

EGYENLETESEN MEGOSZLÓ VÍZSZINTES PEREMTERHÚ, LAPOS ELLIPTIKUS PARABOLOIDHÉJAK MEMBRÁNERŐI ÉS MEMBRÁNALAKVÁLTOZÁSAI

DULÁCSKA ENDRE*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

és
JANKÓ LÁSZLÓ**

[Beérkezett 1976. május 25-én]

A dolgozatban az egyenletesen megoszló vízszintes peremerőrendszerrel terhelt, lapos elliptikus paraboloidhéj membránerőjátékának és membránalakváltozásainak analitikus megoldását adjuk meg. A szembenlevő peremeken működő szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus erőrendszer okozta hatásokat leíró függvényeket a kézi számítást megkönnyítő grafikus alakban is feldolgoztuk. Rámutattunk arra, hogy ezen statikai alapfeladat felhasználásával a membránelmélet keretében közelítően megvizsgálhatók a vízszintes irányban nem elhanyagolható hajlítási, illetve csavarási merevségekkel bíró peremtartókkal ellátott elliptikus paraboloidhéjak belső erői és alakváltozásai is.

1. Jelölések

f_x, f_y	az x , illetve y irányú ívek nyílmagasságai;
h	a héj vastagsága;
$l_x = 2a, l_y = 2b$	az x , illetve y irányú ívek feszítávolságai;
p	a z tengely irányába mutató, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó felületi teher;
$n_x = F'', n_{xy} = F'', n_y = F''$	a vetületi oldalhosszakra vonatkoztatott (redukált) metszeterők fajlagos értékei;
u, v	az x , illetve y irányban futó felületi érintők irányába eső eltolódások;
u^*, v^*	az x , illetve y irányú eltolódások;
w	a felület pontjainak normális irányú eltolódása;
w^*	a z tengely irányába mutató eltolódás;
x, y	a derékszögű koordináták;
$z(x, y)$	a héj középfelületének ordinátái;
E	a rugalmassági modulus;
F	a membránerők feszültségfüggvénye;
$G = E/2(1 + \nu)$	a nyírási rugalmassági modulus;
H	az alaprajzi vetületben egyenletesen megoszló vízszintes peremteher fajlagos értéke;
H^s, H^a	a szimmetrikus, illetve az antiszimmetrikus peremteher intenzitása;
I	a peremívek keresztmetszetének vízszintes síkú hajlítási tehetetlenségi nyomatéka;
I_{cs}	a peremívek keresztmetszetének csavarási tehetetlenségi nyomatéka;
$L_p(\) = \ddot{z}(\)'' - 2z'(\)' + z''(\)''$	a Pucher-féle differenciál-operátor;
$\bar{\theta}$	a peremívek középkérszmetzetének abszolút elcsavarodása;
ν	a harántkontrakciós tényező (a számításokban $\nu = 0,2$);
$\partial(\)/\partial x = (\)'$	az x szerinti differenciálás szimbóluma;
$\partial(\)/\partial y = (\)'$	az y szerinti differenciálás szimbóluma;
$\Delta\Delta(\) = (\)'' + 2(\)'' + (\)''$	a biharmonikus differenciál-operátor.

* Dr. Dulácska Endre, 1122 Budapest Ráth György u. 64.

** Dr. Jankó László, 1036 Budapest, Lajos u. 142.

2. Bevezetés

A lapos elliptikus paraboloidhéj egyenletesen megoszló felületi teherből, illetve önsúlyteherből származó membránerőinek és membrán-alakváltozásainak meghatározására ismert számítási eljárások állnak rendelkezésre [1], [2], [3], [4]. Ezek a megoldások feltételezik, hogy a héj peremtartói saját síkjukban hajlításra végtelenül merevek, a síkjukra merőleges hajlítással szemben pedig tökéletesen lágyak (ún. „félmerev” peremtartók).

Felmerül a kérdés, hogy lehetséges-e pusztán membránerőkkel egyensúlyban tartani a valamely pereme mentén egyenletesen megoszló vízszintes erőkkel terhelt lapos elliptikus paraboloidhéjat.

A következőkben bebizonyítjuk, hogy ez lehetséges, megadjuk a membránerőjátéokra és a membránalakváltozásokra vonatkozó analitikus megoldást, és ezek diagramokban feldolgozott kiszámított értékeit. Dolgozatunkban csak az xz síkra szimmetrikus (1. ábra) megoldást keressük.

Az ismertetendő megoldásnak több gyakorlati alkalmazási lehetősége van. A peremívek térbeli stabilitásának a vizsgálatához — még a héj szempontjából elhanyagolhatóan kismértékű vállnyomás esetén is — elengedhetetlenül szükséges a héj és a peremtartók közötti vízszintes kapcsolati erők ismerete.

A gyakorlatban alkalmazott peremívek általában nem felelnek meg az ún. „félmerev peremtartó” definíciójának, mert véges nagyságú csavaró-merevségük és vízszintes síkú hajlítómerevségük van. E merevségek következtében a peremtartók nem tudják akadálytalanul követni a membrán-elmélet szerint kialakuló peremmenti elmozdulásokat. Ezért a héj és a peremtartó között egy kapcsolati erőrendszer alakul ki, azaz a héj nem lesz teljesen oldalnyomásmentes.

Az említett ívstabilitási vizsgálat, továbbá a peremtartók véges vízszintes síkú merevsége hatásának a figyelembevétele, megoldásunk segítségével közelítően végrehajtható.

3. A lapos membránhéjak egyensúlyi és alakváltozási differenciálegyenletei

A következőkben sorra kerülő vizsgálatainkat a lapos membránhéjak elmélete [1], [2], [3] alapján fogjuk elvégezni. A tárgyalás jobb áttekinthetősége érdekében összefoglaljuk a lapos membránhéjak egyensúlyát és alakváltozásainak összeférhetőségét leíró differenciálegyenleteket.

A membránhéjak Pucher-féle

$$L_p(F) = -p \quad (3.1)$$

egyensúlyi differenciálegyenlete [1], [3] tetszőleges meredekségű héjakra is érvényes, azonban a

$$L_p(w) = -\frac{1}{Eh} \Delta \Delta F \quad (3.2)$$

kompatibilitási egyenlet [1], [2], [3], [4] így felírt alakját csak lapos membránhéjak esetében használhatjuk.

Mint ismeretes, a laposság feltételezése membránhéjak esetében azt jelenti, hogy egyrészt a felület geodetikus görbületei elhanyagolhatóan kicsinyek, másrészt pedig a felület mértéke az euklidészi (síkbeli) mértékkel azonosnak vehető.

A laposság a felületi iránytangensek segítségével

$$\begin{aligned} 1 + z'z'' &\approx 1 \\ 1 + z'^2 &\approx 1 \\ 1 + z''^2 &\approx 1 \end{aligned} \quad (3.3a-c)$$

módon is megfogalmazható.

A héj laposságának következtében a 2. ábrán bejelölt u, v, w a felületi görbevonalú ortogonális koordináták irányába mutató eltolódások a Descartes-féle koordinátarendszer x, y és z tengelyei irányába mutató u^*, v^* és w^* eltolódásaival egyenlőnek vehetők [1]:

$$u \approx u^*, v \approx v^*, w \approx w^*. \quad (3.4)$$

A (3.1)–(3.2) parciális differenciálegyenleteknek — a megfelelő kerületi feltételeket kielégítő — megoldása után az u és v eltolódásokat az

$$u = \int z'' w dx + \frac{1}{Eh} \int (F'' - \nu F''') dx + u_1(y), \quad (3.5)$$

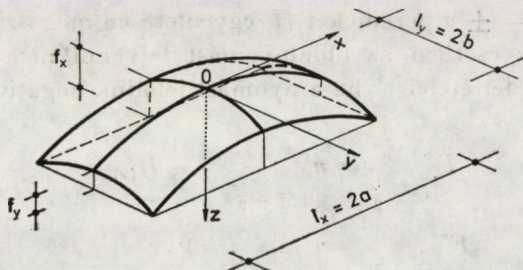
$$v = \int z' w dy + \frac{1}{Eh} \int (F'' - \nu F''') dy + v_1(x) \quad (3.6)$$

kifejezések kiértékelése révén kaphatjuk meg [1]. Az $u_1(y)$ és $v_1(x)$ integrációs függvények a peremfeltételekből határozhatók meg.

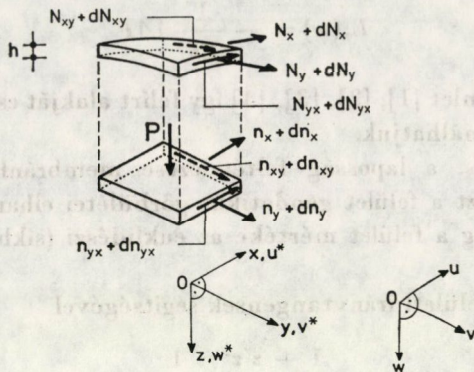
Az elliptikus paraboloidhéj középfelületének egyenletét a

$$z = \frac{4f_x}{l_x^2} x^2 + \frac{4f_y}{l_y^2} y^2 \quad (3.7)$$

kifejezéssel írjuk le (1. ábra).



1. ábra. Az elliptikus paraboloidhéj geometriai adatai

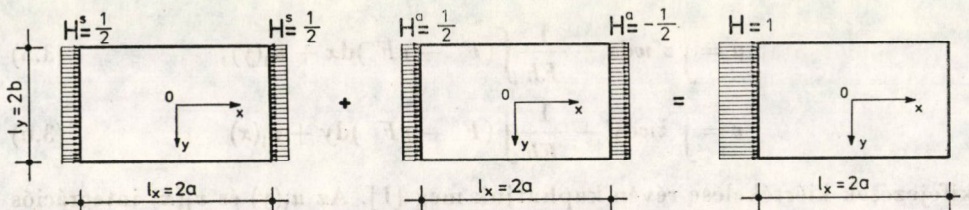


2. ábra. A belső erők és az eltolódások előjelszabálya

4. Tetszőleges peremteher előállítása

A 3. ábrán bemutattuk, hogy a szimmetrikus H^s peremteher és az anti-szimmetrikus H^a peremteher okozta hatások ismeretében tetszőleges H peremteher előidézte membránérők és membránalakváltozások is meghatározhatók.

A továbbiakban bemutatjuk a H^s -re, ill. a H^a -ra vonatkozó feladat megoldását.



3. ábra. Az $x = -a$ helyi $H = 1$ peremteher felbontása $H^s = 1/2$ szimmetrikus és $H^a = \pm 1/2$ antiszimmetrikus komponensekre

5. A szimmetrikus H^s peremteher vizsgálata

Terhelje az $x = \pm a$ peremeket H^s egyenletesen megoszló vízszintes erőrendszer. Ebben az esetben az oldalnyomást felvenni nem tudó peremívű héj statikai kerületi feltételei — ha a nyomást jelöljük negatívnak — a következők:

$$F'' \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} = n_x \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} = -H^s(y) \tag{5.1a-b}$$

$$F'' \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} = n_y \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} = 0, \tag{5.1c-d}$$

Feltételeztük, hogy a peremívek hajlításra saját síkjukban végtelenül merevek, ezért

$$w \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} = 0, \quad (5.2a-b)$$

$$w \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} = 0. \quad (5.2c-d)$$

Mivel megoldásunk a membránelmélet alapján áll — vagyis a héj hajlítási merevségét elhanyagoljuk — a peremek menti szögelfordulások értékét nem kötjük meg, hiszen a teljesen hajlékony membrán tetszőleges peremmenti szögelfordulást ellenállás nélkül követni tud.

A levezetés során először az egyenletesen megoszló H^s terhet a

$$H_{(y)}^s = \frac{4}{\pi} H^s \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y \quad (5.3)$$

Fourier-sorba fejtjük, majd a (3.1) egyensúlyi differenciálegyenletet az

$$\ddot{F} + \frac{l_x^2}{l_y^2} \frac{f_y}{f_x} F'' = 0 \quad (5.4)$$

alakra hozzuk. Ezt követően előállítjuk az (5.4) differenciálegyenletet és az (5.1) peremfeltételeket kielégítő F feszültségfüggvényt. A megoldást Fourier-módszerrel [5] keressük.

Az

$$F(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (5.5)$$

szorzatfeltevést az (5.4) egyenletbe helyettesítve, az

$$\frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{l_x^2}{l_y^2} \frac{f_y}{f_x} \frac{X''}{X} = 0 \quad (5.5a)$$

kifejezést kapjuk. Ez szétesik az

$$X'' - k^2 \frac{l_y^2}{l_x^2} \frac{f_x}{f_y} X = 0 \quad (5.6a)$$

és

$$\ddot{Y} + k^2 Y = 0 \quad (5.6b)$$

két közönséges differenciálegyenletre (a k szám majd a kerületi feltételekből adódik ki).

Az (5.6a) egyenlet általános megoldása az

$$X = C_{1m} \cosh k \frac{l_y}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x + C_{2m} \sinh k \frac{l_y}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \quad (5.7a)$$

függvény, az (5.6.b) egyenleté pedig az

$$Y = C_{3m} \cos ky + C_{4m} \sin ky \quad (5.7b)$$

kifejezés.

Az (5.1a–b) kerületi feltételeket az X függvénynek kell kielégítenie, ebből

$$C_{2m} = 0. \quad (5.8)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy megoldásunk az xz síkra szimmetrikus esetre vonatkozik, akkor az (5.1c–d) kerületi feltételek szerint

$$C_{4m} = 0.$$

Az F függvény a fentiek alapján

$$F(x, y) = \sum_{m=1,3,5\dots} C_m \cosh k \frac{l_y}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cos ky \quad (5.10)$$

alakú lesz.

Az (5.3) és (5.10) kifejezéseket az (5.1a–b) kerületi feltételekbe helyettesítve az

$$C_m k^2 \cosh k \frac{l_y}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \cos ky = \frac{4}{\pi} H^s \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \cos \frac{m\pi}{l_y} y \quad (5.10a)$$

összefüggés adódik, melyből következik, hogy

$$k = \frac{m\pi}{l_y}, \quad (5.11)$$

és

$$C_m = H^s \frac{4l_y^2}{\pi^3} \frac{1}{m^3} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}}. \quad (5.12)$$

Végeredményben az F feszültségfüggvényre az

$$F = \frac{4H^s}{\pi^3} l_y^2 \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m^3} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cos \frac{m\pi}{l_y} y \quad (5.13)$$

kifejezést nyertük.

A membrán metszeterők F megfelelő differenciálásával a következőképpen adódnak:

$$n_x = -\frac{4H^s}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cdot \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y, \quad (5.14)$$

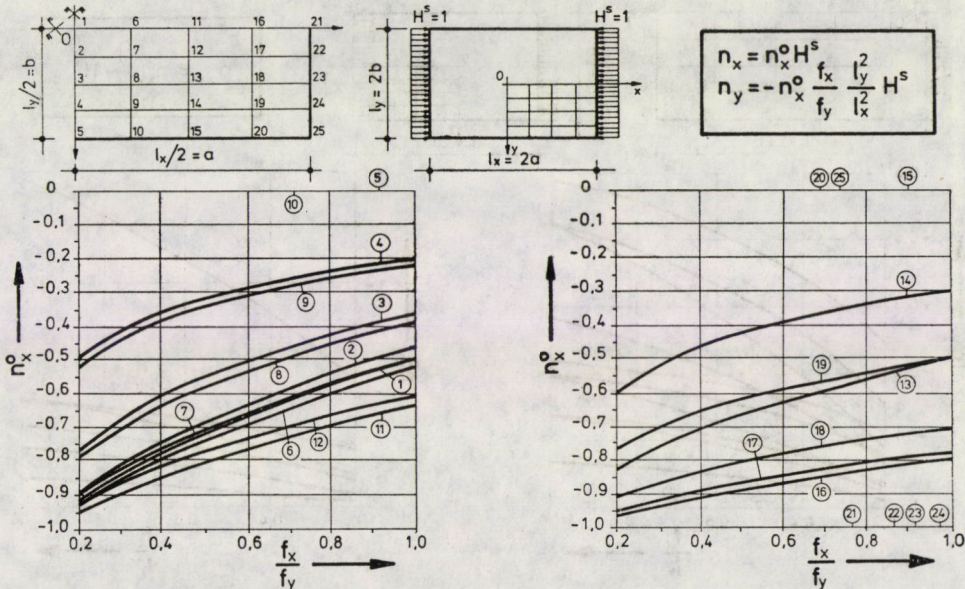
$$n_y = -\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} n_x, \quad (5.15)$$

$$n_{xy} = \frac{4H^s}{\pi} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \frac{l_x}{l_y} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \sin \frac{m\pi}{l_y} y. \quad (5.16)$$

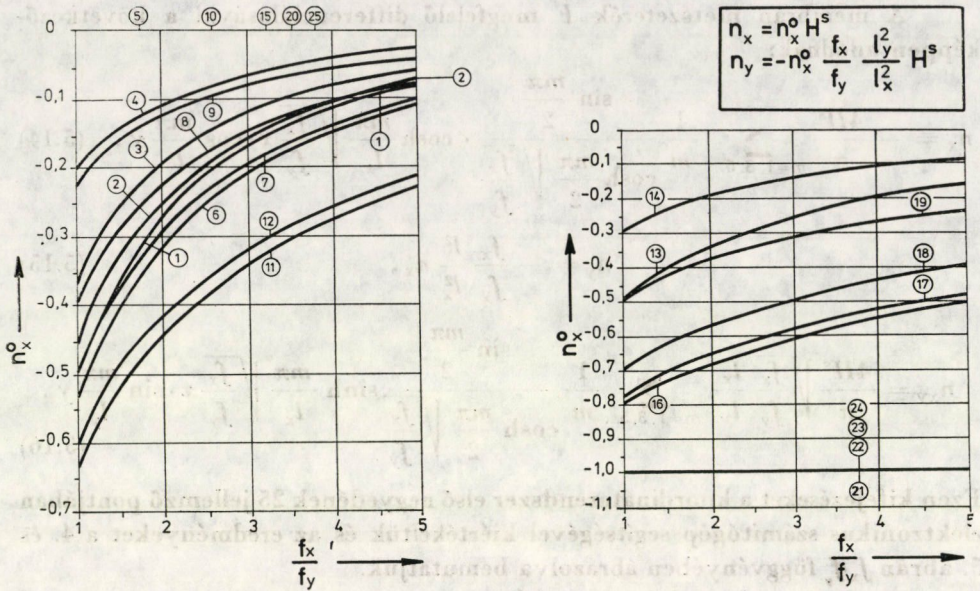
Ezen kifejezéseket a koordinátarendszer első negyedének 25 jellemző pontjában elektronikus számítógép segítségével kiértékeljük és az eredményeket a 4. és 5. ábrán f_x/f_y függvényében ábrázolva bemutatjuk.

A membránelmozdulások meghatározásához szükségünk van a $\Delta\Delta F$ operátor értékére is:

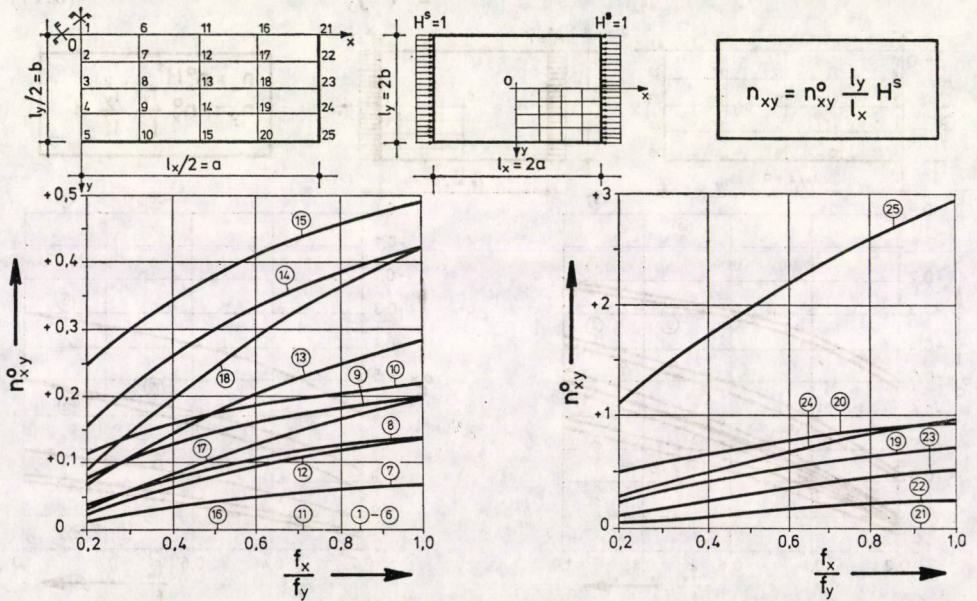
$$\Delta\Delta F = \frac{4H^s \pi}{l_y^2} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \sum_{m=1,3,5\dots} m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y. \quad (5.17)$$



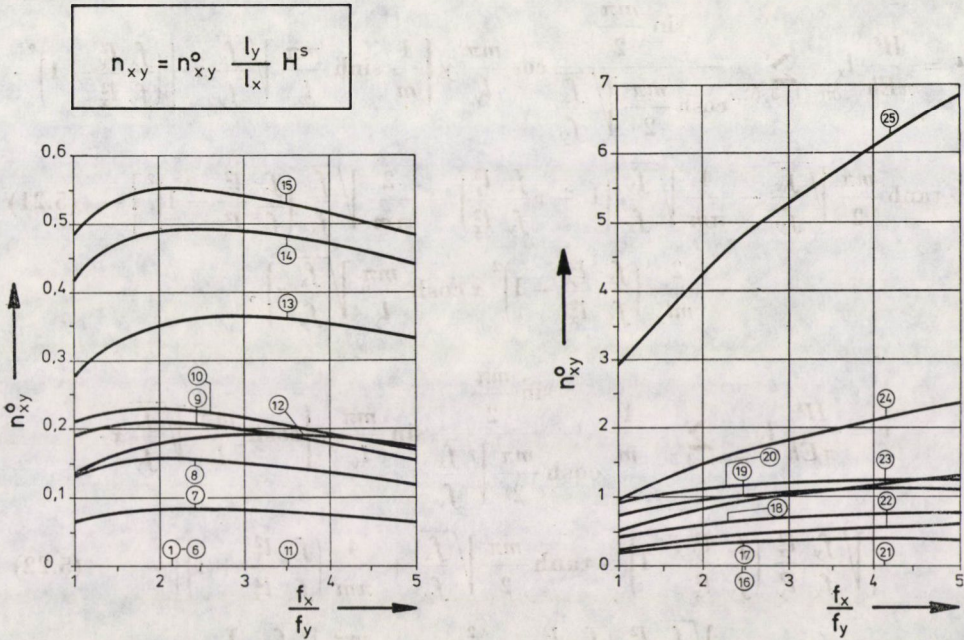
4a. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó n_x és n_y membránerők



4b. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó n_x és n_y membránérők



5a. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó n_{xy} membránnyíróerő



5b. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó n_{xy} membránnyírórő

A (3.2) kompatibilitási egyenlet részletesebben a

$$\ddot{w} + \frac{l_x^2 f_y}{l_y^2 f_x} w'' = - \frac{l_x^2}{8f_x E h} \Delta \Delta F \tag{5.18}$$

formát ölti. Az (5.18) differenciálegyenletnek az (5.2) kerületi feltételeket kielégítő megoldására (Dirichlet-feladat) a

$$w = \sum_{m=1,3,5\dots} w_m \cos \frac{m\pi}{l_y} y \left(x \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x - \frac{l_x}{2} \tanh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \right) \tag{5.19}$$

függvényt állítottuk elő, ahol

$$w_m = - \frac{H^s}{4Eh} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \frac{l_x}{f_x} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \tag{5.20}$$

Az u és v eltolódások értékeit F és w (5.13), ill. (5.19) kifejezéseinek a (3.5)-be, ill. (3.6)-ba helyettesítésével kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{H^s}{\pi E h} l_x \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cos \frac{m\pi}{l_y} y \left\{ \frac{1}{m} \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \left[\left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \tanh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} - \frac{4}{\pi m} \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \left(1 + \nu \frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} \right) - \frac{2}{\pi m} \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \left. \right] - \\
 & \left. - \frac{2}{m l_x} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 x \cosh \frac{m\pi}{l_y} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \right\}, \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{H^s}{\pi E h} l_y \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \sin \frac{m\pi}{l_y} y \left\{ \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \right. \\
 & \cdot \left[\sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \frac{l_x^2}{l_y^2} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \cdot \tanh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} + \frac{4}{\pi m} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} + \nu \right) \right] - \\
 & \left. - 2 \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \frac{l_x^2}{l_y^2} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 x \cdot \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \right\}. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Az $u_1(y)$ és $v_1(x)$ függvények szimmetria okokból zérusra adódnak.

A gyakorlati szempontokból fontos $w = w(0, 0)$, $u = (a, 0)$, $v(0, b)$ elmozdulásértékeket f_x/f_y és l_x/l_y függvényében a 6. és 7. ábrákról olvashatjuk le ($\nu = 0,2$), vagy jellemző értékeit az 1. táblázatból is kivehetjük.

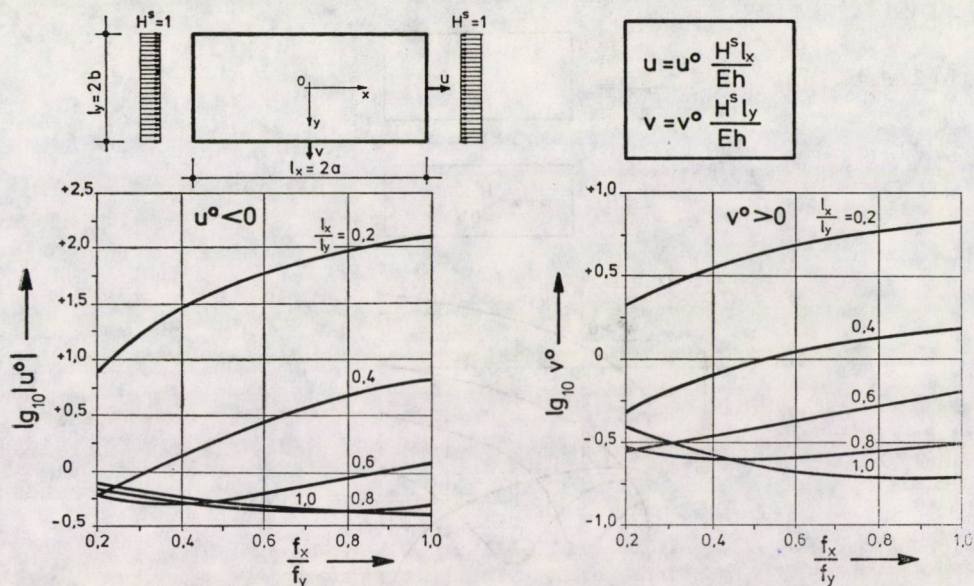
Vizsgáljuk most meg az $f_x = f_y = f$ és $l_x = l_y = 1$ esetet, azaz a forgási paraboloid membránerőit és membránmozgásait:

$$n_x = -\frac{4H^s}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2}} \cos \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{m\pi}{l} y, \quad (5.23)$$

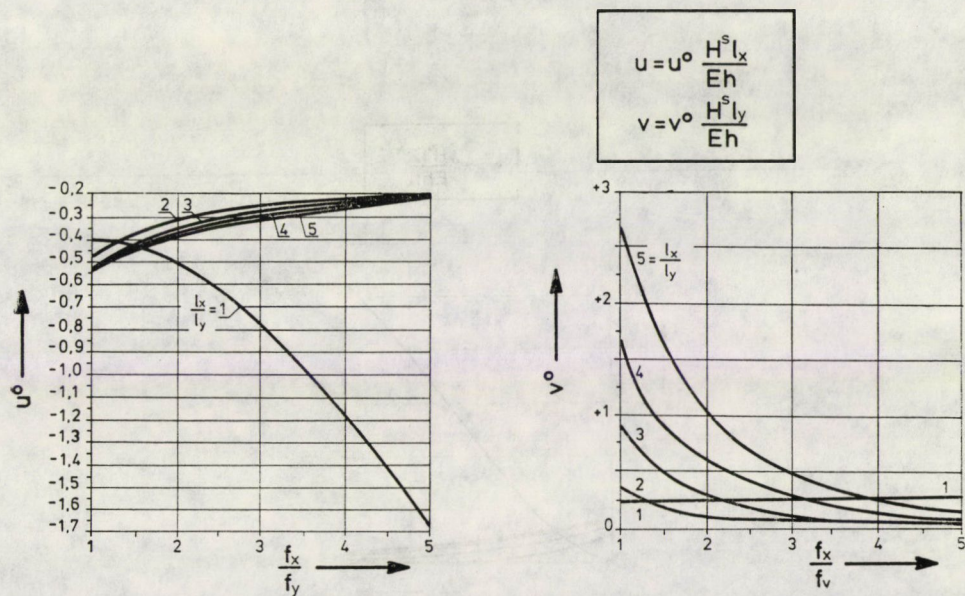
$$n_y = -n_x, \quad (5.24)$$

$$n_{xy} = \frac{4H^s}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2}} \sinh \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y, \quad (5.25)$$

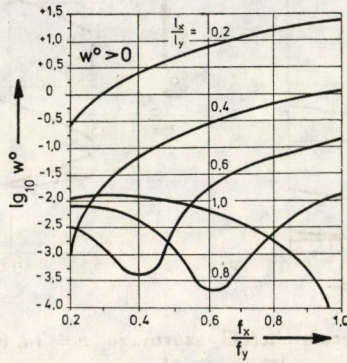
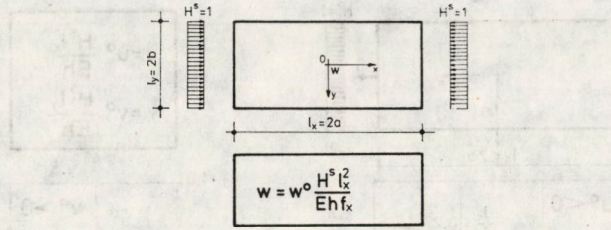
$$w = 0, \quad (5.26)$$



6a. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó $u = (a, 0)$ és $(0, b)$ eltolódások ($w_{perem} = 0$)

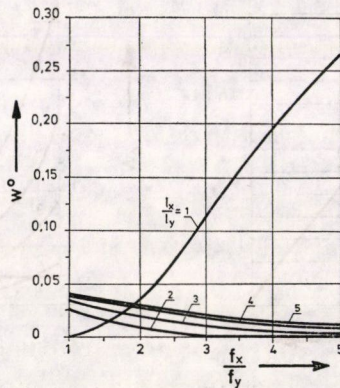


6b. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó $u = (a, 0)$ és $v = v(0, b)$ eltolódások ($w_{perem} = 0$)



7a. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó $w = w(0,0)$ lehajlás ($w_{perem} = 0$)

$$w = w^0 \frac{H^s l_x^2}{E h f_x}$$



7b. ábra. Szimmetrikus $H^s = 1$ peremteherből származó $w = w(0,0)$ lehajlás ($w_{perem} = 0$)

1a. táblázat

$\frac{f_x}{f_y}$	$\frac{l_x}{l_y}$	H^0 szimmetrikus		
		$u^0 = u \frac{E}{H^0} \frac{h}{l_x}$	$v^0 = v \frac{E}{H^0} \frac{h}{l_y}$	$w^0 = w \frac{E}{H^0} \frac{h f_x}{l_x^2}$
0,2	0,2	-7,8913	1,9999	0,2658
	0,4	-0,6224	0,4888	0,0010
	0,6	-0,6148	0,2816	0,0033
	0,8	-0,7110	0,2949	0,0079
	1,0	-0,7728	0,3952	0,0106
0,4	0,2	-29,6873	3,6071	2,5979
	0,4	-1,4381	0,8218	0,0722
	0,6	-0,5336	0,3536	0,0004
	0,8	-0,5365	0,2458	0,0045
	1,0	-0,5939	0,2574	0,0115
0,6	0,2	-58,7543	4,9221	7,7634
	0,4	-2,8975	1,1176	0,2995
	0,6	-0,6565	0,4478	0,0176
	0,8	-0,4704	0,2543	0,0002
	1,0	-0,4892	0,2097	0,0063
0,8	0,2	-92,0706	5,9780	15,4363
	0,4	-4,7277	1,3657	0,6842
	0,6	-0,8990	0,5382	0,0639
	0,8	-0,4704	0,2800	0,0027
	1,0	-0,4320	0,1949	0,0017
1,0	0,2	-128,4235	6,8168	25,0777
	0,4	-6,8084	1,5688	1,2000
	0,6	-1,2191	0,6180	0,1376
	0,8	-0,5128	0,3101	0,0138
	1,0	-0,4054	0,1948	0,0000

$$u = -\frac{4H^0 l}{\pi^2 E h} (1 + \nu) \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2}} \sinh \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{m\pi}{l} y, \quad (5.27)$$

$$v = \frac{4H^0 l}{\pi^2 E h} (1 + \nu) \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\cosh \frac{m\pi}{2}} \cosh \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y. \quad (5.28)$$

Az (5.26) egyenlet szerint mindenütt $w = 0$.

Ez azzal magyarázható, hogy az x , ill. y irányban azonos görbületű héj minden pontjában a fellépő ellenkező előjelű, de abszolút értékű ($|n_x| = |n_y| = n$) feszítőerők egymás lehajlást okozó hatását éppen kiegyenlítik.

1b. táblázat

$\frac{f_x}{f_y}$	$\frac{l_x}{l_y}$	H^a szimmetrikus		
		$u^0 = u \frac{E}{H^a} \frac{h}{l_x}$	$v^0 = v \frac{E}{H^a} \frac{h}{l_y}$	$w^0 = w \frac{E}{H^a} \frac{h f_x}{l_x^2}$
5,0	5,0	-0,2262	0,1452	0,0106
	4,0	-0,2158	0,0764	0,0079
	3,0	-0,2008	0,0333	0,0033
	2,0	-0,2125	0,0371	0,0010
	1,0	-1,6758	0,2612	0,2658
4,0	5,0	-0,2578	0,2540	0,0151
	4,0	-0,2475	0,1389	0,0121
	3,0	-0,2307	0,0606	0,0066
	2,0	-0,2219	0,0420	0,0000
	1,0	-1,1865	0,2701	0,1930
3,0	5,0	-0,3040	0,4801	0,0217
	4,0	-0,2941	0,2732	0,0185
	3,0	-0,2762	0,1240	0,0125
	2,0	-0,2512	0,0565	0,0018
	1,0	-0,7866	0,2658	0,1121
2,0	5,0	-0,3808	1,0257	0,0310
	4,0	-0,3715	0,6080	0,0280
	3,0	-0,3536	0,2944	0,0221
	2,0	-0,3172	0,1082	0,0091
	1,0	-0,5009	0,2387	0,0366
1,0	5,0	-0,5428	2,7647	0,0401
	4,0	-0,5349	1,7063	0,0383
	3,0	-0,5187	0,8918	0,0344
	2,0	-0,4782	0,3392	0,0245
	1,0	-0,4054	0,1948	0,0000

6. Az antimetrikus H^a peremteher vizsgálata

Ha az $x = +a$ peremen H^a nagyságú húzó, az $x = -a$ peremen pedig ugyanakkora nyomó teher működik, akkor a saját síkjában végtelenül merevnek tekintett, de oldalirányban lágú peremtartójú héj statikai és peremfeltételeit az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$F'' \Big|_{x=+\frac{l_x}{2}} = n_x \Big|_{x=+\frac{l_x}{2}} = +H^a, \quad (6.1a)$$

$$F'' \Big|_{x=-\frac{l_x}{2}} = n_x \Big|_{x=-\frac{l_x}{2}} = -H^a, \quad (6.1b)$$

$$F'' \Big|_{y=\pm\frac{l_y}{2}} = n_y \Big|_{y=\pm\frac{l_y}{2}} = 0, \quad (6.1c-d)$$

$$w \Big|_{x=\pm\frac{l_x}{2}} = 0, \quad (6.2a-b)$$

$$w \Big|_{y=\pm\frac{l_y}{2}} = 0. \quad (6.2c-d)$$

A H^a terhet természetesen az (5.3)-mal teljesen megegyező alakú

$$H_{(y)}^a = \frac{4}{\pi} H^a \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y \quad (6.3)$$

Fourier-sorba fejthetjük.

Ez esetben az (5.4) egyensúlyi differenciálegyenletnek a (6.1) kerületi feltételeket kielégítő — szintén Fourier-módszerrel előállított — xz síkra szimmetrikus megoldása az

$$F = -\frac{4H^a}{\pi^3} l_y^2 \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m^3} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y \quad (6.4)$$

függvény, melynek a 2. pontban jelzett parciális differenciálhányadosai a kereszt membránerők:

$$n_x = \frac{4H^a}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cdot \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y, \quad (6.5)$$

$$n_y = -\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} n_x, \quad (6.6)$$

$$n_{xy} = -\frac{4H^a}{\pi} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \frac{l_y}{l_x} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \sin \frac{m\pi}{l_y} y. \quad (6.7)$$

A fenti függvényeket a koordinátarendszer első negyedének 25 jellemző pontjában kiszámított értékek alapján a 8. és 9. ábrák grafikonjai ábrázolják.

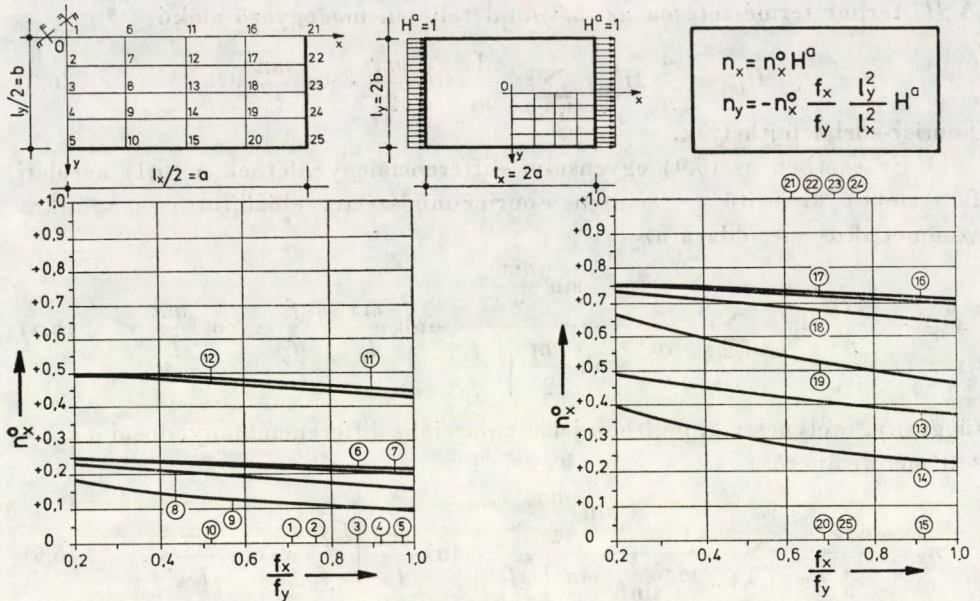
A biharmonikus operátort most F -re alkalmazva adódik a

$$\Delta \Delta F = -\frac{4H^a \pi}{l_y^2} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \sum_{m=1,3,5\dots} m \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \cos \frac{m\pi}{l_y} y \quad (6.8)$$

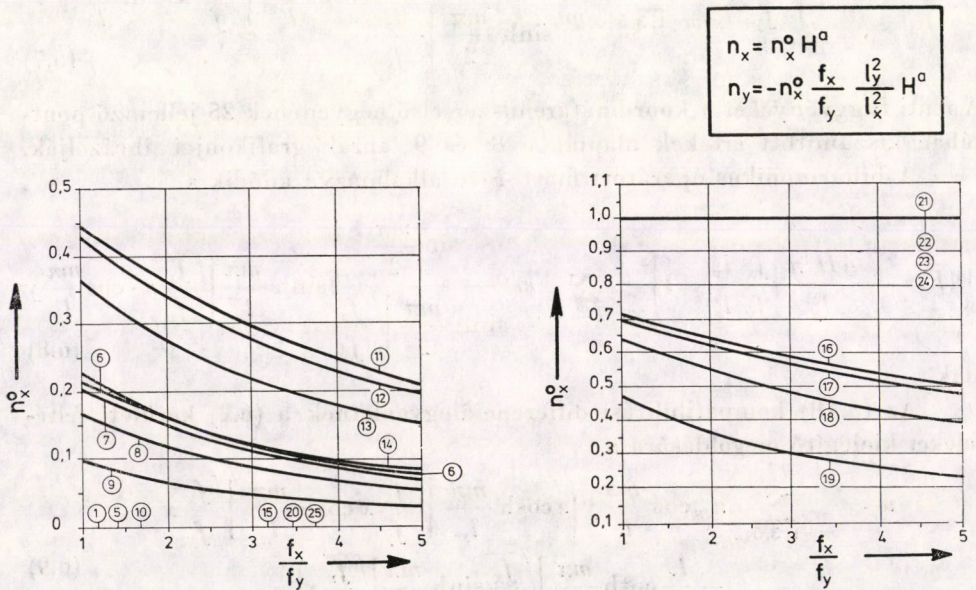
alak.

Az (5.18) kompatibilitási differenciálegyenletnek a (6.2) kerületi feltételeket kielégítő megoldására a

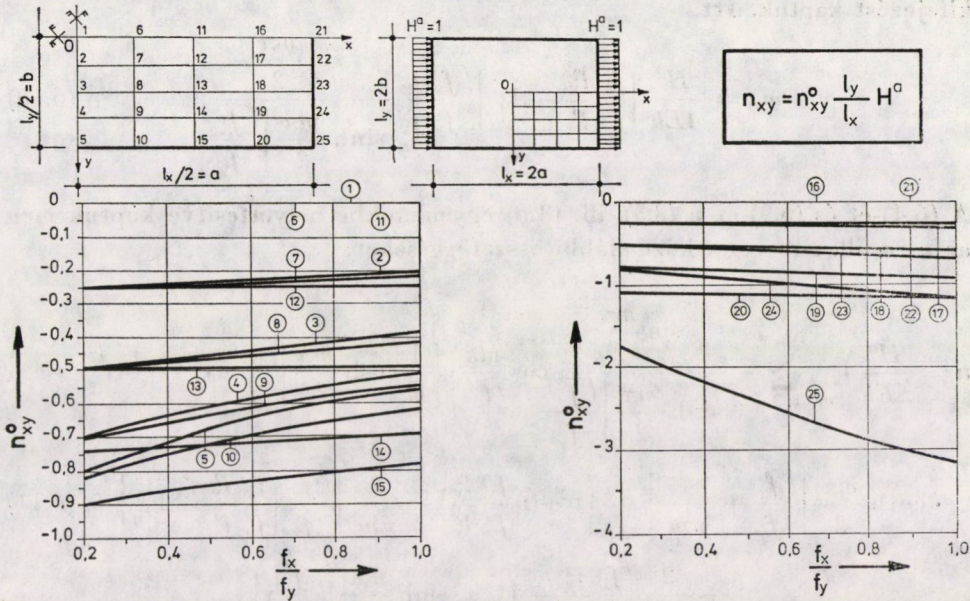
$$w = \sum_{m=1,3,5\dots} w_m \cos \frac{m\pi}{l_y} y \left(x \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x - \frac{l_x}{2} \coth \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \right) \quad (6.9)$$



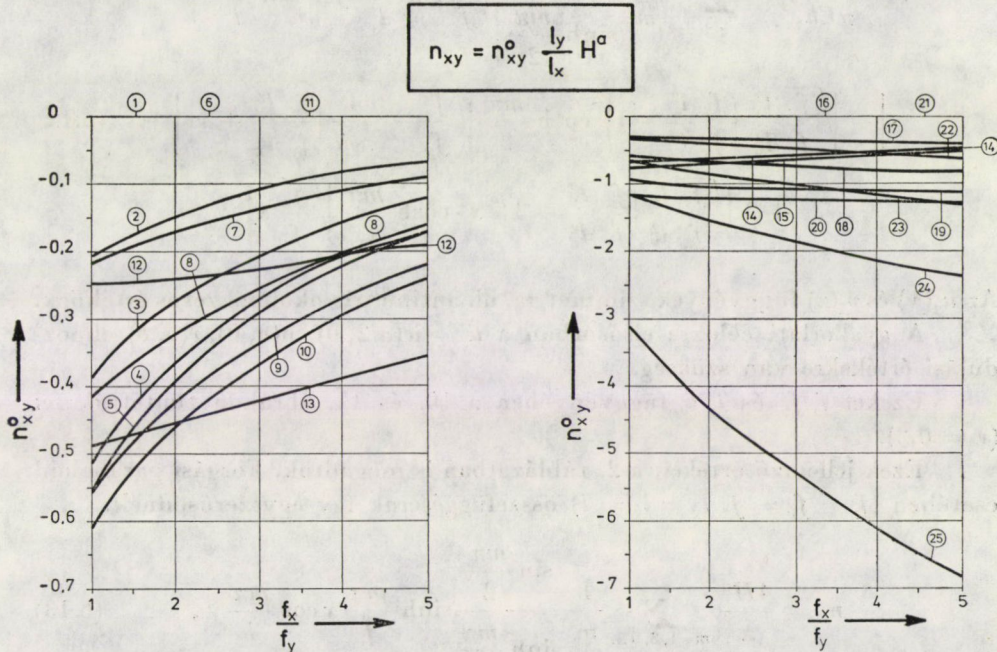
8a. ábra. Antimetrikus $H^a = 1$ peremteherből származó n_x és n_y membránérők



8b. ábra. Antimetrikus $H^a = 1$ peremteherből származó n_x és n_y membránérők



9a. ábra. Antimetrikus $H^a = 1$ peremteherből származó n_{xy} membránnyíróerő



9b. ábra. Antimetrikus $H^a = 1$ peremteherből származó n_{xy} membránnyíróerő

kifejezést kaptuk. Itt

$$w_m = \frac{H^a}{4Eh} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \frac{l_x}{f_x} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}}. \quad (6.10)$$

A (6.4)-et és (6.9)-et a (3.5), ill. (3.6) egyenletekbe helyettesítve kaptuk meg az u -ra, ill. v -re vonatkozó alábbi összefüggéseket:

$$u = \frac{H^a}{\pi Eh} l_x \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \cos \frac{m\pi}{l_y} y \left\{ \frac{1}{m} \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \left[- \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \right. \right. \\ \cdot \coth \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} + \frac{4}{\pi m} \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \left(1 + \nu \frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} \right) - \frac{2}{\pi m} \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \left. \right] + \\ \left. + \frac{2}{ml_x} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 x \cdot \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \right\}, \quad (6.11)$$

$$v = \frac{H^a}{\pi Eh} l_y \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}}} \sin \frac{m\pi}{l_y} y \left\{ \sinh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \cdot \right. \\ \cdot \left[- \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \frac{l_x^2}{l_y^2} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 \coth \frac{m\pi}{2} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} - \frac{4}{\pi m} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} + \nu \right) \right] + \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{f_y}{f_x}} \frac{l_x}{l_y} \left(\frac{f_x}{f_y} \frac{l_y^2}{l_x^2} - 1 \right)^2 x \cdot \cosh \frac{m\pi}{l_x} \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} x \right\}. \quad (6.12)$$

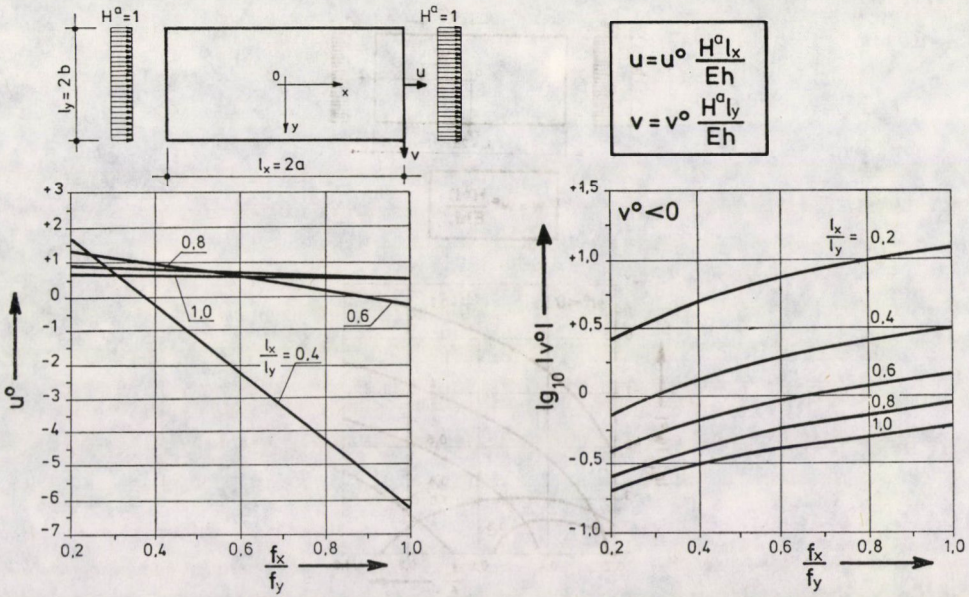
Az $u_1(y)$ és $v_1(x)$ függvények szimmetria, ill. antimetria okokból zérus értékűek.

A gyakorlati célokra elsősorban a $w = w(a/2, 0)$, $u(a, 0)$, $v(a, b)$ elmozdulási értékekre van szükség.

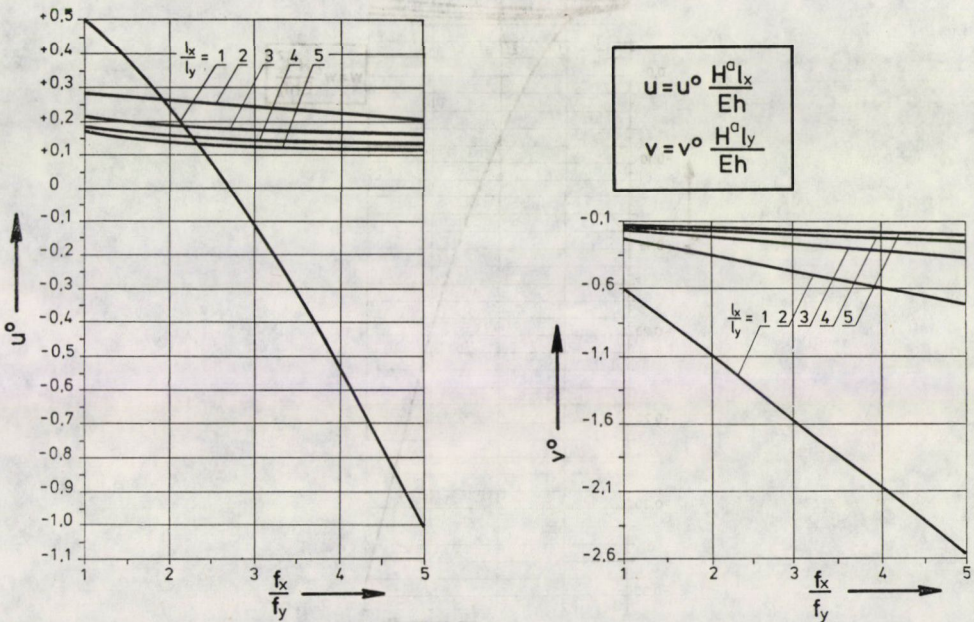
Ezeket f_x/f_y és l_x/l_y függvényében a 10. és 11. ábrákon tüntettük fel ($\nu = 0,2$).

Ezek jellemző értékeit a 2. táblázatban is megadtuk. Forgási paraboloid esetében ($f_x = f_y = f$, $l_x = l_y = l$) összefüggéseink így egyszerűsödnek:

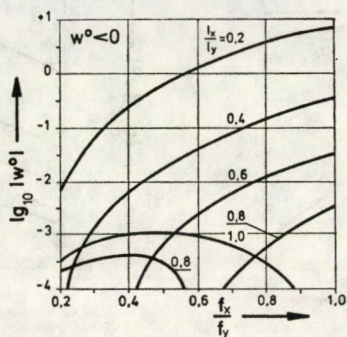
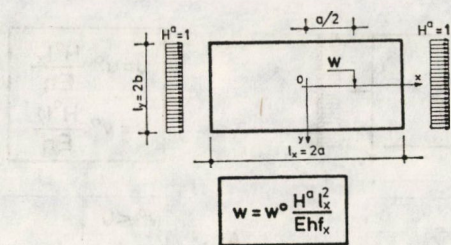
$$n_x = \frac{4H^a}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2}} \sinh \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{m\pi}{l} y, \quad (6.13)$$



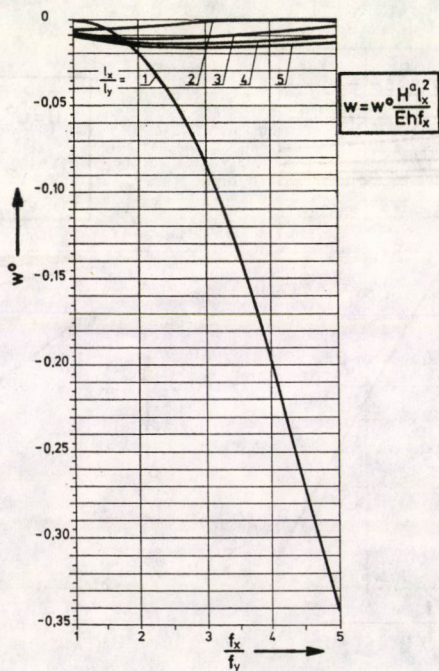
10a. ábra. Antimetrikus $H^a = 1$ peremteherből származó $u = u(a, 0)$ és $v = v(a, b)$ eltolódások ($w_{perem} = 0$)



10b. ábra. Antimetrikus $H^a = 1$ peremteherből származó $u = u(a, 0)$ és $v = v(a, b)$ eltolódások ($w_{perem} = 0$)



11a. ábra. Antimetrikus $H^\alpha = 1$ peremteherből származó $w = w(a/2, 0)$ lehajlás ($w_{perem} = 0$)



11b. ábra. Antimetrikus $H^\alpha = 1$ peremteherből származó $w = w(a/2, 0)$ lehajlás ($w_{perem} = 0$)

2a. táblázat

$\frac{f_x}{f_y}$	$\frac{l_x}{l_y}$	H^0 antimetrikus		
		$u^0 = u \frac{E}{H^0} \frac{h}{l_x}$	$v^0 = v \frac{E}{H^0} \frac{h}{l_y}$	$w^0 = w \frac{E}{H^0} \frac{hf_x}{l_x^2}$
0,2	0,2	-17,1794	-2,5690	-0,0080
	0,4	1,6929	-0,7164	-0,0000
	0,6	1,3272	-0,3733	-0,0001
	0,8	0,9142	-0,2532	-0,0002
	1,0	0,6730	-0,1976	-0,0003
0,4	0,2	-48,5493	-5,0392	-0,2229
	0,4	-0,2287	-1,3339	-0,0062
	0,6	0,9584	-0,6477	-0,0000
	0,8	0,8009	-0,4076	-0,0004
	1,0	0,6275	-0,2964	-0,0010
0,6	0,2	-80,7745	-7,5094	-1,0944
	0,4	-2,1911	-1,9515	-0,0422
	0,6	0,5850	-0,9222	-0,0025
	0,8	0,6871	-0,5620	-0,0000
	1,0	0,5818	-0,3952	-0,0009
0,8	0,2	-114,3603	-9,9796	-2,9987
	0,4	-4,2270	-2,5690	-0,1329
	0,6	0,2006	-1,1967	-0,0124
	0,8	0,5714	-0,7164	-0,0005
	1,0	0,5361	-0,4940	-0,0003
1,0	0,2	-149,6567	-12,4498	-6,1764
	0,4	-6,3604	-3,1866	-0,2956
	0,6	-0,1999	-1,4711	-0,0339
	0,8	0,4519	-0,8707	-0,0034
	1,0	0,4896	-0,5928	-0,0000

$$n_y = -n_x, \tag{6.14}$$

$$n_{xy} = -\frac{4H^a}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2}} \cosh \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y, \tag{6.15}$$

$$w = 0, \tag{6.16}$$

$$u = \frac{4H^a l}{\pi^2 E h} (1 + \nu) \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2}} \cosh \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{m\pi}{l} y, \tag{6.17}$$

$$v = -\frac{4H^a l}{\pi^2 E h} (1 + \nu) \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{1}{m} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\sinh \frac{m\pi}{2}} \sinh \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} y. \tag{6.18}$$

2b. táblázat

$\frac{f_x}{f_y}$	$\frac{l_x}{l_y}$	H^a antimetrikus		
		$u^0 = u \frac{E}{H^a} \frac{h}{l_x}$	$v^0 = v \frac{E}{H^a} \frac{h}{l_y}$	$w^0 = w \frac{E}{H^a} \frac{h f_x}{l_x^2}$
5,0	5,0	0,1191	-0,1976	-0,0137
	4,0	0,1370	-0,2532	-0,0101
	3,0	0,1682	-0,3733	-0,0042
	2,0	0,2028	-0,7164	-0,0013
	1,0	-1,0167	-2,5690	-0,3421
4,0	5,0	0,1250	-0,1779	-0,0154
	4,0	0,1420	-0,2223	-0,0122
	3,0	0,1735	-0,3184	-0,0067
	2,0	0,2238	-0,5928	0,0000
	1,0	-0,5249	-2,0750	-0,1959
3,0	5,0	0,1335	-0,1581	-0,0164
	4,0	0,1495	-0,1914	-0,0139
	3,0	0,1803	-0,2635	-0,0094
	2,0	0,2418	-0,4693	-0,0013
	1,0	-0,1089	-1,5809	-0,0845
2,0	5,0	0,1467	-0,1383	-0,0155
	4,0	0,1613	-0,1606	-0,0140
	3,0	0,1906	-0,2086	-0,0111
	2,0	0,2589	-0,3458	-0,0046
	1,0	0,2272	-1,0869	-0,0183
1,0	5,0	0,1679	-0,1186	-0,0099
	4,0	0,1810	-0,1297	-0,0094
	3,0	0,2084	-0,1537	-0,0085
	2,0	0,2799	-0,2223	-0,0060
	1,0	0,4896	-0,5928	-0,0000

7. Alkalmazás a peremtartók csavarási és oldalirányú hajlítási merevsége hatásának közelítő figyelembevételére

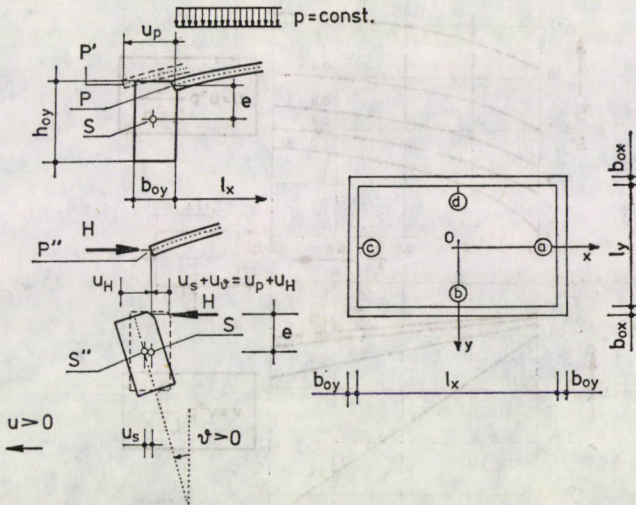
7.1. Elvi alapok

Amennyiben a peremtartók csavarási merevségei (GI_{csx} , GI_{csy}) és oldalirányú hajlítási merevségei (EI_x , EI_y) zérus értékűek lennének, akkor a peremtartók ellenállás nélkül követni tudnák a p felületi teherből származó vízszintes eltolódásokat és így az elliptikus paraboloidhéj erőjátéka a membrán-elmélet keretei között (azaz a héj hajlítási merevségét elhanyagolva) meg lenne oldva. Az irodalomban ismert számítási eljárások [1] a peremtartók saját síkbeli végtelen merevségének feltételezésén kívül ($w_{perem} = 0$) az előbb említett peremtartómerevségek elhanyagolását is magukban foglalják.

A valóságban azonban a peremtartók — véges nagyságú GI_{cs} csavarási és vízszintes síkbeli EI hajlítási merevségüknél fogva — nem tudják akadálytalanul követni a vízszintes héjeltolódásokat.

Ha feltételezzük, hogy a peremtartók saját síkjukban végbemenő hajlításra merevek (mint ahogy ez általában szokásos), akkor a membránhéj és a peremtartók közötti kompatibilitást egy vízszintes kapcsolati erőrendszer tudja biztosítani.

Minthogy az egyenletes felületi teherrel terhelt héj, valamint az egyenletes megoszlású vízszintes peremerő rendszerrel terhelt héj peremmenti alakváltozása azonos szerkezetű Fourier-sorral írható le, jó közelítéssel feltételez-



12. ábra. A héj és a peremtartó azonos vízszintes eltolódása ($w_{\text{perem}} = 0$)

hetjük, hogy a kapcsolati erőrendszer jól jellemezhető az egyenletesen megoszló átlagértékkel. Így az előző pontok eredményei felhasználásával kidolgozhatunk egy közelítő eljárást a héj peremén ébredő oldalnyomások meghatározására.

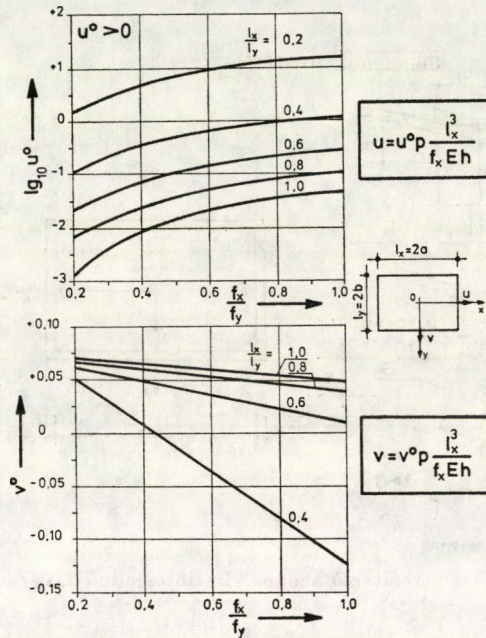
Az említett kompatibilitás kialakulását a 12. ábrán szemléltettük.

Az összeférhetőségi egyenleteket a héjperemek középső pontjaira (a, b, c, d pontok) vonatkoztatva fogjuk felírni, így a kompatibilitás teljes pontossággal csak ezekben a pontokban fog teljesülni.

Ha u_s -sel (v_s -sel) jelöljük a $H = 1$ erőrendszerrel terhelt parabola alakú ívtartó keresztmetszete S súlypontjának vízszintes eltolódását, u_p -val (v_p -val) a P csatlakozási pontnak a peremtartó elcsavarodása következtébeni eltolódását u_H -val (v_H -val) pedig a $H = 1$ erőkből származó héjeltolódásokat (a felső indexek közül az első az eltolódás helyét, a második pedig az eltolódást előidéző H erő helyét jelöli), akkor az

$$\begin{aligned}
 H_a(u_s^{aa} + u_\phi^{aa}) &= u_p^a + u_H^{aa} \cdot H_a + u_H^{ab} \cdot H_b + u_H^{ac} \cdot H_c + u_H^{ad} \cdot H_d \\
 H_b(v_s^{bb} + v_\phi^{bb}) &= v_p^b + v_H^{bb} \cdot H_b + v_H^{bc} \cdot H_c + v_H^{bd} \cdot H_d + v_H^{ba} \cdot H_a \\
 H_c(u_s^{cc} + u_\phi^{cc}) &= u_p^c + u_H^{cc} \cdot H_c + u_H^{cd} \cdot H_d + u_H^{ca} \cdot H_a + u_H^{cb} \cdot H_b \\
 H_d(v_s^{dd} + v_\phi^{dd}) &= v_p^d + v_H^{dd} \cdot H_d + v_H^{da} \cdot H_a + v_H^{db} \cdot H_b + v_H^{dc} \cdot H_c
 \end{aligned} \quad (7.1a-d)$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer írhatjuk fel.

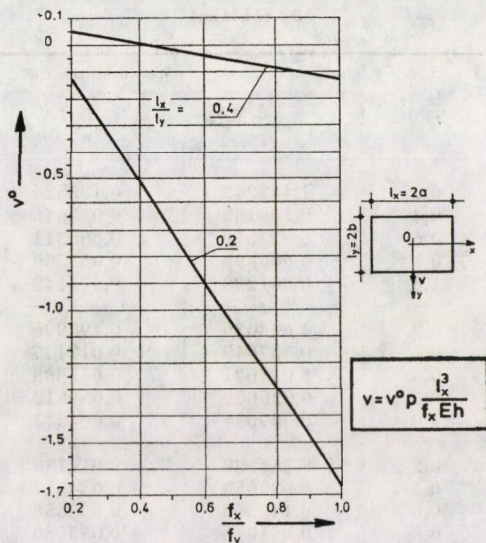


13a. ábra. Oldalnyomásmentes elliptikus paraboloidhéj $p = \text{const.}$ teherből származó $u = u(a, 0)$ és $v = v(0, b)$ peremmenti membráneltolódásai ($w_{\text{perem}} = 0$)

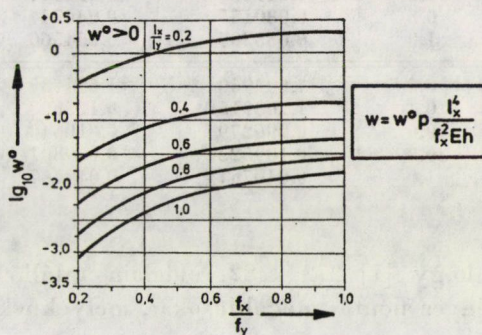
Az egyenletrendszer — az egyszerűség kedvéért — arra az esetekre vonatkozik, amikor a peremívek támaszai vízszintes síkban vagy csuklósak, vagy mereven befogottak ($u_s^{ab} = u^{ab} = 0 \dots$ stb.).

A H erők akkor pozitívak, ha a héjra nyomást gyakorolnak, az u és v egységtényezőket és a terhelési tényezőket pedig a héj peremétől kifelé mutató irányban tekintettük pozitívnak. Az egységtényezőket a tartók statikája közismert módszereivel határozhatók meg (l. 7.2 pont).

A p felületi teherből származó terhelési tényezőket számításához az [1] 264–266. oldalain található Fourier-sorokat elektronikus számítógépen kiértékeltek és az eredményt a 13a–c ábrákon grafikusán feltüntették, illetve a 3. táblázatban is megadtuk.



13b. ábra. Oldalnyomásmentes elliptikus paraboloidhéj $p = \text{const.}$ teherből származó $v = v(0, b)$ peremmenti membráneltolódásai ($w_{\text{perem}} = 0$)



13c. ábra. Oldalnyomásmentes elliptikus paraboloidhéj $p = \text{const.}$ teherből származó $w = w(0, 0)$ membránelhajlása ($w_{\text{perem}} = 0$)

Ez a számítás lényegében a következő célokat szolgálhatja. Bizonyos felületszerkezetek esetében viszonylag erős peremtartókat alakítanak ki, és ekkor már számottevő lehet a vállnyomás hatása. Számítási eljárásunk lehetőséget nyújt — a mind a négy peremén oldalnyomásmentesen megtámasztott héjat törzstartónak tekintve [1] — ezen tetszőleges számú peremén csavarásra és vízszintes síkú hajlításra merev peremtartójú, elliptikus paraboloidhéjak közelítő vizsgálatára is. A módszer alkalmazható továbbá arra az esetre is, ha az elliptikus paraboloidhéjnak más héjakkal (donga, elliptikus paraboloid) összeépíthetősége miatt gyakorlatilag elmozdulásmentes peremtartói is vannak.

3. táblázat

$\frac{f_x}{f_y}$	$\frac{l_x}{l_y}$	$p = \text{const. teherből}$		
		$u^0 = u \frac{E}{P} \frac{f_x h}{l_x^2}$	$x^0 = v \frac{E}{P} \frac{f_x h}{l_x^2}$	$w^0 = w \frac{E}{P} \frac{f_x h}{l_x^2}$
0,2	0,2	1,442842	-0,123526	0,336646
	0,4	0,106183	0,048646	0,024374
	0,6	0,023619	0,060511	0,005616
	0,8	0,006898	0,065550	0,001936
	1,0	0,001298	0,071142	0,000738
0,4	0,2	4,608036	-0,498996	0,941938
	0,4	0,337049	0,012177	0,073502
	0,6	0,077621	0,051388	0,019128
	0,8	0,026069	0,059612	0,007953
	1,0	0,009094	0,064014	0,004160
0,6	0,2	8,554988	-0,911730	1,465292
	0,4	0,622653	-0,034327	0,119870
	0,6	0,145563	0,038650	0,033219
	0,8	0,051816	0,053550	0,014887
	1,0	0,021277	0,059318	0,008508
0,8	0,2	12,931970	-1,303521	1,802736
	0,4	0,935116	-0,081634	0,154225
	0,6	0,219455	0,024547	0,044913
	0,8	0,080155	0,046744	0,021120
	1,0	0,035205	0,054560	0,012647
1,0	0,2	17,602950	-1,654735	1,939704
	0,4	1,263915	-0,125803	0,174762
	0,6	0,296279	0,010648	0,053461
	0,8	0,109523	0,039801	0,026178
	1,0	0,049767	0,049767	0,016215

Megemlítjük, hogy [1] 272–282. oldalain található olyan forgási paraboloidokra érvényes pontos megoldásokat, melyeknek tetszőleges peremtartója hajlításra és csavarásra végtelenül merev.

Általános geometriájú elliptikus paraboloidokra vonatkozóan ($l_x \neq l_y$, $f_x \neq f_y$) azonban sem véges merevséggel bíró, sem végtelenül merev peremtartók esetében nincs egzakt analitikus megoldás. A tárgyalt statikai alapfeladat legfontosabb alkalmazási területét így ezen utóbbi problémák közelítő elemzésével kapcsolatban látjuk.

Végül rá kell mutatnunk arra is, hogy a peremívek térbeli stabilitásának a vizsgálatához — még a héj szempontjából elhanyagolhatóan kismértékű vállnyomás esetén is — elengedhetetlenül szükséges a héj és a peremtartók közötti vízszintes kapcsolati erőknél az ismerete.

7.2. Számpéldák

Vizsgáljuk meg a $p = 0,3 \text{ Mp/m}^2$ terhelésű

$$l_x = l_y = l = 20 \text{ m},$$

$$f_x = f_y = f = 2,5 \text{ m},$$

$$h = 0,08 \text{ m}$$

geometriai paraméterekkel bíró elliptikus paraboloidhéjat két különböző peremmegtámasztási esetben.

7.21 Első eset

7.21 *Első eset.* A 12. ábrán vázolt héj mind a négy peremtartója legyen hajlításra és csavarásra végtelenül merev (szomszédos héjakkal való egybeépítettsége folytán). A p felületi teherből a 13. ábra, illetve a 3. táblázat alapján

$$u_p = u_p^a = v_p^b = u_p^c = v_p^d = 0,0498 \cdot \frac{20^3}{2,5 \cdot 0,08} \frac{P}{E} = 1932 \frac{P}{E} = 598 \frac{1}{E} [\text{m}]$$

kifelé irányuló eltolódás lép fel az a, b, c és d jelű pontokban. Az egyik peremen $H = H^s + H^a = 1/2 + 1/2 = 1$, a másik peremen $H = H^s + H^a = 1/2 - 1/2 = 0$ peremterhekből származó héjeltolódások (6a. és 10. ábra, illetve 1. és 2. táblázat):

$$u_H^{aa} = v_H^{bb} = \frac{1}{2} \frac{20}{E0,08} (-0,4054 - 0,4896) = -112 \frac{1}{E} [\text{m}],$$

$$u_H^{ab} = u_H^{ad} = v_H^{bc} = v_H^{bd} = \frac{1}{2} \cdot 0,1948 \frac{20}{E0,08} = +24,35 \frac{1}{E} [\text{m}],$$

$$u_H^{ac} = v_H^{bd} = \frac{1}{2} \frac{20}{E0,08} (-0,4054 + 0,4896) = +10,53 \frac{1}{E} [\text{m}].$$

A kompatibilitási egyenlet:

$$H(-112 + 2 \cdot 24,35 + 10,53) + 598 = 0$$

$$H = \frac{598}{193 \cdot 11} = 3,1 [\text{Mp/m}].$$

Az egzakt megoldás szerint ([1] 287. o.):

$$H = \frac{0,3}{2} \frac{20^2}{8 \cdot 2,5} = 3 [\text{Mp/m}]$$

vállnyomás adódik, tehát eljárásunk ez esetben mintegy 3%-os hibával közelít.

7.22 *Második eset.* Legyen a héj az a és c jelű oldalak mentén végtelenül merev peremtartókkal, a b és d jelű oldalak mentén pedig oldalirányban lágú peremtartókkal megtámasztva. A $b_0 = 0,25$ [m], $h_0 = 0,50$ [m] geometriai adatokkal bíró ívek hajlótási merevsége:

$$EI = 0,5 \frac{0,25^3}{12} E = 6,51 \cdot 10^{-4} E [\text{Mpm}^2],$$

csavarási merevsége:

$$GI_{cs} = 0,23 \cdot 0,5 \cdot 0,25^3 \frac{E}{2(1 + 0,2)} = 7,49 \cdot 10^{-4} E [\text{Mpm}^2].$$

A peremívek középkeresztmetszeteinek a héjhoz való csatlakozási pontja a hajlítási és csavarási hatásból

$$u_s + u_\varphi = (640\,000 + 4170) \frac{1}{E} [\text{m}] = 644\,170 \frac{1}{E} [\text{m}]$$

mértékben tolódik el az egyenletesen megoszló $H = 1$ vízszintes terhelés következtében.

$$v_s + v_\varphi = 0.$$

A kétszeres szimmetria miatt

$$H_a = H_c,$$

$$H_b = H_d.$$

A kompatibilitási egyenletrendszer:

$$H_a 644\,170 = 598 + H_a(-112 + 10,53) + H_b \cdot 24,35 \cdot 2,$$

$$0 = 598 + H_b(-112 + 10,53) + H_a 24,35 \cdot 2,$$

$$H_a 644\,271 - H_b 48,70 = 598,$$

$$-H_a 48,70 + H_b 101,47 = 598.$$

A megoldás:

$$H_a = 0,0014 [\text{Mp/m}],$$

$$H_b = 5,893 [\text{Mp/m}].$$

Ezek szerint majdnem a teljes terhelés a merev peremek irányában boltozódik át.

IRODALOM

1. BELEŞ, A. A.—SOARE, M. V.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen Akademie-Verlag, Bukarest, 1970
2. BÖLCSKEI, E.: Membránhéjak alakváltozása. *Magyar Éptudóipar* (1953) 9
3. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973
4. GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. Dissertation. Stanford University, Stanford, Calif. 1953
5. ТИХОНОВ, А. N.—СЗАМСАРСКИИ, А. А.: A matematikai fizika differenciálegyenletei. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956

Membrane Forces and Membrane Deflections of Flat Elliptic Paraboloid Shells Subjected to Uniformly Distributed Horizontal Load at the Edges. An analytic method of solution of the membrane stress pattern and membrane deflections of flat elliptic paraboloid shells subjected to uniformly distributed horizontal edge load is presented. The functions describing the effects of the symmetrical and antisymmetrical system of forces acting on the edges have been worked out also in graphic form in order to make easier the calculation by hand. It has been pointed out that by making use of this basic static problem, in the framework of the membrane theory also the internal forces and deflections of the elliptic paraboloid shells supported by edge beams having non negligible flexural and torsional stiffnesses in the horizontal plane can be analysed in an approximate way.

Membrankräfte und Membranformänderungen von flachen elliptischen Paraboloidschalen mit gleichförmig verteilter horizontaler Randbelastung. Behandelt wird die analytische Ermittlung des Membranspannungszustandes und der Membranformänderungen der durch ein gleichmäßig verteiltes horizontales Randkraftsystem belasteten flachen elliptischen Paraboloidschale. Die durch symmetrisch bzw., antimetrisch angeordnete, auf den einander gegenüberliegenden Rändern wirkende Kraftsysteme hervorgerufenen Effekte beschreibenden Funktionen wurden auch zur Erleichterung der Handrechnung in graphischer Form ausgearbeitet. Es wurde hingewiesen, daß durch Anwendung dieses statischen Grundproblems, im Rahmen der Membrantheorie auch die Schnittkräfte und Formänderungen solcher elliptischen Paraboloidschalen annäherungsweise untersucht werden können, die durch Randträger gestützt sind, welche in der horizontalen Richtung nicht vernachlässigbare Biege-, bzw. Drillsteifigkeit besitzen.