A „HÁROMSZÖG FELETT HATSZÖG" HÁLÓZATÚ KÉTRÉTEGŰ TÉRRÁCS VIZSGÁLATA KONTINUUM-MÓDSZERREL

Dr. KOLLÁR LAJOS

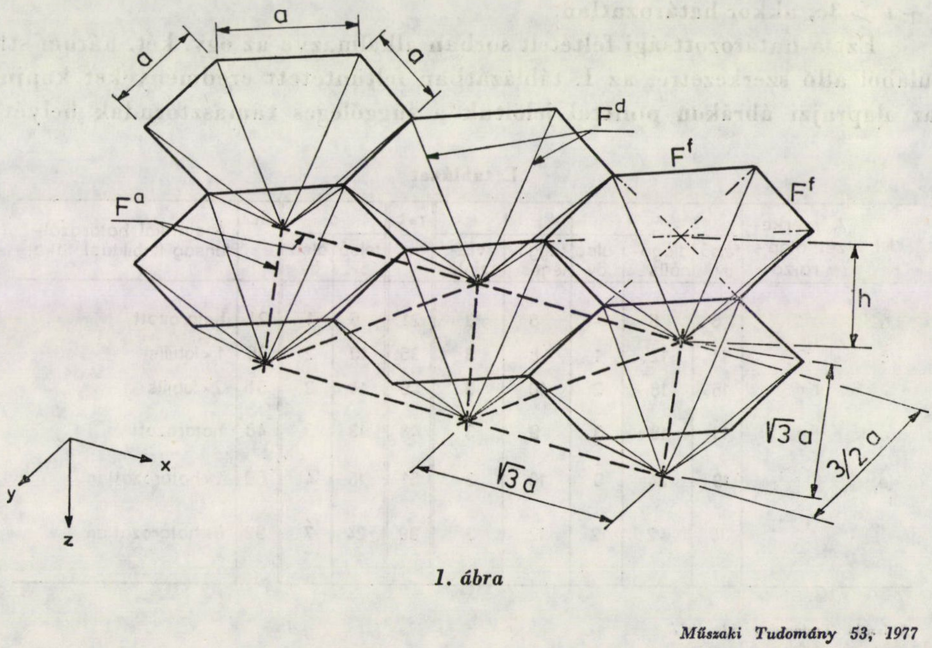
A MŰSZAKI TUD. DOKTORA

[Beérkezett 1976. szeptember 22-én]

A dolgozat a „háromszög felett hatszög" hálózatú kétrétegű térrácsnak először a statikai határozottsági feltételeit vizsgálja, majd tisztázza a hatszögekből álló öv labilitásából származó statikai következményeket. Ezután a csavarási merevséget biztosító „rácsos csövek" statikai jellemzőit állapítja meg. Mindezek alapján levezeti a térráccsal egyenértékű kontinuum differenciálegyenletrendszerét, végül ismerteti a peremfeltételi egyenleteket és a rúderőknek a kontinuum metszeterőiből való kiszámítását.

1. A szerkezet ismertetése

A kétrétegű térrácsoknak egyik érdekes típusa az alsó övsíkjában háromszög-, felső övsíkjában hatszögrácsozású szerkezet (1. ábra). A háromszögek csúcspontjai a hatszögek középpontjai alatt feküsznek, s hat-hat rúddal kapcsolódnak a hatszögek csúcsaihoz.



1. ábra

E szerkezetfajta megjelenése esztétikus, könnyen gyártható hatszögű gúlákból és egyenes rudakból, s igen alkalmas 60°-os, ill. 120°-os szögeket tartalmazó alaprajzok lefedésére.

Dolgozatunk célja: e térrács statikai viselkedésének tisztázása és a helyettesítő kontinuum egyenleteinek felírása.

2. A statikai határozottság kérdése

Mivel a szerkezet felső övsíkja hatszögekből áll, ez a saját síkjában nem merev (hasonlóan a [2]-ben vizsgált térrácshoz). Tisztáznunk kell tehát: milyen megtámasztás mellett lesz a szerkezet állékony (statikailag határozott, ill. határozatlan), s a határozatlanság foka hogyan függ a hatszögű gúlák számától.

Először tételezzük fel, hogy a hatszögek csúcsai érnek ki a szerkezet peremére (a háromszögek beljebb végződnek), és a peremen levő hatszögcsúcsok — a konkáv pontokban levők kivételével — függőleges rudakkal meg vannak támasztva. (A „merevtest-szerű" vízszintes mozgások meggátlására ezenkívül minden esetben három, nem egy pontban metsződő, vízszintes támasztórudat is kell alkalmaznunk.)

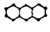
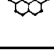
A térbeli rúdszerkezetek statikai határozottságának szükséges feltételét az ismert

$$r + t = 3c \tag{1}$$

egyenlet fejezi ki, ahol r a rácsszerkezet rúdjainak, t a támasztórudaknak, c a csuklóknak a száma. Ha $r + t < 3c$, akkor a szerkezet labilis, ha pedig $r + t > 3c$, akkor határozatlan.

Ezt a határozottsági feltételt sorban alkalmazva az egy, két, három stb. gúlából álló szerkezetre, az I. táblázatban feltüntetett eredményeket kapjuk (az alaprajzi ábrákon ponttal jelöltük a függőleges támasztórudak helyét):

I. táblázat

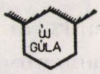
Jel:	A szerkezet alaprajza	r			t		r+t	c		3c	A statikai határozatlanság (labilitás) foka:
		felső öv	diagonális	alsó öv	függőleges	vízszintes		felső öv	alsó öv		
a.		6	6	-	6	3	21	6	1	21	határozott
b.		11	12	1	8	3	35	10	2	36	1× labilis
c.		16	18	2	10	3	49	14	3	51	2× labilis
d.		15	18	3	9	3	48	13	3	48	határozott
e.		19	24	5	10	3	61	16	4	60	1× határozatlan
f.		30	42	12	12	3	99	24	7	93	6× határozatlan

Az I. táblázat adataiból az alábbi következtetéseket vonhatjuk le:

Az egyetlen gúlából álló, a) jelű szerkezet határozott.

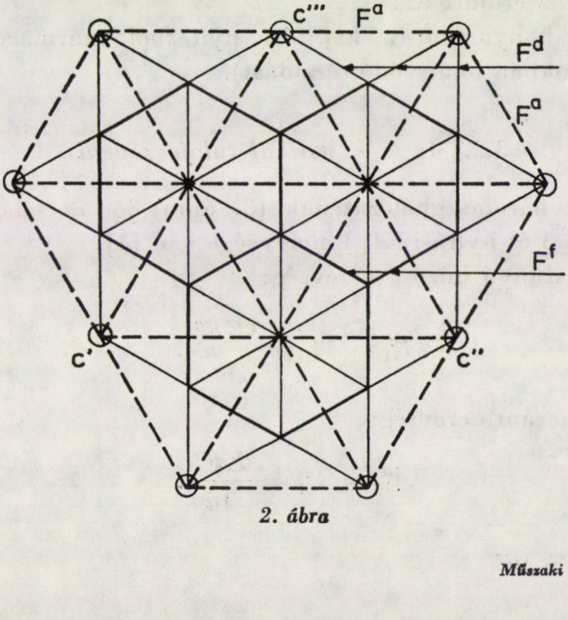
Minden újabb gúla hozzáépítése attól függően változtatja meg a szerkezet határozatlansági fokát, hogy milyen módon csatlakozik a meglevőkhöz. A lehetséges eseteket a II. táblázatban foglaltuk össze.

II. táblázat

A csatlakozás módja:	A határozatlanság fokának megváltozása:
	1-gyel csökken
	1-gyel nő
	3-mal nő

Ezzel tehát szemléletes szerkesztési szabályhoz jutottunk, amellyel elkerülhetjük, hogy labilis szerkezetet tervezzünk (I. táblázat b) és c) esetek).

Röviden megvizsgáljuk még azt az elrendezést, amikor a háromszöghálózat nyúlik ki a peremre a megtámasztásokig, a hatszögek pedig beljebb kezdődnek (2. ábra). Könnyen belátható, hogy a határozatlanság foka növek-



2. ábra

szik ahhoz az esethez képest, amikor a szélső háromszögek elmaradnak és a hatszögek szélső csúcsait támasztjuk meg (I. táblázat d) eset). A 2. ábrán feltüntetett perem-csomópontok közül ugyanis — a c' c'', c''' jelűek kivételével — valamennyi három rúddal, azaz statikailag határozott módon kapcsolódik a belső szerkezethez. Az egyenes peremszakaszokon fekvő c', c'' és c''' csomópontok négy-négy rúddal csatlakoznak, ezek tehát eggyel-eggyel növelik a határozatlanság fokát. Ezenkívül a peremen végigfutó 9 rúd is „felesleges": ez 9-szeres határozatlanság-növekedést okoz. Mivel a függőleges megtámasztó rudak száma nem változott, a szerkezet statikai határozatlansági foka végül is 12-szeres lesz.

3. A térrács statikai tulajdonságai

3.1. *Feltevések*

A következőkben olyan térrácsot vizsgálunk, amelynek hálózata szabályos háromszögekből és hatszögekből áll. Valamennyi felső övrúd keresztmetszeti területe F^f, a diagonálisoké F^d, az alsó övrudaké F^a.

Célunk: a térráccsal statikailag egyenértékű kontinuum előállítása. Az egyszerűbb térrács-típusoknál [4] ez olyan lemezt jelentett, amelynek mind húzási (és nyírási), mind hajlítási (és csavarási) merevségei megegyeztek a térrács egységnyi széles szakaszára vonatkoztatott megfelelő merevségeivel. A most vizsgált esetben két körülmény is bonyolítja a helyzetet: egyrészt az alsó és a felső öv különbözősége miatt a hajlítási („lemezszerű") erőjátékkal együtt mindig fellép az egyik övben egy „kiegészítő síkbeli erőrendszer", s emiatt az egyenértékű kontinuum nem lehet többé egyszerű, közönséges lemez, másrészt pedig a hatszögekből álló öv önmagában labilis, s ez megkötéseket jelent az erőjátékra.

El fogjuk hanyagolni a hajlítási nyírásból származó alakváltozást (a függőleges síkokban lejátszódó torzulást).

3.2. *Az övek statikai tulajdonságai*

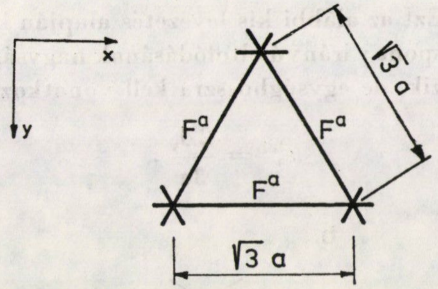
Az *alsó öv* háromszghálózatának (3. ábra) jól definiált helyettesítő húzási ($A^a_{11} = A^a_{22}$) és nyírási (A^a_{33}) merevsége van [4]:

Az x, ill. y irányú húzási merevség:

$$A^a_{11} = A^a_{22} = \frac{3EF^a}{4a}. \tag{2a}$$

A nyúlási harántmerevség:

$$A^a_{12} = A^a_{21} = \frac{EF^a}{4a}. \tag{2b}$$



3. ábra

A nyírási merevség pedig:

$$A_{33}^a = \frac{EF^a}{4a}. \tag{3}$$

Az alsó öv merevségi mátrixa tehát így írható fel:

$$\mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} A_{11}^a & A_{12}^a & 0 \\ A_{12}^a & A_{11}^a & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}^a \end{bmatrix}, \tag{4}$$

a merevségi mátrix értelmezése pedig — a szokásos módon, l. [1]-ben —:

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{5a}$$

ahol

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} \tag{5b}$$

az övben működő metszeterők vektorba összefoglalt alakja, és

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{5c}$$

a nyúlások vektorba összefoglalt alakja.

A *felső öv* hatszög-hálózata labilis: ellenállás nélkül képes a 4. ábrán vázol háromféle mozgásra.

A 4a ábrán látható deformáció a tiszta nyírásnak megfelelő $\gamma_{xy}^{\mathrm{lab}}$ szögtorzulásnak felel meg, a hatszög-hálózat tehát nem tud n_{xy} nyírást felvenni.

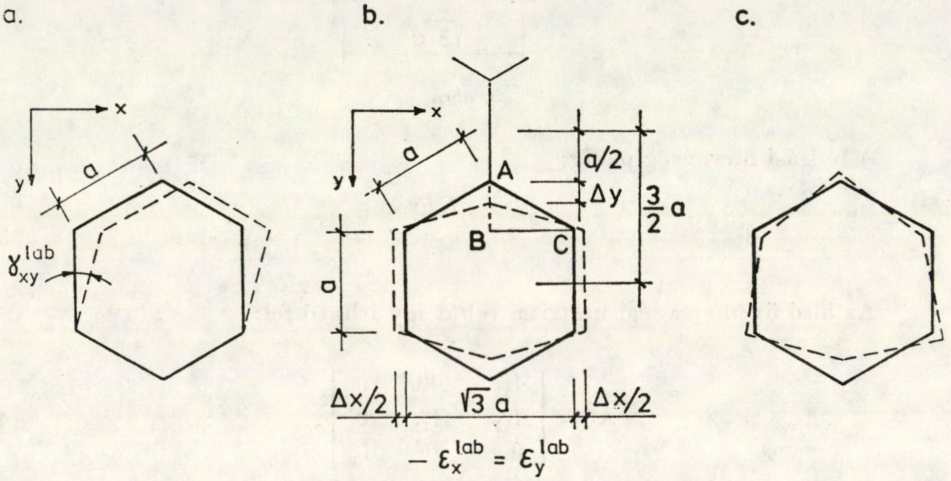
A 4b ábra mozgását az

$$\varepsilon_x^{\mathrm{lab}} = -\,\varepsilon_y^{\mathrm{lab}} \tag{6}$$

összefüggés jellemzi. Ezt az alábbi kis levezetés alapján könnyen beláthatjuk:

Ha az „A" csúcspont y irányú eltolódásának nagysága Δ_y, akkor — mivel $3a/2$ hosszra vonatkozik, de egységhosszra kell vonatkoztatnunk —:

$$\varepsilon_y^{\mathrm{lab}} = \frac{2\Delta_y}{3a}\,.$$



4. ábra

Az ehhez tartozó $\Delta_x/2$ vízszintes elmozdulást a deformált ABC háromszögre felírt Pythagoras-tételből kapjuk meg:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2} - \Delta_y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,a + \frac{\Delta_x}{2}\right)^2. \tag{7a}$$

A másodrendűen kicsiny Δ^2-es tagokat elhagyva, és kivonva az eredeti ABC háromszögre érvényes

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\right)^2 \tag{7b}$$

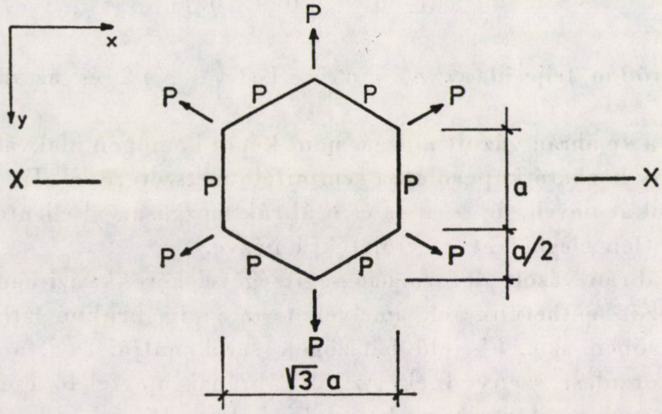
Pythagoras-tételt, azt kapjuk, hogy

$$\Delta_x = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Delta_y\,. \tag{8}$$

Mivel Δ_x-et $\sqrt{3}a$ hosszra kell elosztanunk, ezért

$$\varepsilon_x^{\mathrm{lab}} = -\frac{\Delta_x}{\sqrt{3}a} = -\frac{2\Delta_y}{3a} = -\,\varepsilon_y^{\mathrm{lab}}\,. \tag{9}$$

Ebből tehát az következik, hogy a hatszög-hálózat csak hidrosztaikussal egyenértékű nyomást (vagy húzást) képes felvenni, amelynél $n_x = n_y$. Erre az erőhatásra viszont jól definiált merevsége van a hálózatnak, amelynek nagysága a következő:



5. ábra

A hidrosztatikus húzás egy hatszögben az 5. ábrának megfelelő erőjátékot jelenti: valamennyi rúdban a sarkokon ható P erővel azonos nagyságú rúderő ébred. Az $x - x$ metszetben tehát egy P rúderő egy $\sqrt{3}a$ hosszúságú szakaszra hat, a neki megfelelő $n_x = n_y$ húzóerő tehát

$$n_x = n_y = \frac{P}{\sqrt{3}a} \tag{10}$$

lesz.

Valamennyi rúd megnyúlása

$$\varepsilon_{\text{rud}} = \frac{P}{EF^f}, \tag{11}$$

s ez mind a függőleges, mind a ferde rudakon $\varepsilon_y^{\text{dil}} = \varepsilon_{\text{rud}}$ nyúlást jelent. (Az x irányú $\varepsilon_x^{\text{dil}}$ természetesen ugyanekkora.) Így a helyettesítő dilatációs húzási merevség nagysága:

$$A^f_{\text{dil}} = \frac{n_x}{\varepsilon_x^{\text{dil}}} = \frac{n_y}{\varepsilon_y^{\text{dil}}} = \frac{EF^f}{\sqrt{3}a}. \tag{12}$$

A felső öv merevségi mátrixa tehát a teljes $\varepsilon^f = \varepsilon^f_{\text{lab}} + \varepsilon^f_{\text{dil}}$ nyúlásvektorra vonatkoztatva a következő lesz:

$$A^f = \begin{bmatrix} \frac{A^f_{\text{áll}}}{2} & \frac{A^f_{\text{áll}}}{2} & 0 \\ \frac{A^f_{\text{áll}}}{2} & \frac{A^f_{\text{áll}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

mivel ily módon teljesül az $n^f_x = n^f_y = A^f_{\text{áll}}(\varepsilon^f_x + \varepsilon^f_y)/2$ és az $n^f_{xy} = 0$ követelmény.

Végül a 4c ábrán vázolt mozgás nem képez homogén alakváltozás-mezőt, és így nem is hozható kapcsolatba semmiféle metszeterővel. Ez tehát csupán a labilitás fokát növeli, de — a 4a és b ábrák mozgásaival ellentétben — nem jelent közvetlen megkötést az erőjátékra nézve.

A 4c ábrán vázolt deformáció segítségével két „kvázi-homogén" alakváltozás-mezőt építhetünk fel, amelyeket az 5a, b ábrákon láthatunk. Ezek közül az elsőben az „A" jelű hatszögek sarokpontjai $\pm\beta$, a „B" jelűeké $\pm\beta/2$ szögtorzulást szenvednek. Az 5b ábrának megfelelő esetben viszont a „C" hatszögek megtartják eredeti alakjukat, a „D" jelűek sarokpontjainak szögtorzulása viszont $\pm\beta$. Mind a két esetben a teljes hatszöghálóra nézve: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$.

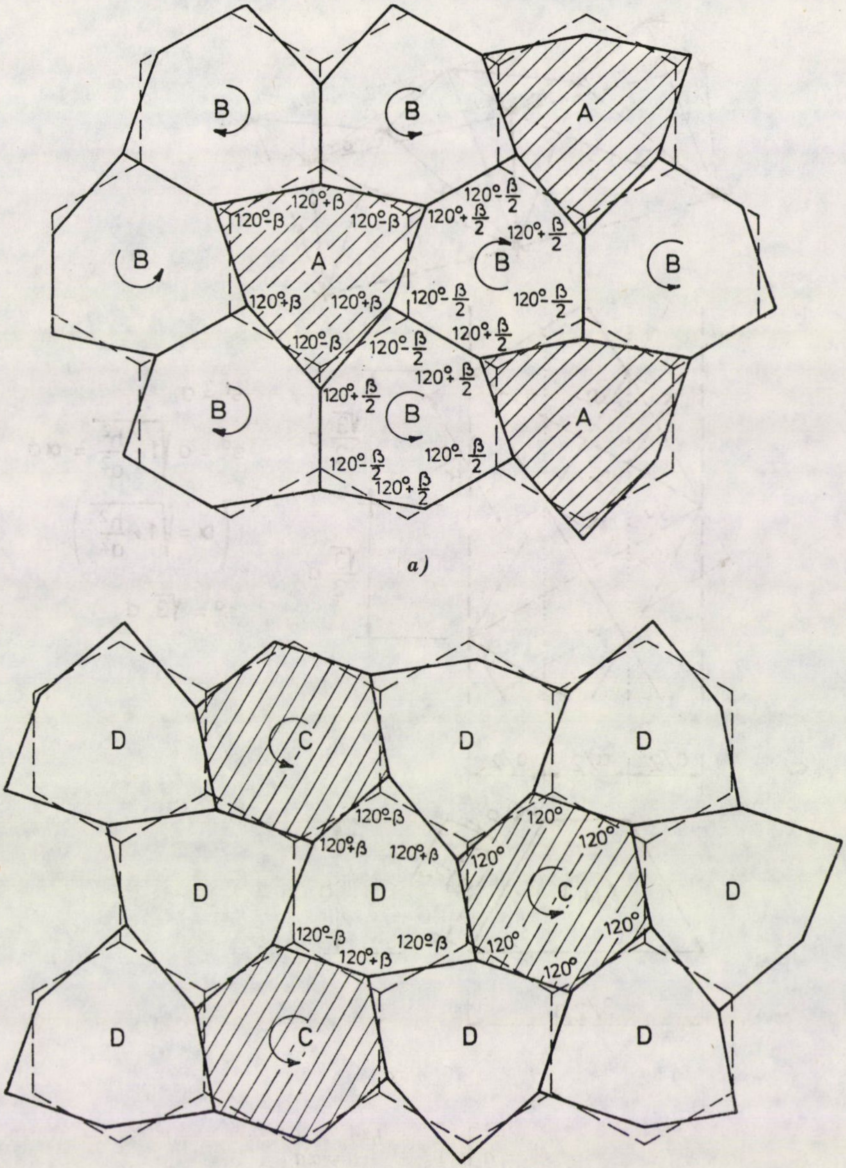
Ezek az alakváltozás-mezők — ellentétben a 4a, b ábráknak megfelelő, homogén alakváltozás-mezőkkel — nem jöhetnek létre az alsó öv, ill. az összekötő rácsozás rúdjainak megnyúlása nélkül. A 4c ábra alakváltozási lehetősége ezért nem jelent új labilitási formát, amelyet mint megkötést közvetlenül figyelembe kellene vennünk az erőjátékban.

3.3. *A csavarási merevséget biztosító „rácsos övek" statikai tulajdonságai*

A nyírási merevséggel nem rendelkező, hatszögű felső öv nem tudja felvenni az alsó övben ébredő n_{xy} nyíróerő „párját", vagyis a csavarónyomaték „másik felét". Az alsó öv tehát csak a ferde diagonálisokkal alkothat olyan „zárt csöveket", amelyek csavarási merevséget adnak a szerkezetnek. Vizsgáljuk meg e csöveket statikai szempontból.

A későbbiekből ki fog tűnni, hogy e három cső alakváltozása egymással összeférhető, azaz egyetlen kontinuum alakváltozásait adják meg.

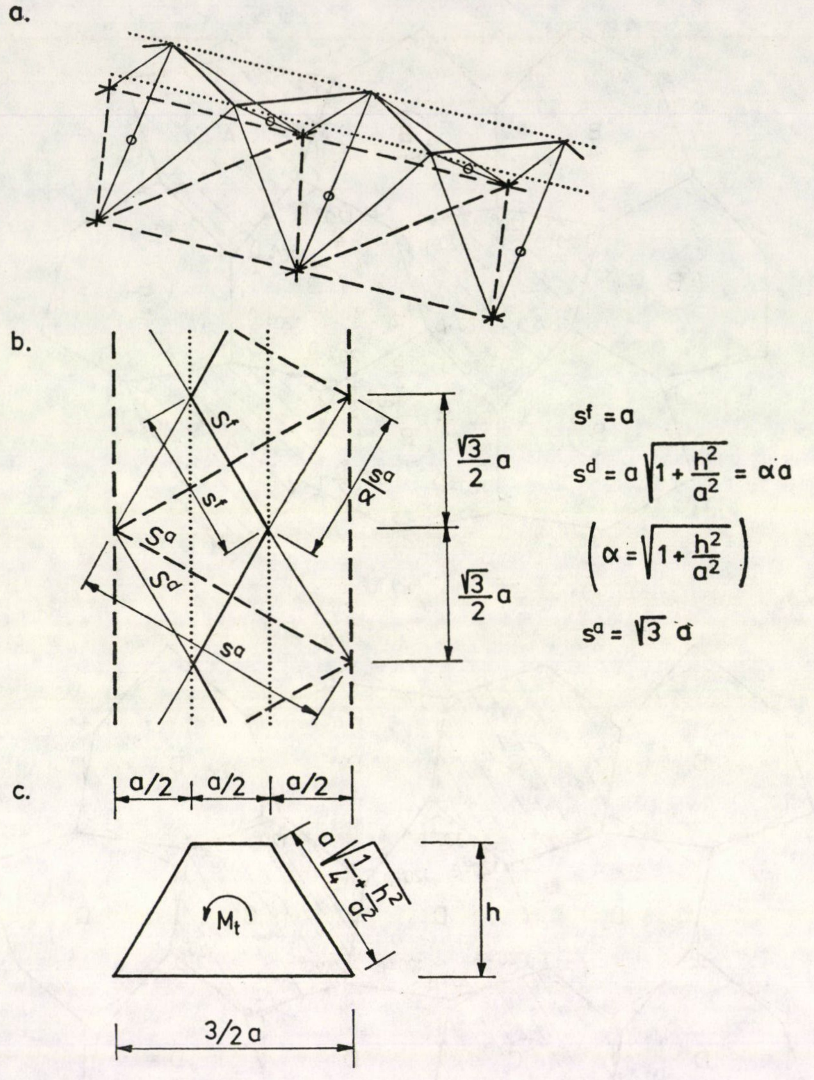
A 7a ábrán megrajzoltuk az egyik irányú alsó övvel párhuzamos rácsos csövet. A pontozással jelölt felső övrudak nincsenek meg a szerkezetben. Ezeket átmenetileg berakjuk a szerkezetbe, de amint látni fogjuk, nem keletkezik bennük a csavarásból rúderő, így nincs rájuk szükség. Az O-val megjelölt diagonálisokban szintén nem ébred rúderő, így ezeket elhagyjuk. Ily módon



6. ábra

a 7b, c ábrákon vázolt trapéz keresztmetszetű csőhöz jutunk. A későbbiekben szükséges rácsrudak hossza az alábbi:

$$s^f = a\,, \tag{14a}$$



7. ábra

$$s^d = a\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}} = \alpha a\,, \tag{14b}$$

ahol

$$\alpha = \sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\,, \tag{15}$$

és

$$s^a = \sqrt{3}a\,. \tag{14c}$$

Ezeket az ábrán is feltüntettük.

A csőre ható M_t csavarónyomaték — a tömörfalú csőszelvényhez hasonlóan — t [kp/cm] nyírófolyamot kelt a keresztmetszetben, a Bredt-képlettel kifejezett egyensúlyi egyenlet szerint

$$t = \frac{M_t}{2F_{\text{trapéz}}} = \frac{M_t}{2ah} \tag{16}$$

intenzitással. Ebből az egyes rácsrudakra akkora erő jut, amelynek a keresztmetszet síkjába eső vetülete a trapéz megfelelő oldalhosszával arányos. Így az egyes rúderők a következőre adódnak:

$$S^f = \pm \frac{a}{a/2}\left(t\,\frac{a}{2}\right) = \pm \frac{M_t}{2h}, \tag{17}$$

$$S^d = \pm \frac{a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{a^2}}}{a\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{h^2}{a^2}}}\left(ta\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{h^2}{a^2}}\right) = \pm \frac{M_t}{2h}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}, \tag{18a}$$

ill. a (15) jelöléssel:

$$S^d = \pm \frac{\alpha M_t}{2h} = \pm \alpha\, S^f, \tag{18b}$$

és

$$S^a = \pm \frac{\sqrt{3}a}{\dfrac{3}{2}a}\left(t\,\frac{3}{2}\,a\right) = \pm \frac{\sqrt{3}\,M_t}{2h} = \pm \sqrt{3}\,S^f. \tag{19}$$

Az egyes csomópontok csőtengely-irányú egyensúlyának vizsgálata alapján valamennyi övrúderő 0-nak adódik. Hasonlóképpen vakrudak lesznek a 0-val jelölt diagonálisok (7a ábra), amelyeket tehát joggal hagyattunk el.

Ezek után meghatározhatjuk a cső GI_t csavarási merevségét is, amelyet a ϑ fajlagos elcsavarodási szög segítségével a szokásos módon definiálunk:

$$GI_t = \frac{M_t}{\vartheta}. \tag{20}$$

A $\sqrt{3}a/2$ hosszúságú csőszakasz elcsavarodásakor végzett belső-külső saját munkák egyenlősége így írható fel:

$$\frac{1}{2}\,M_t\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\,\vartheta\right) = \frac{1}{2E}\left[\frac{(S^f)^2 s^f}{F^f} + 2\,\frac{(S^d)^2 s^d}{F^d} + \frac{(S^a)^2 s^a}{F^a}\right]. \tag{21}$$

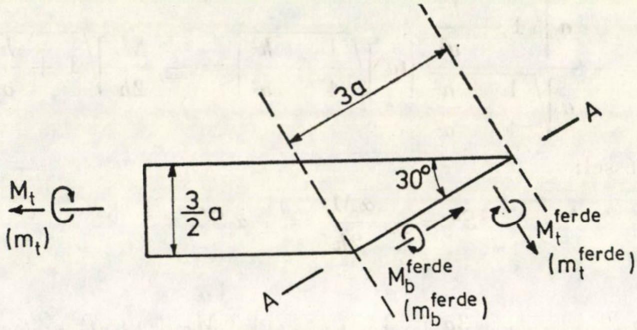
Kifejezve ϑ-t (20), a rúderőket pedig (17), (18b) és (19) segítségével M_t-vel, a rúdhosszakat pedig (14a, b, c) segítségével a-val, a következőt kapjuk GI_t-re:

$$GI_t = \frac{2\sqrt{3}Eh^2}{\frac{1}{F^f} + \frac{2\alpha^3}{F^d} + \frac{3\sqrt{3}}{F^a}}, \tag{22}$$

ahol α-t a (15) képlet értelmezi.

3.4. *A térrács csavarási merevsége*

Ismerve most már egy cső statikai tulajdonságait, rátérhetünk a három irányb n ilyen, egymást metsző csöveket tartalmazó térbeli rácsszerkezet csavarási merevségének tisztázására.



8. ábra

Először is meghatározzuk a csavart cső 30°-os ferde metszetében (azaz a másik irányú cső merőleges metszetében) ébredő csavaró- és hajlítónyomaték nagyságát (8. ábra).Az egyensúlyi egyenletekből

$$M_t^{\text{ferde}} = \frac{M_t}{2} \tag{23a}$$

és

$$M_b^{\text{ferde}} = \frac{\sqrt{3}}{2} M_t \tag{23b}$$

adódik, amit a 9. ábra szerint átvágott keresztmetszet rúderői ki is adnak.

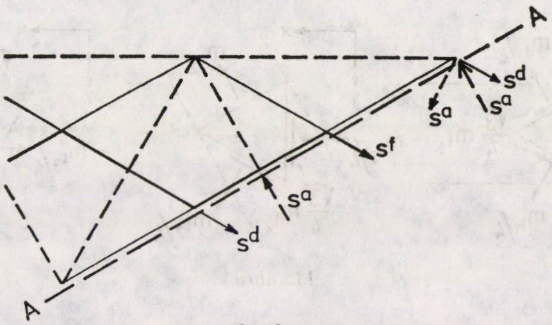
A továbbiakban a szerkezet egységnyi szélességére jutó, fajlagos belső erőkkel kell dolgoznunk. A csőre merőleges metszetben ez

$$m_t = \frac{2M_t}{3a} \tag{24}$$

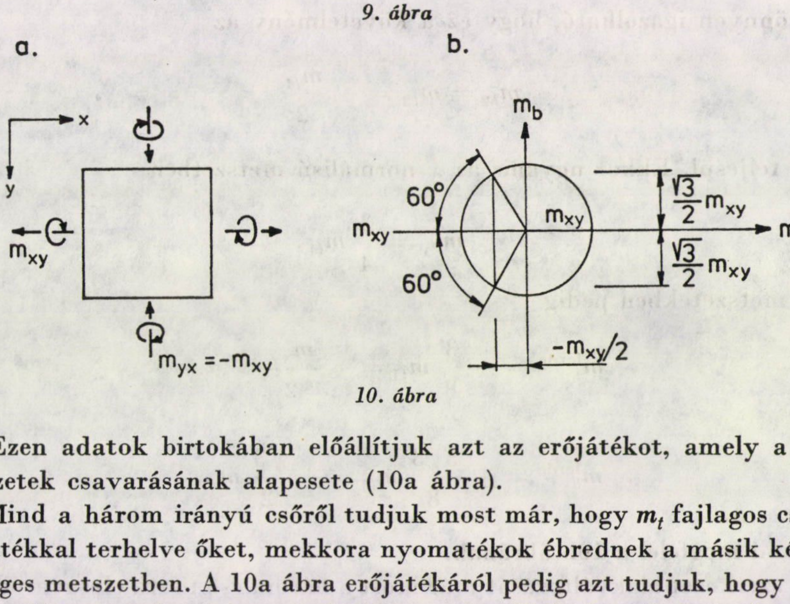
nagyságú (8. ábra). A ferde metszet hossza pedig kétszer akkora lévén, mint a merőleges metszet hossza, a fajlagos nyomatékok az alábbiak:

$$m_t^{\text{ferde}} = \frac{m_t}{4}, \tag{25a}$$

$$m_b^{\text{ferde}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, m_t\,. \tag{25b}$$



9. ábra



10. ábra

Ezen adatok birtokában előállítjuk azt az erőjátékot, amely a lemezszerkezetek csavarásának alapesete (10a ábra).

Mind a három irányú csőről tudjuk most már, hogy m_t fajlagos csavarónyomatékkal terhelve őket, mekkora nyomatékok ébrednek a másik két csőre merőleges metszetben. A 10a ábra erőjátékáról pedig azt tudjuk, hogy a ferde metszetekben keletkező nyomatékok nagysága Mohr-körrel ábrázolható (10b ábra), a ferde csövekre merőleges metszetekben tehát

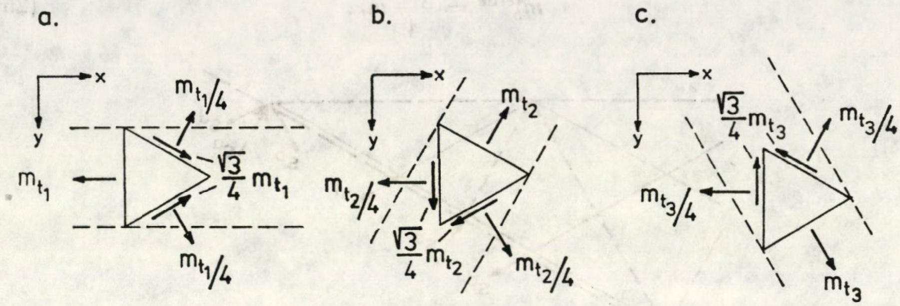
$$m_t^{\text{ferde}} = -\frac{m_{xy}}{2}, \tag{26a}$$

ill.

$$m_b^{\text{ferde}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\, m_{xy} \tag{26b}$$

nyomatékok működnek.

A 11. ábrán feltüntettük mind a három irányú cső merőleges és két ferde metszetét, a bennük ébredő nyomatékokkal. Feladatunk az alábbi: úgy kell meghatároznunk most a csövek merőleges metszetére ható m_{t1}, m_{t2}, m_{t3} csavarónyomatékokat, hogy a három „elemi" erőjáték összege a 10. ábra erőjátékát adja ki.



11. ábra

Könnyen igazolható, hogy ez a követelmény az

$$m_{t2} = m_{t3} = -\frac{m_{t1}}{2} \tag{27}$$

esetben teljesül. Ekkor ugyanis az x normálisú metszetben

$$m_{xy} = \frac{3}{4} m_{t1}, \tag{28}$$

a ferde metszetekben pedig

$$m_t^{\text{ferde}} = -\frac{3}{8} m_{t1} = -\frac{m_{xy}}{2} \tag{29a}$$

és

$$m_b^{\text{ferde}} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8} m_{t1} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} m_{xy} \tag{29b}$$

ébred, ami megfelel a 10b ábrának.

A szerkezet alakváltozását már most a három cső tiszta elcsavarodásából kell összeraknunk, amelyet sorban az m_{t1}, m_{t2} és m_{t3} fajlagos csavarónyomatékok okoznak.

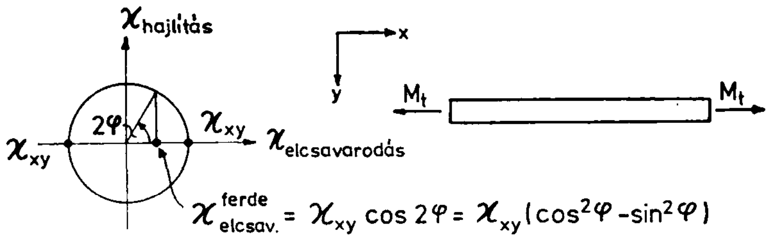
Egy cső tiszta csavarásából, melyet a két végén ható csavarónyomaték okoz, a csövet tartalmazó lemezben a következő deformáció-mező származik (12. ábra): a csőtengelyre merőleges metszetben $\varkappa_{xy}$, az erre 90°-os metszetben $\varkappa_{yx} = -\varkappa_{xy}$, a csőkeresztmetszettel φ szöget bezáró ferde metszetekben pedig az ábráról leolvashatóan:

$$\varkappa_{\text{elcsav}}^{\text{ferde}} = \varkappa_{xy} \cos 2\varphi = \varkappa_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \tag{30}$$

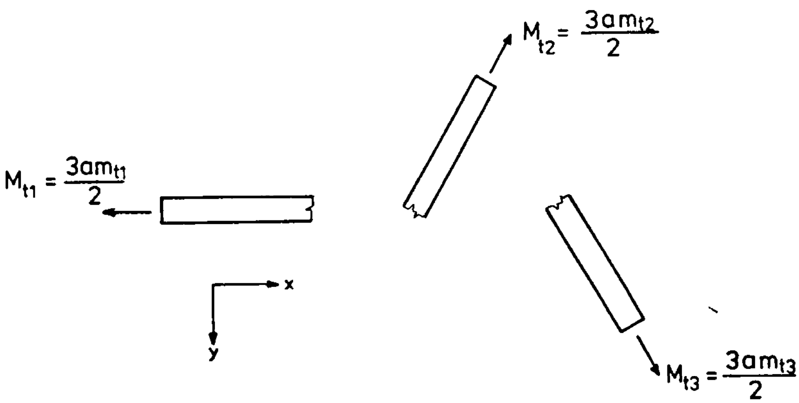
Mindez abból következik, hogy $\varkappa_{xy} = \partial^2 w/(\partial x \partial y)$, ahol w a függőleges irányú lehajlás.

Ezek alapján a szerkezetet alkotó három cső csavarásából (13. ábra) az x normálisú metszetben

$$\varkappa_{xy} = \frac{M_{t1}}{GI_t} + \frac{M_{t2} + M_{t3}}{GI_t} (\cos^2 60° - \sin^2 60°), \tag{31a}$$



12. ábra



13. ábra

az y normálisú metszetben pedig

$$\varkappa_{yx} = -\frac{M_{t1}}{GI_t} + \frac{M_{t2} + M_{t3}}{GI_t} (\cos^2 30° - \sin^2 30°) \tag{31b}$$

elcsavarodás keletkezik. Behelyettesítve GI_t-nek (22) szerinti értékét, figyelembe véve, hogy

$$M_{ti} = \frac{3am_{ti}}{2} \tag{32}$$

és kifejezve m_{ti}-ket (27) és (28) segítségével m_{xy}-nal, megkapjuk az elcsavarodásokat a lemezben ténylegesen ható m_{xy} fajlagos csavarónyomatékkal kifejezve:

$$\varkappa_{xy} = - \varkappa_{yx} = \frac{m_{xy}}{B_{33}}, \tag{33}$$

ahol B_{33} a „lemezszerű" csavarási merevség, amely egy cső (22) szerinti GI_t csavarási merevségének egységnyi szélességű sávra jutó ($3a/2$-vel osztott) értékének a fele:

$$B_{33} = \frac{1}{2} \frac{GI_t}{\frac{3}{2}a} = \frac{Eh^2}{a} \frac{F^a}{\frac{\sqrt{3}F^a}{2F^f} + \sqrt{3}\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)^{3/2} \frac{F^a}{F^d} + \frac{9}{2}}. \tag{34}$$

4. A kontinuum-egyenletek levezetése

4.1. *Alapelvek*

Az egyenletek felírásához az [1] irodalomban leírt elvet fogjuk követni, mégpedig a következő módon:

Az első lépésben a felső övsík merevségét (13) vesszük alapul, az alsó övsík (4) merevségi mátrixát pedig felbontjuk egy, a felsőével arányos elemekből álló (I. jelű) és egy maradék (II. jelű) részre. Ez az I. rész a felső övsík merevségi mátrixával együtt a w_1 lehajlás folytán egy hajlítási („lemezszerű") erőjátékot hoz létre.

Ez a w_1 alakváltozás tartalmazza a felső öv 4a és 4b ábrán vázolt deformációihoz tartozó labilis alakváltozásokat is. E labilis alakváltozás-részeket természetesen nem lehet közvetlenül összefüggésbe hozni az erőjátékkal. Így ezeket nem maga a hajlítási erőjátékot leíró differenciálegyenlet szabja meg, hanem a peremek megtámasztása (amely a 2. pontban mondottak szerint megszünteti a labilitást), és az összeférhetőségi követelmény. A labilis alakváltozásrészt tehát csak a helyettesítő kontinuum differenciálegyenlet-rendszerének a peremfeltételeket is figyelembe vevő megoldása határozza meg egyértelműen.

Az a körülmény, hogy a csavarási merevséget nem az alsó és a felső övsík nyírási merevsége szolgáltatja (mert a felső övnek nincs ilyen merevsége), hanem a 3.3—3.4. pontokban leírt „csövek", még egy megfontolást tesz szükségessé. Az alsó övsík merevségeinek felbontását úgy célszerű elvégeznünk, hogy az I. merevségi rész és a felső övsík merevségei az alsó övsíkban a csövekből számítható $\gamma^a_{xy,1}$ nyírási alakváltozással összeférhető alakváltozás-rendszert adjanak. Ez az 1. jelű, „lemezszerű" (hajlítási) erőjátékrész.

Az alsó öv „maradék" merevségi mátrixa miatt azonban II. jelű többleterők lépnek fel az alsó övben, amelyeknek a felső övben nincs párjuk, tehát kiegyensúlyozatlanok. Az egyensúly helyreállításához egy 2. jelű, kiegészítő síkbeli erőrendszernek kell ébrednie az alsó övben: ez adja az erőjáték második, „tárcsaszerű" részét.

4.2. *Az alsó övsík merevségeinek célszerű felbontása*

A trapézkeresztmetszetű csövek alsó síkjában a csavarásból keletkező $\gamma^a_{xy,\text{csav}}$ szögtorzulást a 2.2—3.4. pontokban mondottak alapján számíthatjuk ki. „Csőszerű" (csak m_{t1}-ből álló) csavarás esetében a nyírófolyam nagysága a (16) képletnek megfelelően:

$$t_1 = \frac{\frac{3}{2} a m_{t1}}{2ah} . \tag{36}$$

„Lemezszerű" (m_{xy} és m_{yx} okozta) csavarás esetében (27) és (28) szerint a három csőben $m_{t1} = -2\,m_{t2} = -2\,m_{t3} = 4/3\;m_{xy}$ működik, amelyek (3)-at is figyelembevéve, az első csőben

$$\gamma_{xy,1} = \frac{t_1}{A^a_{33}} = 4\frac{a}{h}\frac{m_{xy}}{EF^a} , \tag{37a}$$

a második és a harmadik csőben pedig:

$$\gamma_{\xi\eta,2} = \gamma_{\xi\eta,3} = -2\frac{a}{h}\frac{m_{xy}}{EF^a} \tag{37b}$$

szögtorzulást okoznak. Ezeket a (31a) képletnek megfelelően összegezhetjük:

$$\gamma^a_{xy,\text{csav}} = 6\frac{a}{h}\frac{m_{xy}}{EF^a} . \tag{37c}$$

Ez a szögtorzulás akkor lesz összeférhető a hajlítási nyúlásokkal, ha mindegyiket a lemezelmélet ismert $h^a \cdot L_1 w_1$ kifejezésével számíthatjuk a hajlítási erőjáték-rész w_1 lehajlásából (L_1 jelentését l. alább). Ez tehát azt kívánja meg, hogy

$$\gamma^a_{xy,\text{csav}} = h^a \cdot 2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} = h^a \cdot 2\varkappa_{xy} \tag{38a}$$

legyen (h^a jelentését l. a 14. ábrán). Figyelembevéve a (33) összefüggést, ebből

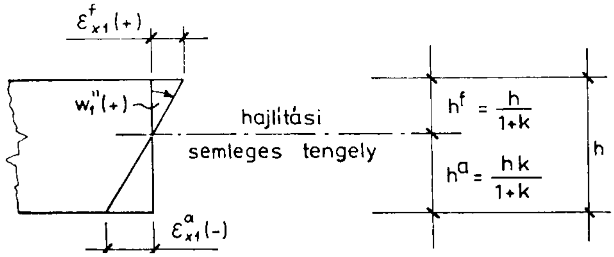
$$h^a = \frac{3aB_{33}}{hEF^a} = \frac{h}{\dfrac{F^a}{2\sqrt{3}F^f} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\dfrac{h^2}{a^2}\right)^{3/2}\dfrac{F^a}{F^d}+\dfrac{3}{2}} \tag{38b}$$

adódik, amiből megkaphatjuk a felső és az alsó övsík $\mathbf{A}_I^f$ és $\mathbf{A}^a$ merevségi mátrixainak szükséges k arányát, amelyet az

$$\mathbf{A}_I^f = k\mathbf{A}^a \tag{39a}$$

összefüggéssel definiálunk. Így tehát

$$k = \frac{h^a}{h-h^a} = \frac{1}{\dfrac{F^a}{2\sqrt{3}F^f} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\dfrac{h^2}{a^2}\right)^{3/2}\dfrac{F^a}{F^d}+\dfrac{1}{2}}\,. \tag{39b}$$



14. ábra

4.3. *Az egyenletek felírása*

A „lemezszerű”, 1. jelű erőjáték-részhez a hajlított lemez ismert [3] differenciálegyenletét az

$$L_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{40}$$

és

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{yx} \end{bmatrix} \tag{41}$$

vektor-szimbólumok segítségével az

$$L_1^*\mathbf{m} = -p \tag{42}$$

alakban írjuk fel.

A nyomatékoknak a w_1 hajlítási lehajlással való kifejezéséhez a hajlítási merevségi mátrixot az $\mathbf{A}^f$ (13) és az

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^a = \frac{1}{k}\mathbf{A}^f \tag{43}$$

(vö. (39b)-vel) húzási mátrixokból előállított

$$\mathbf{B}_b = \frac{h^2}{1+k}\mathbf{A}^f \tag{44}$$

hajlítási és a „csőszerű" csavarási merevséget tartalmazó

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_{33}}{2} \end{bmatrix} \tag{45}$$

csavarási matrix összege szolgáltatja. A B_{33} elemet (34) szabja meg. Az 1/2-es szorzó az L_1 harmadik elemében szereplő 2-es faktor kompenzálására szükséges, mivel a nyomatékokat w_1-el az alábbiak szerint fejezzük ki:

$$\mathbf{m} = -(\mathbf{B}_a + \mathbf{B}_t)L_1 w_1 . \tag{46}$$

Ezt behelyettesítve (42)-be, megkapjuk a hajlított lemez egyensúlyi egyenletét a w_1 lehajlással kifejezve:

$$L_1^*(\mathbf{B}_b + \mathbf{B}_t)L_1 w_1 = p . \tag{47}$$

Az alsó övben fellépő kiegészítő síkbeli erőrendszert, amely az erőjáték 2. részét képezi, az alábbi megfontolással kapjuk meg:

A w_1 hajlítási lehajlásból származó belső erők közül eddig csupán az alsó öv I. jelű $\mathbf{A}_I^a$ (43) merevségi mátrixának és a „csőszerű" csavarási merevségnek megfelelő erőket vettük figyelembe. E csavarási erők tulajdonképpen az alsó öv A_{33}^a (3) nyírási merevsége folytán ébredő erőket jelentik. Így az alsó öv II. jelű „maradék" merevségi mátrixa, amelynek megfelelő belső erők figyelembevétele még hátra van, az alábbi lesz:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{II}}^a = \mathbf{A}^a - (\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^a + \mathbf{A}_t^a) , \tag{48}$$

ahol

$$\mathbf{A}_t^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} . \tag{49}$$

A w_1 lehajlásból az alsó övben a 14. ábra szerint az (5c) értelmezésnek megfelelő

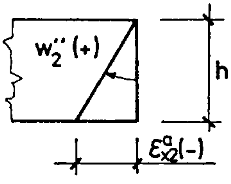
$$\varepsilon_1^a = -\frac{hk}{1+k} L_1 w_1 \tag{50}$$

nyúlások [1], s ebből, (48)-at és (43)-at figyelembe véve:

$$\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}^a = \mathbf{A}_{1\,\mathrm{I}}^a \varepsilon_1^a = -\frac{hk}{1+k}\left(\mathbf{A}^a - \frac{1}{k}\mathbf{A}^f - \mathbf{A}_t^a\right) L_1 w_1 \tag{51}$$

kiegyensúlyozatlan belső erők ébrednek. Az egyensúly helyreállításához egy

$$\mathbf{n}_2^a = \mathbf{A}^a \varepsilon_2^a \tag{52}$$



15. ábra

síkbeli erő- és alakváltozás-rendszernek kell keletkeznie. Ez, mivel nem okoz nyúlásokat a felső övben, a 15. ábra szerint így fejezhető ki az általa okozott w_2 lehajlásokkal [1]:

$$\varepsilon_2^a = -hL_1 w_2 . \tag{53}$$

Az $(\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}^a + \mathbf{n}_2^a)$ erőrendszer egyensúlyát ismeretes módon egy, az alábbi módon megválasztott Φ feszültségfüggvény bevezetésével biztosíthatjuk:

$$L_2 \Phi = \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}^a + \mathbf{n}_2^a , \tag{54}$$

ahol az L_2 differenciáloperátor jelentése:

$$L_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\[2mm] \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\[2mm] -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} . \tag{55}$$

Az egyensúlyt így biztosítottuk, de Φ-nek még ki kell elégítenie az

$$L_2^* \varepsilon_2^a = 0 \tag{56}$$

összeférhetőségi egyenletet. Mivel Φ az $\mathbf{n}_2^a$ erőrendszeren kívül az $\mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}^a$ erőrendszert is tartalmazza, amely viszont egy eleve összeférhető hajlítási alakváltozásból származik, az ez utóbbinak megfelelő alakváltozásokat le kell vonnunk a Φ-vel kifejezett alakváltozásokból, hogy megkapjuk ε_2^a-t. Az (52) és (54) összefüggések alapján:

$$\varepsilon_2^a = (\mathbf{A}^a)^{-1} n_2^a = (\mathbf{A}^a)^{-1} (L_2\Phi - \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}^a) . \tag{57}$$

Ezt (56)-ba helyettesítve és (51)-et is figyelembe véve:

$$L_2^*(\mathbf{A}^a)^{-1}\left[L_2\Phi + \frac{hk}{1+k}\left(\mathbf{A}^a - \frac{1}{k}\mathbf{A}^f - \mathbf{A}_t^a\right)L_1 w_1\right] = 0 . \tag{58}$$

A (47) és (58) differenciálegyenlet-pár — a peremfeltételekkel együtt — meghatározza a w_1 és Φ függvényeket, azaz a teljes erőjátékot. A peremfeltételeket azonban csak a teljes w lehajlásra tudjuk megadni, amely a w_1 hajlítási lehajlás és a kiegészítő síkbeli erőjátékból az (53) szerint keletkező w_2 lehajlás összege:

$$w = w_1 + w_2 . \tag{59}$$

Ki kell tehát fejeznünk a két egyenletben szereplő w_1-et (illetve az $L_1 w_1$ kifejezést) a teljes w lehajlással. (59) mindkét oldalát L_1-gyel szorozzuk:

$$L_1 w = L_1 w_1 + L_1 w_2 . \tag{60}$$

(53)-at, (57)-et és (51)et figyelembe véve:

$$\begin{aligned} L_1 w_2 &= -\frac{1}{h}\varepsilon_2^a = -\frac{1}{h}(\mathbf{A}^a)^{-1}(L_2\Phi - \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}}^a) = \\ &= -\frac{1}{h}(\mathbf{A}^a)^{-1}\left[L_2\Phi + \frac{hk}{1+k}\left(\mathbf{A}^a - \frac{1}{k}\mathbf{A}^f - A_t^a\right)L_1 w_1\right]. \end{aligned} \tag{61}$$

(61)-et behelyettesítjük (60)-ba, $\mathbf{A}^a$-val szorzunk és kifejezzük $L_1 w_1$-et:

$$L_1 w_1 = (1+k)(\mathbf{A}^a + \mathbf{A}^f + k\mathbf{A}_t^a)^{-1}\left(\mathbf{A}^a L_1 w + \frac{1}{h}L_2\Phi\right) . \tag{62}$$

Ezt behelyettesítve (47)-be és (58)-ba, megkapjuk a w-t és Φ-t tartalmazó differenciálegyenlet-párt:

$$(1+k)L_1^*(\mathbf{B}_b + \mathbf{B}_t)\,(\mathbf{A}^a + \mathbf{A}^f + k\mathbf{A}_t^a)^{-1}\left(\mathbf{A}^a L_1 w + \frac{1}{h}L_2\Phi\right) = p , \tag{63a}$$

$$L_2^*(\mathbf{A}^a)^{-1}\left[L_2\Phi + h(k\mathbf{A}^a - \mathbf{A}^f - k\mathbf{A}_t^a)(\mathbf{A}^a + \mathbf{A}^f + k\mathbf{A}_t^a)^{-1}\left(\mathbf{A}^a L_1 w + \frac{1}{h}L_2\Phi\right)\right] = 0 . \tag{63b}$$

5. Peremfeltételek

A szabadon támaszkodó (csuklós) perem feltételi egyenletei a következők (ha a perem az x tengellyel párhuzamos):

zérus a lehajlás: $$w = 0, \tag{64a}$$

zérus a peremre merőleges hajlítónyomaték: $$m_y = 0, \tag{64b}$$

az alsó övben zérus a peremre merőleges (vízszintes) membránerő:

$$n^a_{y1\,\mathrm{II}} + n^a_{y2} = 0\,, \tag{64c}$$

az alsó övben zérus a membrán-nyíróerő:

$$n^a_{xy1\,\mathrm{II}} + n^a_{xy2} = 0\,. \tag{64d}$$

Ezeket ugyancsak w és Φ segítségével kell kifejeznünk. (64b)-hez a nyomatékvektort (46) és (62) felhasználásával írjuk fel:

$$\mathbf{m} = -(1+k)(\mathbf{B}_b + \mathbf{B}_t)(\mathbf{A}^a + \mathbf{A}^f + k\mathbf{A}^a_t)^{-1}\left[\mathbf{A}^a L_1 w + \frac{1}{h} L_2 \Phi\right]. \tag{64b*}$$

A (64c)-hez és (64d)-hez szükséges erő-vektort (54) alapján közvetlenül ki tudjuk fejezni Φ-vel:

$$\mathbf{n}^a_{1\,\mathrm{II}} + \mathbf{n}^a_2 = L_2 \Phi\,. \tag{64c*}$$

(64d)-hez megjegyezzük, hogy (51) és (48) szerint $\mathbf{n}^a_{1\,\mathrm{II}}$ nyírókomponense azonosan egyenlő 0-val.

Ferde peremekre a megfelelő elforgató transzformációk képleteivel írhatjuk fel a peremfeltételeket.

6. A rúderők meghatározása a kontinuum metszeterőiből

A kontinuum belső erőit az eddig elmondottak alapján számíthatjuk át rúderőkké.

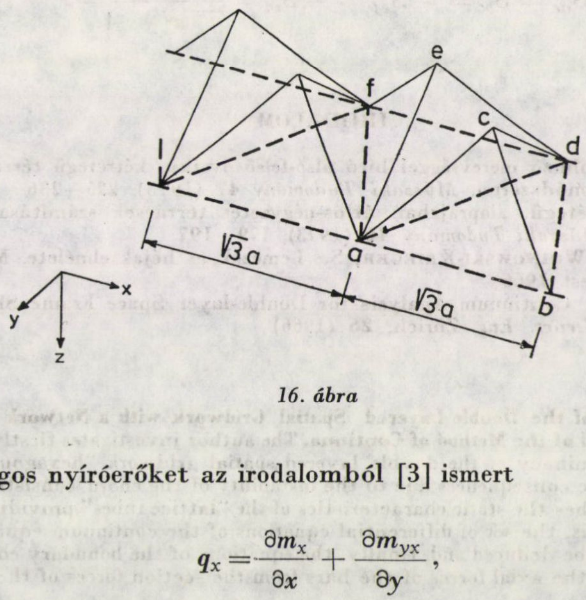
A két irányban ébredő hajlítónyomaték nagysága mindig azonos ($m_x = m_y$), így az

$$n^f_x = -\frac{m_x}{h} \tag{65}$$

összefüggéssel kiszámított derékerőből a (10) képlet alapján kaphatjuk meg a felső övben ébredő P rúderőt.

Az $m_{xy} = -m_{yx}$ csavarónyomatékot a 3.4. pontban mondottak szerint a három csőre ható m_{t1}, m_{t2}, m_{t3} csavarónyomatékra kell felbontanunk a (27)—(28) képletek szerint, az egyes csövekben belőlük keletkező rúderőket pedig a (17)—(19) képletek segítségével, figyelembe véve, hogy az egy teljes csőre ható M_t a (24) képlet szerint függ össze a fajlagos m_t csavarónyomatékkal.

Az alsó övben ébredő, Φ-vel (54) szerint meghatározott kiegészítő síkbeli erőrendszer rúderőit [4] szerint számíthatjuk ki.



16. ábra

A fajlagos nyíróerőket az irodalomból [3] ismert

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y}, \tag{66a}$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \tag{66b}$$

kifejezések szolgáltatják. A diagonálisokban ezekből keletkező rúderőket a legegyszerűbb a 6. ábra rácsos csövén szemlélettel megállapítani.

Ha a csövet az x tengellyel párhuzamosnak tekintjük (1. ábra), akkor az egy cső $3a/2$ szélességére jutó $3aq_x/2$ nyíróerőt két ferde rácsozat veszi fel. A függőleges vetületi egyenletből azt kapjuk, hogy bennük a nyírásból

$$S^d = \pm \frac{h}{s^d} \frac{3aq_x}{4} \tag{67}$$

rúderő keletkezik. (Az s^d rúdhosszat a (14b) egyenlet adja meg.)

A rá merőleges y irányban kétféle rúd-alakzat viszi át a nyíróerőt (16. ábra): az $ac—bc—cd$ és az $ae—ef—ed$, amelyek egymásnak tükörképei. Mind a kettő $\sqrt{3}a$ távolságonként ismétlődik. A cd és az ae rudak az 1. ábra szerinti yz síkba esnek, ezek tehát egyedül viselik a nyíróerőből az alakzatra jutó részt, az $ac-cb$ és az $ef-ed$ rúdpárokra viszont — szimmetrikusak lévén az yz síkra — csak feleakkora nyíróerő-rész jut. Így ismét a függőleges vetületi egyenletből

$$S_{cd} = -S_{ae} = \pm \frac{h}{s^d} \frac{\sqrt{3}aq_y}{2} \tag{68a}$$

és

$$S_{ac} = S_{bc} = -S_{ef} = -S_{ed} = \pm \frac{h}{s^d} \frac{\sqrt{3}aq_y}{4} \tag{68b}$$

adódik.

IRODALOM

1. KOLLÁR L.: Különböző merevséggel bíró alsó-felső övsíkú, kétrétegű térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel. *Műszaki Tudomány* **47** (1973), 225—236
2. KOLLÁR L.: Kétrétegű, alaprajzban átlós-négyzetes térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel. *Műszaki Tudomány* **46** (1973), 179—197
3. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKI-KRIEGER, S.: Lemezek és héjak elmélete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
4. WRIGHT, D. T.: A Continuum Analysis for Double-layer Space Frame Shells. *Publ. Int. Ass. Bridge Struct. Eng.* Zürich, **26** (1966)

Investigation of the Double Layered Spatial Gridwork with a Network "Hexagon over Triangle" with the Aid of the Method of Continua. The author investigates firstly the conditions of the statical determinacy of the double layered spatial gridwork "hexagon over triangle", then defines the static consequences due to the instability of the chord consisting of hexagons. Hereafter, he establishes the static characteristics of the "lattice tubes" providing the torsional stiffness. On this basis, the set of differential equations of the continuum equivalent with the spatial gridwork will be deduced and, finally, the equations of the boundary conditions as well as the calculation of the axial forces of the bars from the section forces of the continuum are described.

Untersuchung des zweischichtigen Raumfachwerkes mit einem Netz von »Sechseck über Dreieck« mit Hilfe des Kontinuumverfahrens. Erstens werden die Vorbedingungen der statischen Bestimmtheit des doppelschichtigen Raumfachwerks mit »Sechseck über Dreiekck« untersucht, dann die sich aus der Instabilität des Sechsecken zusammengestellten Gurtes ergebenden statischen Konsequenzen definiert. Nachdem werden die statischen Kennwerte der »Fachwerkröhre« ermittelt, die die Verdrehungssteifheit sichern; im folgenden wird das System der Differentialgleichungen des mit dem Raumfachwerk äquivalenten Kontinuums abgeleitet, schließlich werden die Randbedingungsgleichungen und die Berechnung der Stabkräfte aus den Schnittkräften des Kontinuums dargestellt.