AZ EUKLIDÉS ELŐTTI MATEMATIKA FELFEDEZÉSE

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

A tudománytörténetírás legnehezebb kérdései közé tartozik a matematika eredetének a problémája. Amíg a görög matematika élő valóság volt, BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ nagy felfedezéséig, ez a kérdés nem okozott túl sok gondot. A görög matematika EUKLIDÉSszel és a PLATÓN körében kialakult magasabb geometriai módszerekkel kezdődött. EUKLIDÉS rakta le a görög geometria szigorú logikai-axiomatikus alapjait, a PLATÓN körében kialakult magasabb geometria pedig a kúpszeletek és a geometriai hely elméletére vezetett. EUKLIDÉS ezenkívül összeköttetést jelentett a platoni iskola és a hellenisztikus kor matematikája között, amenynyiben a reductio ad absurdum módszerének a bevezetésével lehetővé tette az irracionalitás formájában felmerült infinitézimális kérdések indirekt úton való megoldását. Az infinitézimális geometria területén ugyanis a görög geometria „nem volt még elég előrehaladott ahhoz, hogy direkt bizonyításokat szolgáltasson”.[1] Így látta a matematika kezdeteit a múlt század közepén MICHAEL CHASLES, a kor egyik legnagyobb geométere. Rövid öt oldalon tekinti át a görög matematika kezdeteit, s azután rögtön áttér az EUKLIDÉS utáni, hellenisztikus matematikára, amit részletesen ismertet, harminchét oldalon keresztül.

A görög matematika történetének egy kitűnő, modern összefoglalása,[2] amit a XX. század egyik legnagyobb matematikusa és matematikatörténésze, B. L. van der WAERDEN írt, nyolc fejezet közül mindössze kettőben foglalkozik a hellenisztikus matematikával, alig ötven oldalon. A könyv nagy része, az első hat fejezet, a korai babiloni és görög matematikáról szól.

Amikor CHASLES írt, akkor a hellenisztikus kor, beleértve a késő hellenisztikus, római és kora bizánci fejlődést is, jelentette a tudományt.[3] A korai idők, THALÉS, PYTHAGORAS, legenda és mitosz homályába burkolt, talán csak a megbízhatatlan korai tradíció által kitalált alakok voltak.

B. L. VAN DER WAERDEN korára a helyzet megfordult: a hellenisztikus kor vált legendák, vallások és mítoszok szülőjévé, amelyik csak fenntartotta, vagy részle-

[1] CHASLES, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Paris [2]1875 ([1]1837). 4–9.

[2] WAERDEN, B. L. van der: *Science awakening.* Groningen 1954. (*Ontwakende wetenschap. Egyptische, babylonischen en griekse wiskunde.* Groningen 1950.)

[3] L. pl. J. G. DROYSEN: *Geschichte Alexanders des Grossen.* Berlin 1833. — Durch Aristoteles war jener grossartige Empirismus ins Leben gerufen, dessen die Wissenschaft bedurfte, um des ungeheuren Vorrates von neuem Stoff, den Alexanders Züge jedem Zweige des menschlichen Erkennens eroberten, Herr zu werden. ... Die eigentümliche Entwickelung des griechischen Geistes hatte bisher die Philosophie als den Inbegriff alles Wissens dargestellt; jetzt emanzipierten sich die einzelnen Richtungen des Erkennens. (Kröners Taschenausgabe, Leipzig é. n. 482–483.).

tezte, s később hanyatlásba vitte a korai tudományos fejlődés eredményeit.[4] A hellenisztikus kor a XX. században a vallástörténet területe lett, a korai idők, Babilon és a görög hatodik és ötödik század a tudománytörténetírásé.

Az első tudomány, a matematika születésének a megítélésében a vélemények nagyon eltérőek. A matematika kezdeteit a történészek egy része a görög világba helyezi, mások a babiloni kultúrkör ajándékának tekintik, s a második-harmadik évezred fordulójára viszik vissza.

Az első irány elindítója PAUL TANNERY volt, a másik irány több szálból fonódott össze, s ma OTTO NEUGEBAUER a legjellegzetesebb képviselője.

PAUL TANNERY[5] eredetileg mérnök volt s a francia dohányiparban dolgozott. Mint tudománytörténésznek a korai görög tudomány mellett a XVII. század természettudománya volt a legfontosabb szakterülete. Az ő nevéhez fűződik FERMAT műveinek kiadása, s élete utolsó évtizedei a monumentális DESCARTES-kiadással forrottak össze.

Számos közleményén kívül három fontos könyve jelent meg a görög tudomány kezdeteiről: *Pour l'historie de la science hellène de Thalès a Empédocle*, Paris 1887. — *La géométrie grecque. Essai critique*. I. P. Paris 1887. — *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, Paris 1893. Utóbbiban az első nagy áttekintést adja a görög tudomány egészéről. A Bevezetésben a görög tudomány történetét négy periódusra osztja: hellén tudomány (ARISTOTELÉSsel bezárólag), alexandriai tudomány

[4] TARN, W. W.: *Hellenistic civilisation.* London ^{3}1952 (^{1}1927). — Everything was ready for an outburst of activity, which came as soon as Alexander had in effect quadrupled the rise of the known world. (259.) Pár generáción keresztül páratlan tudományos virágzás következik be. But it contained also one of those queer contradictions of which Hellenism was full; we regard science as essentially European, but Hellenistic astronomy was partly due to Babylonians. (296.) A görögök geometrizálták a babiloni csillagászati empiriát, ez vezetett a geocentrikus rendszer végleges megszilárdulására. The pity of it was that, could heliocentrism have been established, it should have killed astrology and saved the world infinite trouble. (298). Ezzel szemben Vö. GEORG SARTON: *A history of science. Hellenistic science and culture in the last three centuries B. C.* Cambridge (Mass.) 1959. 317: It is not true, as Tarn claims, that Hipparchos' rejection of heliocentrism assured the success of astrology, but his acceptance of the astral religion implied astrological possibilities. Ezenkívül SARTON szerint az astrológia előretörését a Stoa epikureizmus feletti győzelme döntötte el. Viszont S. SAMBURSKY: *Physics of the stoics.* London 1959. éppen a stoikusokban látja a modern fizika megalapozóit. Utóbbi interpretáció azonban erős ellenzésre talált. Vö. CH. C. GILLISPIE, *Isis* 49 (1958) 356—358 és M. E. SEESOR, *Isis* 51 1960, 233. — M. CLAGETT, aki a középkori tudomány specialistája, még a késő görög tudományban sem hanyatlást, hanem kiegyenlítődést lát: This leveling off was undoubtedly tied up with complicated social and political changes brought about in the Mediterranean area by the rise and spread of Roman power. But it would have taken a fine eye in the first two or even three centuries of the Christian ere to detect any decline in Greek science or the Greek rational spirit by an examination alone of the works of the best scientists. (M. CLAGETT: *Greek science in antiquity.* New York 1955. 115. (CLAGETT szerint a görög csillagászat csúcsát PTOLEMAIOS jelenti, és még asztrológiai főműve, a Tetrabiblos is „kritikai szellemet sugároz". (Uo. 116.)

Nyilvánvaló, hogy a tudománytörténetírás még az előfeltételéig sem jutott el annak, hogy megírható legyen a hellenisztikus kor tudománytörténete. KARL REINHARDT két könyve: *Poseidonios.* München 1921 és *Kosmos und Sympathie.* München 1926 mutatja, mi minden vár még ezen a területen tisztázásra. Először is el kell jutni a források, a kifejezések és a szavak megértéséig, vagy helyesebben, hogy a reinhardti metodikához hűbben fejezzük ki magunkat, a megértésük kapujáig. Azután újra és újra meg kell kísérelni eljutni más irányokból ugyanezekig a kapukig, anélkül, hogy korai szintézis csábítását követve, átlépnénk rajtuk.

[5] TANNERY életéről és működéséről lásd *Osiris* 4 (1938) Part 2 633—689 és *Revue d'Histoire des Sciences* 7 (1954) No. 4.

(EUDÉMOStól kb. i. sz. kezdetéig), görög–római tudomány (i. sz. kezdetétől kb. CONSTANTINUSig és a kommentátorok kora (i. sz. VI. század végéig). Mindegyik periódus kb. 300–300 évig tart. Igazán teremtő csak az első: ekkor rakják le a görög tudomány (és nem filozófia!) alapjait. A második periódusban már csak a matematika fejlődik. „Epikureusok és stoikusok foglalkoznak ugyan fizikával, mégpedig sokat; de az előbbiek nézőpontja — egy általános a priori hipotézissel összeférő különböző magyarázatokkal szembeni teljes közömbösség — minden természettudományos haladásnak a tagadását jelenti, az utóbbiaknak pedig még az alaptanításaik is ellentétesek a természettudománnyal."[6] A harmadik, a görög–római periódus elején TANNERY szerint a stoa uralkodik, de az i. sz. III. században visszafordulnak a régi mesterek, PLATÓN, ARISTOTELÉS, PYTHAGORAS felé. Ez az eklektikus, misztikus, szinkretizmusra törekvő irány azonban nem vezet új szintézishez, és a CONSTANTINUSszal kezdődő új korszak a lélek nélküli utánzás, a kompiláció, a kommentátorok kora lesz.[7]

A négy periódusból az első, s a másodikból száz év: ez az antik világ 1200 évéből a teremtő, a legérdekesebb korszak; ez TANNERY nagy áttekintésének a végső következtetése. Közel 70 év múlva TOBIAS DANTZIG kimutatást készít a 27 legjelentősebb görög matematikus születési helyéről és a fenti négy periódus szerinti megoszlásáról: I. e. 600 és 300 közé esik 13 matematikus 9 városból, 300 és 0 közé 10 matematikus 5 városból, i. sz. 0 és 300 közé 4 matematikus egyetlen városból, Alexandriából.[8]

Ma már természetesnek tűnik, hogy a görög tudomány legérdekesebb periódusa az első, a hellén-korszak. TANNERY előtt azonban ezt a kort egyáltalán nem tartották a természettudomány és a matematika szempontjából lényegesnek: ARISTOTELÉS szemüvegén át filozófusoknak, metafizikusoknak, titokzatos és mély értelmű bölcseknek tekintették a THALÉStől EMPEDOKLESig terjedő gondolkozók sorát. S TANNERY könyve után egyszerre „nem elérhetetlen metafizikusok többé, hanem tapasztalatlan tudósok, nagyon egyszerűek és éppen ezért annál merészebbek, ... fogalmaikban és formuláikban felhagynak minden misztikus jelleggel és gyakran ismerjük fel tanításaikban mai tudományunk egynémely jellegzetes tendenciáját" — írja TANNERY egyik tanítványa, GASTON MILHAUD.[9]

TANNERY ismeri fel például az eleai ZÉNÓN jelentőségét a matematika fejlődése szempontjából. ZÉNÓN maga nem volt matematikus, „de egyike azoknak, akik legtöbbet tették a matematika elvei érdekében, szigorúan körülírva a pont és a pillanat alapvető fogalmait" és frappáns módon alkalmazva a görög gondolkozásra egyébként is oly jellemző reductio ad absurdum módszerét.[10] ZÉNON nem ANAXAGORAS vagy LEUKIPPOS ellen támad híres paradoxonaival, mint általában hiszik, hanem a pythagoreusok ellen. „PARMENIDÉS olyan környezetben írta művét, ahol mint gondolkozók, egyedül a pythagoreusok állottak köztiszteletben." ZÉNÓN pedig nem a mozgás lehetetlenségét igyekszik kimutatni, hanem azt bizonyítja be, hogy a kontinuum nem képzelhető el indivizibilis elemek összegeként, „mert, ha ezeknek az elemeknek nincs semmi nagysága (grandeur), akkor összegük sem lehet,

[6] TANNERY, P.: *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Paris 1893. 3.
[7] Uo. 6–7.
[8] DANTZIG, T.: *The bequest of the greeks.* London 1955. 14.
[9] MILHAUD, G.: Revue des Idées 1906 No. 25 28–39.
[10] TANNERY, P.: *Pour l'histoire de la science Hellène. De Thales a Empédocle.* Paris 1887. 249.

másrészt, ha van nagyságuk, akkor, mivel számuk végtelen, összegük is végtelen lenne".[11]

Egy évtizeddel TANNERY könyve előtt HERRMANN HANKEL[12] még úgy tartotta, hogy ZÉNÓN nem tudott megbirkózni a végtelen és a mozgás kérdésével s a görög matematikai tudományok végleg száműzik a végtelen, a változás és a mozgás fogalmait. A görögök infinitézimál-fóbiájáról szóló legendát TANNERY műve sem tudja eloszlatni, még HEIBERGNÉL[13] is tartja magát, aki pedig TANNERY műveinek egyik kiadója, s kitűnő filológus volt. Az infinitézimális számítás fejlődéstörténetének monográfusa, OTTO TOEPLITZ, jól tudja, hogy a görögöknél szó sincs a végtelentől való irtózástól, s ő is ZÉNÓN paradoxonait tekinti a végtelen fogalmával dolgozó matematika kezdetének. ZÉNÓN „csak olyan végtelen processzus ellen tiltakozik, amivel kontinuum átfutásakor találkozunk".[14] Ugyanez volt lényegében TANNERY véleménye is.

Az ugyancsak 1887-ben megjelent *La géométrie grecque* mintaszerű és a tudománytörténetírásban úttörő analízissel kezdődik. Megvizsgálja a hozzáférhető szövegek tükrében a proklosi adatokat, s annak a segítségével, amit megbízhatónak talált belőlük, analizálja az euklidési „Elemek"-et. S ezzel elkezdődött a tudománytörténet egyik legérdekesebb és legfontosabb kalandja, az „Elemek" egyes könyveinek és tételeinek részletes vizsgálata abból a szempontból, hogy a korai görög matematika fejlődésének melyik fázisába tehetők. A nehézséget az jelenti, hogy a korai görög matematika egyes fázisait jóformán alig ismerjük máshonnan, mint éppen az „Elemek"-ből. Ezenkívül egy pár korai töredék — ARCHYTAS kockamegkettőzése, és HIPPOKRATÉS holdacskák területére vonatkozó vizsgálatai — és ARISTOTELÉS sok, de matematika iránt nem nagy megértést mutató locusa, s a késői kommentátorok nagyon is kérdéses megbízhatóságú adatai állnak rendelkezésre. Érthető, ha az EUKLIDÉS előtti görög matematika rekonstrukciója távolról sem tekinthető megoldott kérdésnek. Ezen a területen való munka a matematikai hozzáértésen, a fokozott filológiai és forráskritikai gondosságon kívül sok leleményességet is igényel. És állandóan fennáll egy sajátos circulus vitiosus veszélye: az „Elemek"-ből rekonstruált korai görög matematika szolgál keretül az „Elemek" egyes tételeinek a kronológiájához.

TANNERY még csak nagyjából osztja fel az „Elemek"-et a korai görög matematika egyes korszakai között. Az „Elemek"-et addig a görög elemi geometria tankönyvének tekintették, TANNERY egy hosszú történelmi fejlődés filológiai jellegű összefoglalását ismeri fel benne, amelynek a kezdetei legalábbis az i. e. V. század közepéig nyúlnak vissza. TANNERY szerint már ekkor lennie kellett a görög geometriában kézikönyvszerű összefoglalásoknak. Ezen túl a HIPPOKRÁTÉSTŐL fennmaradt töredék azt mutatja, hogy már a görög felsőbb mennyiségtan, a körzővonalzóval meg nem oldható feladatok geometriájának az alapjai is készen vannak.[15]

[11] Uo. 255.

[12] HANKEL, H.: *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.* Leipzig 1874.

[13] HEIBERG, I. L.: *Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum. München* 1925. 4.

[14] TOEPLITZ, O.: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode.* Erster Band. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1949. 2.

[15] TANNERY, P.: *„Geometria."* (1895) = *Mémoires Scientifiques II.* Paris 1912. 472—486. — TANNERY megállapításai, mint általában, itt is inkább a geniális megsejtés, mint a bizonyított interpretáció szintjén mozognak, amit ő maga is kiemel: „En résumé, lés origines véritables de la

A hagyomány magának HIPPOKRATÉSnek is tulajdonított egy „Elemek"-et. De semmit sem mond arról, mit tartalmazhatott. TANNERY jóformán semmiből rekonstruálja ezt a korai „Elemek"-et. Szerinte legalábbis kérdésfelvetésben mindent tartalmazott, amit EUKLIDÉS „Elemei" az aritmetikai könyvek, a VII., VIII. és IX. kivételével magukban foglalnak. Ezek a hippokratési „Elemek" pedig valószínűleg magáig PYTHAGORASig vagy PYTHAGORAS közvetlen tanítványaiig visszanyúló pythagoreus geometriára támaszkodnak.[16]

Volt-e ennek megfelelő pythagoreus aritmetika is? TANNERY szerint ugyanis az euklidési „Elemek" aritmetikai könyvei nem pythagoreus eredetűek, a pythagoreus aritmetika ennél primitívebb kellett hogy legyen, és mást is kellett tartalmazzon — legalábbis ha az i. sz. I.—II. századból származó neopythagoreus forrásoknak némi hitelt adunk. Megint az a kérdés, mit lehet elhinni ezekből a késői forrásokból? TANNERY felhívja rá a figyelmet, hogy már ARISTOTELÉS kifejezetten a pythagoreusoknak tulajdonít egy, a négyzet átlójának és oldalának az incommensurabilitására vonatkozó bizonyítást, ami azon alapszik, hogy a commensurabilitás egyszerre követelné meg ugyanazon szám páros és páratlan voltát. Ez a bizonyítás, ami EUKLIDÉSben is megtalálható, olyan számfogalmon alapszik, ami az euklidésinél sokkal primitívebb. Ez a számfogalom lehetett a pythagoreus aritmetika alapja.[17] Mindez azonban csak sejtés, és a nyitott kérdések özönét hagyja maga után. „Voilà, les questions qui restent toujours ouvertes, car, si j'ai cherché à les discuter, je n'ai nullement prétendu leur donner une solution définitive."[18] Mindenesetre annyi gyanítható, fejezi be TANNERY, hogy „egy, elsősorban minden szám általános tulajdonságát, s azután a tíz első szám speciális tulajdonságait tárgyaló aritmetika terve nem képzelhető el ARCHYTAS előtt, de feltétlenül megvan az őt közvetlenül követő generációban".[19]

Foglaljuk össze még egyszer a TANNERY-interpretáció centrális gondolatát: Az „Elemek" minden lényeges eredménye és a tárgyalási mód is már messze EUKLIDÉS, sőt PLATÓN előtt készen áll, a geometriai könyvek a pythagoreus matematika gyors fejlődéséből emelkedtek ki az V. század során, az aritmetikai könyvek ARCHYTAS vagy az őt közvetlenül követő generáció művei. PLATÓNnak már semmi egyéb szerepe sem marad a görög matematika fejlődésében, minthogy felhívja a figyelmet a térgeometriai problémák fontosságára.

Ezt az interpretációs vázat töltötték ki a XX. század során részletekkel. Ahol TANNERY általánosságban korokat és generációkat jelölt meg, ott meg kellett keresni az „Elemek" egyes könyveihez tartozó neveket, illetve iskolákat. Az alábbiakban, mintegy példaként az ilyen típusú rekonstrukciók szerkezetére, analizáljuk a matematikus THEAITÉTOS „feltámasztásának" a történetét.

Abban az időben, amikor THEAITÉTOS, a matematikus modern hírneve megalapozódott, a klasszika-filológiában U. von WILAMOWITZ-MOELLENDORFF inter-

---

géométrie théorique chez les grecs restent passablement obscures; on peut simpliment en dire que le gout pour l'étude des propriétés des figures parait un trait caractéristique de la race grecque..." (475.)

[16] A *La géométrie grecque.* Paris 1887. számomra nem volt hozzáférhető. TANNERY véleményét itt másodkézből idézem: P.-H. MICHEL: *De Pythagore a Euclide.* Paris 1950. 168—209. Ez a könyv a kérdésre vonatkozó szakirodalmat is bőven tárgyalja a harmincas évek végéig.

[17] TANNERY, P.: *Pour l'histoire de la science Hellene.* Paris 1887. 369—391. *Appendice II. Sur l'arithmétique pythagorienne.*

[18] Uo. 391.

[19] Uo. 379—380.

pretációs iránya uralkodott. Ő volt a XX. század első felének legnagyobb nevű klasszika-filológusa. NIETZSCHE intuitiv-impresszionista „Zukunftsphilologie"-je elleni éles támadással kezdte gyorsan felfelé ívelő pályáját. A század elején már Berlinben professzor, tekintélye és népszerűsége óriási. De a GEORGE-kör nagy megvetéssel nézte működését, s *Platón*-biográfiáját „ein Platon für Dienstmädchen"-nek minősítette GUNDOLF. WILAMOWITZ-MOELLENDORFF MOMSEN pozitivista, ténytisztelő módszerein nőtt fel. Az interpretációnak a tények gondosan halmozott tömegére kellett felépülni. Semmiféle kitalálásnak, álmodozásnak nem volt benne helye. Az így megalapozott interpretáció a természettudományhoz fogható komoly tudomány igényével lép fel, hatalom lesz. Egy WILAMOWITZ-MOELLENDORFF-tanítvány, EVA SACHS doktori disszertációja körvonalazta a matematikus THEAITÉTOS alakját PLATÓN hasonló című dialógusa alapján 1914-ben.[20]

H. G. ZEUTHEN, aki matematikus volt, a modern matematikai fogalomképzés felől közeledett PLATÓN dialógusához, s THEAITÉTOS mesterében, THEODOROSban ismeri fel annak az új, nagy fontosságú matematikai elvnek a felfedezőjét, aminek az alapján THEAITÉTOS az „Elemek" VII., VIII. és X. könyveit megírta. THEODOROS a 3-tól 17-ig terjedő nem-négyzet számok négyzetgyökeinek az irracionalitását ZEUTHEN szerint egy olyan új kritérium alapján bizonyítja, ami a végtelen törteken alapul, „servant à déterminer le plus grande commune mesure de deux nombres donnés: si cette opération, appliquée à des quantités générales représentées par des segments de droite, s'arrête d'elle-même, les quantités seront commensurables, si elle se continue à l'infini, incommensurables."[21]

ABEL REY THEODOROST, s rajta keresztül THEAITÉTOSt a pythagoreus matematika képviselőinek tartja.[22] O. BECKER egy-egy külön fejlődési fokot fűz a THEODOROS és THEAITÉTOS nevéhez,[23] s végül B. L. VAN DER WAERDEN a platóni dialógus és az „Elemek" X. könyve alapján rekonstruálta THEAITÉTOS elveszett könyvét.[24]

Láttuk, hogy ZEUTHEN a VII., VIII. és X. könyvet mind THEAITÉTOS munkájának tartotta s ezáltal THEAITÉTOS műve elsősorban aritmetikai jelleget öltött. VAN der WAERDEN a VII. könyvben az ARCHYTAS előtti pythagoreus aritmetikai kézikönyv primitív formáját látja és a VIII.-ban ennek folytatását. De szemben a VII. könyv logikai egységével, a VIII. könyvet logikai tekintetben gyengének tartja. A VIII. könyvben egy általános elvekig felemelkedni nem tudó arányelméletet lát, ami teljes ellentétben áll a X. könyv logikai zártságával. A X. könyvet PLATÓN tanítványának, THEAITÉTOSnak tulajdonítja. A VIII. könyv szerinte a PLATÓNt egy generációval megelőző ARCHYTAS műve. A VIII. könyv logikai gyengéi nem a kor matematikájának közös hibái: a VII. könyv ugyanis magas logikai készültséget árul el, s ARISTOTELÉS is ezen kor matematikai kézikönyveiből vonta le logikai szabályait. Ez a logikai lazaság ARCHYTAS sajátja, ő VAN DER WAERDEN szerint „is constantly at odds with logic, trying unsuccessfully to meet its strict demands".[25]

[20] SACHS, EVA: *De Theaeteto atheniensi mathematico.* Berlin 1914.

[21] ZEUTHEN, H. G.: *„Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles".* Oversigt over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs forhandlingen. Copenhague 1915. 333–362. Idézi P. -H. MICHEL: *De Pythagore a Euclide.* Paris 1950. 468.

[22] REY, A.: *L'apogée de la science technique grecque.* Paris 1946. 189–190.

[23] 23. BECKER, O.: *„Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen Elemente."* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. B3 (1936), 533–553.

[24] WAERDEN, B. L. van der: i. m. V. és VI. fejezet.

[25] Uo. 155.

A VII. könyv is arányelmélet, WAERDEN ezt tartja annak a pythagoreus kézikönyvnek, aminek a létezését már TANNERY sejtette. WAERDEN szerint feltehető, hogy ennek az elméletnek a kidolgozására a törtekkel való számolás vezetett. Törtek a hivatalos görög matematikában ARCHIMÉDÉS előtt nem fordulnak elő, de a gyakorlatban természetesen használni kellett őket. Annak az oka, hogy a törteket az elméletből kiküszöbölték, az egység elméleti oszthatatlansága volt. A törtek fogalmának matematikai aequivalense a számok aránya lett. „Törtek legkisebb kifejezésekre való redukciója helyébe számok arányának legkisebb kifejezésekre való egyszerűsítése lép, ezt kutatja elméletileg a VII. könyv."[26] Ennek a pythagoreus arányelméletnek a geometriai segédeszközeit jelentik a II. könyv bizonyos tételei, s ebbe a keretbe illik ARCHYTAS híres kockamegkettőzése: két adott számhoz két középarányos szerkesztése. És hogy az egész gondolatkör mennyire a pythagoreus világkép szerves része, azt szépen demonstrálja WAERDEN az *Archytas*-féle szerkesztés zeneelméleti megfelelőjére való utalással.

Ezt az egész jól kiépített *pythagoreus* gondolatkört egyetlen veszély fenyegette: az, hogy „vonalszakaszokat nem mindig lehet számokkal kifejezni, vagy pontosabban fogalmazva, vonalszakaszok arányai nem mindig fejezhetők ki egész számok arányaiként. Más szóval: léteznek incommensurabilis vonalszakaszok."[27]) Ez a tény, s nem pedig mint TANNERY hitte, a $\sqrt{2}$ irracionális voltának a felfedezése vezetett WAERDEN szerint a görög matematika fokozódó geometrizálódására. A pythagoreusok nagyon jól ismerték az irracionális arányokat, más oka volt, hogy a $\sqrt{2}$-t nem tekintették számnak: a szám definíciójához való ragaszkodásuk. „ARITHMOS számot jelent, ezért egész számot, logikai szigoruk még azt sem engedte meg, hogy törteket vezessenek be; egész számok arányaival helyettesítették őket."[28] Így válik centrális kérdéssé a görög matematikában számok és vonalszakaszok egymáshoz való kapcsolata. Erről szól PLATÓN THEAITÉTOSának sokat idézett része, erről szól az „Elemek" X. könyve, ami WAERDEN szerint nem egyéb, mint THEAITÉTOS EUKLIDÉS által kissé elrontott, elveszett könyve.

Fontossága miatt hosszan kell idéznünk WAERDENnek a X. könyvről adott analízisét: „Mérhetőnek (measurable) nevezünk a továbbiakban egy vonalszakaszt (vagy egy területet), ha commensurabilis egy rögzített e vonalszakasszal (vagy egy e^2 négyzettel). EUKLIDÉSben a mérhető területeket kimondhatónak (expressible) (ῥητός) nevezik. Másrészt azokat a vonalakat nevezik kimondható (expressible) vonalaknak, amelyek mérhető négyzetekre vezetnek, tehát nemcsak mérhető vonalakat, hanem olyan nem mérhető vonalakat is, mint a 3, 5, ... területű négyzetek oldalai, amiket THEODOROS vizsgált. Ez a terminológia egyik első következménye azon osztályozási elvnek, amely a vonalszakaszokat az általuk előállított négyzetek szerint osztályozza. Minden egyéb vonalszakaszt irracionálisnak (ἄλογος) neveznek."[29] Ugyanez a beosztás jelentkezik PLATÓN dialógusában is, ahol THEAITÉTOS bizonyos vonalszakaszok incommensurabilitására a feléjük emelt négyzetekből következtet. S mivel bizonyos, a X. könyvben definiált irracionális vonalak esetében ez a vizsgálat téglalapok négyzetté alakítását követeli meg, a X. könyv felhasználja a II. idevonatkozó erdményeit.

[26] Uo. 115.
[27] Uo. 158.
[28] Uo. 125.
[29] Uo. 167.

Az egész X. könyv egységes szellemű. WAERDEN szerint még az is bizonyít, ami a könyvből hiányzik: ti. egy logikailag odaillő arányelmélet, ami összeköttetést jelentene a X. 2. és 3-ban bevezetett antanairesis-en alapuló commensurabilitás-kritérium és a később tárgyalt irracionális vonalszakasz típusok között. EUKLIDÉS itt az V. könyvön alapuló arányelméletet alkalmaz, amit THEAITÉTOS nem használhatott, mert az V. könyv EUDOXOS műve. Ugyancsak nem használhatta a régebbi, VII. könyv által reprezentált arányelméletet sem, mert az incommensurabilis vonalszakaszokra nem érvényes.

WAERDEN szerint ARISTOTELÉS egy helye (Topica 158 b) vet fényt rá, mit hagyott itt ki EUKLIDÉS. ARISTOTELÉS általánosságban beszélve a definícióról, megemlíti, hogy „két terület és két vonal akkor arányosak, ha a területek és a vonalak azonos antanairesissel (ἀνταναίρεσις) rendelkeznek"[30]. Mint egy ilyen arányelmélethez szükséges előzmény érthető meg a X. 1. „Most már minden világos — írja WAERDEN— THEAITÉTOS nyilvánvalóan egy antanairesis-definíción alapuló arányelmélettel kezdette volt a könyvét. Szokása szerint járva el, később felhasználandó lemmákkal indult; ezek közé tartozik a X. 1. A X. 2—3. tételekben bevezeti a végtelen és véges antanairesis elméletét, s egyben kritériumot nyer két vonalszakasz vagy két terület commensurabilitására. Valószínű, hogy a következő lépés arra az antanairesis-definícióra alapított arányelmélet volt, amelyikre ARISTOTELÉS célzott. EUKLIDÉS ezt a részt kihagyta, mert ő már adott egy másik arányelméletet az V. könyvben... A továbbiakban THEAITÉTOS racionális mennyiségekre és arányaikra vonatkozó elméletét fejtette ki arányelmélete alapján (X. 4,5. és 9—13.). Ebben a részben EUKLIDÉS a bizonyításokat másokkal cserélte fel, amiket ARCHYTAS és iskolájának az eredményeiből kölcsönzött. A következő főrészét a X. könyvnek, ami a 13-féle irracionális vonallal foglalkozik, gyakorlatilag változatlanul hagyta EUKLIDÉS."[31]

Ezek a hosszú idézetek nagyon jellemzőek nemcsak EUKLIDÉS, hanem — s a mi szempontunkból ez a fontosabb — VAN DER WAERDEN munkamódszerére is. Már két algebrista generáció nőtt fel a *Moderne Algebra*[32] kristálytiszta vonalvezetésű fejezetein: a számfogalom rövid, halmazelméleti bevezetése — közelítése a csoportelméleten át ahhoz, amit az algebra ért a szám fogalmán —, azután a gyűrűk és testek további beszűkítésén átvitt számoknak mint a „feléjük emelhető" magasabb képződményeknek, polinomoknak részletes vizsgálata — mindezt THEAITÉTOS sem építhette volna fel logikusabban, s PLATÓN bizonyosan nagyon meg lett volna elégedve vele.

WAERDEN THEAITÉTOSa a csúcsát jelenti annak a gazdag lehetőségeket nyújtó interpretációs iránynak, ami TANNERYből indult ki.

Ennek az interpretációs iránynak a nagy eredményei közé kell sorolnunk a babiloni matematika felfedezését is, jóllehet erdményei ellentmondásban látszanak lenni a matematika kezdeteiről TANNERY által kialakított képpel. WAERDEN kitűnően ismeri a babiloni matematikát s neki sikerült egységes képpé ötvöznie a matematika kora görög eredetének elméletét a babiloni kezdet teóriájával. Szerinte a görögök a babilóniaktól veszik döntő matematikai inspirációikat, mégis már nagyon korán, az ötödik század folyamán, ahogy TANNERY tartotta volt, kialakítják a babilonitól annyira eltérő szellemű és formájú matematikájukat.

[30] Uo. 177.
[31] 31. Uo. 179.
[32] WAERDEN, B. L. van der: *Moderne Algebra I.* Berlin [1]1936 [3]1950.

Ma már közismert a mezopotámiai kultúra felfedezéséért folytatott másfél évszázados küzdelem. Kevésbé ismeretes az a harc, amit FRANZ XAVER KUGLER SJ., a babiloni asztronómia egyik legnagyobb ismerője folytatott a század elején a pánbabilonisták ellen. Utóbbi irány képviselői a *Gilgames*-legendakör és néhány szakmai ékírásos tábla megfejtése alapján nemcsak a Bibliát, hanem az egész modern tudományos fejlődés alapjait, csillagászatot, matematikát, orvostudományt Babilonból kísérelték meg levezetni. KUGLER legfőbb bűne a pánbabilonisták szemében az volt, hogy a mitológiát és a tudományt szigorúan szétválasztotta: nem vezet olyan könnyű út a csillag-mitoszoktól a csillagászathoz — hangoztatta —, mint ahogy azt a pánbabilonisták hiszik. Nem lehet HIPPARCHOS felfedezésének alapjait Babilonban megtalálni. A babiloni csillagászat nem évezredes, hanem az i. e. utolsó hét évszázadban fejlődött ki. A babiloni tudomány megértését csak komoly asszirológiai, matematikai és csillagászati tudás birtokában lehet remélni, tanította KUGLER.[33] KUGLER atya örökségét: a British Museum agyagtábláiról készített másolatait és az asszirológiai s matematikai tudás egyesítését OTTO NEUGEBAUER vette át.

OTTO NEUGEBAUER Göttingában tanult matematikát, ő adta ki FÉLIX KLEIN híres felolvasásait a XIX. század matematikájáról.[34] NEUGEBAUER ugyanazt tette a babiloni tudományért, mint TANNERY a korai görög tudományért: kimutatta egy addig elsősorban misztikusnak és filozofikusnak tartott fejlődésről, hogy szigorú, egzakt s meglepően modern fogalmakkal dolgozó tudomány rejlik mögötte.

Azt már régen tudták, hogy Mezopotámiában nagyon korán, még a sumér korszakban, az ékírás felfedezésével körülbelül egy időben bevezettek egy hatvanas számrendszert, aminek a segítségével az alapműveletek elvégezhetőek voltak. A számrendszer azonban nem volt következetes, mert egyrészt kereszteződött a tízes számrendszerrel, másrészt kétértelműek a számjegyei, mert a korai időkben hiányzik a számjegyek közül a nulla. S egyébként sem jutnak képletekhez, általános algoritmushoz, mert a táblázataik ugyanazon típusba tartozó egyedi feladatok felsorolásából állanak. Sokszor valószínűleg nem egyebek iskolai gyakorlatoknál.[35] NEUGEBAUER éppen ezekben a hibákban ismeri fel a sumér számrendszer legnagyobb előnyét. Valóban, a nulla nem fordul elő benne, s ez a tény határozatlan helyértékrendszert eredményez — a mi tízes számrendszerünk határozott, abszolút helyértékrendszerével szemben. Ebben a határozatlan hatvanas számrendszerben „elvileg minden számjegyet szorozni lehet 60 egy tetszőleges pozitív vagy negatív hatványával, anélkül, hogy ez a szám írott kifejezésén változtatna".[36] Az egyes számjegyek helyértékét csak a számolás összefüggéséből lehet eldönteni. Ezáltal olyan számrendszer áll elő, amely páratlanul alkalmas a törtekkel való számolásra. Ha a egész szám, akkor annak, hogy $\frac{1}{a}$ véges hatvanados törtként legyen előállítható, szükséges és elegendő feltétele az, hogy $a=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ alakú legyen. Az ilyen számokat NEUGEBAUER regulárisoknak, a nem ilyeneket irregulárisoknak nevezi. Az $\frac{1}{a}$ tört jelzésére az $\bar{a}$ jelölést vezeti be.

[33] KUGLER, F.-X. S. J.: *Im Bannkreis Babels. Panbabylonistische Konstruktionen und Religionsgeschichtliche Tatsachen.* Münster i. W. 1910.

[34] KLEIN, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert,* Berlin 1926.

[35] MEISSNER, B.: *Babylonien und Assyrien II.* Heidelberg 1924. 386–7.

[36] NEUGEBAUER, O.: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. I. Vorgriechische Mathematik.* Berlin 1934. 5.

S ebben az interpretációban az addig iskolai gyakorlatoknak tartott számtáblák mint reciprok táblák lepleződnek le, olyan számok listái, amelyeknek szorzata mindig hatvan, azaz az egység. Beleértve természetesen mint mindig egy 60 valamely hatványával történő szorzást: egy n szám ugyanis nem különböztethető meg $n \cdot 60^k$ számtól. Ezeknek a reciprok tábláknak a célja osztás: egy b számot úgy osztanak egy a számmal, hogy szoroznak $\bar{a}$-val. A táblák kifejezetten mutatják, hogy a sumér matematikusok tisztában voltak az irreguláris számok kivétel jellegével: 7 igi nu—7 nem oszt, jegyzi meg pl. egy ilyen tábla.[37]

NEUGEBAUER felismeri a számlisták törvényszerűségét. A számok mind $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ alakúak, s ebből a feltételből egy szellemes geometriai reprezentáció segítségével teszi érthetővé a reciprok táblák előállítási módját.[38] A táblák szorzásra és gyökvonásra is alkalmasak, és a sumér matematikusok ilyen számolási segédeszközök birtokában nem haboztak területekből vonalakat kivonni, vagy területeket összeszorozni, „amit a nagyon óvatos EUKLIDÉS sohasem tett volna meg".[39]

„Ez a táblarendszer, ahogy már i. e. 1800-ban létezett, egymagában az egész antikvitás számolói felé helyezte volna a babiloniaikat. I. sz. 350 és 400 között az alexandriai THEON magyarázatok oldalait fűzi PTOLEMAIOS hatvanas számrendszerben végzett számításaihoz Almagest-jéhez írott kommentárjaiban. Egy babiloni templom birtokának adminisztrációs írnoka 2000 évvel THEON előtt joggal csodálkozott volna ily egyszerű technikára vesztegetett annyi sok szón."[40] Ugyanígy számtáblákban fejezik ki a babiloni matematikusok a *Pythagoras*-tételt is, másfél évezreddel PYTHAGORAS előtt. „Mindezek a problémák — írja NEUGEBAUER — valószínűleg sohasem voltak élesen elválasztva olyan módszerektől, amelyeket mi ma algebrainak nevezünk. Az egész csoport középpontjában a kétismeretlenű másodfokú egyenlet megoldása áll."[41]

Tipikus az

$$x\bar{x}=1 \quad x+\bar{x}=b$$

probléma. Számos esete van, legfontosabb „az a típus — írja NEUGEBAUER —, amit normálalaknak nevezek: két számot kell találni ha a, szorzatuk és b, összegük vagy különbségük adott. Számtalan példa célja nyilvánvalóan az, hogy megtanítsa a bonyolultabb kvadratikus problémáknak eme normálalakokra való transzformálását

$$x \cdot y = a$$

$$x \pm y = b,$$

amiből a megoldás mint

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

$$y = \pm\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

[37] Uo. 8.
[38] Uo. 9—11.
[39] WAERDEN, B. L. van der: *Science awakening*. Groningen 1954. 72.
[40] NEUGEBAUER, O.: *The exact sciences in antiquity*. Providence, Rhode Island [2]1957. 34—35.
[41] Uo. 40.

adódik a két eredeti egyenletet két lineáris

$$x \pm y = b$$

$$x \mp y = \sqrt{b^2 \mp 4a}$$

egyenletre transzformálva. Más szóval, a négyzetes egyenletet normálalakjára redukálni annyit jelent, mint lineáris egyenletek legegyszerűbb rendszerére hozni."[42]

A matematikai táblák gondos tanulmányozása megmutatta, „hogy a régen ismert és sajátságosan primitív egyiptomi matematika és a legélesebb logikai analízissel átdolgozott görög matematika mellett létezett a mediterrán kultúrkörben még egy harmadik matematikai ideavilág is: a babiloni matematika algebrai fogalomképzése".[43]

Hová lett ez a korai algebra? Erre is NEUGEBAUER válaszolt leghatározottabban, s őt követte van der WAERDEN: ez a babiloni algebra öltözött át geometriai formába a görög matematikában. A kérdés története hosszú s mint a görög matematika történetírásában majdnem minden, ez is TANNERYre nyúlik vissza.

TANNERY már 1882-ben felismeri,[44] hogy a másodfokú problémáknak a II. könyvben található megoldásai, ahol az ismeretlenek, mint hosszúságok, a szorzataik pedig mint felületek jelentkeznek, s amely problémákat mi $x^2+px+q=0$ egyenlet alakjában írjuk fel, még a legelső pythagoreusokra kell visszanyúljanak. Ugyanezeknek a problémáknak a VI. könyvben való megismétlése azért vált szükségessé, mert a görög matematika kezdetén felfedezték, hogy nem minden hosszúság-összehasonlítás fejezhető ki egész számok arányával, nem minden hosszúság mérhető össze egymással. Érthető, hogy ez a pythagoreusok számára, akik a dolgok lényegének az egész számokat tekintették — un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement volt.[45] Ha valamit, hát ezt a felfedezést érdekükben állott eltitkolni, s száműzni ahonnan csak lehetett a kétes mennyiségeket. Ez történik a második könyvben, ahol területek összeadásával vagy kivonásával oldva meg a problémákat, elkerülik a vonalak kivonásakor, ill. aránybaállításakor felmerülő nehézségeket.[46] De a görög matematika nem a mi algebránkhoz hasonló módon alkalmazta ezeket a geometriai számolási eszközöket. TANNERY éppen azt hangsúlyozta, hogy milyen különbség van ugyanazon problémáknak a görög és modern megoldása között. A görög „szerkesztések nem egyenletek megoldásai, a görögök úgy látszik, sohasem láttak mást az egyenletekben, mint konkrét vagy ilyennek feltételezett mennyiségek között fennálló valódi relációkat. Épp ezért náluk az ismeretlennek csak egyetlen értéke lehetett", amit nem lehet a mi másodfokú egyenletünk gyökeivel összehasonlítani.[47]

[42] Uo. 40–41.

[43] NEUGEBAUER, O.: *Vorgriechische Mathematik*, 2. — Ebben a tekintetben a *The exact sciences in antiquity* felfogása egészen más. A *Vorgriechische Mathematik* a különbségekre helyezte a súlyt, az *Exact sciences* a tudományos fejlődés változatlan jellegű vonatkozásaira. Nem lehet figyelmen kívül hagyni, anélkül, hogy bármiféle közvetlen hatásra gondolnánk, azt a tényt, hogy a nyugati történetírás a két könyv kiadása között ugyanezt az alakulási tendenciát mutatta: a kultúrkör elmélettől az ideatörténet felé.

[44] TANNERY, P.: *„De la solution géométrique des problemes du second degré avant Euclide."* (1882) = *Mémoires Scientifiques I.* Paris 1912. 254–280.

[45] Uo. 268.

[46] Uo. 257 és 263.

[47] Uo. 280.

H. G. ZEUTHEN látszólag egészen kis módosítást vitt be TANNERY interpretációjába, éppen mert a II. és VI. könyv geometriai számolása és a mai algebra közötti hasonlattevésnek nem tudott ellenállni. Csaknem mindent átvesz TANNERY értelmezéséből. Elfogadja az incommensurabilitás felfedezése következtében beállított „botrány" elméletét s azt a feltevést, hogy a pythagoreusok az így előállított nehézségek elkerülésére geometriai aritmetikájuk továbbfejlesztéseként alakítják ki a második könyvben leírt geometriai számolást. Nem vetik el ezt a számolási módot az incommensurabilitásnak EUDOXOS általi legyőzése után sem — s itt lép túl TANNERY óvatos interpretációján —, mert felismerik, hogy olyan jelrendszert (Zeichensprache) alakítottak ki benne, ami ugyanazokat a feladatokat képes megoldani, mint a mi algebránk, míg az utóbbi nem lép túl másodfokú kifejezések tárgyalásán. Az így kialakított geometriai algebrájuk éppen a mi másodfokú egyenleteink megoldására alkalmas.[48] Zeuthen geometriai algebra hipotézisét „*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*" (Koppenhagen 1886) című művéből lehet legjobban megérteni. A kúpszeletek tárgyalásához a görögöknek is analitikus segédeszközökre volt szükségük, és ZEUTHEN analitikus segédeszközökön magától érthetődően analitikus geometriát ért. Természetesnek veszi, hogy a görögök már alkalmazzák a koordinátarendszert, ha a fogalmat explicite nem is vezetik be. „A koordinátákat azonban mi az algebrával együtt használjuk, s ezt a görögök nem ismerték. Meg kell tehát vizsgálni, mi lép náluk a koordináták használatánál, valamint más vizsgálatoknál is, ahol mi most az algebrát használjuk, az algebra helyébe." ZEUTHEN szerint erre a célra két segédeszközt használtak: az arányelméletet és a geometriai szerkesztésekkel való számolás módszerét, amint az az „Elemek" II. könyvében jelentkezik. Az arányelmélet azonban az incommensurabilitás felfedezése után nehéz helyzetbe jutott, s míg EUDOXOS ki nem bővíti a számfogalmat az irracionális számok definíciójával, addig az arányelmélet nem volt általános mennyiségekre (valós számokra) alkalmazható. Ezért egy másféle, „bizonyos határok között teljesen általános mennyiségekre is alkalmazható" jelbeszédet alakítottak ki, a geometriai szerkesztésekkel történő számolás módszerét. Ezt a módszert az incommensurabilitás felfedezése nem zavarta. Az így kialakult módszert joggal lehetett ZEUTHEN szerint geometriai algebrának nevezni, mert ez, mint az algebra, alkalmas általános mennyiségekkel való munkára és a közönséges beszédtől különböző eszközöket használ eljárásai szemléletessé tételére. Ez a geometriai algebra EUKLIDÉS korára olyan fejlettséget ért el, hogy ugyanazon feladatok megoldására volt képes, mint a mi algebránk, amíg ezek a feladatok nem mennek túl másodfokú kifejezéseken.[49]

Összefoglalva, ha a görög kúpszelet-elméletet analitikus geometriának tekintjük, akkor az „Elemek" II. és VI. könyvében megadott szerkesztések felfoghatók egy ehhez szükséges geometriai algebraként. S ha a premissza nem áll? Ha a görög kúpszelet-elmélet nem tekinthető analitikus geometriának? Akkor annak sincs semmi értelme, hogy a II. és VI. könyvet valamiféle algebrának interpretáljuk. ZEUTHEN természetesnek vette, hogy a görög kúpszelet-elmélet analitikus geometriának tekinthető, s épp ezért algebrásította a görög szerkesztéses számolást. A későbbi matematikatörténészek nem veszik ezt ilyen természetesnek. H. DE VRIES szerint analitikus geometria a XIX. század előtt egyáltalán nem létezik.[50] Ugyanez a véle-

[48] ZEUTHEN, H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Koppengahen 1886. 5–11.

[49] Uo. 1–7.

[50] VRIES, H. de : „*How analytic geometry became a science*" *Sripta* Mathematica **14** (1948), 5–15.

ménye R. TATONnak[51] is. Az analitikus geometria történetének monográfusa, C. B. BOYER szerint sem lehet a görögöknél analitikus geometriáról beszélni, az analitikus geometria a szimbolikus algebra kifejlődését feltételezi s a görögöknek erről még csak fogalmuk sem volt.[52] Ezt a nehézséget a görög analitikus geometria létezését védő matematikatörténészek is érzik, pl. J. L. COOLIDGE, aki a görög kúpszeletelmélet legfontosabb segédeszközének nem az algebrai geometriát tekinti, hanem az *eudoxosi* arányelméletet.[53]

Amint a fentebb ismertetett interpretációkból kitűnik, a geometriai algebra kérdése nem választható el a görög analitikus geometria kérdésétől. A geometriai algebra kérdése ZEUTHENnél a kúpszelet-elméletből merült fel. OTTO NEUGEBAUER azonban a fordított irányból indul ki. Először is bizonyítottnak veszi a görög geometriai algebra létezését, s azután kimutatja, hogy ennek a geometriai algebrának az egyes tételei semmi egyebek, mint a babiloni algebra erdményeinek a geometriai algebra nyelvére való átültetései. „Ha így fogalmazzuk meg a problémát — írja NEUGEBAUER — minden további teljesen triviális és a babiloni algebra simán csatolható EUKLIDÉS formuláihoz. „A babiloni $xy=a$; $x+y=b$, illetve $xy=a$; $x-y=b$ normálalakok közvetlenül átfordíthatók geometriai nyelvre és a megoldás itt sem egyéb, mint a babiloni $\frac{x}{y}=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c^2}$ formula szó szerinti lefordítása."[54]

A babiloni algebra nagyra értékelésében nem minden matematikatörténész ért egyet NEUGEBAUERrel. ETTORE BORTOLOTTI az *Osiris* első évfolyamában kimutatta, hogy a babilóniaknál nyoma sincsen még az algebrai módszernek. Szerinte egyenletek, normálformákra való redukció csak a modern fordítók mesterkedései, a babiloniak számkörében elképzelhetetlen minden racionális algebrai elmélet.[55] Márpedig NEUGEBAUER éppen a babiloni számrendszert tartotta tökéletesnek, tökéletesebbnek, mint az azt követő görögöt, és a babiloni számfogalom analízise során jut arra a felismerésre, hogy bizonyos számtáblákat egyenletmegoldásként értelmezzen. Annyi azonban kétségtelen, hogy a *Neugebauer*-féle babiloni számfogalom GAUSS számelmélete nélkül nehezen képzelhető el. „Két a és b számot — írja NEUGEBAUER — amelyek csak 60 (pozitív vagy negatív) hatványának szorzatával különböznek egymástól 60 mint faktor szerint kongruensnek fogunk nevezni, és $a=b$ (fact 60)-val jelölünk. Ékírásban felírva az ilyen kongruens számok nem különböztethetők meg."[56] Ez a speciális számfogalom teszi lehetővé az osztó- és szorzótáblák összeállítását és használatát, s a számolási műveletek algebrai interpretációját.

De hátha a babiloni számfogalom csak a *Gauss*-féle számelmélet ismeretében hat olyan modernnek? Kétségkívül értelmezhetők az ékírásos táblák modern mate-

[51] TATON, R.: „*La préhistoire de l'analyse géométrique*" Archives Internationales d'Histoire des Sciences **29** (1950), 89–102.

[52] BOYER, C.: *History of analytic geometry.* New York 1956. 20.

[53] COOLIDGE, J. L.: „*The origins of analytic geometry*" Osiris **1** (1936), 231–250.

[54] NEUGEBAUER, O.: „*Zur geometrischen Algebra. Studien zur Geschichte der antiken Algebra III.*" Quellen und Studien etc. **B3** (1936), 245–259.

[55] BORTOLOTTI, E.: „*L'algebra nella storia e nella preistoria della scienza.*" Osiris **1** (1936), 184–230.

[56] NEUGEBAUER, O.: *Vorgriechische Mathematik*, 5.

matikai szempontból úgy is, ahogy NEUGEBAUER teszi, de vajon így értelmezték-e őket a babilóniak is?

Hasonlóképpen a görög geometriai algebra is csak akkor interpretálható algebrának, ha a vonalszakaszt általános matematikai mennyiségként (valós számként) fogjuk fel, s a reáemelt négyzetet ennek a számnak a második hatványaként. És a szokásos algebrai írásmódra még akkor is csak úgy térhetünk át, ha a vonalszakaszszám és négyzete között semmi elvi különbséget nem teszünk, ha egy szám négyzetét, köbét stb. ugyanolyan számnak tekintjük, mint magát a számot. Egyszóval, ha rendelkezünk a hatvány fogalmával.

Jól tudjuk, hogy ezeket a nagy újításokat csak DESCARTES hozta be a matematikába. Ezek tették számára lehetővé az algebrai egyenletek geometriai szerkesztésekre történő kölcsönösen egyértelmű leképezését. A „Geometrie" első könyve ezekkel a sorokkal kezdődik: „A geometria minden problémáját könnyen lehet olyan kifejezésekre redukálni, hogy azután már nincs szükség egyébre megkonstruálásukhoz, mint néhány egyenes vonal hosszúságának az ismeretére.

És mint ahogy az egész aritmetika semmi egyébből nem áll, mint négy vagy öt műveletből," úgy a geometriában is csupán definiálni kell ezeket a műveleteket a fent mondott vonalszakaszokra, s akkor itt is lehet egyszerűen számolni. „De gyakran nincs szükség ezeknek a vonalaknak papíron való megrajzolására, elég néhány betűvel jelölni őket, mindegyiket külön betűvel ... ahol meg kell jegyezni, hogy a^2 vagy b^3, vagy hasonlókon általában semmi egyebet nem értek, mint egészen közönséges vonalakat, bár az algebrában megszokott neveket használva négyzeteknek, köböknek stb. nevezem őket."[57]

Az algebrát, mint a négy egyszerű művelet és a gyökvonás véges számú alkalmazásából nyert kifejezések vizsgálatát DESCARTES teremtette meg. Ezt az algebrát egyaránt lehet vonalszakaszokra vagy tetszőleges jelekre, betűkre leképezni. DESCARTES algebrai módszerekről alkotott fogalmát már alig lehet megkülönböztetni attól, amit egy mai tankönyv ért algebrai módszereken „A tisztán algebrainak nevezhető módszerek és eredmények a matematika olyan tényein alapulnak, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók."[58]

Ilyen értelemben vett algebráról DESCARTES előtt nem beszélhetünk. Amit ő előtte így neveztek, az csupán egyes egyenletek megoldása volt s a görög geometriai algebrában még egyenletekről sem lehet szó. A görög matematika nem geometriai szerkesztések és egyenletek, hanem geometriai szerkesztések és arányok között keres kapcsolatot, s ez nagyon különböző attól, amit DESCARTES teremtett meg.

Éppen azért foglalkoztunk olyan részletesen van der WAERDEN THEAITÉTOSával, mert WAERDEN az egyik első matematikatörténész, aki határozottan kidolgozta a korai görög matematika arányelmélet jellegét. Ebben a matematikában a mi algebránktól merőben idegen fogalmak szerepelnek, mint pl. *ἀνταναίρεσις*, *ἄλογος*-nak nevezett vonalak, *ῥητος*-nak mondott területek. Miért nevezik *ἄλογος*-nak az incommensurabilis vonalakat, miért indulnak ki a vonalak osztályozásában a rájuk emelhető négyzetekből, mit jelent az, hogy ARCHYTAS két középarányost ír be ott, ahol mi egy harmadfokú egyenletet oldanánk meg?

[57] *Oeuvres de Descartes*. Publiées par Ch. Adam & P. TANNERY. Tome VI. 369—371.
[58] SZELE TIBOR: *Bevezetés az algebrába*. Budapest 1953. 9.

Az első ilyen jellegű kérdéseket egy TANNERY-tanítvány, PIERRE BOUTROUX vetette fel.[59] Ő látta először világosan, hogy a görög matematika fogalmai nem írhatók át modern jelekkel. Utána KURT REIDEMEISTER, a modern algebrai geometria egyik megteremtője közledett ilyen kritikus módon az alapfogalmak saját matematikai gondolatvilágukból való megértésének az igényével a görög matematikához. CANTOR, HEATH, TANNERY, ZEUTHEN, STENZEL és BECKER — írja REIDEMEISTER — mind a késői teljesen megbízhatatlan neopythagoreusok hatása alá kerültek, s elhitték, hogy a középelmélet, a figurális számok, az irracionális felfedezésének botránya tények. Valójában ezek neopythagoreus mesék. Az irracionális felfedezése semmiféle gondolkozási krízist nem okozott, ellenkezőleg, a görög geometria természetes fejlődési vonalába esett. Ez a vonal a szemlélettől való fokozatos megszabadulás volt, s az irracionalitás felfedezése logikusan következő lépés egy dyadikusan felépített aritmetikában. A görög aritmetika a zenei intervallumok elméletével karöltve fejlődik, és a geometriai számolási mód teljesen független az irracionális problémájától. A tizedik könyvben sem bikvadratikus egyenletek feloldásának a geometriai algebrájáról van szó, hanem a különféle típusú irracionalitásoknak bizonyos racionális nevekre (Namen) való visszavezetéséről. THEAITÉTOS pedig valószínűleg nem egyéb, mint a platóni dialógus körül kikristályosodott legenda. A X. könyv már PLATÓN hatását sejteti, és olyan tejesítmény „ami mélységben és értékben az EUDOXOSéval mérhető össze".[60]

Szó sincsen tehát külön „theaitétosi" és eudoxosi fejlődési fokról, mint O. BECKER és WAERDEN hitték, a görög matematika nagy teljesítményei REIDEMEISTER szerint nem koraiak, hanem egy olyan időszak termékei, amelyik gondolatvilága PLATÓN filozófiájában tükröződik. Másrészt Reidemeister a babilonból való átvétel elméletét is elveti. Honnan és hogyan állanak akkor elő a görög matematika bizonyításai, tételei, szakkifejezései? KURT von FRITZ[61] az „Elemek" egzakt, tudományos felépítését az aristotelési filozófia hatásának tulajdonította, de az „Elemek" egyrészt nem tökéletes logikai zártságú könyv, másrészt tételei nagy része bizonyosan sokkal régibb ARISTOTELÉSnél.

Példa a IX. 20., amelyik azt mondja ki, hogy minden előre megadott prímszámnál létezik nagyobb prímszám. SZABÓ ÁRPÁDnak sikerült erről a tételről bebizonyítania, hogy éppen úgy korai pythagoreus eredmény, mint az „Elemek" másik transfinit tétele, amelyik a négyzetátló és -oldal incommensurabilitását mondja ki. A két tétel bizonyításmódja is azonos: reductio ad absurdum.[62] Honnan jön ez a bizonyítási mód a korai görög matematikába? S egyáltalán miért éppen a korai pythagoreus matematikában olyan gyakori? Ugyanis a fenti két transfinit tételen kívül ugyanerről a bizonyítási módról van szó az O. BECKER által rekonstruált, és REIDEMEISTER által is ősi pythagoreus matematikának elismert páros-páratlan elméletben is. Azon tulajdonságok egyike, amelyeket BECKER oly jellegzetesnek talált a páros-páratlan elmélet bizonyításmódjára, nem egyéb, mint a PARMENIDÉS

[59] BUOTROUX, P.: *Les principes de l'analyse mathématique. Exposé historique et critique.* Paris 1914. I. 486, I. lábjegyzet, uo. 280, 326.

[60] REIDEMEISTER, K.: *Die Arithmetik der Griechen. — Das exakte Denken der Griechen.* Hamburg 1949. 15—43.

[61] FRITZ, K. von: *„Die APXAI in der griechischen Mathematik".* Archiv für Begriffsgeschichte **1** (1955), 13—116.

[62] SZABÓ, Á.: *„Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik."* Elemente der Mathematik **9** (1956), 101—105.

által bevezetett bizonyítási módszer, az ún. „hármas út" módszere. SZABÓ ÁRPÁD emlékeztet rá: KARL REINHARDT már 1916-ban kimutatta, hogy PARMENIDÉSnek ezt a módszerét gúnyolta ki i. e. 500 körül egy szicíliai komédiaíró, EPICHARMOS. És éppen ebből a komédiából fennmaradt töredékben fordul elő először a páros-páratlan szám elnevezés. A töredéket O. BECKER és van der WAERDEN a páros-páratlan elmélet korai voltának a bizonyítására használták fel, és úgy értelmezték, mint a pythagoreus matematika kigúnyolását. SZABÓ ÁRPÁD a BECKER és WAERDEN eredményeit összevetve a REINHARDT megoldásával, kimutatja, hogy itt, a páros-páratlan elméletben az eleata „hármas út", az ellentmondásmentesség kritériuma kerül át az eleata filozófiából a pythagoreus matematikába.[63] S ennek az eleata bizonyítás kritériumnak a hatására válik a pythagoreus matematika deduktív tudománnyá.[64]

De honnan ered a pythagoreus matematika sajátos számfogalma, az oszthatatlan egységekből álló szám fogalma? A megelőző matematika, a babilóni ugyanis éppen a számok oszthatóságára épült fel: a „határozatlan helyértékrendszeren" belül bármely két szám szorzata az egység — modulo 60. Innen kiindulva nem lehetne megérteni a görög számfogalmat. Az egység euklidési definíciója — „egy az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk" — egészen más forrásokból táplálkozik.

SZABÓ ÁRPÁD PLATÓN „Állam" c. dialógusának analízisén keresztül mutatja ki, hogy ez a számfogalom PARMENIDÉS létezőről szóló tanítására vezethető vissza. S ez az egység megsokszorozásából álló számfogalom tette szükségessé az „osztás" és a „rész" pontos megfogalmazását. A folyamat nyomon követését a használt terminus technicusok teszik lehetővé. „Kézenfekvő volt — foglalja össze idevonatkozó vizsgálatait SZABÓ Á. — a legegyszerűbb fajta oszthatóság (a ‚felezhetőség') jelölésére a leggyakrabban használt eleai terminust, a *διαιρειν* igét használni. Ugyanakkor viszont azt a névszót —‚rész' = *μέρος* —, amely az eleaták által még tagadott ‚osztás' eredményét jelölte, fölhasználhatták a számok egyéb oszthatóságainak a megjelölésére."[65] Ebben az összefüggésben érthető meg EUKLIDÉS nyolcadik axiomája: „az egész nagyobb mint a rész". Ugyanis az eleata-pythagoreus egység fogalom a geometriára alkalmazva a „pont" fogalmához vezet: „pont az, amelyiknek része nincs", s ekkor a véges vonalszakaszt éppen a 8. axiomával lehet megvédeni ZÉNÓN „fele idő egyenlő a duplájával" paradoxonával szemben.[66]

Az eleata logikának a geometriára való alkalmazása sokkal nehezebb feladatot jelentett, mint az aritmetikai alkalmazása. A görög matematika a geometria területén fokozottan kényszerül a maga álláspontjának az eleata filozófiával szembeni rögzítésére. A folyamat végeredménye a görög geometria axiomatikus-definitorikus megalapozása lett. A részletek valamelyes felderítése a megbízható források teljes hiányában csak a használt terminusok analízise alapján volt lehetséges. A terminusok változásainak a felderítéséből következtetni lehet az általuk takart jelentésre, ami végső, kialakult formájukból már alig remélhető.

[63] SZABÓ Á.: „*Eleatica*". Acta Antiqua Hung. 3 (1955), 67—103.
[64] SZABÓ Á.: „*Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I, II*," Matematikai Lapok **8** (1957), 8—36 és 232—247.
[65] SZABÓ Á.: „*A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai.*" Matematikai Lapok **10** (1959), 72—121.
[66] Uo. 106—118.

Így az *ἀξιώματα* helyett már közvetlenül EUKLIDÉS után *κοιναὶ ἔννοιαι*-it kezdenek alkalmazni, s csak PROKLOS tér vissza újból, s ő sem következetesen az *ἀξιώματα*-ra. A definíciók — *ὅροι* — helyett pedig gyakran használ PROKLOS *ὑποθέσεις*-t. ARISTOTELÉS erősen tiltakozott ennek a kettőnek a felcserélése ellen, de PLATÓN még *ὑποθέσεις*eknek nevezte a geometria és aritmetika definícióit. Honnan erednek ezek az ingadozások, mit jelentenek a szavak a köznyelvben, a filozófia és a logika használatában és hogyan kerülnek a matematikába?

PLATÓN a *ὑπόθεσις* szót a *ὁμολόγημα* szinonim szavaként „nem bizonyítható feltevés", „előzetes megállapodás" értelemben használja. De ez a fogalom nem jelent teljes önkényességet: olyannak kell lennie, hogy ellentétét feltételezve indirekt bizonyítás lehetősége álljon fenn. „Lényegében minden tökéletesen végbevitt indirekt] bizonyítás — írja SZABÓ Á. — ilyen kettős *ὑπόθεσις* alkalmazásból áll, és éppen erre épül fel az egész platóni dialektika."[67] A módszert a matematikából veszi át: az indirekt bizonyítás az i. e. V. század matematikájának fő bizonyítási módszere. Ide pedig az eleata logikából jutott. A definíció fogalmának az eredetét az eleata logikában kell keresni. Ugyancsak a dialektikában lehet megtalálni az *ἀξίωμα* kifejezés eredetét is. EUKLIDÉS axiómái lényegében mind egyetlen fogalom, az egyenlőség meghatározására valók. PLATÓN erre a célra két definíciót használ, s így is nevezi őket, *ὁμολογήματα*. Az eklidészi *ἀξιώματα* azonban csak az érzékszervek által igazolható, empirikus tételek, s így nem léphetnek fel a *ὁμολογήματα*-vá váláshoz szükséges közös megegyezés igényével, mert az eleata dialektika szerint csak az értelemmel megragadható tételek érdemlik meg ezt a nevet. Az *ἀξίωμα* helybenhagyását meg kell követelni a vitapartnertől, éppen úgy, mint a postulatumét; épp úgy „függőben marad" a vita során, mint az utóbbi. Az *ἀξίωμα*-nak ezt az értelmét csak ARISTOTELÉS sorvasztja el, csak utána veszi fel a „természetszerűen igaznak tartott tétel" jelentést. De a matematika még sokáig annyira érzi az eredeti értelmet, hogy az euklidési szövegben inkább felcseréli *κοιναί ἔννοιαι*-ra.[68] Eredetileg azonban az *ἀξιώματα* éppen úgy az eleaták kritikája ellen felállított követelmények voltak, mint az *αἰτήματα*. Nem formális logikai jellegük, hanem tartalmuk különböztette meg őket. Előbbiek az „egyenlőség" fogalmának a megvédését szolgálták, utóbbiak a „geometriai mozgását": a szerkesztését.[69]

Ismét a már érintett ténnyel állunk szemben: a geometria területén a görög matematika lényegesen nagyobb erőfeszítéseket tesz álláspontja rögzítése érdekében, mint az aritmetikában. Az aritmetikában ugyanis két szám viszonyának, a *λογος*-nak az egyenlőségére már a legkorábbi időben bevezet a görög matematika egy kifejezést: *ἀνὰ λόγον ἴσοι*, a logos szerint egyenlőek. Az *ἴσον* csakhamar elmarad, az *ἀνάλογον* átkerül a matematikai szaknyelvből a köznyelvbe és a grammatikába, az *ἀνα* prepozíció eredeti disztributív jelentése elvész, s az analógia felveszi mai jelentését, amiből az eredeti jelentést többé kihámozni nem lehetne.[70]

Nagy és nehezen kibogozható problémát jelent a szavak élete. Ugyanazok a szavak korszakonként egészen mást jelentenek, s ugyanazon dolgok jelölésére

[67] SZABÓ, Á.: „*Anfänge des euklidischen Axiomensystems.*" Archive for History of Exact Sciences **1** (1960), 37–106.

[68] Uo. 78.

[69] Uo. 78–84.

[70] SZABÓ Á.: „*ΑΝΑΛΟΓΙΑ.*" Acta Antiqua Hung. **10** (1962) 237–245.

használnak korszakonként egészen más szavakat. Egy szó lefordítása távolról sem jelenti még a szó megértését. Sőt: sok esetben éppen a lefordítás lehet a megértés legfőbb akadálya. Mutatja ezt a *δύναμις* esete.

Ennek a szónak a félreértéséért TANNERY felelős. Ő adta meg a szónak négyzet*oldalként* fordítva azt az értelmet, amelynek a segítségével később azt mutatták ki THEODOROSról, hogy a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots \sqrt{17}$ irracionalitását akarja bizonyítani esetenként, mert általános tételt még nem tudott hozni az irracionalitásokról, s 17-nél azután abbahagyta. Az irracionalitások teljes, általános elméletét tanítványa, THEAITÉTOS adta meg az „Elemek" X. könyvében.

SZABÓ ÁRPÁD a kérdéses PLATÓN-helyet az egész dialógus keretében, nagyon figyelmesen analizálva kimutatja,[71] hogy a *δυνάμις* nem négyzet*oldalt* jelentett, hanem négyzetet, ill. a *δυνάμει συμμετρος* rövidítése. A kérdéses THEODOROS-jelenetben nem a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots \sqrt{17}$ irracionalitásának tökéletlen, egyedi bizonyításáról van szó, hanem egy általános megkülönböztetésről „hosszúságuk szerint commensurabilis" — *μήκει σύμμετρος* — és a „föléjük emelhető négyzet szerint commensurabilis — *δυνάμει σύμμετρος* — vonalak között. „THEODOROS tanítványai tehát tulajdonképpen csak egy odaillő *elnevezést, nevet* kerestek arra, amit éppen megtanultak." „Theaitétos", a matematikus, pedig késő antik, neopythagoreus legenda.

De mit jelentett maga a *δύναμις* szó egyébként a görög nyelvben? S van-e ennek a jelentésnek jelentősége a görög matematika története szempontjából? Megengedi-e a *δύναμις* szó használata a „hatvány"-ként való fordítását és interpretációját, mint TANNERY tette volt? SZABÓ ÁRPÁD az ige, *δύνασθαι,* köznyelvben, gazdasági és politikai szóhasználatban való előfordulásait végigkövetve kimutatja, hogy mindig valamilyen értékegyenlőséget fejez ki. Geometriai szóhasználatban pedig négyzetérték szerinti egyenlőséget. Semmi értelme sincs tehát a „négyzetet létrehozó oldal", a „hatvány"-ként való TANNERY szerinti fordításnak.

*

Az EUKLIDÉS előtti matematika története a történetírás különleges, szélső esetét jelenti, ahol közvetlen források csaknem teljes hiányában, a primér forrásokról évszázadokkal később, sokszor több közvetítőn keresztül történt feljegyzések között kell haladni, feltevést feltevésre állítva és eldobva, óvatosan és merészen egy, legfeljebb részben helyes interpretáció felé.

(Beérkezett: 1962. XII. 9.)

[71] SZABÓ Á.: *„Der mathematische Begriff* δύναμις *und das sog. „geometrische Mittel."* (megjelenés alatt.)