

A KÖTÖTT TALAJOK RUGALMAS JELLEMZŐINEK MEGHATÁROZÁSÁRÓL

SOMOSVÁRI ZSOLT*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1977. március 30.]

A tanulmány bemutatja, hogy kötött talajok triaxiális vizsgálatainál kapott eredmények kiértékelésére, a rugalmassági modulus, Poisson-szám, ill. Poisson-tényező meghatározására alkalmasak a Hooke-modellből közvetlenül levezetett egyszerű összefüggések. Továbbá bemutatja a tanulmány, hogy a kompresszió feszültségállapotában a terhelés kezdeti szakaszán kötött talajok rugalmas alakváltozást szenvednek. A rugalmas alakváltozások tartománya sokszor az egész vizsgált tartományt kiteszi. Ebben a tartományban az összenyomódási modulus rugalmas jellemző (ha nem is anyagállandó). Végül meghatározza a tanulmány a rugalmassági modulus és összenyomódási modulus közötti összefüggést.

Szemcsés és kötött talajok, valamint szilárd kőzetek alakváltozásának leírására igen sok műszaki feladat megoldásánál szükség van mind a kőzetmechanika, mind a talajmechanika hagyományosan kialakult tárgyköreiben. A kőzetmechanika nagyobb súllyal szilárd („sziklás”) kőzetekkel foglalkozik, a rugalmassági modulus (E) és Poisson-számot (m), illetve Poisson-tényezőt ($\mu = 1/m$) általánosan alkalmazza mint rugalmas jellemzőket. A talajmechanika nagyobb súllyal szemcsés és kötött talajokkal foglalkozik, általánosan az összenyomódási modulus (M) használja az alakváltozások leírására, csak ritkábban alkalmazza a rugalmassági modulus és Poisson-számot, illetve Poisson-tényezőt.

1. Rugalmassági modulus és Poisson-szám meghatározása triaxiális nyomókísérletek eredményeiből

A triaxiális kísérlet feszültség-alakváltozási $[\sigma(\epsilon)]$ görbéinek hosszabb-rövidebb kezdeti szakasza rendszerint kötött talajoknál is jó közelítéssel egyenesnek tekinthető [2]. Ebben a terhelési, illetve alakváltozási tartományban alkalmazható a lineáris rugalmasságot leíró Hooke-modell.

Egyelőre tekintsünk el attól, hogy a hengeres mintatest összenyomása során a nyomólapok a mintatestvéglapok sugárirányú alakváltozását — a sűr-

* Dr. Somosvári Zsolt, 3531 Miskolc, Báthori u. 36.

lódás miatt — akadályozzák, hordósítják a mintatestet. Az általános Hooke-törvény felhasználásával a mintatest alakváltozásai:

tengely irányú alakváltozás

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{2\sigma_3}{m} \right)$$

sugár irányú alakváltozás

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_3 + \sigma_1) \right],$$

ahol: σ_1 — tengely irányú feszültség (főfeszültség);
 σ_3 — sugár irányú feszültség (főfeszültség);
 E — rugalmassági modulus;
 m — Poisson-szám ($m \geq 2$).

Ha $\sigma_3 = 0$, azaz egytengelyű az igénybevétel, akkor

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1}{Em} = -\frac{\varepsilon_1}{m}; \quad m = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3};$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

Ha $\sigma_3 \neq 0$, azaz triaxiális az igénybevétel, akkor a Poisson-szám:

$$m = \frac{\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \left(2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \frac{\sigma_3}{\sigma_1}} = \frac{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \left(2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} - 1 \right)}{\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}}; \quad \begin{array}{l} \varepsilon_1 \geq 0 \\ \varepsilon_3 \leq 0 \end{array} \quad (1)$$

a Poisson-tényező:

$$\mu = \frac{\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}}{1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \left(1 - 2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right)}, \quad (2)$$

a rugalmassági modulus:

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} - 2\mu \frac{\sigma_3}{\varepsilon_1}. \quad (3)$$

A hordó alakúvá deformálódott hengeres mintatest rugalmas feszültségállapotával BALLA Árpád foglalkozott [2]. Elmélete nehezen kezelhető matematikai kifejezésekkel írható le, ezért nomogramokat adott a μ és E meghatá-

rozására [2]. Ezekre a nomogramokra összehasonlítás céljából most felrajzoljuk a Hooke-modellből — a hordósodás figyelembevétele nélkül — kapott eredményeket is.

Ehhez a (2) összefüggést

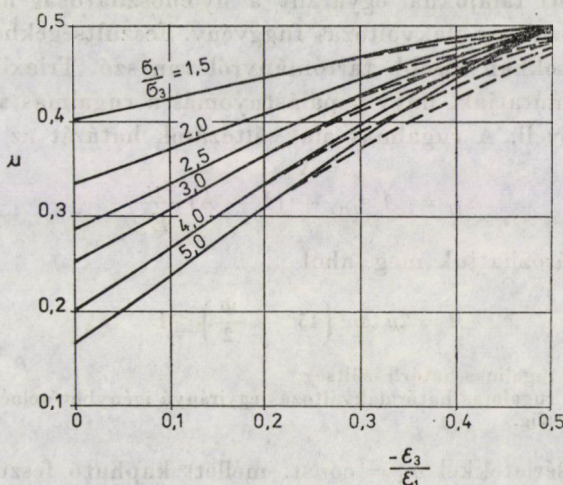
$$\mu = \frac{1 - \frac{\varepsilon_3}{\sigma_3} \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}}{1 + \frac{\sigma_1 - 2\varepsilon_3}{\sigma_3 \varepsilon_1}}$$

alakra, a (3) összefüggést pedig

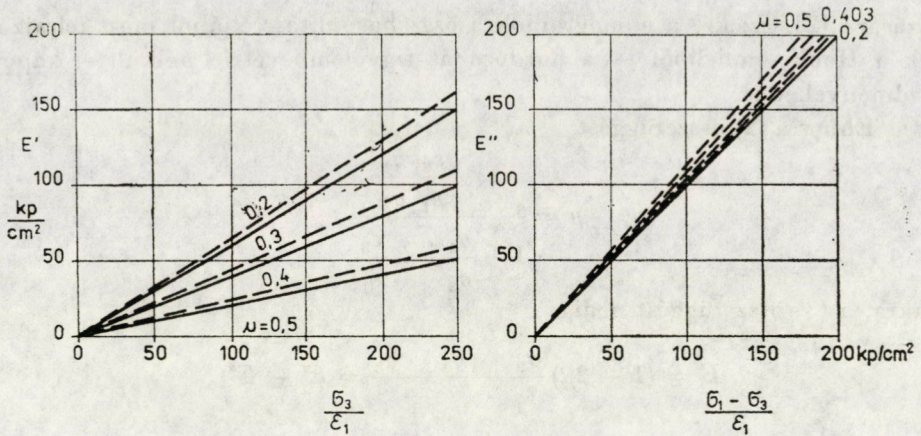
$$E = (1 - 2\mu) \frac{\sigma_3}{\varepsilon_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1} = E' + E'',$$

$$E' = (1 - 2\mu) \frac{\sigma_3}{\varepsilon_1}; \quad E'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1}$$

alakra kell hoznunk. A Poisson-tényező értékeit az 1. ábrán, a rugalmassági modulus értékeit a 2. ábrán látjuk. A folytonos vonalak a Hooke-modellből közvetlenül kapott értékek, a szaggatott vonalak a Balla-elméletből kapott értékeket ábrázolják. Az ábrákról leolvasható, hogy a folytonos és szaggatott görbék — különösen a Poisson-tényezőnél — csaknem teljesen fedik egymást, azaz az eredményekben lényegtelen az eltérés. A jó egyezőség szükségszerű, mert a Balla-elméletben figyelembe vett csúsztató feszültségek hatása a mintatest közepén — ahol a deformációkat meghatározzuk — már elenyészik. Ez azt jelenti, hogy a Hooke-modellből közvetlenül kapott eredmények megfelelnek a Poisson-szám, ill. Poisson-tényező és rugalmassági modulus meghatározására.



1. ábra. Diagram a Poisson-tényező meghatározásához



2. ábra. Diagram a rugalmassági modulus meghatározásához

Triaxiális kísérlet alkalmával a kezdeti rugalmas feszültség-alakváltozási tartományban a tengely irányú főfeszültség:

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 + 2\mu \sigma_3. \quad (4)$$

Triaxiális kísérletnél a palástnyomást $\sigma_3 = \text{const.}$ értéken tartják, ezért a rugalmas tartományban a $\sigma_1(\varepsilon_1)$ függvény lineáris, azaz

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = E = \text{const.}$$

A rugalmas tartomány kiterjedésével foglalkozunk az alábbiakban. A tapasztalat azt mutatja, hogy egyirányú igénybevételek hatására szilárd kőzeteknél és kötött talajoknál egyaránt a nyomószilárdság mintegy $2/3$ -áig közel lineáris a feszültség-alakváltozás függvény. Feszültségekben tehát elég nagy, alakváltozásokban kisebb tartományról van szó. Triaxiális kísérletek tapasztalatai azt mutatják, hogy a palástnyomás a rugalmas alakváltozások tartományát is növeli. A rugalmas alakváltozások határát az

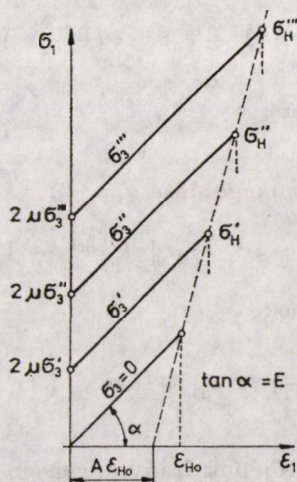
$$\varepsilon_H = A \varepsilon_{HO} + (1 - A) \frac{\sigma_H}{E}$$

összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol

$$A = 2\mu \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\Phi}{2} \right) \leq 1$$

σ_H – tengely irányú rugalmas határfeszültség;
 ε_{HO} – tengely irányú rugalmas határalakváltozás egyirányú igénybevételnél;
 Φ – belső súrlódási szög.

Triaxiális kísérletekkel $\sigma_3 = \text{const.}$ mellett kapható feszültség-alakváltozás függvények kezdeti szakaszainak képét a 3. ábrán látjuk.



3. ábra. Triaxiális kísérletekkel kapható feszültség-alakváltozás görbék kezdeti szakaszai

Ha triaxiális kísérlet alkalmával a σ_3 palástnyomást nem tartjuk állandó értéken, hanem a $\sigma_3(\varepsilon_1)$ nem lineárisan változik, akkor a $\sigma_1(\varepsilon_1)$ függvény sem lineáris, azaz

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = E + 2\mu \frac{d\sigma_3(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}. \quad (5)$$

Tehát annak ellenére, hogy lineárisan rugalmasan viselkedő anyagról beszélünk, a $\sigma_1(\varepsilon_1)$ függvény nem lineáris. Ezek után vizsgáljuk meg a kompresszió feszültségállapotát.

2. A kompressziós kísérlet eredményeinek értékelése

Mint ismeretes, kompressziós kísérlet alkalmával a mintatest oldal irányú (sugár irányú) kitérése, deformációja teljes mértékben akadályozott, azaz $\varepsilon_3 = 0$. A tengely irányú feszültség (σ_1) az alakváltozás (ε_1) növekedésével progresszíve növekszik. A rugalmassági modulus mintájára a

$$M = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}$$

differenciálhányadost összenyomódási modulusnak nevezik, amely tehát a terheléssel változik. Általános talajmechanikai felfogás szerint ez az egyik leglényegesebb különbség a rugalmas anyagok és talaj között [1].

A kompressziós görbét analitikus úton először Terzaghi határozta meg [1]. Mérési eredmények alapján abból a feltevésből indult ki, hogy az összenyomódási modulus a terheléssel lineárisan változik, azaz

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = M = (\sigma_0 + \sigma_1) (1 + e_0) c = (1 + e_0) c \sigma_1 + (1 + e_0) c \sigma_0,$$

ahol: e_0 — kezdeti hézagtényező;
 c, σ_0 — állandók.

A differenciálegyenlet megoldása $\sigma_1 = 0$; $\varepsilon_1 = 0$ kezdeti feltétel mellett

$$\sigma_1 = \sigma_0 [e^{(1+e_0)c\varepsilon_1} - 1]. \quad (6)$$

Az összenyomódási modulus:

$$M = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_0 c (1 + e_0) e^{(1+e_0)c\varepsilon_1} = c (1 + e_0) (\sigma_1 + \sigma_0). \quad (7)$$

A $\sigma_1(\varepsilon_1)$ görbe kezdeti érintőjének iránytangense:

$$M(\varepsilon_1 = 0) = c \sigma_0 (1 + e_0) = M_0, \quad (8)$$

azaz

$$M = M_0 + \frac{M_0}{\sigma_0} \sigma_1 = M_0 \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right). \quad (9)$$

A σ_0 paraméter a kompressziós görbéből most már meghatározható:

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{M(\varepsilon_1) - M_0} \sigma_1(\varepsilon_1). \quad (10)$$

Ezekkel a paraméterekkel

$$\sigma_1 = \sigma_0 (e^{M_0 \varepsilon_1 / \sigma_0} - 1), \quad (11)$$

$$M = M_0 e^{M_0 \varepsilon_1 / \sigma_0}.$$

A (11)-es és (4)-es egyenlet egyenlővé tételével

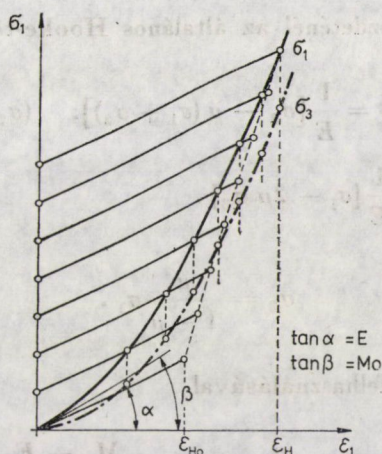
$$\sigma_0 (e^{M_0 \varepsilon_1 / \sigma_0} - 1) = E \varepsilon_1 + 2\mu \sigma_3.$$

Ebből az ödométerben ébredő sugár irányú feszültség (a rugalmas tartományban):

$$\sigma_3 = \frac{1}{2\mu} [(e^{M_0 \varepsilon_1 / \sigma_0} - 1) \sigma_0 - E \varepsilon_1] = \frac{1}{2\mu} (\sigma_1 - E \varepsilon_1). \quad (12)$$

A kompressziós kísérletnél a sugár irányú feszültségnek ez a változása eredményezi a kezdeti rugalmas tartományban a lineáristól eltérő progresszív kompressziós görbét $[\sigma_1(\varepsilon_1)]$.

A 4. ábrán az összefüggések bemutatására egy diagramon ábrázoljuk a triaxiális kísérletek és a kompressziós kísérlet eredményeit. Az ábráról leolvasható az összefüggés, a σ_3 sugár irányú feszültség kiadódik.



4. ábra. Triaxiális kísérletek és kompressziós kísérlet eredményeinek kapcsolatai

Kompressziós kísérlet alkalmazásával kötött talajokban tehát a terhelés kezdeti szakaszán ugyanúgy rugalmas alakváltozás játszódik le, mint triaxiális kísérlet alkalmazásával. A kompressziós görbe lineáristól eltérő progresszív változását a sugár irányú feszültség lineáristól eltérő, progresszív változása okozza.

A rugalmas alakváltozások tartománya a kompresszió feszültségállapotában a paraméterek ismeretében meghatározható, az mindig nagyobb, mint az egyirányú igénybevételnél jelentkező rugalmas alakváltozások tartománya. Sokszor kompressziós vizsgálataink egész tartományában rugalmasak az alakváltozások.

3. Az összenyomódási és rugalmassági modulus kapcsolata

A fentiek alapján a terhelés kezdeti szakaszában az összenyomódási modulus is rugalmas jellemző, hiszen a kompresszió feszültségállapotában rugalmas alakváltozásokat jellemez. Ezért kapcsolat kell legyen a rugalmassági modulus és összenyomódási modulus között.

Helyettesítsük a kompressziós görbét az $\varepsilon_1 = 0$ hely kis környezetében az érintőjével, azaz

$$\sigma_1 = M_0 \varepsilon_1.$$

Tegyük ugyanezt a σ_3 feszültségnél is:

$$\left. \frac{d\sigma_3}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0} = \frac{1}{2\mu} (M_0 - E).$$

Ezért

$$\sigma_3 = \frac{M_0 - E}{2\mu} \varepsilon_1.$$

Továbbá a terhelés kezdeténél az általános Hooke-törvény:

$$\varepsilon_3 = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)]; \quad (\sigma_2 = \sigma_3),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - 2\mu \sigma_3].$$

Ebből

$$\sigma_3 = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_1.$$

Az előbbi egyenletek felhasználásával

$$\sigma_3 = \frac{\mu}{1 - \mu} M_0 \varepsilon_1 = \frac{M_0 - E}{2\mu} \varepsilon_1.$$

Ebből a rugalmassági modulus:

$$E = M_0 \left(1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu} \right) = M_0 \left[1 - \frac{2}{(m - 1)m} \right].$$

4. Megállapítások

— A Hooke-modellből közvetlenül levezetett összefüggések alkalmasak kötött talajok triaxiális vizsgálatánál kapott eredmények kiértékelésére, a rugalmassági modulus, Poisson-szám, illetve Poisson-tényező meghatározására.

— Kötött talajok a kompresszió feszültségállapotában — általános talajmechanikai felfogással ellentétben — a terhelés kezdeti szakaszán rugalmas alakváltozást szenvednek. Ebben a tartományban az összenyomódási modulus rugalmas jellemző, ha nem is anyagállandó. A rugalmas alakváltozások tartománya sokszor az egész vizsgált tartományt teszi ki.

— A szóban forgó kezdeti rugalmas alakváltozások tartományában határozott kapcsolat van az összenyomódási modulus és rugalmassági modulus között.

IRODALOM

1. KÉZDI Árpád: Talajmechanika I. Tankönyvkiadó, Budapest 1972
2. BALLA Árpád: Talajok rugalmassági modulusának meghatározása *Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* 13, 5. sz.

On the Determination of Elasticity Characteristics of Cohesive Soils. — It is demonstrated that for estimating the results obtained by the triaxial compression tests — for the determination of Young's modulus, Poisson's ratio — the simple relationship directly deduced from

Hooke's model may be used. Furthermore, it is pointed out that in the stress state of compression at the initial period of loading, cohesive soils are subjected to elastic deformation. The region of the elastic deformations frequently extends over the whole investigated region. In this region the modulus of compressibility is a characteristic of elasticity (even in the case if it is not a constant of material). Finally, the relationship between the modulus of elasticity and that of the compressibility will be determined.

Über die Ermittlung der Elastizitätskennwerte der bindigen Böden. — Es wird nachgewiesen, daß zur Bewertung der Ergebnisse der Triaxialversuche von bindigen Böden, zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls und der Poissonschen Konstante, die aus dem Hookschen Modell unmittelbar abgeleiteten einfachen Abhängigkeiten geeignet sind. Weiters wird demonstriert, daß im Spannungszustand der Kompression in der Anfangsperiode der Belastung die bindigen Böden elastische Verformungen erfahren. Der Bereich der elastischen Verformungen erstreckt sich oft auf den ganzen untersuchten Bereich. In diesem Bereich ist der Zusammendrückungsmodul ein Elastizitätskennwert (wenn er auch nicht eine Materialkonstante ist). Schließlich wird die Abhängigkeit zwischen dem Elastizitätsmodul und dem Zusammendrückungsmodul festgelegt.

HELYREIGAZÍTÁS

A *Műszaki Tudomány* 52 (1976), 383–395. oldalain Csonka Pál „Parabola vezérgörbéjű álló konoidhéj” című cikkében a (3) képlet helyesen

$$6 \frac{ha^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 8 \frac{ha^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + 2 \frac{ha^2}{b^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{p} = 0.$$

Ennek megfelelően a 2. táblázat a következőképpen módosítandó:

$\bar{p} = x^m y^n$	F_{mn}
y^2	$-\frac{b^2}{100ha^2} \frac{(a^{-5} - a_1^{-5})(x^{-10} - a_1^{-10}) - (a^{-10} - a_1^{-10})(x^{-5} - a_1^{-5})}{a^{-10}a_1^{-5} - a^{-5}a_1^{-10}} x^4 y^2$
$\frac{y^2}{x}$	$-\frac{b^2}{72ha^2} \frac{(a^{-4} - a_1^{-4})(x^{-9} - a_1^{-9}) - (a^{-9} - a_1^{-9})(x^{-4} - a_1^{-4})}{a^{-9}a_1^{-4} - a^{-4}a_1^{-9}} x^3 y^2$
$\frac{y^2}{x^2}$	$-\frac{b^2}{48ha^2} \frac{(a^{-3} - a_1^{-3})(x^{-6} - a_1^{-6}) - (a^{-6} - a_1^{-6})(x^{-3} - a_1^{-3})}{a^{-6}a_1^{-3} - a^{-3}a_1^{-6}} x^2 y^2$
$\frac{y^2}{x^3}$	$-\frac{b^2}{28ha^2} \frac{(a^{-2} - a_1^{-2})(x^{-7} - a_1^{-7}) - (a^{-7} - a_1^{-7})(x^{-2} - a_1^{-2})}{a^{-7}a_1^{-2} - a^{-2}a_1^{-7}} xy^2$
$\frac{y^2}{x^4}$	$-\frac{b^2}{12ha^2} \frac{(a^{-1} - a_1^{-1})(x^{-6} - a_1^{-6}) - (a^{-6} - a_1^{-6})(x^{-1} - a_1^{-1})}{a^{-6}a_1^{-1} - a^{-1}a_1^{-6}} y^2$
$\frac{y^2}{x^5}$	$-\frac{b^2}{10ha^2} \left(-\frac{x^{-5} - a_1^{-5}}{a^5 - a_1^5} a^5 \ln a - \frac{a^5 - x^5}{a^5 - a_1^5} a_1^5 \ln a_1 + x^5 \ln x \right) x^{-6} y^2$
$\frac{y^2}{x^6}$	$-\frac{b^2}{8ha^2} \frac{(a - a_1)(x^{-4} - a_1^{-4}) - (a^{-4} - a_1^{-4})(x - a_1)}{a^{-4}a_1 - a a_1^{-4}} x^{-2} y^2$
y^4	$-\frac{b^2}{224ha^2} \frac{(a^{-7} - a_1^{-7})(x^{-16} - a_1^{-16}) - (a^{-16} - a_1^{-16})(x^{-7} - a_1^{-7})}{a^{-16}a_1^{-7} - a^{-7}a_1^{-16}} x^4 y^4$
$\frac{y^4}{x}$	$-\frac{b^2}{180ha^2} \frac{(a^{-6} - a_1^{-6})(x^{-15} - a_1^{-15}) - (a^{-15} - a_1^{-15})(x^{-6} - a_1^{-6})}{a^{-15}a_1^{-6} - a^{-6}a_1^{-15}} x^3 y^4$
$\frac{y^4}{x^2}$	$-\frac{b^2}{140ha^2} \frac{(a^{-5} - a_1^{-5})(x^{-14} - a_1^{-14}) - (a^{-14} - a_1^{-14})(x^{-5} - a_1^{-5})}{a^{-14}a_1^{-5} - a^{-5}a_1^{-14}} x^2 y^4$
$\frac{y^4}{x^3}$	$-\frac{b^2}{104ha^2} \frac{(a^{-4} - a_1^{-4})(x^{-13} - a_1^{-13}) - (a^{-13} - a_1^{-13})(x^{-4} - a_1^{-4})}{a^{-13}a_1^{-4} - a^{-4}a_1^{-13}} xy^4$
$\frac{y^4}{x^4}$	$-\frac{b^2}{72ha^2} \frac{(a^{-3} - a_1^{-3})(x^{-12} - a_1^{-12}) - (a^{-12} - a_1^{-12})(x^{-3} - a_1^{-3})}{a^{-12}a_1^{-3} - a^{-3}a_1^{-12}} y^4$
$\frac{y^4}{x^5}$	$-\frac{b^2}{44ha^2} \frac{(a^{-2} - a_1^{-2})(x^{-11} - a_1^{-11}) - (a^{-11} - a_1^{-11})(x^{-2} - a_1^{-2})}{a^{-11}a_1^{-2} - a^{-2}a_1^{-11}} x^{-1} y^4$
$\frac{y^4}{x^6}$	$-\frac{b^2}{20ha^2} \frac{(a^{-1} - a_1^{-1})(x^{-10} - a_1^{-10}) - (a^{-10} - a_1^{-10})(x^{-1} - a_1^{-1})}{a^{-10}a_1^{-1} - a^{-1}a_1^{-10}} x^{-2} y^4$