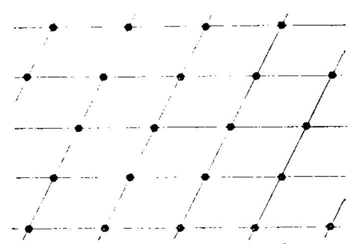
# MI A „DISZKRÉT GEOMETRIA"?

Írta: FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Az 1957-ben elhunyt kiváló német matematikus, W. SÜSS által létrehozott *Oberwolfachi Matematikai Kutató Intézet* fogalommá vált mint a különböző matematikai kollokviumok gyakori színhelye. Ebben az intézetben, amely a Schwarzwald egy kies völgyében fekszik, 1962 júliusában 10 különböző országból mintegy 30 matematikus jött össze egy „Diszkrét geometriai kollokviumra". Mi az a diszkrét geometria, amelyről matematikus körökben egyre több szó esik? Ezt szeretném szélesebb körök számára megvilágítani.*

**1.** A „diszkrét" szó mai közhasználati jelentése eltér a szó matematikai jelentésétől. A matematikában egy diszkrét ponthalmazon szeparált pontokból álló, diszkontinuus halmazt értünk, amilyen pl. egy pontrács (1. ábra) ellentétben mondjuk egy körlap összes pontjából álló ponthalmazzal. A diszkrét geometria elnevezés tehát arra utal, hogy itt nem-folytonos geometriai halmazok vizsgálatáról van szó.

Ezeknek a vizsgálatoknak a zömét mind tárgyuk, mind módszereik alapján az elemi geometria, a csoportelmélet vagy a konvex testek elmélete körébe lehetne sorolni. A tárgy sajátos jellege, fejlődésének fokozódó üteme, valamint eredményeinek érdekessége és fontossága mégis indokolttá teszi azt, hogy a diszkrét geometriát önálló, új tudományágnak tekintsük. Vessünk egy pillantást ennek a tudományágnak a kialakulására, néhány jellegzetes problémájára és más tudományágakkal való kapcsolatára!

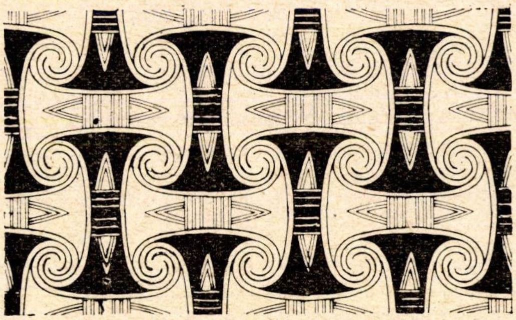


*1. ábra*

**2.** A diszkrét geometria régebbi, mintegy a századfordulóig terjedő időszakát az jellemzi, hogy itt a kutatások csak szabályosan elrendezett elemekből álló halmazokra irányultak. A síknak és a gömbnek szabályos és félig szabályos felbontásaival már a görögök foglalkoztak. KEPLER észrevette, hogy a tér rombdodekaéderekkel kirakható. Ennek az észrevételnek általánosításaként FJODOROV, orosz krisztállográfus felsorolta az összes paralleloédert, vagyis azokat a konvex soklapokat, amelyeknek eltolt és teljes lapok mentén csatlakozó példányaival a tér átfedés és hézag nélkül kirakható. Lord KELVIN és W. BARLOW kristályszerkezeti, MINKOWSKI pedig számelméleti kérdésektől ösztönözve testek rácsszerű elhelyezésével kapcsolatos szélsőértékproblémákat vizsgált. Szóljunk most néhány szót ennek az időszaknak legjelentősebb eredményeiről, a krisztállográfiai csoportok elméletéről.

* Ez az ismertetés a Bolyai János Matematikai Társulat és a Kossuth-klub közös rendezésében 1963. március 26-án tartott előadás nyomán készült.

2. ábránk egy óegyiptomi falmintát mutat. A mintát bizonyos eltolások, tükrözések, és forgások önmagába viszik át. Ezeket a transzformációkat a minta *szimmetria-operációi*nak nevezzük. Az ilyen falminták szimmetria-operációikat tekintve igen különbözők lehetnek. A 3. ábrán látható minta ESCHER, modern holland grafikustól származik. Itt egyenlő alakú és nagyságú szárnyas tigrisek vonulnak egymással szembe, mégpedig úgy, hogy a síkot hézag nélkül lefedik. Ha nem tekintjük a tigrisek színének a különbözőségét, akkor itt, eltolásokon kívül, bizonyos „csúszótükrözések" is szerepelnek szimmetria-operációkként.



*2. ábra*

*3. ábra*

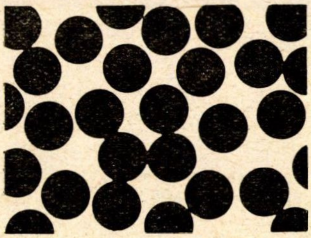
Milyen falminta típusok léteznek? Hogyan lehet őket osztályozni és valamennyit szisztematikusan felsorolni? A választ FJODOROV adta meg 1883-ban: az ún. kétdimenziós *krisztállográfiai csoportok* száma 17.

A krisztállográfiai csoport fogalmának megértése céljából tekintsük egy mintában előforduló szimmetria-operációk összességét. A transzformációknak ez a sokasága a következő két tulajdonsággal bír: 1. A sokaság bármely két transzformációjának egymásutáni alkalmazásával adódó transzformáció szintén hozzátartozik a sokasághoz. 2. A sokaság bármely transzformációjának van a sokaságban egy inverze, vagyis egy olyan transzformáció, amely az eredeti transzformáció hatását megsemmisíti. Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy egy minta szimmetria-operációi *csoportot* alkotnak. Ez a csoport, a minta szimmetria-csoportja szabja meg a minta jellegét, típusát. Ezeknek a csoportoknak az áttekintéséről van tehát szó. S ezt az áttekintést éppen a csoporttulajdonságok teszik lehetővé.

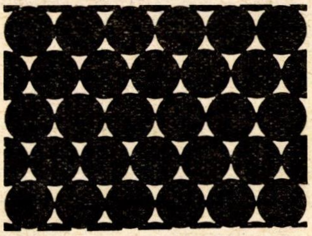
A 17 falminta típus közül sokat már az egyiptomiak ismertek, az arabok pedig páratlan geometriai intuicióval mind a 17-et felfedezték.

A múlt században az atomelmélet rohamos térhódítása miatt nem a két-, hanem a háromdimenziós krisztállográfiai csoportok, az ún. *tércsoportok* álltak az érdeklődés középpontjában. Ezek teljes felsorolását egymástól függetlenül FJODOROV, SCHÖNFLIESS és BARLOW adta meg. Annak a nagy horderejű kérdésnek a tisztázásáról van itt szó, milyen szimmetria-tulajdonságokkal bírhatnak a matematikailag lehetséges kristálystruktúrák. Ennek a kérdésnek a nehézségét már az is mutatja, hogy a szóban forgó tércsoportok száma 230.

**3.** A diszkrét geometriának szabályos alakzatokkal foglalkozó klasszikus iránya századunkban is folytatódik. Meg kell itt említeni a geometriai számelméletben elért mélyreható eredményeket, amelyek egy többdimenziós térben rácsszerűen elhelyezett testek vizsgálatán alapulnak, valamint a matematikai krisztállográfia számos újabb eredményét. Említsünk egy jelentős konkrét eredményt is: DELONAY, szovjet matematikus, felsorolta a *Fjodorov*-féle paralleloéderek 4-dimenziós analogonjait. Míg a háromdimenziós térben csak öt különböző típusú paralleloéder van, addig a topológiailag különböző típusú négydimenziós paralleloéderek száma 52.



*4. ábra*

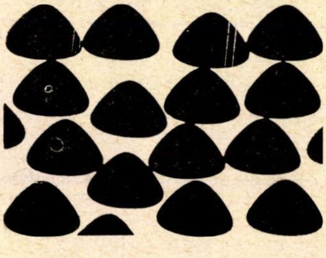


*5. ábra*

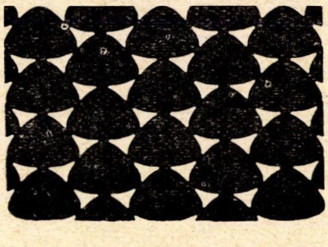
Az utóbbi időben azonban az érdeklődés egyre inkább általános diszkrét halmazokra irányult, amelyeknek elemei *teljesen szabálytalanul* helyezkedhetnek el. Szórjunk szét a síkon minden rendszer nélkül egyenlő nagyságú körlapokat úgy, hogy egy kör se nyúljon egy másikba (4. ábra). Lehet egy ilyen körhalmazra valamilyen nem triviális, általános érvényű tételt kimondani? Igenis lehet! Bebizonyítható például, hogy a körhalmaz sűrűsége mindig $\leq \pi/\sqrt{12} = 0{,}9069\ldots$. Szemléletesen kifejezve: egymásba nem nyúló, egybevágó körökkel a síknak legfeljebb 90,69...%-a tölthető ki.

Milyen körhalmazok érhetik el a fenti sűrűségkorlátot? Röviden: melyik a legsűrűbb körelhelyezés? Az, amelyikben minden kört hat másik érint. (Erről az eredményről írja egy helyen a kiváló kanadai matematikus, H. S. M. COXETER, hogy azt sokan előre sejtenék, de csak kevesen tudnák bebizonyítani.) A legsűrűbb elhelyezésben tehát a körök rácsot alkotnak (5. ábra).

Hasonlóan van ez sok más esetben is: kiindulunk egy rendezetlen, káotikus sokaságból, amely egy tágabb értelemben vett gazdaságossági elv hatására auto-



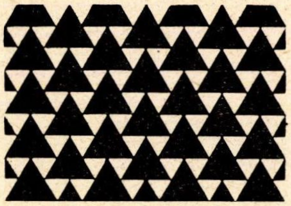
*6. ábra*



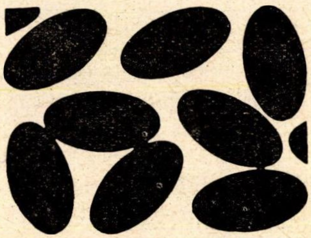
*7. ábra*

matikusan szabályossá válik. Így kapcsolódik a diszkrét geometria újabb iránya a klasszikushoz.

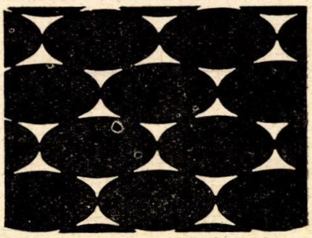
**4.** A legsűrűbb körelhelyezés problémáját A. THUE, az alapvető számelméleti eredményeiről ismert norvég matematikus oldotta meg még a múlt század végén. Ez a probléma számos újabb vizsgálat kiindulási pontját képezte. C. A. ROGERS[1] körök helyett tetszés szerinti egybevágó, *párhuzamos helyzetű konvex lemezeket* tekintett (6. ábra), s bebizonyította, hogy ilyen lemezek legsűrűbb elhelyezése mindig rácsszerű (7. ábra). A lemezek párhuzamos helyzetének feltétele természetesen nem hagyható el, amint azt a háromszög példája mutatja: rácsszerűen elhelyezett háromszögekkel a síknak legfeljebb 2/3-a tölthető ki (8. ábra), míg tetszés szerinti helyzetű kongruens háromszögekkel a sík teljesen kirakható. Centrálisan szimmetrikus lemezek esetén azonban nem kell kikötni a párhuzamos irányítást: *centrálszimmetrikus, egybevágó konvex lemezek semmilyen elhelyezésének sűrűsége sem haladhatja meg a legsűrűbb rácsszerű elhelyezés sűrűségét*[2] (9. és 10. ábra). Meg kell azonban itt jegyezni, hogy a maximális sűrűséget a lemezek néha nemcsak rácsszerű elrendezésben érhetik el. Példaképpen tekintsünk tégla-



*8. ábra*



*9. ábra*



*10. ábra*

lapokat, amelyek elhelyezésének maximális sűrűsége nyilván 1. De ezt a sűrűséget a téglalapok rácsszerű elhelyezésen kívül parkettszerű vagy más típusú elhelyezésben is felvehetik.

Bizonyos sejtszövetekben a sejtek nem töltik ki teljesen a rendelkezésükre álló teret. Ilyen szövetek vizsgálata érdekes matematikai problémákhoz vezet. Képzeljük például, hogy a sejtek adott térrészbe zárt, szabadon deformálható, de egyenlő, változatlan felszínű testek. Mikor lesz a sejtek térfogatösszege maximális? Ennek a problémának a duálisa az, hogy a sejteket egyenlő térfogatú testeknek tekintjük és azt kérdezzük, mikor lesz azok felszínösszege minimális.

11. ábránk a kukoricaszár ún. parenchimatikus szövetének egy metszetét mutatja[3]. Itt a sejtek a szár tengelyirányában erősen megnyúlt oszlopocskáknak tekint-

[1] C. A. ROGERS: The closest packing of convex two-dimensional domains, *Acta math.* **86** (1951) 309–321.

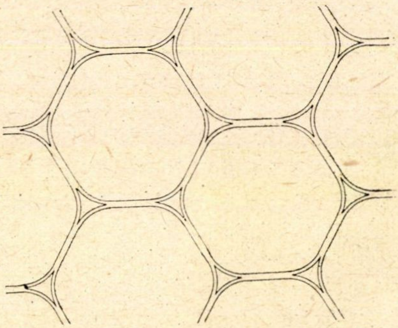
[2] L. FEJES TÓTH: Some packing and covering theorems. *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* **12**/A (1950) 62–67.

[3] D'ARCY W. THOMPSON: *On growth and form II.* Second edition, Cambridge 1952. p. 471.

hetők, úgyhogy térfogatuk és felszínük arányosnak vehető keresztmetszetük területével és kerületével. Felvetődnek azért a fenti térbeli problémák síkbeli analogonjai, amelyek egzakt fogalmazásban így hangzanak:

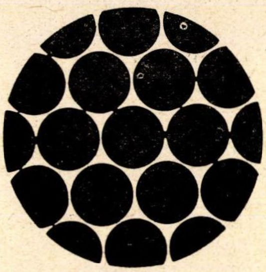
I. Tekintsük az euklideszi síkon egyenlő kerületű, egymásba nem nyúló, konvex tartományok egy halmazát. Tegyük fel, hogy a tartományok alakja és helyzete szabadon változhat, oly módon azonban, hogy kerületük és *számsűrűségük*[4] ne változzék. Milyen alak és elrendezés esetén lesz a tartományok átlagos területe maximális?

II. Tekintsük az euklideszi síkon egyenlő területű, egymásba nem nyúló, konvex tartományok egy halmazát. Tegyük fel, hogy a tartományok alakja és helyzete szabadon változhat, oly módon azonban, hogy területük és számsűrűségük ne változzék. Milyen alak és elrendezés esetén lesz a tartományok átlagos kerülete minimális?

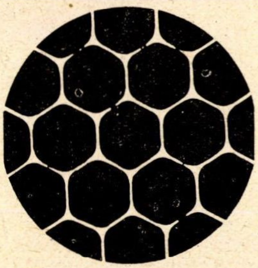


*11. ábra*

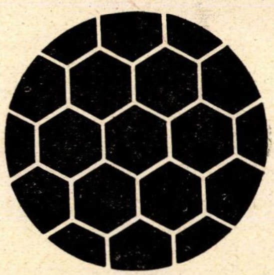
Az első problémát a szerző[5], a másodikat a szerző HEPPES ALADÁRral közösen[6] oldotta meg. Ha rögzített számsűrűség mellett a tartományok közös kerületét, illetőleg területét kis értékekből kiindulva növeljük, akkor az extremális tartományok mindkét esetben először tetszés szerinti módon elhelyezett körök lesznek, amelyek bizonyos kerület-, illetőleg területértékre a legsűrűbben helyezkednek el, majd körívekkel lekerekített hatszögekbe, s végül a síkot hézagmentesen kitöltő szabályos hatszögekbe mennek át (12. *a*, *b*, *c* ábra).



*12a ábra*



*12b ábra*



*12c ábra*

Figyelmet érdemelnek e problémák általános feltételei: a tartományoknak még csak az egybevágóságát sem tettük fel. A tartományok kongruenciája, szabályos

[4] A számsűrűség úgy interpretálható, mint a területegységre eső tartományok átlagos száma.

[5] L. FEJES TÓTH: Filling of a domain by isoperimetric discs. *Publicationes Math.* **5** (1957) 119–127.

[6] L. FEJES TÓTH and A. HEPPES: Filling of a domain by equiareal discs. *Publicationes Math.* 7 (1960) 198–203.

alakja és szabályos elrendezése mind csupán egyetlen természetes szélsőérték-követelmény automatikus következménye.

5. A virágok porzószemeinek külső burkán apró nyílások vannak, amelyeken át a hím ivarsejtek a megtermékenyítéskor kiléphetnek. TAMMES[7], holland biológus megfigyelte, hogy a füstike (Fumaria capriolata) gömb alakú pollenszemein a szem nagyságától függően különböző számú nyílás lehet, mégpedig leggyakrabban 4, 6, 8 és 12 nyílás. Viszont 5 nyílású pollenszem sohasem fordul elő. Minden nyílásszámhoz egy-egy sajátos elrendeződés tartozik. Pl. 4, 6 és 12 nyílás esetén a nyílások többnyire egy szabályos tetraéder, oktaéder, illetőleg ikozaéder csúcsaiban fekszenek. A nyílásszám közelítőleg arányos a gömb felületével. A szomszédos nyílások közti távolság azonban a különböző pollenszemeken nagyjában állandó.

TAMMES feltette, hogy két nyílás sohasem képződhet egymástól egy a fajtára jellemző távolságnál kisebb távolságban, és hogy mindig annyi nyílás képződik, amennyi csak a pollenszemen e feltétel mellett elfér. Felmerül tehát a kérdés: hány pont helyezhető el egy adott sugarú gömbön egymástól legalább egységnyi távolságban. További kérdés: melyik az a legkisebb gömb, amelyen ennyi pont elfér és hogyan kell a pontokat elhelyezni?

A kérdést így is fogalmazhatjuk: hogyan kell egy adott gömbön $n$ pontot úgy elhelyezni, hogy a köztük levő minimális távolság a lehető legnagyobb legyen? Rajzoljunk a pontok köré a köztük fellépő legkisebb szférikus távolság felével, mint sugárral köröket. Mivel ezek a körök nem metszhetik egymást, arról van szó, legfeljebb mekkora lehet egy gömbön átfedés nélkül elhelyezhető $n$ egybevágó kör sugara. Más szóval: a gömb felszínének hányadrésze tölthető ki $n$ egybevágó körrel?

Erre a kérdésre vonatkozik a következő tétel[8]: Ha egy gömbön $n \geqq 3$ egymásba nem nyúló egybevágó kör van elhelyezve, akkor azok sűrűsége $\leqq \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{n}{n-2}\frac{\pi}{6}\right)$. Egyenlőség csak $n=3$-, 4-, 6- és 12-re érhető el, mégpedig ha a körök egy főkörbe írt szabályos háromszög, egy szabályos tetraéder, oktaéder, illetőleg ikozaéder csúcsai köré vannak írva.

A fenti korlát minden $n$-re kisebb mint $\pi/\sqrt{12}$, s ezért a gömb sohasem tölthető ki több mint két körrel olyan sűrűn, mint a sík. De ha a körök száma nagy, akkor a $\pi/\sqrt{12}$ sűrűségkorlát tetszés szerinti pontossággal megközelíthető. Ezért ha a pontok közti minimális távolság $2r$, akkor egy nagy $F$ felszínű gömbön elhelyezhető pontok $n$ száma közelítőleg eleget tesz a $\pi r^2 n/F = \pi/\sqrt{12}$ egyenlőségnek. Ez összhangban van TAMMESnek azzal a megállapításával, hogy a nyílásszám közelítőleg arányos a gömb felszínével.

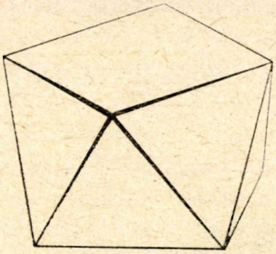
Könnyen megmutatható, hogy ha egy gömbön el lehet helyezni öt egyenlő nagyságú kört, akkor egy hatodik ugyanakkora kör is elfér a gömbön. Öt nyílás tehát TAMMES elmélete szerint nem gazdaságos, s ez érthetővé teszi azt, hogy ez a nyílásszám miért nem fordul elő.

[7] P. M. L. TAMMES: On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollengrains. *Recueil des travaux botaniques néerlandais* 27 (1930) 1—84.

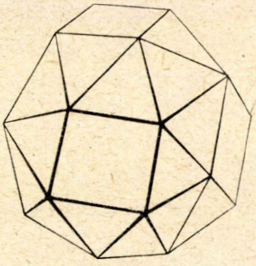
[8] L. FEJES TÓTH: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Berlin, 1953.

TAMMES problémáját $n=7$-, 8- és 9-re SCHÜTTE és van der WAERDEN[9], $n=10$- és 11-re L. DANZER[10], $n=24$-re pedig ROBINSON[11] oldotta meg. Kiemeljük az $n=8$ és 24 esetet, amikor az extremális pontrendszer egy-egy három- és négyszögek által határolt ARCHIMÉDESZI test (13. és 14. ábra), valamint az $n=11$ esetet, amelynek megoldását úgy nyerjük, hogy az ikozaéder csúcsai közül egyet elhagyunk. $n=11$-re tehát hasonló a helyzet mint $n=5$-re; s valóban, 11 nyílású pollenszem csak igen ritka „fejlődési rendellenességként" fordul elő.

Tekintsük a gömbnek vagy a síknak egybevágó szabályos sokszögekre való olyan felbontását, amelyben minden csúcsban három sokszög találkozik. A gömbön négy, viszont az euklideszi síkon csak egy ilyen felbontás van, mégpedig két-, három-, négy-, öt-, illetőleg hatszögekre. A felbontásoknak ez a sorozata folytatódik



*13. ábra*



*14. ábra*

a *hiperbolikus síkon*. Itt szerkeszthetők hét-, nyolc-, ... oldalú sokszögekből álló, háromélű csúcsokkal bíró szabályos mozaikok. Láttuk, hogy a gömbön és az euklideszi síkon egy ilyen mozaik lapjaiba írt körök mindig egy-egy legsűrűbb körelhelyezkedést alkotnak. Megmutatható, hogy ugyanez érvényes a hiperbolikus síkon is[12]. A 15. ábra kongruens köröknek egy olyan legsűrűbb elhelyezését mutatja a hiperbolikus sík ún. *Poincaré*-féle körmodelljén, amelyben minden kört hét másik érint.

A hiperbolikus síkon (éppen úgy, mint a gömbön) az elérhető maximális sűrűség függ a körök sugarától. Megadható azonban egy minden körsugárra érvényes, univerzális sűrűségkorlát is,[13] mégpedig $3/\pi=0{,}955\ldots$, amely — bár véges sugarú körökkel nem érhető el — tetszés szerinti pontossággal megközelíthető. Mármost a hiperbolikus síknak egyik nevezetessége, hogy ott egy egyenest egy pontban érintő körök határhelyzete, amidőn a körök sugara minden határon túl nő, nem az egyenes, hanem egy (paraciklusnak nevezett) görbe. Figyelemre méltó, hogy ilyen végtelen sugarú körökkel a hiperbolikus sík már kitölthető $3/\pi$ sűrűséggel. Ezt az abszolút legsűrűbb körelhelyezést szemlélteti a 16. ábra.

[9] K. SCHÜTTE und B. L. van der WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Ann.* **123** (1951) 96—124.

[10] 1958- és 1962-ben Oberwolfachban tartott előadás.

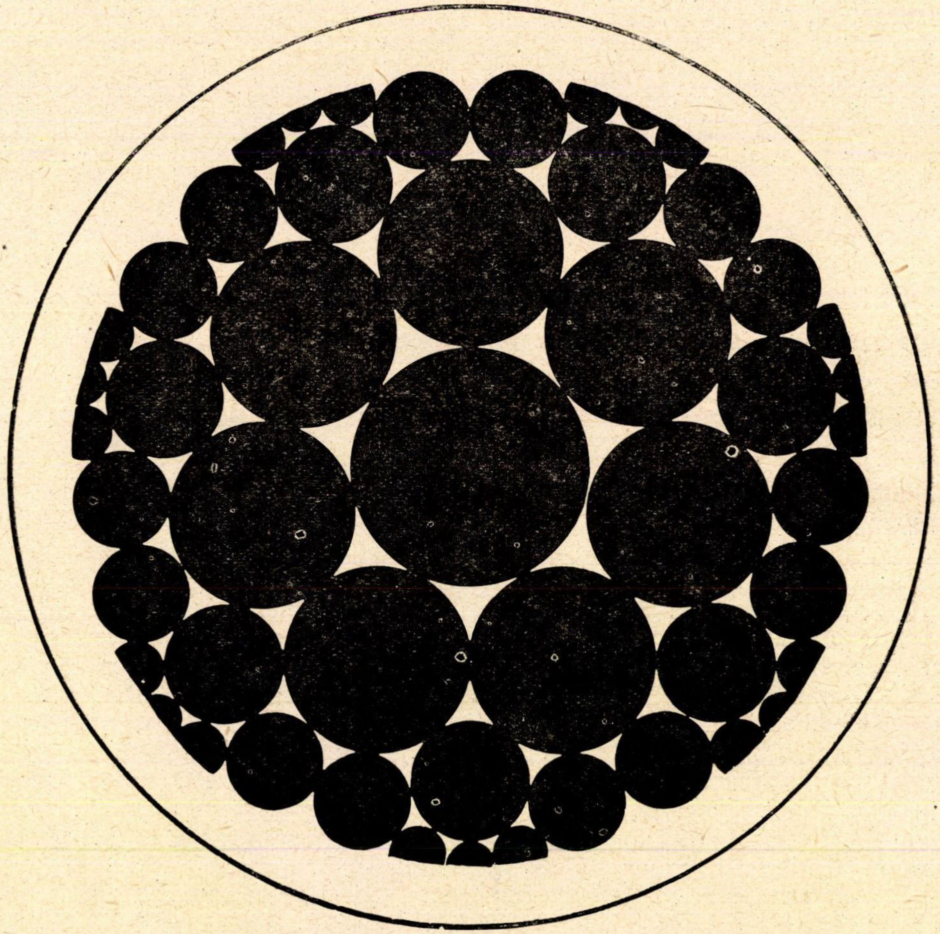
[11] R. M. ROBINSON: Arrangement of 24 points on a sphere. *Math. Ann.* **144** (1961) 17—48.

[12] L. FEJES TÓTH: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953) 103—110.

[13] L. FEJES TÓTH: Über die dichteste Horozyklenlagerung. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **5** (1954) 41—44.

**6.** Most meg szeretném mutatni, hogyan függ össze a legsűrűbb körelhelyezés kérdése a matematikának egy nagy gyakorlati jelentőségű újabb ágával, az *információelmélet*tel.[14]

Egy szóbeli közlés alkalmával a beszélő egy rendkívül komplikált nyomáshullámot bocsát ki, amely többé-kevésbé eltorzulva a hallgató füléhez jut. Ha a köz-



*15. ábra*

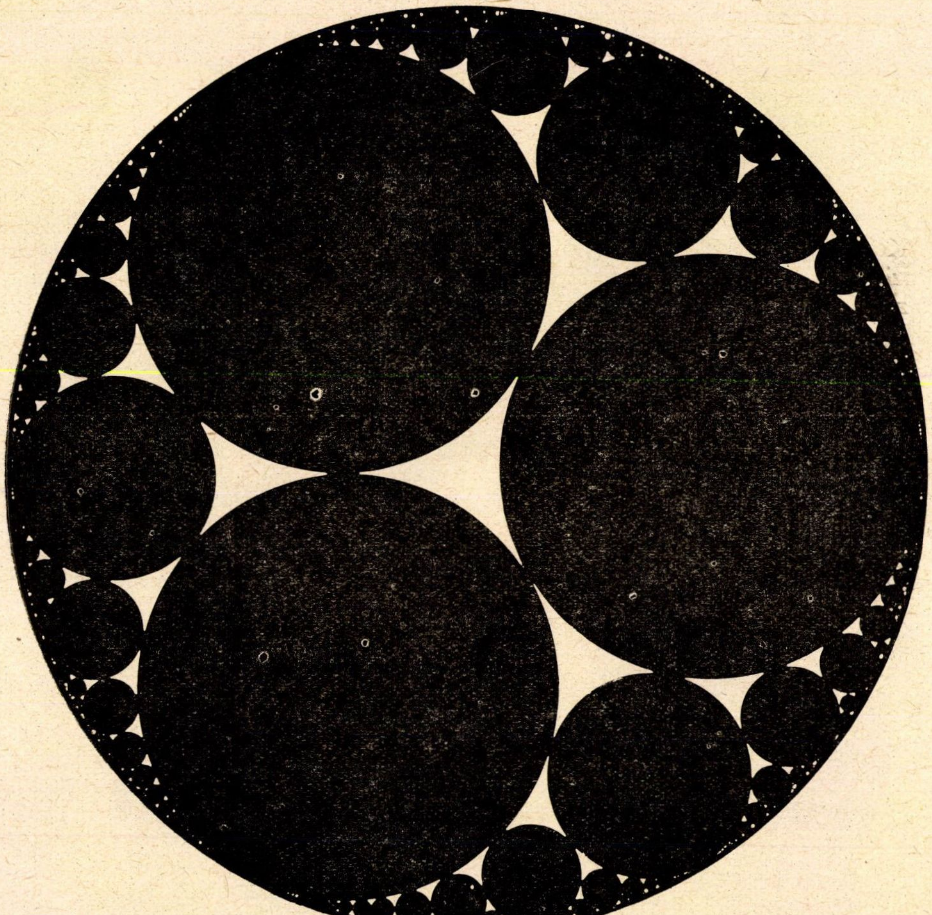
leménynek nemcsak logikai tartalmát, hanem a közlés módjának pontos lefolyását is le akarjuk matematikailag írni, akkor meg kell adnunk a keltett nyomást, $p$-t, mint az időnek, $t$-nek függvényét, vagyis a $p=p(t)$ függvényt. Tekintsük azt az

[14] Az alábbi problémát C. E. SHANNON, az információelmélet megalapítója vetette fel. Vö. B. L. van der WAERDEN: Pollenkörner, Punktverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie. *Die Naturwissenschaften* **48** (1961) 189—192.

időintervallumot, amelyben mondjuk a magyar nyelv „a" hangját ejtjük ki. Itt $p(t)$ periodikusan tekinthető, s előállítható a következő végtelen sorral:

$$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos 2\pi\nu kt+b_k \sin 2\pi\nu kt),$$

ahol $\nu$ az alaphang frekvenciája, $a_k$ és $b_k$ pedig a $p(t)$ függvényből kiszámítható állandók. Ezt a sort a $p(t)$ függvény *Fourier*-sorának, az állandókat pedig $p(t)$ *Fourier*-együtthatóinak nevezzük. Ebből a sorból azonban csak azt a néhány tagot



*16. ábra*

kell megtartanunk, amelyek indexe, $k$, olyan, hogy $k \leqq N$, ahol $N$ az emberi fül számára hallható legmagasabb hang frekvenciája. Ha fülünket olyan nyomás érné, amelyet e néhány tag összege ad meg, ugyanazt a színezetű és erősségű „a" hangot hallanók, mint eredetileg. Fülünk bizonyos magasságon felüli felhangokról már egyszerűen nem vesz tudomást.

Egy ismerősünk „a" hangját tehát egyértelműen jellemezhetjük néhány adattal, mégpedig a nyomásfüggvény pár első *Fourier*-együtthatójával. Ez érthetővé teszi azt, hogy egy mondjuk három másodpercig tartó szóbeli közlés is leírható meghatározott számú adattal. Ezek az adatok, a közlés koordinátái, különféleképpen választhatók. Elég pl. megadnunk a nyomás értékét $1/2N$ távolságban fekvő időpontokban. E pontok száma, $n$, egy $T$ ideig tartó közlés esetén kereken $2NT$. Egyszerű matematikai meggondolásokból következik, hogy közlésünk koordinátáinak a $p_1=p(1/2N)$, $p_2=p((2/2N), \dots, p_n=p(n/2N)$ nyomásértékeket választva a közlés átlagos hangerőssége a

$$p_1^2+\dots+p_n^2=R^2$$

értékkel vehető arányosnak, illetőleg — alkalmas egységeket választva — egyenlőnek. Ha tehát különböző szóbeli közléseket tekintünk, amelyek ideje és átlagos intenzitása megegyezik, akkor e közléseket az $n$-dimenziós tér olyan $(p_1, \dots, p_n)$ pontjai reprezentálják, amelyek mind az origó köré írt $R$ sugarú gömbön fekszenek.

Képzeljük most el, hogy a közlést különböző zajok zavarják, amelyek átlagos intenzitása azonban nem nagyobb egy bizonyos $r$ értéknél. Ekkor, a zaj koordinátáit $z_1, \dots, z_n$-nel jelölve,

$$z_1^2+\dots+z_n^2 \leqq r^2.$$

Legyen $P=(p_1, \dots, p_n)$ egy közlés és $Q=(q_1, \dots, q_n)$ egy másik, a két közléskor fellépő zaj pedig $X=(x_1, \dots, x_n)$ és $Y=(y_1, \dots, y_n)$. Mi a $P$ és $Q$ közlés helyett az eltorzult $P+X=(p_1+x_1, \dots, p_n+x_n)$ és $Q+Y=(q_1+y_1, \dots, q_n+y_n)$ közlést fogjuk fel. Mivel $x_1^2+\dots+x_n^2 \leqq r^2$ és $y_1^2+\dots+y_n^2 \leqq r^2$, a $P+X$ pont a $P$ körül és a $Q+Y$ pont a $Q$ körül írt $r$ sugarú gömbben fekszik. Ha e két gömbnek van közös pontja, akkor előfordulhat, hogy $P+X=Q+Y$, s így nem tudjuk a $P$ és $Q$ közlést egymástól megkülönböztetni. Felmerül így a kérdés, hány pontot tudunk az $n$-dimenziós tér $R$ sugarú gömbjén úgy elhelyezni, hogy a köréjük írt $r$ sugarú gömbök ne nyúljanak egymásba? Arról van tehát szó, hány különböző információt adhatunk mondjuk 3 másodperc alatt szóban, ha adott hangerővel beszélünk, miközben beszédünket meghatározott intenzitású zaj zavarja.

Ez $n=3$-ra pontosan az a probléma, amellyel fentebb a pollenszemekkel kapcsolatban foglalkoztunk. Bár az általános $n$-dimenziós probléma rendkívül nehéz, ismerünk egy érdekes részeredményt: az $n$-dimenziós gömbön nem lehet $n+2$ pontot kedvezőbben (vagyis egymástól nagyobb minimális távolságban) elhelyezni, mint $2n$ pontot. Ez annak a már említett ténynek az általánosítása, hogy a közönséges gömbön ($n=3$) nem helyezhető el 5 pont kedvezőbben, mint 6.

(Beérkezett: 1963. III. 26.)