekinthető. Míg a mozaikmódszernél a felületszerkezeteket két vagy több vonalsereggel osztjuk elemekre, addig a véges sávok módszerénél egy vonalsereggel osztjuk sávokra. A véges sávok módszere speciális alakú szerkezetek és bizonyos peremfeltételek esetében igen hatékonyak bizonyult [2], [4].

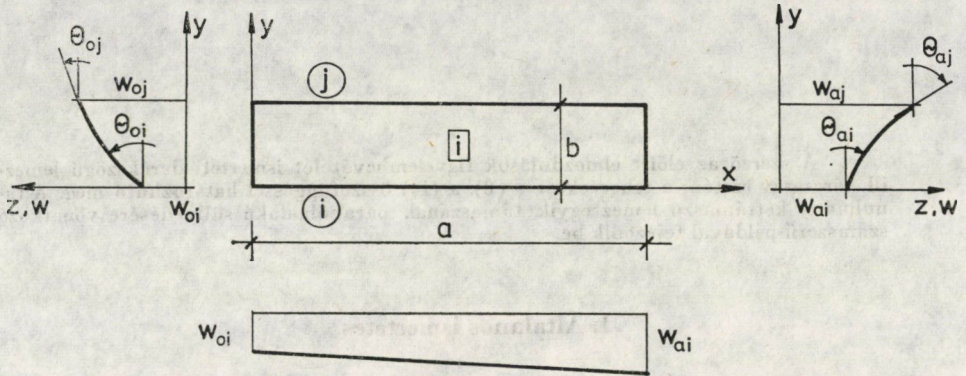
A módszer alkalmazási területeiről jó áttekintést nyújt Y. K. CHEUNG monográfiája [1]. Jelen tanulmányban csak rugalmas anyagú felületszerkezetek számításával foglalkozunk statikus teher és kis elmozdulások esetében. Erre a feladatra a véges sávok módszerét kezdetben olyan, derékszögű négy- szög vagy íves alaprajzú, prizmatikus, vékony felületszerkezetekre dolgozták ki, amelyek két szemben fekvő peremükön — a sávok végén — saját síkjukban végtelen merev, arra merőlegesen végtelen hajlékony diafragmára támaszkodnak.

A BME Mechanika Tanszékén mintegy hét éve folynak a peremfeltételek kiterjesztésére irányuló kutatások. Először a sávok végén ható erők és erő- párok figyelembevételét sikerült megoldani, és ezzel lehetővé vált a folytató- lagos szerkezetek számítása [3]. Az utóbbi két évben az előírt támaszelmoz- dulások esetére sikerült kiterjeszteni a módszert. Ennek ismertetése található az alábbiakban, derékszögű lemez- és tárcsasávra vonatkozóan. A vizsgált szerkezetek anyaga ortotróp; a rugalmassági szimmetriasíkok párhuzamosak a koordinátasíkokkal (1. és 2. ábra). Megjegyezzük, hogy az olyan sávokból,

* Dr. Szilágyi György, 1114 Budapest, Bocskai út 21.

amelyek egyidejűleg lemezként és tárcsaként dolgoznak, összeállíthatók a lemezművek, a vékonyfalú tartók és a hengeres héjak.

Az itt bemutatott eljárás alkalmazható íves, valamint kúpos sávokra is, és lehetőséget ad szabad perem figyelembevételére. Ez utóbbi esetben a sávok végének elmozdulásait abból a feltételből kell meghatározni, hogy helyükön ne keletkezzenek támaszerők.



1. ábra

2. Lemezsávok

Az 1. ábrán látható i -edik lemezsávon a következő támaszelmozdulásokat írjuk elő:

- az i -edik csomóvonal $x = 0$, ill. $x = a$ végének lehajlását és elfordulását: w_{oi} , θ_{oi} , ill. w_{ai} , θ_{ai} ,
- ugyanezeket az elmozdulásokat a j -edik csomóvonalon: w_{oj} , θ_{oj} , w_{aj} , θ_{aj} .

Ha a sávok elég keskenyek, akkor az előírt elmozdulások által meghatározott peremgörbületeket sávonként állandónak tekinthetjük; ezek az $x = 0$, ill. az $x = a$ támaszon a következők:

$$\varrho_{0y} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \frac{\theta_{oi} - \theta_{oj}}{b}, \quad \varrho_{ay} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = \frac{\theta_{ai} - \theta_{aj}}{b}. \quad (1)$$

A sávoknak az $x = 0$ és az $x = a$ végeire felírható kerületi feltételek tehát a fenti előírt elmozdulások, továbbá az, hogy a peremre merőleges nyomaték zérus:

$$m_x = -D_{11}^{(l)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^{(l)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D_{11}^{(l)} \varrho_x + D_{12}^{(l)} \varrho_y = 0, \quad (2)$$

ahol $D_{11}^{(l)}$ és $D_{12}^{(l)}$: a lemez igénybevételeire vonatkozó merevségi tényezők.

Figyelembe véve az (1) és a (2) összefüggést, az $x = 0$ és az $x = a$ peremre merőleges görbület így írható fel:

$$\varrho_{0x} = -\frac{D_{12}}{D_{11}} \varrho_{0y}, \quad \varrho_{ax} = -\frac{D_{12}}{D_{11}} \varrho_{ay}. \tag{3}$$

Az i -edik sáv teljes lehajlásfüggvényét a következő alakban keressük (l. az 1. ábrát):

$$w^{(T)}(x, y) = w(x, y) + w^{(K)}(x, y). \tag{4}$$

Itt $w(x, y)$ a lemezsávoknál szokásos elmozdulásfüggvény [1], [2], [3], $w^{(K)}$ pedig olyan kinematikailag lehetséges lehajlás, amely kielégíti a fenti kerületi feltételeket. Ez utóbbi részletesen:

$$w^{(K)} = w^{(1)}(x, y) + w^{(2)}(x), \tag{5}$$

$$\text{ahol } w^{(1)} = [L_1, L_2, L_3, L_4] \left\{ \begin{array}{l} w_{0i} \\ \Theta_{0i} \\ w_{0j} \\ \Theta_{0j} \end{array} \right\} + x/a \left\{ \begin{array}{l} w_{ai} - w_{0i} \\ \Theta_{ai} - \Theta_{0i} \\ w_{aj} - w_{0j} \\ \Theta_{aj} - \Theta_{0j} \end{array} \right\}$$

$$w^{(2)} = \frac{\varrho_{ax} - \varrho_{0x}}{6a} x^3 + \frac{\varrho_{ax}}{2} x^2 - a \left(\frac{\varrho_{0x}}{3} + \frac{\varrho_{ax}}{6} \right) x.$$

Itt $[L_1, L_2, L_3, L_4] = \mathbf{c}^*(y)$: Hermite-féle interpolációs polinomok vektora [1], [2].

A (4) függvény első tagja tartalmazza a csomóvonali elmozdulásismeretlenek \mathbf{w}_m Fourier-együtthatóit [2], amelyeket a csomóvonalak egyensúlyi feltételéből lehet meghatározni; ezt a virtuális elmozdulások tételével írjuk fel:

$$\int_{(F)} \delta \mathbf{\epsilon}^* \mathbf{D}^{(l)} (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^{(K)}) dF = 0, \tag{6}$$

ahol $\delta \mathbf{\epsilon}^*$ a virtuális alakváltozások vektora,

$\mathbf{D}^{(l)}$ a lemez igénybevételeire vonatkozó merevségi mátrix,

$\boldsymbol{\epsilon}$ a $w(x, y)$ lehajlásból számítható tényleges alakváltozások vektora,

$\boldsymbol{\epsilon}^{(K)}$ a $w^{(K)}$ -nak megfelelő, kinematikailag lehetséges alakváltozások vektora,

az integrálást a sáv egész F területére ki kell terjeszteni.

A sáv egyensúlyi egyenletrendszeré ezután a (4) függvényt sorbafejtve, a Fourier-sorok ortogonális tulajdonságainak felhasználásával az m -edik Fourier-tagra vonatkozóan ilyen alakú lesz:

$$\mathbf{K}_m \mathbf{w}_m + \mathbf{t}_m = \mathbf{0}, \tag{7}$$

ahol K_m : a sáv m -edik merevségi mátrixa [2],

t_m : a terhelési tagok vektora.

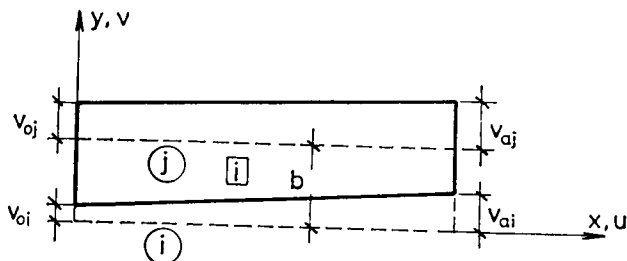
Ez utóbbi a következő összefüggéssel határozható meg:

$$t_m = \left\{ -D_{12}^{(l)} k_m^2 \int_0^b c c^{*'} dy + D_{22}^{(l)} \int_0^b c'' c^{*'} dy \right\} w_m^{(l)} + \\ + \left\{ -k_m^2 D_{11}^{(l)} \int_0^b c dy + D_{12}^{(l)} \int_0^b c'' dy \right\} \varrho_{xm}, \quad (8)$$

ahol

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad c'' = \frac{d^2 c}{dy^2},$$

$w_m^{(l)}$ ill. ϱ_{xm} : a $w^{(1)}$ ill. a $-d^2 w^{(2)}/dx^2$ függvény m -edik sinusos Fourier-együtthatója.



2. ábra

Igazolható, hogy ez a tehervektor a merevtestszerű elmozdulásoknak és a sáv tiszta csavarásának megfelelő előírt elmozdulások esetében zérus.

3. Tárcsasávok

A 2. ábrán láthatók a i -edik tárcsasáv előírt eltolódásai: v_{0i} , v_{ai} , v_{0j} , v_{aj} . Ha a sávok elég keskenyek, akkor az előírt eltolódások által meghatározott ε_y fajlagos nyúlásokat a peremeken állandónak tekinthetjük; ezek az $x = 0$ és az $x = a$ támaszon a következők:

$$\varepsilon_{0i} = \frac{v_{0j} - v_{0i}}{b}, \quad \varepsilon_{aj} = \frac{v_{aj} - v_{ai}}{b}. \quad (9)$$

Az x -irányú eltolódásokat az 1. pontban ismertetett megtámasztás miatt nem lehet előírni, mivel az $x = 0$ és az $x = a$ helyen $\sigma_x = 0$. Ez utóbbi feltevélt pedig részletesen így írhatjuk fel:

$$\sigma_x = D_{11} \varepsilon_x + D_{12} \varepsilon_y = 0, \quad (10)$$

ahol D_{11} és D_{12} : az általánosított Hooke-törvény merevségi tényezői.

A (9) és a (10) összefüggések alapján az $x = 0$ és az $x = a$ peremekre merőleges ϵ_x fajlagos nyúlás így írható fel:

$$\epsilon_{0x} = -\frac{D_{12}}{D_{11}} \epsilon_{0y}, \quad \epsilon_{ax} = -\frac{D_{12}}{D_{11}} \epsilon_{ay}. \tag{11}$$

Az i -edik tárcsasáv teljes elmozdulásfüggvényét az alábbi alakban keressük:

$$u^{(T)}(x, y) = u(x, y) + u^{(K)}(x, y) \tag{12}$$

Itt $u(x, y)$ a tárcsasávoknál szokásos elmozdulásfüggvény [1], [2], [3], $u^{(K)}$ pedig kinematikailag lehetséges elmozdulásfüggvény, tehát kielégíti a fenti kerületi feltételeket. Ez utóbbi részletesen felírva:

$$u^{(K)}(x, y) = u^{(1)}(x, y) + u^{(2)}(x, y), \tag{13}$$

$$\text{ahol } u^{(1)} = \begin{bmatrix} L_5 & 0 & L_6 & 0 \\ 0 & L_5 & 0 & L_6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ v_{0i} \\ 0 \\ v_{0j} \end{bmatrix} + x/a \begin{bmatrix} 0 \\ v_{ai} - v_{0i} \\ 0 \\ v_{aj} - v_{0j} \end{bmatrix} \right\},$$

$$u^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{ax} - \epsilon_{0x}}{2a} x^2 + \epsilon_{0x} x - \frac{a}{8} (3\epsilon_{0x} + \epsilon_{ax}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Itt $L_5(y)$ és $L_6(y)$ lineáris interpolációs polinomok [2]. A (12) függvény első tagja tartalmazza a csomóvonal elmozdulásismeretlenek Fourier-együtthatóit. Ezeket a virtuális elmozdulások tétele segítségével az előző pontban vázolt gondolatmenet alapján levezetett, s a (7)-hez hasonló alakú egyenletekből határozhatjuk meg. A terhelési tagok vektora tárcsasávnál:

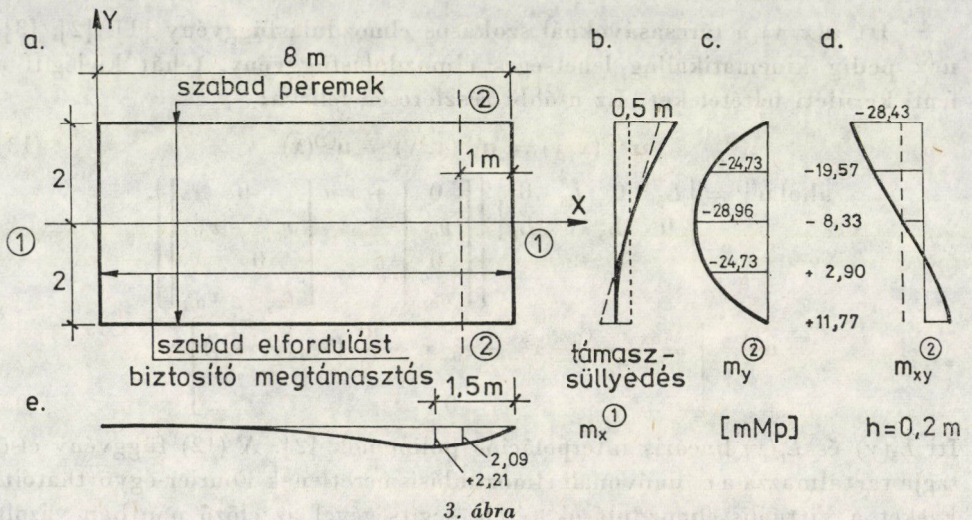
$$t_m^{(i)} = \frac{h}{a} \{v_{0i} - v_{0j} - (-1)^m (v_{ai} - v_{aj})\} \begin{bmatrix} D_{12} \\ \frac{2a}{m\pi b} D_{22} \\ D_{12} \\ \frac{-2a}{m\pi b} D_{22} \end{bmatrix} + \tag{14}$$

$$+ \frac{2h}{m\pi} \{\epsilon_{0y} - (-1)^m \epsilon_{ay}\} \begin{bmatrix} \frac{b}{2} D_{11} \\ -\frac{D_{12}}{b} \\ \frac{b}{2} D_{11} \\ -\frac{D_{12}}{b} \end{bmatrix}.$$

Ez a tehervektor merevtestszerű elmozdulások és tiszta szögváltozás esetén zérus.

4. Számpélda

A 3a. ábrán látható derékszögű izotrop lemez rugalmassági modulusa $100\,000\text{ kp/cm}^2$, Poisson-féle tényezője $1/5$. A lemezt X -irányban nyolc egyenlő szélességű sávra osztottuk. Az $X = 8,0\text{ m}$ helyen levő peremen a 3b ábrán



látható másodfokú parabola alakú eltolódást írtuk elő, amely három részből tehető össze: a támasz egyeneses süllyedéséből (pontosított vonal), az X tengely körüli elfordulásából (szaggatott vonal) és az X tengelyre szimmetrikus parabola alakú süllyedésből (folytonos vonal). Az első rész nem okoz igénybevételeket, a második rész pedig az egész lemezben tiszta csavarást okoz. Ezért a ② jelű metszet m_y ábrája (3c) az X tengelyre nézve szimmetrikus, m_{xy} ábrája állandó részből és az X tengelyre nézve ferdén szimmetrikus részből tevődik össze (3d). A 3e. ábrán az ① jelű metszet m_x ábráját mutatjuk be. A közölt eredményeket 40 Fourier-tag figyelembevételével kaptuk. A 20 Fourier-taggal kapott eredmények ezektől legfeljebb 5 százalékkal térnek el.

IRODALOM

1. Y. K. CHEUNG: Finite strip method in structural analysis. Pergamon Press, 1976
2. SZILÁGYI GYÖRGY: Speciális felületszerkezetek számítása a véges sávok módszerével. *Építés-Építészettudomány*, Vol. IV. (1973), pp. 395–414
3. SZILÁGYI GYÖRGY: Quelques application de la méthode des bandes fines. *Mémoires, Association Internationale des Ponts et Charpentes*, Vol. 34-II. (1974), pp. 149–168
4. SZILÁGYI GYÖRGY—MACZ ESZTER: Szekrénykeresztmetszetű hidak számítása a véges sávok módszerével. *Mélyépítéstudományi Szemle*, Vol. XXVII. (1977), pp. 159–167

Application of the finite strip method in the case of support displacements. The paper explains how to take into account specified displacements in the case of rectangular plate or plane stress strips. The load vector can be determined by equations (8) and (14), respectively. As a conclusion, a numerical example is given on the parabolic subsidence of one of the supports of a one-span plate.

Anwendung der Methode finiter Streifen im Falle von Auflagerverschiebungen. Der Aufsatz behandelt die Berücksichtigung der vorgeschriebenen Verschiebungen im Falle von rechteckigen Platten- bzw. Scheibenstreifen; der Lastvektor kann mit den abgeleiteten Beziehungen bestimmt werden. Der Aufsatz endet mit einem Zahlenbeispiel, das die parabolische Setzung einer der beiden Stützen einer einfeldrigen Platte zum Gegenstand hat.‡

Применение метода конечных поясов в случае перемещения опор. В работе излагается учёт предписанных перемещений в случаях прямоугольных поясов плоской задачи или изгибающей плиты. Вектор нагрузки определяется с помощью формулы (8) и (14). В конце работы находится численный пример двухопорной плиты, один из опоров снижается по форме параболы.