KVÁZI-KONKÁV PROGRAMOZÁSI FELADAT MEGOLDÁSA GRADIENS VETÍTÉSI MÓDSZERREL

Írta: KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA

Bevezetés

Az utóbbi években a nemlineáris programozás az érdeklődés középpontjába került. A *lineáris programozás* alkalmazási köre korlátozott, sok esetben ugyanis a célfüggvény vagy a feltételek nem lineárisak, és lineárissal való helyettesítésük durva közelítés. A nemlineáris programozás körében jelentős helyet foglal el a konkáv programozás. A konkáv programozás újszerű feladatot jelent például azért is, mert egy konvex poliéderen egy konkáv függvény a maximumát általában nem csúcson éri el. Ebből következik az is, hogy a konkáv programozási eljárások általában nem végesek.

A *konkáv programozás* feladata a következő: Maximalizálandó egy $F(\mathbf{x})$ konkáv függvény $g_i(\mathbf{x}) \geqq 0$ $(i=1, 2, \dots, k)$ feltételek mellett, ahol $g_i(\mathbf{x})$ függvények is konkávok. Ha

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} c_i x_i$$

és

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_j - b_i \qquad (i=1, 2, \dots, k)$$

akkor lineáris programozási feladatot kapunk.

Az első konkáv programozásról szóló cikk, KUHN és TUCKER [6] dolgozata 1950-ben jelent meg. Ebben főleg exisztencia- és unicitástételek találhatók, valamint az ún. nyeregponttétel. Az ARROW, HURWITZ és UZAWA által kiadott [10] cikkgyűjteményben általános lineáris terekben való programozás (HURWITZ: Programming in Linear Spaces), továbbá főként konvergencia-, exisztencia- és unicitástételek találhatók. Egyben az optimumot is szolgáltató nyeregpont megkeresését differenciál- ill. differencia egyenletekre vezeti vissza, amelyek gyakorlati felhasználása azonban korlátozott. Erről a témáról lásd még KARLIN [5] munkáját.

Másik fontos nemlineáris programozási témakör a *kvadratikus programozás*. Ezen általában egy pozitív definit (vagy szemidefinit) kvadratikus függvény maximalizálását értik lineáris feltételek mellett. Minthogy egy pozitív definit (szemidefinit) kvadratikus függvény konvex, ez a függvény maximumát a feltételek által meghatározott konvex poliéder valamelyik csúcsán veszi fel. Ez az oka annak, hogy a kvadratikus programozás módszereinek kiindulópontja a szimplex módszer megfelelő módosítása. Lásd például WOLFE [11] dolgozatát. Amennyiben egy pozitív definit (szemidefinit) kvadratikus függvény minimumát keressük, akkor ez ekvivalens a függvény (-1)-szeresének, tehát egy konkáv függvénynek maximalizálásával, ami egy konkáv programozási probléma.

Az itt közölt dolgozatban a konkávnál általánosabb célfüggvény esetén vizsgáljuk a programozási feladatot, feltételi egyenleteink azonban lineárisak.

A kvázi-konkáv függvény fogalmát ARROW és ENTHOWEN vezette be az [1] cikkben, azonban itt csak exisztencia- és unicitástételek, valamint a problémának nyeregpont keresésére való visszavezetése található.

Nemrég jelent meg ROSEN [8] cikke, amelyben a konkáv programozási feladatot egy új módszerrel az ún. gradiens vetítéssel oldja meg. Ennek a cikknek a fő gondolatait használtuk fel és általánosítottuk a jelen dolgozatban, kiegészítve a kvázi-konkáv függvényekre vonatkozó lemmákkal, valamint néhány megjegyzéssel.

Az első §-ban a kvázi-konkáv függvényeknek a továbbiakhoz szükséges, eddig még nem tárgyalt tulajdonságait ismertetjük. A 2. §-ban megemlítünk néhány fontos fogalmat és lemmát, amelyre a módszerben támaszkodunk. A 3. § egy mátrixinvertálási módszerrel és a vetítőmátrixok tulajdonságaival foglalkozik. A dolgozat gerincét a 4. § alkotja. Ebben található a kvázi-konkáv programozási feladat megfogalmazása — kvázi-konkáv függvény maximalizálása és a maximum helyének megkeresése lineáris feltételek esetén — a feladat megoldását előkészítő tételek, valamint az eljárás konvergenciájának bizonyítása. Végül az 5. §-ban röviden összefoglaljuk az algoritmust, amely a 4. § tételein alapszik.

Ez úton köszönöm PRÉKOPA ANDRÁSnak, hogy dolgozatomat áttanulmányozta és hasznos tanácsokkal látott el.

1. §. Kvázi-konkáv függvény fogalma és tulajdonságai

1. DEFINÍCIÓ: Egy m-változós $f(\mathbf{x})$ függvényt $(\mathbf{x}=\{x_1, \ldots, x_m\})$ konkávnak nevezünk egy R konvex tartományban, ha minden $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$ esetén

$$f[\lambda \mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2] \geqq \lambda f(\mathbf{x}_1)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}_2) \qquad (0<\lambda<1)$$

teljesül. (Ha a határozott egyenlőtlenség teljesül minden megengedett λ-ra, a függvényt szigorúan konkávnak nevezzük.)

2. DEFINÍCIÓ: Egy m-változós $f(\mathbf{x})$ függvényt kvázi-konkávnak nevezünk egy R konvex tartományon, ha minden $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$ esetén

$$f[\lambda \mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2] \geqq \min \{f(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_2\} \qquad (0<\lambda<1)$$

teljesül. Ha a határozott egyenlőtlenség teljesül minden megengedett λ-ra, akkor a függvényt szigorúan kvázi-konkávnak nevezzük.

A fenti definícióból nyilvánvaló, hogy minden konkáv függvény egyben kvázi-konkáv is. Egy konkáv, de nem szigorúan konkáv függvény lehet szigorúan kvázi-konkáv. (Például: az x-tengellyel nem párhuzamos egyenes.)

A továbbiakban megvizsgáljuk a kvázi-konkáv függvények néhány tulajdonságát.

1. LEMMA: *Egy egyváltozós differenciálható $f(x)$ függvény akkor és csak akkor kvázi-konkáv egy (a, b) intervallumon $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén, ha az*

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \tag{1.1}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(x_2-x_1)f'(x_1) \geqq 0. \tag{1.2}$$

BIZONYÍTÁS: A fenti feltétel *szükséges*. Legyen ugyanis az $f(x)$ függvény kvázi-konkáv. Azt kell igazolnunk, hogy (1. 1)-ből következik (1. 2). Tekintsük először az $x_2 > x_1$ esetet. Ekkor

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} \geqq 0, \tag{1.3}$$

mert

$$f(x_1+h) - f(x_1) \geqq 0, \quad \text{hacsak} \quad x_1 + h \leqq x_2$$

az $f(x)$ kvázi-konkávitása és (1. 1) miatt. Azonban $x_2 > x_1$ miatt (1. 3) ekvivalens (1. 2)-vel. $x_2 < x_1$ esetén a bizonyítás ugyanígy történik, míg $x_2 = x_1$ esetén (1. 2) triviálisan teljesül.

Az elégségesség igazolásához tegyük fel, hogy minden $x_1, x_2 \in (a, b)$-re (1. 1)-ből következik (1. 2). Igazolni fogjuk, hogy $f(x)$ az (a, b) intervallumon kvázi-konkáv. Legyen $x_2 > x_1$ $x_1, x_2 \in (a, b)$ két olyan pont, amelyre (1. 1) fennáll. Belátjuk, hogy $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq f(x_1)$ $(0 < \lambda < 1)$. A bizonyítás indirekt módon történik. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik egy x_3 $(x_1 < x_3 < x_2)$ pont, melyre $f(x_3) < f(x_1)$. Ekkor létezik egy $x_4 \in [x_1, x_3)$ pont, melyre $f(x_4) = f(x_1)$, de $f(x) < f(x_1)$ minden $x \in (x_4, x_3)$ esetén.[1] Mivel $f(x_4) > f(x_3)$ és $x_4 < x_3$ létezik oly $x_5 \in (x_4, x_3)$ melyre

$$f'(x_5) < 0. \tag{1.4}$$

Másrészt azonban

$$f(x_5) \leqq f(x_4) = f(x_1) \leqq f(x_2) \tag{1.5}$$

és

$$x_5 < x_2. \tag{1.6}$$

(1. 4), (1. 5), és (1. 6) együtt az (1. 2)-nek ellentmond. Teljesen hasonlóan igazolhatjuk a lemma elégséges részét, ha $x_2 < x_1$ esetén teljesül (1. 1), tehát a lemmát igazoltuk.

2. LEMMA: *Egy egyváltozós folytonos függvény akkor és csak akkor szigorúan kvázi-konkáv az (a, b) intervallumon, ha kvázi-konkáv (a, b)-n és bármely x_0 pontnak létezik olyan $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ környezete, ahol*

$$f(x) \neq f(x_0) \quad (\textit{minden } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad x = x_0 \textit{ esetén}). \tag{1.7}$$

BIZONYÍTÁS: Igazoljuk először a lemma szükségességét. A kvázi-konkávitás a definíció miatt szükséges. A másik feltétel is szükséges, ugyanis ha létezne egy x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ x_0-hoz torlódó pontsorozat, hogy $f(x_i) = f(x_0)$, akkor $f(x)$ folytonossága miatt egy x_0-ból kiinduló szakaszon a függvény értéke $f(x_0)$ volna, tehát nem volna szigorúan kvázi-konkáv.

Az elégségesség bizonyításához legyenek $x_1, x_2 \in (a, b)$ tetszőleges pontok, és $x_2 > x_1$, $f(x_2) \geqq f(x_1)$. (Az $x_2 < x_1$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható.) Mivel a függvény kvázi-konkáv:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqq f(x_1) \qquad (0 < \lambda < 1). \tag{1.8}$$

[1] Azon x_i pontok, melyekre $f(x_i) = f(x_1)$ nem torlódhatnak x_3-hoz, ekkor ugyanis az $f(x)$ folytonossága miatt $f(x_1) = f(x_3)$ volna a feltevéssel ellentétben.

Tudjuk azt is a második feltétel miatt, hogy létezik oly δ melyre

(1. 9) $$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]>f(x_2) \qquad (0<\lambda\leqq\delta)$$

teljesül. Tegyük fel a fenti állítással ellentétben, hogy létezik egy $x_3\in(x_1, x_2)$, $(x_3\neq x_1, x_3\neq x_2)$ melyre

(1. 10) $$f(x_3)=f(x_1).$$

Alkalmazzuk a lemmában szereplő második feltételt az x_3 pontra. x_3-nak van olyan környezete, melyben $f(x)\neq f(x_3)$. Ezt összevetve (1. 8)-cal, kapjuk, hogy létezik egy oly $x_4\in(x_3, x_2)$ pont, amelyre

(1. 11) $$f(x_4)>f(x_3).$$

(1. 9)-ből következik, hogy létezik egy $x_5\in(x_1, x_3)$, melyre

(1. 12) $$f(x_5)>f(x_3).$$

Azonban (1. 11) és (1. 12) ellentmond a kvázi-konkávitásnak, amivel a lemmát igazoltuk.

Megjegyzés: Az 1. és 2. definícióból következik, hogy egy n változós függvény egy R konvex tartományban akkor és csak akkor kvázi-konkáv, ill. szigorúan kvázi-konkáv, ha a konvex tartomány bármely két pontját összekötő szakasza mentén kvázi-konkáv, ill. szigorúan kvázi-konkáv.

3. DEFINÍCIÓ: Adott $f(\mathbf{x})$$m$-változós függvény és egy R konvex tartomány az m-dimenziós térben. Az $\mathbf{x}_0\in R$ pontot az $f(\mathbf{x})$ függvény R tartománybeli lokális maximumának nevezzük, ha létezik egy olyan $G(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ $\mathbf{x}_0$ pont körüli ε sugarú gömb, melyre

$$f(\mathbf{x}_0)=\max_{\mathbf{x}\in R\cap G(\mathbf{x}_0,\varepsilon)} f(\mathbf{x})$$

3. LEMMA: *Egy m-változós, folytonos, kvázi-konkáv függvénynek egy zárt konvex R tartományban pontosan egy lokális maximuma van, amely természetesen az R-beli abszolút maximum is.*

BIZONYÍTÁS: A feltételekből következik, hogy létezik abszolút maximum, amely lokális maximum is. Azt kell csak belátni, hogy több nem lehet. Legyen ugyanis az $f(\mathbf{x})$ függvénynek $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ R-beli lokális maximuma, és legyen továbbá

(1. 13) $$f(\mathbf{x}_1)\leqq f(\mathbf{x}_2).$$

Ekkor az $f(\mathbf{x})$ szigorú kvázi-konkávitása miatt:

(1. 14) $$f(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2)>f(\mathbf{x}_1) \qquad (0<\lambda<1).$$

Mivel azonban $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\in R$ és R konvex, az egész $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ szakasz R-ben van, tehát ellentmondásra jutottunk azzal, hogy $\mathbf{x}_1$ R-beli lokális maximum, amivel igazoltuk a lemmát.

2. §. Néhány fontos fogalom és lemma

A továbbiakban az $\mathbf{x}$ vektort mindig oszlopvektornak tekintjük, a transzponáltját, a megfelelő sorvektort $\mathbf{x}^T$-vel jelöljük.

4. DEFINÍCIÓ: Az m dimenziós euklidési tér egy S halmazát *sokaságnak* nevezzük, ha előállítható a következő alakban

$$S = \{\mathbf{v}+\mathbf{x} \; : \; \mathbf{x} \in K\}, \tag{2.1}$$

ahol K altér. A sokaság dimenzióján a definíciójában szereplő K altér dimenzióját értjük.

Az m dimenziós euklidesi térben az $m-1$ dimenziós sokaságot *hipersíknak* nevezzük.

Könnyen belátható, hogy adott $\mathbf{n}$ és b esetén az

$$\sum_{j=1}^{m} n_j x_j - b = 0 \qquad \left(\sum_{j=1}^{m} n_j^2 = 1\right) \tag{2.2}$$

egyenletet kielégítő $\mathbf{x}$ vektorok hipersíkot alkotnak, és minden hipersík így állítható elő. Az $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ vektort a *sík normálvektorának* nevezzük. Ismeretes továbbá, hogy a hipersík a teret két féltérre osztja. (A tér egy tetszőleges pontjáról úgy dönthető el, hogy melyik féltérben van, hogy a sík egy pontjából a kiválasztott pontba mutató vektornak a normálvektorral való skaláris szorzata pozitív vagy negatív; még egyszerűbben a (2. 2) egyenletbe való behelyettesítéskor pozitív vagy negatív számot kapunk.) Azon pontok halmazát, amelyekre a (2. 1) egyenlet pozitív vagy nulla értéket ad, nevezzük a sík pozitív félterének, a többi pont együttesét pedig a sík negatív félterének.

Tekintsük most k számú hipersík pozitív félterének a közös részét. Ez egy konvex halmaz, jelöljük R-el. Azaz

$$\lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_j - b_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.3}$$

ahol

$$\sum_{j=1}^{m} n_{ij}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots k). \tag{2.4}$$

Másképpen, felhasználva, hogy $\mathbf{n}_i = (n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{im})$,

$$\lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}_i^T \mathbf{x} - b_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots k). \tag{2.5}$$

Az R zárt konvex halmaz tehát

$$R = \{\mathbf{x} \; : \; \lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad i = 1, 2, \ldots k\}. \tag{2.6}$$

Az R halmaz határa

$$B = \{\mathbf{x} : \lambda_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ valamilyen } i\text{-re és } \lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \text{ minden } i\text{-re}\} \tag{2.7}$$

Használni fogjuk még a további egyszerűsítő jelöléseket:

$$N_k = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_k], \tag{2.8}$$

$$\mathbf{b}_k = \{b_1, \ldots, b_k\}. \tag{2.9}$$

N_k mxk méretű matrix, $\mathbf{b}_k$ pedig k dimenziós vektor. Így az R halmaz azon $\mathbf{x}$ pontokból áll, amelyekre az

$$N_k^T\mathbf{x}-\mathbf{b}_k \geqq \mathbf{O} \tag{2.10}$$

vektoregyenlőtlenség teljesül.

5. DEFINÍCIÓ: A (2. 8) típusú N_q *matrix pszeudoinverzének* nevezzük az

$$(N_q^T N_q)^{-1} N_q^T \tag{2.11}$$

matrixot.

Könnyen igazolható az alábbi lemma.

4. LEMMA: *Az N_q matrix pszeudoinverze akkor és csak akkor létezik, ha az N_q-t alkotó $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_q$ vektorok lineárisan függetlenek.*

Jelöljük H_i-vel az i-edik hipersík pontjainak halmazát, azaz azokat az $\mathbf{x}$ pontokat, melyekre $\lambda_i(\mathbf{x})=0$,

$$H_i=\{\mathbf{x}: \quad \lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}_i^T\mathbf{x}-b_i=0\}. \tag{2.16}$$

Tekintsünk most tetszőleges q számú lineárisan független hipersíkot.[2] Legyen a közösrészük Q, tehát

$$Q=\bigcap_{i=1}^{q} H_i. \tag{2.17}$$

Jelöljük továbbá H_i°-lal az $\mathbf{n}_i$ normálvektorú, origón átmenő síkot és Q°-lal ezek közös részét:

$$H_i^0=\{\mathbf{x}: \quad \mathbf{n}_i\mathbf{x}=0\}, \tag{2.18}$$

$$Q^\circ=\bigcap_{i=1}^{q} H_i^\circ. \tag{2.19}$$

A Q° halmaz q dimenziós altér. A Q° ortogonális kiegészítő alterét jelöljük $\tilde{Q}$-mal. Nyilvánvaló, hogy

$$\tilde{Q}=\left\{\mathbf{x}: \quad \mathbf{x}=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\mathbf{n}_i, \quad \lambda_i \text{ tetszőleges valós szám}\right\}. \tag{2.20}$$

Tekintsük most a következő $m\times m$-es matrixot:

$$\tilde{P}_q=N_q(N_q^T N_q)^{-1}N_q^T. \tag{2.21}$$

5. LEMMA: *$\tilde{P}_q$ egy vetítő matrix,[3] mely minden m dimenziós vektort $\tilde{Q}$-ba vetít.*

[2] Hipersíkokat lineárisan függetleneknek nevezünk, ha normálvektoraik lineárisan függetlenek.

[3] Vetítésen merőleges vetítést értünk, azaz olyat, hogy az eredeti és a vetített vektor különbsége merőleges arra az altérre vagy sokaságra, ahova vetítünk. Ez nyilvánvalóan egyértelmű. Ugyanis ha lenne kettő, azok különbsége merőleges lenne az altérre, de másrészt benne is van, tehát $\mathbf{0}$. A tér egy pontját azonosnak tekintjük az origóból a pontba mutató vektorral, ezért pont vetítése és vektor vetítése között nem teszünk különbséget.

BIZONYÍTÁS: Mivel E_m, az m dimenziós euklidési tér, Q° és $\tilde{Q}$ ortogonális összege, minden E_m-beli vektor egyértelműen állítható elő mint egy Q°-beli és egy $\tilde{Q}$-beli vektor összege. Ezért elegendő igazolni, hogy

$$\tilde{P}_q \mathbf{v} = \mathbf{O} \quad \text{ha} \quad \mathbf{v} \in Q^\circ \tag{2.22}$$

és

$$\tilde{P}_q \mathbf{w} = \mathbf{w} \quad \text{ha} \quad \mathbf{w} \in \tilde{Q}. \tag{2.23}$$

Legyen $\mathbf{v} \in Q^\circ$. Ekkor Q° definíciója miatt

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{v} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

innen

$$N_q^T \mathbf{v} = \mathbf{O},$$

amiből $\tilde{P}_q$ definíciója miatt (2.22) azonnal következik.

Legyen most $\mathbf{w} \in \tilde{Q}$, azaz

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{q} a_i \mathbf{n}_i = N_q \boldsymbol{a},$$

innen

$$\tilde{P}_q \mathbf{w} = N_q (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T N_q \mathbf{a} = N_q \mathbf{a} = \mathbf{w}$$

Ezzel a lemma állítását igazoltuk.

Megjegyzendő, hogy ha $q = m$, N_m négyzetes matrix és

$$\tilde{P}_q = N_m N_m^{-1} (N_m^T)^{-1} N_m^T = I \tag{2.24}$$

egységmatrix, azaz minden vektort önmagába vetít, ahogy várható volt.

Tekintsük a következő $m \times m$-es matrixot:

$$P_q^0 = I - \tilde{P}_q = I - N_q (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T. \tag{2.25}$$

6. LEMMA: *P_q^0 vetítőoperátor, mely minden m dimenziós vektort Q°-ba vetít.*

BIZONYÍTÁS: Legyen ismét $\mathbf{v} \in Q^\circ$ és $\mathbf{w} \in \tilde{Q}$. Felhasználva az 5. lemmát, kapjuk, hogy

$$P_q^0 \mathbf{v} = \mathbf{v} - \tilde{P}_q \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

és

$$P_q^0 \mathbf{w} = \mathbf{w} - \tilde{P}_q \mathbf{w} = \mathbf{O}$$

amivel igazoltuk a lemmánkat.

Az eddigiekből következik az alábbi, vetítőmatrixok és lineáris függetlenség kapcsolatára vonatkozó állítás.

7. LEMMA: *Legyenek $\mathbf{n}_i$-k $(i = 1, 2, \ldots, k)$ lineárisan független vektorok és P_q^0 a fenti (2.25) vetítőmatrix. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $\mathbf{y}$ vektor lineárisan független legyen $\mathbf{n}_i$-ktől, az, hogy*

$$P_q^0 \mathbf{y} \neq \mathbf{O} \tag{2.26}$$

legyen.

8. LEMMA: *Egy tetszőleges* $\mathbf{x}$ *vektor Q-beli vetülete*[4] *a következőképpen állítható elő:*

$$P_q\mathbf{x} = \mathbf{x} - N_q(N_q^T N_q)^{-1}(N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q). \tag{2.27}$$

BIZONYÍTÁS: Használjuk a következő jelöléseket

$$\lambda_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_i^T\mathbf{x} - b_i$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1^T\mathbf{x} - b_1 \\ \mathbf{n}_2^T\mathbf{x} - b_2 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_q\mathbf{x} - b_q \end{pmatrix} = N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q. \tag{2.28}$$

Ekkor a Q sokaság így írható:

$$Q = \{\mathbf{x} : \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}. \tag{2.29}$$

Azt kell tehát belátni, hogy minden $\mathbf{x}$-re

$$\boldsymbol{\lambda}(P_q\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \tag{2.30}$$

továbbá, hogy a vetítés merőleges,[4] azaz

$$P_q\mathbf{x} - \mathbf{x} \in \tilde{Q}. \tag{2.31}$$

Figyelembe véve (2.27)-t és (2.28)-t, valamint $\tilde{Q}$ definícióját,

$$\boldsymbol{\lambda}(P_q\mathbf{x}) = N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q - N_q^T N_q(N_q^T N_q)^{-1}(N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q) = \mathbf{O}.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$(N_q^T N_q)^{-1}(N_q^T\mathbf{x} - \mathbf{b}_q) = \mathbf{u}.$$

Ekkor

$$P_q\mathbf{x} - \mathbf{x} = N_q\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{q} u_i\mathbf{n}_i,$$

amivel igazoltuk a lemmánkat.

A vetítőmatrixok néhány egyszerű tulajdonsága

Legyenek $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_m$ tetszőleges vektorok. Bontsuk fel őket $\tilde{Q}$-beli, ill. $Q°$-beli összetevőikre:

$$\mathbf{v} = \tilde{P}_q\mathbf{v} + P_q^0\mathbf{v} \qquad \mathbf{w} = \tilde{P}_q\mathbf{w} + P_q^0\mathbf{w}. \tag{2.32}$$

$\tilde{Q}$ és $Q°$ ortogonalitása miatt

$$(\tilde{P}_q\mathbf{v})^T(P_q^0\mathbf{w}) = 0 \quad \text{és} \quad (P_q^0\mathbf{v})^T(\tilde{P}_q\mathbf{w}) = 0. \tag{2.33}$$

Ezért

$$\mathbf{v}^T\mathbf{w} = (\tilde{P}_q\mathbf{v})^T(\tilde{P}_q\mathbf{w}) + (P_q^0\mathbf{v})^T(P_q^0\mathbf{w}) \tag{2.34}$$

[4] Lásd a 3. lábjegyzetet.

és

$$\mathbf{v}^T(\overset{0}{P_q}\mathbf{w}) = (\overset{0}{P_q}\mathbf{v})^T(\overset{0}{P_q}\mathbf{w}) = (\overset{0}{P_q}\mathbf{v})^T\mathbf{w}. \tag{2.35}$$

Ezt alkalmazva $\mathbf{v}=\mathbf{w}$-re kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}^T(\overset{0}{P_q}\mathbf{v}) = |\overset{0}{P_q}\mathbf{v}|^2. \tag{2.36}$$

Végül megjegyzendő, hogy (2. 24) és (2. 25) miatt, ha $q=m$

$$P_m\mathbf{v}=\mathbf{o} \quad (\text{minden } \mathbf{v}\in E_m \text{ esetén}). \tag{2.37}$$

3. §. Matrix inverzió. Vetítőmatrixok kiszámítása

A továbbiakban gyakran lesz szükségünk az $(N_q^T N_q)^{-1}$ típusú inverzek, valamint a P_q és $\tilde{P}_q$ vetítőmatrixok kiszámítására, különböző $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_q$ esetén. Leggyakrabban úgy lép fel a probléma, hogy a szereplő $\mathbf{n}_i$-ből egyet elhagyunk, vagy egy újat hozzáveszünk. Ezért különösen hasznos lesz rekurziós formulák készítése. A most következő matrix inverziós módszer [7]-ben található meg.

Legyen A egy négyzetes matrix. Végezzük el a következő particionálást:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

ahol A_1 és A_4 négyzetes matrixok, A_2, A_3 a megfelelő sorú, ill. oszlopú derékszögű matrixok. Legyen továbbá

$$A_0 = A_4 - A_3 A_1^{-1} A_2. \tag{3.2}$$

Ha mind A_1, mind A_0 nemszinguláris, akkor A inverze létezik és a következőképpen állítható elő:[5]

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

ahol

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2A_0^{-1}A_3A_1^{-1} \\ B_2 &= \quad -A_1^{-1}A_2A_0^{-1} \\ B_3 &= \quad -A_0^{-1}A_3A_1^{-1} \\ B_4 &= \quad A_0^{-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Az A és B matrixok összeszorzásával ellenőrizhető, hogy B valóban inverz. (3. 4)-ből nyilvánvaló, hogy B_i ugyanolyan méretű matrix, mint A_i $(i=1, 2, 3, 4)$, tehát, ha ismert A^{-1}, akkor a B_i is az. Ugyancsak (3. 4)-ből következik, hogy

$$A_1^{-1} = B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3, \tag{3.5}$$

[5] Természetesen ez az elégséges feltétel nem szükséges, azonban a mi esetünkben teljesülni fog.

Legyen most

$$A = N_q^T N_q \tag{3.6}$$

$$A_1 = N_{q-1}^T N_{q-1} \tag{3.7}$$

$$A_2 = A_3^T = N_{q-1}^T \mathbf{n}_q \tag{3.8}$$

$$A_4 = \mathbf{n}_q^T \mathbf{n}_q = 1. \tag{3.9}$$

Ha ismerjük $(N_q^T N_q)^{-1}$-et, akkor könnyen kiszámíthatjuk $(N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1}$-et (3. 5) segítségével, ahol most B_1, B_2, B_3, B_4 az $(N_q^T N_q)^{-1}$ matrixnak a (3. 6)—(3. 9)-nek megfelelő particionálásai, azaz B_1 a bal felső sarokban levő $(q-1)\times\times(q-1)$-es matrix, B_4 az utolsó sor eleme, B_2 és B_3 pedig az utolsó oszlop, ill. utolsó sorból elhagyva az utolsó elemet. (Ha nem az $\mathbf{n}_q$-t akarjuk elhagyni, hanem egy másik $\mathbf{n}_i$-t, $N_q^T N_q$-ban sor, ill. oszlopcserékkel elérhető, hogy $\mathbf{n}_i$ és $\mathbf{n}_q$ szerepet cseréljenek, ekkor természetesen az inverzen is végre kell hajtani a megfelelő oszlop-, ill. sorcserét.)

Ha ismerjük $(N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1}$-et, $(N_q^T N_q)^{-1}$ a következőképpen számítható ki: felhasználva a P_q^0 vetítőoperátor (2. 25) előállítását és A_0 (3. 2) definícióját,

$$A_0 = \mathbf{n}_q^T [I - N_{q-1}(N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1} N_{q-1}^T] \mathbf{n}_q = \mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q, \tag{3.10}$$

azaz felhasználva (2. 36)-ot,

$$A_0 = \mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q = (N_{q-1}^0 \mathbf{n}_q)^T (P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q) = |P_{q-1}^0 n_q|^2$$

$$A_0 = |P_{q-1}^0 n_q|^2. \tag{3.11}$$

A 7. lemma szerint annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy $A_0 > 0$ legyen, az, hogy $\mathbf{n}_q$ lineárisan független legyen $\mathbf{n}_i$-ktől $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$. Ezt feltéve (ekkor $A_0^{-1} = \frac{1}{A_0}$, mert A_0 egyelemű matrix):

$$\begin{aligned} B_1 &= (N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1} + A_0^{-1} \gamma_{q-1} \gamma_{q-1}^T \\ B_2 &= B_3^T = -A_0^{-1} \gamma_{q-1} \\ B_4 &= \quad A_0^{-1}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ahol

$$\gamma_{q-1} = (N_{q-1}^T N_{q-1})^{-1} (N_{q-1}^T \mathbf{n}_q). \tag{3.13}$$

Ekkor $(N_q^T N_q)^{-1}$-et a következőképpen állíthatjuk elő:

$$(N_q^T N_q)^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

ahol B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ a (3. 12)-ben definiált matrix.

Az eddigiek segítségével könnyen adhatunk egy rekurziós formulát a $\tilde{P}_q$ és a P_q^0 vetítőoperátorokra. Felhasználva a (2. 21), (3. 12) és (3. 14) képleteket,

$$\tilde{P}_q = [N_{q-1} \mathbf{n}_q] \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{q-1}^T \\ \mathbf{n}_q^T \end{bmatrix} = \tilde{P}_{q-1} + A_0^{-1} (P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q)(P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q)^T. \tag{3.15}$$

Jelöljük $\mathbf{u}_q$-val a $P_{q-1}\mathbf{n}_q$ irányú egységvektort:

(3.16) $$\mathbf{u}_q = \frac{P^0_{q-1}\mathbf{n}_q}{|P^0_{q-1}\mathbf{n}_q|}.$$

Mivel $P^0_q = I - \tilde{P}_q$,

(3.17) $$P^0_q = P^0_{q-1} - \mathbf{u}_q\mathbf{u}_q^T.$$

Alkalmazzuk a P^0_q operátort egy tetszőleges $\mathbf{y} \in E_m$ vektorra:

(3.18) $$P^0_q\mathbf{y} = P^0_{q-1}\mathbf{y} - (\mathbf{u}_q^T\mathbf{u})\mathbf{u}_q.$$

Továbbá, mivel $|\mathbf{u}_q| = 1$, tehát

(3.19) $$|P^0_q\mathbf{y}|^2 = |P_{q-1}\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{u}_q^T\mathbf{y}|^2 - 2(\mathbf{u}_q^T\mathbf{y})\mathbf{u}_q(P^0_{q-1}\mathbf{y}).$$

Alkalmazzuk most a (2. 35) összefüggést:

(3.20) $$\mathbf{u}_q^T(P^0_{q-1}\mathbf{y}) = (P^0_{q-1}\mathbf{u}_q)^T\mathbf{y} = \mathbf{u}_q^T\mathbf{y}.$$

Használjuk fel ezt (3. 19)-ben:

(3.21) $$|P^0_q\mathbf{y}|^2 = |P^0_{q-1}\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{u}_q^T\mathbf{y}|^2.$$

Ebből következik, hogy

(3.22) $$|P^0_q\mathbf{y}| \leqq |P^0_{q-1}\mathbf{y}| \leqq |\mathbf{y}|.$$

Tekintsük adottnak az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_l$ normálvektorokat. Kiszámítandó P^0_l, az az operátor, amely a

$$Q_l = \{\mathbf{x} : \mathbf{n}_i^T\mathbf{x} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, l\}$$

altérbe vetít. A (2. 25) előállításból P^0_1-t azaz az első hipersíkba vetítő operátort megkaphatjuk. Most vesszük a megmaradt normálvektorok közül az elsőt, amely lineárisan független $\mathbf{n}_1$-től, és a (3. 17) rekurzióval képezzük P^0_2-t. A most fennmaradó normálvektorok közül veszünk egyet, amely az első két normálvektortól lineárisan független, és ismét alkalmazzuk az említett rekurziót. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a lehető legtöbb lineárisan független normálvektort kiválasztottuk. Ekkor eljutottunk egy $P^0_{l'}$ vetítőoperátorhoz, amely tehát l' számú hipersík közös részébe vetít. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez az operátor egyben az összes említett hipersík közös részébe vetít.

9. LEMMA: *Legyen az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_l$ normálvektorok közül az első l' számú lineárisan független, de bármelyik további már legyen lineárisan összefüggő velük. Legyen továbbá $P^0_{l'}$ az első l' számú hipersík közös részébe vetítő operátor és $\mathbf{y} \in E_m$ tetszőleges vektor. Ekkor*

(3.23) $$\mathbf{n}_q^T(P^0_{l'}\mathbf{y}) = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots l', l'+1, \ldots l).$$

BIZONYÍTÁS: $q = 1, 2, \ldots, l'$-re $P^0_{l'}$ definíciójából következik az állítás. Legyen most $q > l'$. A 7. lemma miatt

$$|P^0_{l'}\mathbf{n}_q| = 0.$$

Felhasználva (2. 35)-t,

$$\mathbf{n}_q^T(P_{l'}^0\mathbf{y})=(P_{l'}\mathbf{n}_q)^T(P_{l'}\mathbf{y})=0,$$

ami bizonyítandó volt.

Szükségünk lesz még a továbbiakban néhány egyszerű összefüggésre és lemmára. Elsőnek vizsgáljuk meg a többváltozós *Taylor*-formulát.

Legyen

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

olyan m változós függvény egy R konvex tartományban, amely minden x_i szerint kétszer folytonosan differenciálható, és amelynek a parciális deriváltjai R-ben korlátosak. Ekkor felírhatjuk a *Taylor*-formulát:

$$F(\mathbf{x})=F(\mathbf{x}_0)+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)+(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T C(x')(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{3.24}$$

ahol

$\mathbf{x}_0 \in R$ tetszőleges pont,

$$g(\mathbf{x})=\nabla F(\mathbf{x})=\left\{\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_m}\right\},$$

és

$$C=\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1,2,\ldots,m} \quad \text{matrix,} \quad \mathbf{x}' \in (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}).$$

Minthogy $F(\mathbf{x})$ második parciális deriváltjai korlátosak,

$$-\gamma|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 \leqq (x-x_0)^T C(x')(x-x_0). \tag{3.25}$$

Legyen $\gamma=\gamma_m$ a legkisebb, amelyre a (3. 25) még teljesül.

6. DEFINÍCIÓ: Ha A egy skalármatrix, akkor A *normáján* a következőt értjük:

$$\|A\|=\max_{\mathbf{x}}\frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}.\ [6]$$

Legyenek $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_q$ lineárisan függetlenek, ekkor $N_q^T N_q$ nemszinguláris, normája létezik, tehát van olyan $\gamma_v > 0$, melyre

$$\|(N_q^T N_q)^{-1}\| \leqq \gamma_v. \tag{3.26}$$

10. LEMMA: *A (3. 26)-t teljesítő γ_v-re fennáll a*

$$|P_{q-1}\mathbf{n}_q| \geqq \gamma_v^{-1/2} \tag{3.27}$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS: Ha C egy tetszőleges matrix és c_{ij} egyik eleme, akkor

$$|c_{ij}| \leqq \|C\|. \tag{3.28}$$

Tekintsük ugyanis azt az $\mathbf{x}_1$ vektort, amelynek j-edik koordinátája 1, a többi 0.

[6] Az A matrix így definiált normája az egység hosszúságú vektorok képei közül a leghosszabb nagyságúval egyenlő. Ha A valós szimmetrikus matrix, akkor $\|A\|$ nem más, mint a legnagyobb abszolút értékű sajátérték abszolút értéke.

Mivel $|\mathbf{x}_1|=1$, tehát

$$\|C\| \geqq |C\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_{kj}^2} \geqq \sqrt{c_{ij}^2} = |c_{ij}|.$$

Ezzel (3. 28)-at beláttuk. Legyenek A és A_1 mint (3. 6) és (3. 7)-ben. $A^{-1}=(N_q^T N_q)^{-1}$-t particionáljuk úgy, mint (3. 3)-ban. Ekkor $A_0=|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2$. Mivel $B_4=A_0^{-1}$ eleme az A^{-1} matrixnak, (3. 28) szerint és (3. 26) miatt

$$|A_0^{-1}| = \|A^{-1}\| \leqq \gamma_v,$$

azaz

$$[|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2]^{-1} \leqq \gamma_v,$$

amit átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$|P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q| \geqq \gamma_v^{-1/2}.$$

Felhasználva (2. 25)-öt és (2. 27)-et,

$$|P_{q-1} \mathbf{n}_q| \geqq |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|,$$

s ezzel a lemma állítását igazoltuk.

11. LEMMA: *Legyen Q a $\lambda_i(\mathbf{x})=\mathbf{n}_i^T\mathbf{x}-b_i=0$ $(i=1, 2, ..., q)$ hipersíkok közös része, és legyen $\mathbf{x}_0 \in Q$. Ekkor annak szükséges feltétele, hogy az*

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{z} \tag{3.29}$$

pont benne legyen az

$$R = \{\mathbf{x} : \lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \quad i=1, 2, ... q, ..., k\} \tag{3.30}$$

tartományban, az, hogy

$$N_q^T \mathbf{z} \geqq \mathbf{0} \tag{3.31}$$

legyen.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel ugyanis, hogy ez nem teljesül. Ekkor legalább egy i-re $\mathbf{n}_i^T\mathbf{z}<0$, például $i=1$-re. Ekkor azonban

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_1^T(\mathbf{x}_0+\mathbf{z}) - b_1 = \mathbf{n}_1^T\mathbf{z} < 0,$$

mivel

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_1^T\mathbf{x}_0 - b_1 = 0,$$

a feltevés szerint ezzel igazoltuk a lemmát.

4. §. A kvázi-konkáv programozási feladat lineáris feltételek esetére

Legyen R tartomány a (2. 5)-ben definiált félterek közös része, azaz

$$R = \{\mathbf{x} : \lambda_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}_i^T\mathbf{x} - b_i \geqq 0 \quad i=1, 2, ... k\}. \tag{4.1}$$

R zárt és konvex tartomány, a határa

(4. 2) $B = \{\mathbf{x}: \lambda_i(\mathbf{x}) = 0$ valamilyen i-re és $\lambda_i(\mathbf{x}) \geqq 0$ minden i-re$\}$.

Legyen továbbá

(4. 3) $$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

m-változós szigorúan kvázi-konkáv függvény, és jelöljük a gradiensét $g(\mathbf{x})$-el:

(4. 4) $$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \nabla F(\mathbf{x}) = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_m}\right\}.$$

Feladat: Keresendő az $F(\mathbf{x})$ szigorúan kvázi-konkáv függvény maximuma az R zárt konvex tartományban, és keresendő az az $x_0 \in R$ amelyre

(4. 5) $$F(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in R} F(\mathbf{x}).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy ismerünk egy $\mathbf{x}_1 \in R$ [7] pontot, és ebből konstruálunk egy olyan konvergens $\mathbf{x}_i$ sorozatot, melyre

(4. 6) $$F(\mathbf{x}_1) < F(\mathbf{x}_2) < \dots < F(x_n) < \dots$$

kimutatjuk továbbá, hogy $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, és erre az x_0-ra (4. 5) teljesül, azaz $\mathbf{x}_0$ pont optimális a feladatra nézve.

1. TÉTEL: *Legyen $\mathbf{x}_0$ pont az R tartomány határán. $\mathbf{x}_0$ pontosan q hipersíkon van rajta ($1 \leqq q \leqq m$), amelyekről feltesszük, hogy lineárisan függetlenek. (Normálvektoraik lineárisan függetlenek.) Nevezzük ezen síkok közös részét Q-nak, amely tehát a síkok lineáris függetlensége miatt $m-q$ dimenziós sokaság. Legyen továbbá $F(\mathbf{x})$ szigorúan kvázi-konkáv függvény, amelynek második parciális deriváltjai korlátosak R-ben. Ezenkívül $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$ esetén $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T\, \mathbf{g}_0 \neq 0$ legyen*[8]. *Ekkor annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $F(\mathbf{x})$ függvény az R tartománybeli maximumát az $\mathbf{x}_0$ pontban érje el, azaz, hogy az*

$$F(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in R} F(\mathbf{x})$$

egyenlet teljesüljön, az hogy

(4. 7) $$P_q^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$$

és

(4. 8) $$(N_q^T N_q)^{-1} N_q \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \leqq 0$$

legyen.

BIZONYÍTÁS: *Elégségesség.* (4. 7)-ből következik, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ megadható a Q-t alkotó síkok normálvektorainak lineáris kombinációjaként. (Ugyanis $E_k = Q^\circ + \tilde{Q}$

[7] Sok esetben a gazdasági feladatnak ismerjük egy megoldását, ui. a jelenleg használatos program ilyen. Más esetekben $\mathbf{x}_1 = o$, megfelelő, ez ui. megfelel annak, hogy semmit sem termelünk. Ha nem ismeretes induló program, a lineáris programozásban ismert eljárással nyerhetünk egyet, ugyanis a feltételek itt is lineárisak.

[8] Ezt a kényelmetlen feltételt, valamint azt, hogy az $\mathbf{x}_0$-t tartalmazó síkok legyenek lineárisan függetlenek, ki fogjuk küszöbölni a módszer használata során.

ortogonális összeg, tehát $P_q^0 \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{g}_0 \in \tilde{Q}$, $\tilde{Q}$ pedig az $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_q$ vektorok által kifeszített altér) azaz

$$(4.9) \qquad \mathbf{g}_0 = \sum_{i=1}^{q} r_i \mathbf{n}_i = N_q \mathbf{r}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots r_q).$$

Mindkét oldalra alkalmazva az $(N_q^T N_q)^{-1} N_q^T$ operátort,

$$(4.10) \qquad \mathbf{r} = (N_q^T N_q)^{-1} N_q^T \mathbf{g}_0,$$

azaz (4. 8) miatt

$$(4.11) \qquad \mathbf{r} \leqq \mathbf{0}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_0$ nem maximális pontja $F(\mathbf{x})$-nek R-ben, azaz létezik olyan $\mathbf{x}_1 \in R$, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Most igazolni fogjuk, hogy ekkor

$$(4.12) \qquad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 > 0.$$

Avégből, hogy ezt belássuk, tekintsük az $F(\mathbf{x})$ függvényt az $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ vektor irányában, mint egydimenziós függvényt, azaz az

$$f(t) = F(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0))$$

függvényt mint t függvényét. A 2. lemma után levő megjegyzés értelmében ez is kvázi-konkáv függvény. Mivel $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$, tehát $f(1) > f(0)$, következésképpen $f(t) > f(0)$ $(0 < t < 1)$, innen $f'(0) \geqq 0$, azaz $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 \geqq 0$, ami összevetve a tétel feltevésével, mely szerint $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 \neq 0$, a kívánt (4. 12)-t kapjuk.

Felhasználva $\mathbf{g}_0$ (4. 9) alakját, (4. 12)-ből következik, hogy

$$(4.13) \qquad 0 < \sum_{i=1}^{q} r_i [(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{n}_i].$$

A (3. 23) egyenlőtlenségből, mivel annak feltétele teljesül $(\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{z} \in R)$: $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{n}_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, q)$, innen és (4. 13)-ból kapjuk, hogy legalább egy $r_i > 0$, ami ellentmond (4. 11)-nek, tehát a tétel feltevése elégséges.

Szükségesség. Belátjuk, hogy a (4. 7) és (4. 8) feltételek szükségesek is. Legyen q a (4. 10)-beli $\mathbf{r}$ vektor komponenseinek a száma. Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy $r_q \geqq r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, q-1)$. Ha (4. 7) és (4. 8) közül nem mind a kettő teljesül, akkor két esetet különböztetünk meg:

I.

$$(4.14) \qquad |P_q^0 \mathbf{g}_0| > \max \left\{ 0; \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2} \right\}^{9}$$

[9] A tétel szükségesség részében nyilvánvaló, hogy az 1. és 2. alternatíva minden esetet tartalmaz, amikor a (4. 7) és (4. 8) nem mindegyike teljesül. Az 1. alternatívával az egész $|P_q^0 \mathbf{g}_0| < 0$ eset tárgyalható volna akkor is, ha $r_q > 0$ és $|P_q^0 \mathbf{g}_0| < \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}$. Ez utóbbi eset azonban a 2. alternatívába is beletartozik, és mivel ez kevesebb megszorítással dolgozik, ezzel célszerű számolni, amikor csak lehet. (A másik esetben Q dimenziója változatlan vagy csökken; itt pedig növekszik.)

Mivel $|P_q^0 g_0| > 0$, x_0 nem csúcs[10] (R-ben), azaz $q \leqq m \in 1$, tehát Q legalább egydimenziós sokaság. Tekintsük a következő egységvektort:

$$z = \frac{P_q^0 g_0}{|P_q^0 g_0|}. \tag{4.15}$$

Ekkor $N_q^T z = 0$, mert $n_i^T z = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, q$), ugyanis $z \in Q^\circ$, $n_i \in \tilde{Q}$ és $Q^\circ + \tilde{Q} = E_m$. Az

$$x = x_0 + \tau z \tag{4.16}$$

vektor minden τ-ra Q-ban van, mert x_0 és z Q-beliek, Q pedig sokaság. Azonban x_0 csak a Q-t létrehozó q számú hipersíkban (H_i, $i = 1, 2, \ldots, q$) van a feltétel szerint, és mivel lehetséges pont, $\lambda_i(x_0) \geqq \delta > 0$ $i = q+1, \ldots, k$. Ekkor a fennmaradó $k-q$ hipersík mindegyikére (H_i, $i = q+1, \ldots, k$) vagy létezik egy $\tau = \tau_i$, amellyel képezett (4.16)-beli x-re $\lambda_i(x) = 0$, vagy az $x = x_0 + \tau z$ minden τ esetére $\lambda_i(x) > 0$. Azonban mivel R korlátos, legalább egy pozitív és egy negatív τ_i létezik. A $\lambda_i(x_0 + \tau z) = 0$ egyenletből

$$\tau_i = \frac{\lambda_i(x_0)}{z^T n_i}. \tag{4.17}$$

Mivel $|z^T n_i| \leqq 1$, $|\tau_i| \geqq \lambda_i(x_0) \geqq \delta > 0$ ($i = q+1, \ldots, k$). Legyen τ_m a legkisebb pozitív τ_i, azaz

$$\tau_m = \min\{\tau_i \geqq \delta\} \qquad (i = q+1, \ldots, k). \tag{4.18}$$

Ez a τ_m reprezentálja azt a legnagyobb lépést, amit x_0-ból z irányába tehetünk anélkül, hogy R-et elhagynánk. Innen bármely τ-ra, melyre $0 \leqq \tau \leqq \tau_m$, $x = x_0 + \tau z \in R$.

Avégből, hogy megmutassuk $F(x) > F(x_0)$ teljesülését elég kicsiny τ-ra tekintsük a következő egyenlőtlenséget, melyet (3.24)-, (3.25)- és (4.16)-ból kaptunk:

$$\tau(z^T g_0) - \gamma\tau^2 \leqq F(x) - F(x_0). \tag{4.19}$$

Tehát (2.36), (4.14) és (4.15) figyelembevételével

$$z^T g_0 = |P_q^0 g_0|. \tag{4.20}$$

Ezt visszaírva (4.18)-ba,

$$\tau[|P_q^0 g_0| - \gamma\tau] \leqq F(x) - F(x_0). \tag{4.21}$$

Az F függvény növekedésére vonatkozó alsó korlát a legnagyobb, ha $\tau = |P_q^0 g_0|/2\gamma$:

$$\frac{|P_q g^0|^2}{4\gamma} \leqq F(x) - F(x_0). \tag{4.21'}$$

Legyen

$$\tau' = \min\{\tau_m, |P_q^0 g_0|/2\gamma\} \geqq \min\{\delta, |P_q^0 g_0|/2\gamma\}. \tag{4.22}$$

[10] Ugyanis P_q^0 Q^0-ba vetít, ha pedig $q = m$ volna, akkor az m dimenziós térben m számú lineárisan független sík közös része Q^0 csak egy pont. Bármely vektor vetítése Q^0-ba tehát null vektor, $|P_q^0 g_0| > 0$ lehetetlen volna.

Ekkor

(4.23)
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tau'\mathbf{z} \in R,$$

és

(4.24)
$$\frac{1}{2}\tau' |P_q^0 \mathbf{g}_0| \leqq F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0).$$

II. Most tekintsük a második alternatívát: $r_q > 0$ $(r_q \geqq r_i,\ i = 1, \dots, q-1)$,

(4.25)
$$|P_q^0 \mathbf{g}_0| \leqq \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}.$$

Kimutatjuk, hogy található egy R-beli $\mathbf{x}_1$ pont, úgyhogy

(4.26)
$$\frac{1}{4}\tau' r_q \gamma_v^{-1/2} \leqq F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_0),$$

ahol

$$\tau' \geqq \min \left\{ \delta, \frac{r_q}{4\gamma\, \gamma_v^{1/2}} \right\}.$$

Hogy ezt kimutassuk, hagyjuk el az N_q matrixból $\mathbf{n}_q$-t. Így az $N_{q-1} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{q-1}]$ $m \times (q-1)$-es matrixhoz jutunk. A megfelelő vetítőmatrixot jelöljük P_{q-1}-gyel. Tudjuk, hogy $P_{q-1}\mathbf{n}_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, q-1)$. Amint azt a 10. lemmában kimutattuk, a (3.27) egyenlőtlenség teljesül $P_{q-1}\mathbf{n}_q$-ra. (2.32)-ből, és abból a tényből, hogy $\mathbf{n}_i - \mathbf{k}$ $(i = 1, 2, \dots, q)$ kifeszíti $\tilde{Q}$-ot következik, hogy

(4.27)
$$\mathbf{g}_0 = \sum_{i=1}^{q} r_i \mathbf{n}_i + P_q^0 \mathbf{g}_0.$$

Q-t tartalmazza az az altér, amibe P_q vetít, ezért

$$P_{q-1}^0 P_q^0 \mathbf{g}_0 = P_q^0 \mathbf{g}_0,$$

és (4.27)-ből következőleg

$$P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0 = r_q P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q + P_q^0 \mathbf{g}_0.$$

A $|P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0|$ alsó korlátját megkapjuk (3.27) és (4.25) segítségével:

(4.28)
$$|P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0| \geqq r_q |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q| - |P_q^0 \mathbf{g}_0| \geqq \frac{1}{2} r_q \gamma_v^{-1/2}.$$

Továbbá, mivel $\mathbf{n}_q^T P_q^0 \mathbf{g}_0 = 0$ és $\mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q = |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2$ (lásd (2.36)) következik, hogy

$$\mathbf{n}_q^T P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0 = r_q |P_{q-1}^0 \mathbf{n}_q|^2 > 0.$$

Legyen

(4.29)
$$\mathbf{z} = \frac{P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0}{|P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0|}.$$

Ekkor $N_{q-1}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$ és $n_q^T \mathbf{z} > 0$, ezért az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{z}$ pont minden $\tau > 0$ esetén H_i-ben fekszik $(i = 1, 2, ..., q-1)$ de nincsen H_q-ban.

Így a kívánt $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tau' \mathbf{z} \in R$, teljesül, ahol

$$\tau' = \min \{\tau_m, |P_{q-1}^0 \mathbf{g}_0|/2\gamma\}.$$

Itt természetesen $\tau_m = \min \{\tau_i > 0\}$ $(i = q, q+1, ..., k)$. Ennek belátása pontosan úgy történik, mint az I. részben. A kívánt (4. 26) azonnal következik (4. 24)-ből (4. 28) miatt. Természetesen (4. 24)-ben is $|P_q \mathbf{g}_0|$ helyett $|P_{q-1} \mathbf{g}_0|$-t kell vennünk.

2. TÉTEL: *Legyen $\mathbf{x}_0$ pont az R tartomány belsejében és teljesüljenek az előző tétel feltevései. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $F(\mathbf{x})$ függvény az R tartománybeli maximumát $\mathbf{x}_0$ pontban érje el, az hogy*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \tag{4.30}$$

legyen.

BIZONYÍTÁS: Az *elégségesség* igazolásához tegyük fel, hogy (4. 30) teljesül, de mégis létezik olyan $\mathbf{x}_1 \in R$, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Ekkor szó szerint megismételhető (4. 12) igazolása, ez azonban ellentmondás, mert $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ esetén $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}_0 = 0$.

A *szükségesség* bizonyítása ugyanúgy történik, mint az 1. tétel bizonyításában a szükségességnél található I. esetben, ugyanis ekkor $q = 0$, $P_q = I$ és $P_q^0 \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_0$. Ha tehát $\mathbf{g}_0 \neq \mathbf{0}$, akkor $|\mathbf{g}_0| > 0$, tehát az ottani konstruktív bizonyítás egy olyan $\mathbf{x}_1$ pontot is szolgáltat, melyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$.

Az 1. és 2. tétel szerint egy tetszőleges $\mathbf{x}_0 \in R$ vagy optimális pont, azaz az $F(\mathbf{x})$ függvény az $\mathbf{x}_0$ pontban veszi fel az R-beli maximumát — ekkor megoldottuk feladatunkat — vagy található egy $\mathbf{x}_1 \in R$ pont, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. A tételek bizonyításai konstruktívak, tehát egyben módszert is szolgáltatnak egyre jobb program keresésére. Igazolni kell még, hogy az eljárás konvergens, ezenkívül a 1. tételben szereplő kényelmetlen feltételektől is meg akarunk szabadulni. Erre szolgál az alábbi tétel, és az azt követő megjegyzések.

3. TÉTEL: *Legyen $\mathbf{x}_0$ tetszőleges pont R-ben és legyen az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat a következőképpen definiálva:*

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau_i' \mathbf{z}_i \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

ahol $\mathbf{z}_i$ és τ_i' az 1. *és* 2. *tétel bizonyításának „szükségesség" részéből az i-edik lépésben kapott $\mathbf{z}$ és τ_i.*

Ekkor az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozathoz tartozó $\{F(\mathbf{x}_i)\} \equiv \{F_i\}$ sorozat szigorúan növekedő, és

a) *vagy véges sok tagból áll, véget ér F_N-nél, ekkor $\mathbf{x}_N$ optimális pont, azaz $F(\mathbf{x})$-nek az R-beli maximuma F_N,*

b) *vagy az $\{F_i\}$ sorozat végtelen, ekkor konvergens sorozatot alkot, melynek határértéke, $F_{\max}$, egyben $F(\mathbf{x})$-nek az R-ben felvett legnagyobb értéke, és a megfelelő $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat is konvergens. Az $\{x_i\}$ sorozat határértékét $\mathbf{x}^*$-gal jelölve igaz az, hogy*

$$F_{\max} = F(\mathbf{x}^*).$$

BIZONYÍTÁS: A következő jelöléseket fogjuk használni $\varrho = \max \{0, r_j\}$ $(j = 1, 2, ..., q)$, ahol r_j a (4. 9) -ben szereplő $\mathbf{r}$ komponensei, $P^\circ \mathbf{g}_i = P_q^0 \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)$, δ pedig a (4. 18)-ban is szereplő alsó korlát.

$$(4.31)\qquad \psi_i = \max\left\{\min\left[\frac{|P^0 g_i|^2}{4\gamma}, \frac{\delta|P^0 g_i|}{2}\right], \min\left[\frac{\varrho_i^2}{16\gamma\,\gamma_\nu}, \frac{\delta\varrho_i}{4\sqrt{\gamma_\nu}}\right]\right\} \geqq 0.$$

Az 1. tétel miatt

$$(4.32)\qquad F_{i+1} - F_i \geqq \psi_i \qquad (i=0, 1, \ldots).$$

A $\{F_i\}$ sorozat tehát valóban szigorúan növekedő, mert $\psi_i \geqq 0$ és $\psi_N = 0$ esetén F_N az $F(\mathbf{x})$ függvény R-beli maximuma, ugyanis ekkor $P^0_{g_N} = \varrho_N = 0$. Azonban $i < N$ esetén $\psi_i > 0$, mert ha valamely $k < N$ esetén $\psi_k = 0$ volna, akkor már F_k-val véget érne a sorozat. A tétel állításának a) részét és a sorozat szigorú növekedését ezzel beláttuk.

Ha az $\{F_i\}$ sorozat végtelen, létezik határértéke — jelöljük $F_{\max}$-al — mert egy monoton növekedő korlátos sorozatnak mindig van határértéke. A (4. 32) egyenlőtlenségeket összeadva,

$$(4.33)\qquad F_{\max} - F_0 \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i .$$

Ebből következik, hogy $\lim\limits_{i\to\infty} \psi_i = 0$, azaz, hogy az $F_{\max}$-hoz tartozó ψ — a $\{\psi_i\}$ sorozat határértéke — 0, tehát a 1. tétel szerint $F_{\max}$ az $F(\mathbf{x})$ függvény R-beli maximuma ahogy állítottuk. Azt kell még igazolnunk, hogy az F_i-hez tartozó $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat konvergens. Mivel az R halmaz korlátos, ez csak úgy lehetséges, hogy az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozatnak legalább két torlódási pontja van: $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}$. Válasszunk ki az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozatból egy $\mathbf{x}^*$-hoz és egy $\mathbf{x}^{**}$-hoz konvergáló részsorozatot:

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{i_\nu} = \mathbf{x}^* \qquad \lim_{\mu\to\infty} x_{j_\mu} = x^{**}.$$

Mivel az $\{F_i\}$ sorozat monoton növekedő, konvergens és határértéke $F_{\max}$, következőleg

$$F(\mathbf{x}^*) = F(\mathbf{x}^{**}) = F_{\max} .$$

Azonban $F(\mathbf{x})$ a feltevés szerint szigorúan kvázi-konkáv függvény, tehát az $F(\mathbf{x})$ függvény az R-beli maximumát csak egy helyen érheti el, (lásd: 3. lemma), tehát $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{**}$ azaz az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat konvergens és $F(\mathbf{x}^*) = F_{\max}$, amivel a tétel minden állítását igazoltuk.

Megjegyzések:

1. Az 1. tételben szerepel az a feltétel, hogy az $\mathbf{x}_0 \in R$ pontot tartalmazó síkok lineárisan függetlenek legyenek. Ettől a feltételtől könnyen megszabadulhatunk. Tegyük fel ugyanis, hogy az $\mathbf{x}_0$ pontot a q lineárisan független síkon kívül még p ezektől lineárisan függő sík is tartalmazza. A (4. 7) és (4. 8) feltételek változatlanul elégségesek, ha ezek bármely $\mathbf{x}_0$-t tartalmazó lineárisan független síkrendszerre teljesülnek — csak ezt használtuk ki — akkor $\mathbf{x}_0$ pont optimális.

A (4. 7) és (4. 8) szükségességének vizsgálatakor két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha $|P^0_q \mathbf{g}_0| > 0$, akkor a (4. 15)-beli $\mathbf{z}$ megfelelő, mert $\mathbf{x}_0$ benne van mind a $p+q$ hipersíkban, tehát $N^T_{q+p}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ mint a „szükségesség" I. részében, tehát a további következtetések is érvényesek, található $\mathbf{x}_1$ melyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Nehezebb a helyzet a másik esetben, amikor $|P^0_q \mathbf{g}_0| = 0$ és legalább egy $r_i > 0$. Legyen pl. $i = q$, azaz

$r_q > 0$. Számítsuk ki ekkor a (4. 29)-beli $\mathbf{z}$-t. Erre adódik ugyanúgy mint ott, hogy $N_{q-1}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{n}_q^T \mathbf{z} > 0$. A legtöbb esetben teljesül, hogy

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{z} \geqq 0 \qquad (i = q+1, \dots q+p), \tag{4. 34}$$

amikor is $\mathbf{z}$ ismét megfelelő. Előfordul azonban, hogy a (4. 34) szorzatok közül valamelyik negatív (azaz $\mathbf{z}$ nem lehetséges pont, mert a megfelelő $\mathbf{n}_i$ normálvektorú sík kívánt félterében nincs benne, így az $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{z}$ pont sem lehetséges pont). Ekkor az eljárást a következőképpen módosíthatjuk:

Egy egyszerű lineáris programozási problémát kell megoldanunk q változóval és $q+p$ megszorítással. A H_{q+1} síkbeli b_{q+1}-et helyettesítsük $b'_{q+1} = b_{q+1} + \varepsilon$-nal, hasonlóan a b_{q+2}-t. $b'_{q+2} = b_{q+2} + \varepsilon^2$-tel stb., ahol ε tetszőleges kicsi pozitív szám. A $q+p$ számú hipersík meghatároz egy R^* konvex poliédert, melynek $\mathbf{x}_0$ egy csúcsa. $\mathbf{g}_0$ egy konstans vektor. Valamilyen lineáris programozási eljárással (vagy a gradiens vetítési módszerrel), vagy meghatározható oly $\mathbf{z}$, amelyre $N_{q+p}^T \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{z}'\mathbf{g} > 0$ ekkor $\varepsilon \to 0$ segítségével egy megfelelő $\mathbf{z}$-hez jutunk, vagy kimutatjuk, hogy ilyen $\mathbf{z}$ nincs, azaz $\mathbf{x}_0$ optimális pont.

(Ha a fenti $\mathbf{z}$ kereséskor $\max \mathbf{z}^T g_0$-t határozzuk meg, akkor az eljárás teljes. Elég azonban egy olyan $\mathbf{z}$ is — ha van ilyen — amelyre kimutathatjuk, hogy $\mathbf{z}^T \mathbf{g}_0 > 0$ minden ε-ra, és még az $\varepsilon \to 0$ esetben vett határértéke is pozitív.)

2. A 1. tételben szerepel az a feltevés, hogy $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$ esetén $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, azaz ha $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$ (az $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ iránymenti derivált) akkor az $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ irányban nincs olyan $\mathbf{x}'_1$ pont, amelyre $F(\mathbf{x}'_1) > F(\mathbf{x}_0)$ volna. (Természetesen ez a $-(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ irányban is igaz.)

Ha ez a feltétel nem teljesül, az szemléletesen azt jelenti, hogy van olyan irány, amely mentén haladva egy olyan egydimenziós inflexiós pont van, ahol az első iránymenti derivált zérus. Ekkor a fent leírt eljárást módosítani kell, ugyanis ekkor a (4. 7) és (4. 8) feltételek már nem elégségesek $\mathbf{x}_0$ optimalitásához. (Természetesen továbbra is szükségesek.) Ha a feltételek nem teljesülnek, az eljárás továbbra is szolgáltat egy pontot, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$. Ha azonban teljesülnek a feltételek egy $\mathbf{x}_0$ pontra, abból még nem következik $\mathbf{x}_0$ optimalitása. Ekkor tehát találnunk kell valamilyen eljárást, amelynek segítségével vagy egy olyan $\mathbf{x}_1$ ponthoz jutunk, amelyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_2)$, vagy kitűnik, hogy $\mathbf{x}_0$ optimális. Az alábbiakban vázolva megemlítünk néhány ilyen módszert, egy későbbi cikkben erre még részletesen visszatérek.

a) Kérdés, hogy az $\mathbf{x}_0$ pont tetszőleges kicsi környezetében (R-ben) van-e olyan $\mathbf{z}$ pont, amelyben a $\mathbf{z} - \mathbf{x}_0$ irányba vett iránymenti derivált nem negatív. Ha nincs, akkor $\mathbf{x}_0$ optimális. Ha van, akkor $F(\mathbf{z}) > F(\mathbf{x}_0)$. Ha $\mathbf{x}_0$ R határán van, akkor csak R-beli $\mathbf{z}$-kre végezzük a fenti eljárást, azaz olyanokra, melyekre $(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)\mathbf{n}_i \geqq 0$, ha $\mathbf{n}_i \in \tilde{Q}$. (Ez a feltevés azért elegendő, mert ha egy $\mathbf{z}$-re teljesül a fenti kritérium, akkor $F(\mathbf{x})$ kvázi-konkávitása miatt az egész $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z})$ intervallum minden pontjára is teljesül.)

b) Ha van olyan α irány, amelyben az első nem zérus iránymenti derivált páratlan rendű, akkor vagy α vagy $-\alpha$ irányban a függvény növekszik, ellenkező esetben $\mathbf{x}_0$ optimális. Ha $\mathbf{x}_0$ a határon van, akkor csak azon α irányokat vesszük számításba, amelyek R-be mutatnak, azaz $\alpha \mathbf{n}_i \geqq 0$, ha $\mathbf{n}_i \in \tilde{Q}$. Ekkor azonban azt kell megkívánnunk, hogy az α iránymenti első nem zérus derivált páratlan rendű és pozitív legyen. Ha ilyen α nincs, az optimumnál vagyunk, ha van, elég kis α irányba való elmozdulással eljutunk egy olyan $\mathbf{x}_1$ ponthoz, melyre $F(\mathbf{x}_1) > F(\mathbf{x}_0)$.

c) Módosíthatjuk az $F(\mathbf{x})$ függvényt oly módon, hogy a zérus iránymenti deriváltak pozitívba menjenek át, pl. a $\Sigma\varepsilon^i x_i$ hozzáadásával, vagy más módon. Itt azonban több probléma lép fel. Állandó jellegű módosítást nem tehetünk, mert ekkor elromolhat a kvázi-konkávitás, és a konvergencia. A változtatás csak arra szolgál, hogy keressünk egy olyan pontot, ahol a függvényérték nagyobb, vagy igazoljuk, hogy ilyen nincs. Ez a módszer egydimenziós vizsgálatokra vezethető vissza ismét az iránymenti deriváltak segítségével.

3. A (4. 22)-ben leírt τ' nem biztos, hogy a legjobb; előfordulhat, hogy a $\mathbf{z}$ irányban más távolságban elmenve nagyobb függvényértékhez jutunk. Meg kell tehát határoznunk az $F(\mathbf{x}_0+\tau\mathbf{z})$ függvény, mint τ függvényének maximumát a $0<\tau\leqq\tau_m$ intervallumban. Ez a sokszor könnyen megoldható javítás erősen meggyorsíthatja a konvergenciát.

5. §. Algoritmus a feladat megoldására

A 4. §. elején leírt feladat megoldására egy olyan algoritmust adunk, amely felhasználja a 4. §-beli tételek eredményeit, sőt több helyen a közbülső lépéseket is.

Az algoritmusban használt $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ definíciója (4. 4)-ben, a P_q^0 vetítőmatrix előállítása pedig (2. 21)-ben található.

Ha ismeretes egy $\mathbf{x}_0$ lehetséges pont, akkor $\mathbf{x}_\nu=\mathbf{x}_0$-val kezdve az alábbi iteratív eljárás alkalmazható:

1. Számítsuk ki $\mathbf{g}_\nu=\mathbf{g}(\mathbf{x}_\nu)$-t és $P_q^0\mathbf{g}(\mathbf{x}_\nu)$-t. Ha $P_q^0\mathbf{g}_\nu=0$ és $\mathbf{r}\leqq\mathbf{0}$, ahol $\mathbf{r}$ a (4. 10)-beli vektor, akkor $\mathbf{x}_\nu$ optimális (1. tétel).

2. Ha $|P_q^0\mathbf{g}_\nu|$ kielégíti (4. 14)-et, számítsuk ki $\mathbf{z}$-t (4. 15)-ből. Ha $|P_q^0\mathbf{g}_\nu|$ kielégíti (4. 25)-öt, ahol $r_q=\max\{r_i\}>0$, hagyjuk el H_q-t Q-ból, vegyük most N_{q-1}-et és a megfelelő P_{q-1}-et. Számítsuk ki $\mathbf{z}$-t (4. 29)-ből.

3. Számítsuk ki τ_m-t (4. 17)- és (4. 18)-ból, felhasználva a 2-ben kapott $\mathbf{z}$-t. Legyen $\mathbf{x}'_{\nu+1} = \mathbf{x}_\nu+\tau_m\mathbf{z}$.

4. Számítsuk ki $g_{\nu+1}=g(x'_{\nu+1})$-et. Ha $z^T g'_{\nu+1}\geqq 0$, akkor legyen $x_{\nu+1}=x'_{\nu+1}$ és Q-hoz vegyük hozzá a (4. 18)-beli $\min\tau_i$-nek megfelelő H_i-t.

5. Ha $z^T g'_{\nu+1}<0$ [11], legyen

$$\varrho=\mathbf{z}^T\mathbf{g}_\nu/(\mathbf{z}^T\mathbf{g}_\nu-\mathbf{z}^T\mathbf{g}'_{\nu+1}) \tag{5. 1}$$

és

$$\mathbf{x}_{\nu+1}=\varrho\mathbf{x}'_{\nu+1}+(1-\varrho)\mathbf{x}_\nu. \tag{5.2}$$

A síkok közös része Q ekkor változatlan marad.

Ez az algoritmus egy $\mathbf{x}_\nu\in R$ ponthoz, ha az nem optimális megad egy olyan $\mathbf{x}_{\nu+1}$ pontot, amelyben az $F(\mathbf{x})$ értéke nagyobb, mint $\mathbf{x}_\nu$-ben. Ez az eljárás vagy végetér egy $\mathbf{x}_0$ pontnál, akkor $\mathbf{x}_0$ pont optimális, $F(\mathbf{x}_0)$ az $F(\mathbf{x})$ függvény R-beli maximuma,vagy egy konvergens $\{\mathbf{x}_\nu\}$ sorozatot szolgáltat, melynek határértéke a kívánt $\mathbf{x}_0$ optimális pont. (3. tétel.)

[11] $\mathbf{x}_\nu$-ből, ahol pozitív volt az iránymenti derivált, eljutottunk egy olyan $\mathbf{x}'_{\nu+1}$ pontba, ahol már negatív az iránymenti derivált, tehát közben valahol nulla is. Ezt a pontot $\mathbf{x}_{\nu+1}$-gyel jelöltük. $\mathbf{x}_\nu$ és $\mathbf{x}_{\nu+1}$ között $F(\mathbf{x})$ iránymenti deriváltja $(\mathbf{x}_{\nu+1}-\mathbf{x}_\nu$ irányban) pozitív $F(\mathbf{x})$ konkávitása miatt, tehát $F(\mathbf{x}_{\nu+1})>F(\mathbf{x}_\nu)$.

IRODALOM

[1] K. J. ARROW—A. C. ENTHOVEN: Qusai-Concave programming, *Econometrica* **29** (1961) 778—800.

[2] K. J. ARROW—L. HURWITZ—H. UZAWA: Constraint Qalifications in Maximization Problems, *Naval Research Logistics Quarterly* **8** (1961) 175—191.

[3] E. BODEWIG: *Matrix Calculus*, New York, 1956., 36—38. o.

[4] T. N. E. GREVILLE: Some Applications of the pseudoinverse of a matrix, *Siam Review*, 1960, No 2. 15—22.

[5] KARLIN: *Mathematical methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Oxford, 1959., Nonlinear Programming, 199—242. o.

[6] H. W. KUHN—A. W. TUCKER: Nonlinear programming, *Proceedings of Second Berkeley Symposium*, 1950, 481—492. o.

[7] M. LOTKIN—R. REMAGE: Scaling and error analysis for matrix inversion by partitioning, *Ann. Math. Statist.* **24** (1953) 428—439.

[8] J. B. ROSEN: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part I., Linear Contrains. *J. Soc. Indust: Appl. Math.* **8** (1960) 181—217.

[9] J. B. ROSEN: The Gradient Projection Method for Nonlinear programming. Part II. Nonlinear Costrains., *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **9** (1961) 514—532.

[10] K. J. ARROW, L. HURWITZ, H. UZAWA: *Studies in Linear and Nonlinear Programming*. Stanford, California, 1958.

[11] P. WOLFE: The simplex method for quadratic programming. *Econometrica* **27** (1959) 382—398. o. (magyar fordítása: MTA III. Oszt. Közl. **10** (1960) 373—391).

(Beérkezett: 1963. III. 1.)