AUTOMATIZÁLT TERVEZÉS INTEGER PROGRAMOZÁSSAL

GRÓSZ MIKLÓS*

[Beérkezett 1976. november 9-én]

Jelen dolgozatunkban általános formában megfogalmazzuk a statikai műszaki tervezés automatizálásának egy lehetséges modelljét. A tervezési feladatot úgy értelmezzük, hogy keressük az adott elemkészletből előállítható, adott geometriájú szerkezet olyan tervét, amelyben szereplő elemekre teljesüljenek az egyensúlyi, kompatibilitási és korlátozó feltételek, továbbá valamilyen szempontból (súly, költség, vagy ezek aránya) a szerkezet optimális legyen. Az így megfogalmazott problémára felírjuk a matematikai modellt a korlátozó feltételek linearitása esetén, majd kiterjesztjük azt a nemlineáris esetre is. Mindkét esetben visszavezetjük a problémákat „0—1" egészértékű programozási feladatra, amelynek megoldására a leszámlálási módszert hatékonyan lehet alkalmazni. A leszámlálási módszer használatához egy nagyméretű mátrix invertálására lenne szükség minden lépésben. Ennek elkerülése céljából bemutatunk egy eljárást a feladat megoldására.

1. Bevezetés

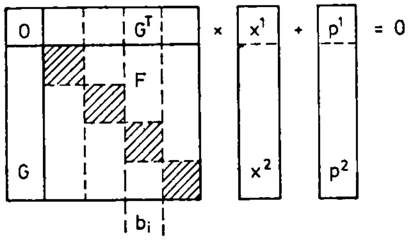
Jelen dolgozatunkban az előregyártott elemekből (rendszerkomponensekből) megvalósított statikai műszaki tervezés automatizálásával foglalkozunk. A bemutatott eljárás értelemszerű változtatások után más műszaki tervezési folyamat automatizálására is felhasználható. A statikai műszaki tervezés automatizálásán egy adott geometriájú statikailag határozatlan szerkezet tervezését értjük, amelyet az iparosított építésmódnak megfelelően bizonyos műszaki és gazdasági feltételeket kielégítő optimális elemösszeválogatás révén érünk el.

E dolgozatban az egyensúlyi és kompatibilitási feltételek kivételével nem foglalkozunk egyéb korlátozó feltételek (szilárdsági, alakváltozási) konkrét felírásával, hanem ezeket adottaknak tekintjük. Külön kitérünk azonban arra az esetre, amelyben e feltételek lineárisak, és arra, amelyben a feltételek nemlineáris vektor-függvény alakjában írhatók fel.

2. A feladat műszaki megfogalmazása

Írjuk fel egy diszkrét elemekből álló szerkezet elsőrendű elmélet szerinti egyensúlyi és kompatibilitási egyenleteit:

* Grósz Miklós 1025 Budapest, Csalit u. 9.



A műszaki tartalom és jelölés ismertetése nélkül csupán azt jegyezzük meg, hogy **G** csak a szerkezet geometriájától függ, **F** pedig az alkalmazott elemek hajlékonysági mátrixait tartalmazza. $\mathbf{x}^1$ és $\mathbf{x}^2$ az ismeretlen alakváltozást és megfelelően az ismeretlen belső erőket jelenti, $\mathbf{p}^1$ a csomóponti, $\mathbf{p}^2$ pedig a kinematikai terhek vektora.

Az (1) egyenletben szereplő $\mathbf{b}_i$-vel jelölt hipervektor egy szerkezeti elemet reprezentál. Az egyszerűség kedvéért, de az általánosság megszorítása nélkül vizsgáljuk csak azt, hogy kizárólag az i-edik elem cserélhető. Az egy-egy szerkezeti elemhez tartozó $\mathbf{b}_i$ hipervektorok csak az $\mathbf{F}_i$ hajlékonysági mátrixban különböznek egymástól. Az i-edik helyre alkalmas elemek közül egynek a „betervezése" azt jelenti, hogy a mátrixban a $\mathbf{b}_i$ helyére a betervezendő elem $\mathbf{b}_i'$ hipervektorát helyezzük. Adott geometriájú szerkezet tervezése tehát egyenértékű azzal, hogy beválasztjuk a bázisba azokat a hipervektorokat, amelyek valamilyen szempontból optimálisak.

Most tekintsük azokat a korlátozó feltételeket, amelyek előfordulhatnak egy előregyártott elemekből történő tervezés során. Olyan feltételeket alkalmazunk, amelyek nem írnak le állapotváltozást, s ezért az állapotváltozás leírásától független önkényes nem fizikai jellegű korlátozásoknak tekinthetők. A feltételek tartalmát konstrukciós műszaki szempontok szolgáltatják.

Ezeknek a korlátozó feltételeknek a jobboldalán olyan mennyiségek szerepelnek, amelyek alapján azt döntjük el, hogy bizonyos vektorokat mely vektorokkal helyettesítsük a bázisban.

A korlátozó feltételekre nézve két eset lehetséges:

— a korlátozó feltételek egy lineáris egyenlőtlenség rendszer formájában írhatók fel: $\mathbf{Bx} < \mathrm{S}$,
— a korlátozó feltételek egy nemlináris egyenlőtlenség rendszer formájában írhatók fel: $\mathrm{D}(\mathbf{x}) < \mathrm{S}$.

A továbbiakban a fenti két esettel külön foglalkozunk.

A korlátozó feltételek között előfordulhatnak olyan feltételek is, amelyek azt biztosítják, hogy bizonyos helyekre csak egymással azonos elemtípus kerüljön.

3. A feladat matematikai modellje lineáris korlátozó feltételek esetén

Adva van egy lineáris egyenlőség és lineáris egyenlőtlenség rendszer:

$$\mathbf{A}(\mathbf{b})\mathbf{x} + \mathbf{p} = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x} < S(\mathbf{b}), \tag{3}$$

ahol az $\mathbf{A}$ mátrix az (1) egyenletben feltüntetett alakú és nemszinguláris,

$\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1^{j_1}, b_2^{j_2}, \ldots, b_n^{j_n})$ — az $\mathbf{A}$ mátrix aktuális bázisa

$S(\mathbf{b})$ — a $\mathbf{b}$ bázistól függő adott vektor-függvény.

Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik hipervektor helyére a bázisba beválasztható elemek egy E_i halmazt alkotnak:

$$E_i = \{\mathbf{b}_i^j\}\, i \in J, \quad j = 1, 2, \ldots, j^*(i),$$

ahol J az elemek halmaza, $j^*(i)$ az i-edik elem helyén alkalmazható elemtípusok száma. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixban $\mathbf{b}_i^j \to b_i^{j'}$ (b_i^j és $\mathbf{b}_i^{j'} \in E_i$) báziscserére kerül sor, akkor megfelelően megváltoznak az S vektor komponensei.

(2)—(3) rendszernek egyidejűleg több $\mathbf{p}$ vektorra nézve kell teljesülni. A $\mathbf{p}$ vektorokat egy $\mathbf{P}$ mátrixba összefoglalva a (2)—(3) rendszer a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{A}(\mathbf{b})\mathbf{X} + \mathbf{P} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{X} < \mathbf{S}(\mathbf{b}), \tag{5}$$

ahol $\mathbf{X}$, $\mathbf{P}$ és $\mathbf{S}(\mathbf{b})$ mátrixoknak egyforma oszlopszámuk van. A $\mathbf{b}_i^j \to \mathbf{b}_i^{j'}$ báziscsere esetén az $\mathbf{S}(\mathbf{b})$ mátrix bizonyos sorai megfelelően változnak. Az $\mathbf{S}(\mathbf{b})$ mátrix egyforma oszlopokból áll, mivel az egyenlőtlenségnek egyidejűleg minden $\mathbf{p}$ esetén teljesülni kell.

A továbbiakban a (4)—(5) feltétel rendszert szeretnénk egy egyenlőtlenség rendszerrel helyettesíteni, amelyben már az $\mathbf{X}$ mátrix nem szerepel, mivel nem az erők és elmozdulások konkrét nagysága érdekel, hanem hogy teljesülnek-e ezekre nézve a feltételek vagy sem.

Vezessünk be egy olyan $\mathbf{Y}$ mátrixot, amelyre nézve teljesül:

$$\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{S}. \tag{6}$$

Mivel $\mathbf{A}$ mátrix nemszinguláris, ezért a (4) egyenletrendszernek mindig létezik egyértelmű megoldása:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}.$$

Behelyettesítve ezt a (6)-ba, fejezzük ki az $\mathbf{Y}$ mátrixot:

$$-\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{Y} = \mathbf{S},$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{S}.$$

1. tétel: Ha $\mathbf{A}$ nemszinguláris, akkor a (4)—(5) rendszernek akkor és csakis akkor létezik megoldása, ha $\mathbf{Y} > 0$.

Szükségesség bizonyítása. Tegyük fel, hogy (4)—(5)-nek létezik megoldása, vagyis

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P} \text{ és } \mathbf{BX} < \mathbf{S},$$

$$-\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{P} < \mathbf{S},$$

$$\mathbf{S} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{P} > 0, \text{ vagyis } \mathbf{Y} > 0.$$

Elégségesség bizonyítása. Tegyük fel, hogy $\mathbf{Y} > 0$, vagyis

$$-\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{P} < \mathbf{S}.$$

Mivel $\mathbf{A}$ nemszinguláris, ezért

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P} \text{ és } \mathbf{BX} < \mathbf{S}.$$

Ezzel bebizonyítottuk az elégségesség feltételét!

A tétel alapján a (4)—(5) rendszer helyettesíthető a következő feltétellel:

$$\mathbf{B}[\mathbf{A}(\mathbf{b})]^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{S}(\mathbf{b}) > 0.$$

Vezessünk be egy $\boldsymbol{\delta}$ vektort

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1^1, \delta_1^2, \ldots, \delta_1^{j^*(1)}, \delta_2^1, \ldots, \delta_2^{j^*(2)}, \ldots, \delta_n^{j^*(n)}),$$

ahol

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mathbf{b}_i^j \text{ hipervektor nem tartozik a bázishoz,} \\ 1, & \text{ha } \mathbf{b}_i^j \text{ hipervektor hozzátartozik a bázishoz.} \end{cases}$$

Ezek után a probléma a következő modell alakjában írható fel:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{j^*(i)} c_i^j \cdot \delta_i^j \to \min, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{j^*(i)} \delta_i^j = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{j^*(i)} (\delta_{i_1}^j - \delta_{i_2}^j) = 0 \quad i_1, i_2 \in H_S, \quad S = 1, 2, \ldots, S^*, \tag{9}$$

$$\mathbf{B}[\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta})]^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\delta}) > 0, \tag{10}$$

c_i^j = az i-edik elem j-ik típusának a súlya, költsége, vagy a kettőnek az aránya,

m = a $\mathbf{G}$ mátrix oszlopainak száma,

$j^*(i)$ = az i-ik elem típusainak száma, ill. E_i halmaz elemeinek száma,

H_S = az előírt azonosnak választandó elemek indexhalmaza,

S^* = a H_S halmazok száma.

A (8) feltétel azt fejezi ki, hogy minden szerkezeti elem helyén egyidejűleg csak egy elemtípus szerepelhet.

A (9) feltétel pedig azt jelenti, hogy a H_S halmazhoz tartozó helyeken csak egyforma elemtípus szerepelhet.

Minden E_i halmazba beveszünk 2 fiktív elemet: egy nagyon „gyenge" és egy nagyon „erős" elemtípust. Ha az első típus bekerül a megoldásba, az azt jelenti, hogy az i-edik helyen nincs szükség elemre. A másikra azért van szükség, hogy mindig létezzen legalább egy lehetséges megoldása.

A fiktív elemekhez tartozó c_i^j értéket a „legerősebb" valós elem c_i^j értéke alapján becsléssel kell felvenni (pl.: a legdrágább elemnek a százszorosa). Ha a nagyon „erős" elemtípus kerül be az optimális megoldásba, akkor az azt jelenti, hogy a megfelelő elemtípusokat ki kell bővíteni.

A 2. pontban körülírt feladatot ezzel sikerült visszavezetni „0—1" egészértékű programozási feladatra, amelynek a megoldására az irodalomból ismert módszerek vannak [4, 5]. Esetünkben a leszámlálási módszerek (implicit enumeration method) látszanak hatékonyaknak, mivel felépítésük független attól, hogy a feltételek lineárisak vagy nemlineárisak-e, és véges számú lépésben szolgálják az optimális megoldást. A leszámlálási módszer használata során minden lépésben vizsgálnunk kell a feltételek teljesülését a megfelelő $\boldsymbol{\delta}$ vektorra nézve. Ehhez állandóan invertálni kellene egy nagyméretű $\mathbf{A}$ mátrixot. A következő fejezetben bemutatunk egy olyan eljárást az $\mathbf{Y}$ mátrix elemeinek számítására, melyben elkerüljük ezt a számításigényes műveletet, és a számításhoz elegendő az elemtípusok hajlékonysági és merevségi mátrixainak ismerete.

4. A feladat megoldását szolgáló eljárás

4.1 Y *mátrix számítása báziscsere esetén, lineáris feltételek mellett*

Állítsuk elő az $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ mátrix inverzét, négy blokkra való particionálása segítségével [1]:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1} & (\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1} & \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Tekintsük a mind a négy blokkban szereplő $\mathbf{M} = (\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1}$ mátrixot. Tetszőleges báziscsere esetén változik az $\mathbf{F}$ mátrix, ezért $\mathbf{M}$ mátrix létrehozásához minden egyes báziscsere esetén nagyméretű mátrix invertálása szükséges. Ha sikerül a $\mathbf{M}$ mátrixot olyan formában előállítani, amely $\mathbf{F}$ inverzét nem tartalmazza, akkor a számításnak ezt a döntő nehézségét elhárítottuk.

2. tétel: Ha a $\mathbf{G}$ mátrix rangja egyenlő az oszlopai számával és $\mathbf{F}$ nem szinguláris mátrix, akkor

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1} = \mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^+)^T\,^*,$$

ahol $\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T$ — a $\mathbf{G}$ mátrix általánosított inverze.

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{F}$ nemszinguláris, $\varrho(\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}) = \varrho(\mathbf{G}^T) = \varrho(\mathrm{G}) = m$.** Tehát felhasználhatjuk a következő tételt [2]:

Ha $\mathbf{A}$ $n\times m$ és $\mathbf{B}$ $m\times k$ mátrixok, és

$$\varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{B}) = m, \text{ akkor}$$

$$(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+.$$

Eszerint, ha $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}$ és $\mathbf{B} = \mathbf{G}$, akkor teljesül

$$(\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G})^{-1} = \mathbf{G}^+(\mathrm{G}^T\mathbf{F}^{-1})^+. \tag{11}$$

Most használjuk fel a következő tételt [2]:

$(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+$ akkor és csakis akkor, ha

$$\mathbf{A}^+\mathbf{ABB}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BB}^T\mathbf{A}^T \text{ és} \tag{12}$$

$$\mathbf{BB}^+\mathbf{A}^T\mathbf{AB} = \mathbf{A}^T\mathbf{AB}. \tag{13}$$

A mi esetünkben legyen $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T$ és $\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1}$. Ellenőrizzük a (12) feltétel teljesülését:

$$(\mathbf{G}^T)^+\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G}. \tag{14}$$

Mivel $\mathbf{G}$ oszlopai lineárisan függetlenek, ezért [2]

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T \text{ és } (\mathbf{G}^+)^T = [(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T]^T = \mathbf{G}[(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}]^T = \\ = \mathbf{G}[(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^T]^{-1} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T\cdot\mathbf{G})^{-1}.\end{aligned} \tag{15}$$

Behelyettesítve (15)-t (14)-be, kapjuk:

$$\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\cdot\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G}.$$

* A $+$-jel általánosított Moore—Penrose-inverzet jelent.
** ϱ-val a mátrix rangját jelöljük.

Ha megszorozzuk balról ezt az egyenletet $\mathbf{G}^T$ mátrixszal:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1} \cdot \mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G} = \mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G},$$

majd egyszerűsítünk,

$$\mathbf{G}^T\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G} = \mathbf{G}^T(\mathbf{F}^{-1})\,(\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{G}$$

triviális egyenletet kapunk.

Ezzel bebizonyítottuk a (12) feltétel teljesülését.

A (13) feltétel triviálisan teljesül, mivel

$$(\mathbf{F}^{-1})\,(\mathbf{F}^{-1})^+ = \mathbf{E}.$$

Ezek után a (11) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^T)^+.$$

Figyelembe véve, hogy $(\mathbf{G}^T)^+ = (\mathbf{G}^+)^T$, a tételt bebizonyítottuk.

A 2. tétel alapján az $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ mátrix inverze tetszőleges báziscsere esetén kiszámítható, egyetlen $(\mathbf{G}^T\mathbf{G})$ mátrix inverz számítása segítségével, mivel a $\mathbf{F}^{-1}$ merevségi mátrix képletekből számítható és $\mathbf{G}^+$ konstans mátrix.

$$[\mathbf{A}(\mathbf{b})]^{-1} = \begin{vmatrix} -\mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^+)^T & \mathbf{G}^+\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^+)^T & \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{F}\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{F}^{-1} \end{vmatrix},$$

mivel

$$(\mathbf{G}^+)^T \cdot \mathbf{G}^T = [(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^{-1} \cdot \mathbf{G}^T]^T \cdot \mathbf{G}^T = \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G})^{-1} \cdot \mathbf{G}^T = \mathbf{G}\mathbf{G}^+.$$

További célunk olyan algoritmus előállítása, amely az $\mathbf{Y}$ mátrix elemeit fölösleges hipermátrix szorzások kikerülésével, a lehető legtakarékosabban állítja elő.

$\mathbf{A}$ mátrixnak megfelelően particionáljuk a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1\mathbf{B}^2] \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{B}^1$ $r \times m$, $\mathbf{B}^2$ $r \times n$ és $\mathbf{P}^1$ $m \times k$, $\mathbf{P}^2$ $n \times k$ méretű mátrixok.

$\mathbf{P}^2$ mátrix a kinematikai terheket reprezentálja. A további tárgyalásunkban az egyszerűség kedvéért ezeket figyelmen kívül hagyjuk, vagyis $\mathbf{P}^2 = 0$.

Az $\mathbf{Y}$ mátrixot blokkokra bontott formában így írhatjuk fel:

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{B}^1\mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^T)^+\mathbf{P}^1 + \mathbf{B}^2\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^T)^+\mathbf{P}^1 + \mathbf{S}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{B}^1\mathbf{G}^+ = \mathbf{C}^1\ (\mathbf{G}_T)^+\mathbf{P}^1 = \mathbf{C}^2,\ \mathbf{G}\mathbf{G}^+ = \mathbf{C}^3.$$

$\mathbf{F}$ egy hiperdiagonális mátrix, ezért az inverze is hiperdiagonális. Particionáljuk a $\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3$, $\mathbf{B}^2$ és $\mathbf{S}$ mátrixokat az $\mathbf{F}_l$ blokkoknak megfelelően. Az $\mathbf{Y}$ mátrix egy tetszőleges (l, t) eleme ebben az esetben így írható fel:

$$Y_{l,t} = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} (-\mathbf{C}^1_{l,i} \cdot \mathbf{F}_{ij} \mathbf{C}^2_{jt} + \sum_{k \in J} \sum_{m \in J} \mathbf{B}^2_{l,i} \mathbf{F}^{-1}_{i,j} \cdot \mathbf{C}^3_{j,k} \cdot \mathbf{F}_{k,m} \mathbf{C}^2_{m,t}) + S_{l,t}.$$

Mivel $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}^{-1}_{ij} = 0$, ha $i \neq j$, ezért

$$Y_{lt} = \sum_{i \in J} -\mathbf{C}^1_{l,i} \mathbf{F}_{ii} \mathbf{C}^2_{it} + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \mathbf{B}^2_{l,i} \mathbf{F}^{-1}_{ii} \cdot \mathbf{C}^3_{i} \mathbf{F}_{jj} \cdot \mathbf{C}^2_{j,t} + \mathbf{S}_{l,t}. \tag{16}$$

Kitűzött problémánk megoldására a (16) képlet jobb oldalát kellene sorozatosan kiszámítani. A számítás ésszerű lebonyolítása érdekében vizsgáljuk meg, hogy az $\mathbf{Y}$ mátrix egy tetszőleges (l, t) eleme a báziscsere során hogyan változik.

Tegyük fel, hogy néhány hipervektor helyén báziscserét hajtunk végre. A cserehelyek indexei J^* halmazt alkotnak. Legyen $J' = J/J^*$, vagyis azon hipervektorok indexhalmaza, ahol nem történik báziscsere. A

$$\hat{Y}_{l,t} = (\hat{Y}_{l,t} - Y_{l,t}) + Y_{l,t}$$

triviális bővítéssel végezve és a (16) alapján az $Y_{l,t}$ értékét behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{l,t} = & -\sum_{i \in J} \mathbf{C}^1_{l,i} (\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii}) \mathbf{C}^2_{it} + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} (\mathbf{B}^2_{l,i} \hat{\mathbf{F}}^{-1}_{ii} \mathbf{C}^3_{ij} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{jj} \cdot \mathbf{C}^2_{j,t} - \\ & - \mathbf{B}^2_{l,i} \mathbf{F}^{-1}_{ii} \mathbf{C}^3_{i,j} \mathbf{F}_{jj} \cdot \mathbf{C}^2_{j,t}) + \hat{\mathbf{S}}_{l,t} - \mathbf{S}_{l,t} + Y_{l,t}. \end{aligned} \tag{17}$$

Alakítsuk át az első összeget:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \mathbf{C}^1_{l,i} (\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii}) \mathbf{C}^2_{it} = & \sum_{i \in J^*} \mathbf{C}^1_{l,i} (\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii}) \mathbf{C}^2_{i,t} + \\ + \sum_{i \in J'} \mathbf{C}^1_{l,i} (\mathbf{F}_{ii} - \mathbf{F}_{ii}) \mathbf{C}^2_{i,i} = & \sum_{i \in J^*} \mathbf{C}^1_{l,i} (\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii}) \mathbf{C}^2_{i,t}. \end{aligned} \tag{18}$$

Most alakítsuk át a (17) második összegét:

$$\sum_{i \in J} \sum_{j \in J} = \sum_{i \in J^*} \sum_{j \in J} + \sum_{i \in J'} \sum_{j \in J} = \sum_{i \in J^*} \sum_{j \in J'} + \sum_{i \in J^*} \sum_{j \in J^*} + \sum_{i \in J'} \sum_{j \in J'} + \sum_{i \in J'} \sum_{j \in J^*}.$$

A J' halmaz értelmezése szerint

$$\sum_{i \in J'} \sum_{j \in J'} = 0.$$

A (17) ezek után a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{l,t} = &- \sum_{i\in J^*} \mathbf{C}^1_{l,i}(\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii})\mathbf{C}^2_{it} + \sum_{i\in J^*}\sum_{j\in J'} \mathbf{B}^2_{l,i}(\hat{\mathbf{F}}^{-1}_{ii} - \mathbf{F}_{ii})\mathbf{C}^3_{i,j}\mathbf{F}_{jj}\mathbf{C}^2_{j,t} + \\ &+ \sum_{i\in J'}\sum_{j\in J^*} \mathbf{B}^2_{l,i}\mathbf{F}^{-1}_{ii}\mathbf{C}^3_{i,j}(\hat{\mathbf{F}}_{jj} - \mathbf{F}_{jj})\mathbf{C}^2_{j,t} + \\ &+ \sum_{i\in J^*}\sum_{j\in J^*} \mathbf{B}^2_{l,i}(\hat{\mathbf{F}}^{-1}_{ii}\mathbf{C}^3_{i,j}\hat{\mathbf{F}}_{j,j} - \mathbf{F}^{-1}_{ii}\mathbf{C}^3_{ij}\mathbf{F}_{jj})\mathbf{C}^2_{j,t} + \hat{S}_{l,t} - S_{l,t} + Y_{l,t}.\end{aligned} \tag{19}$$

Látható hogy $\mathbf{Y}$ mátrix tetszőleges eleme számítható invertálás nélkül.

4.2 *Nemlináris feltételek esete*

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a korlátozó feltételek egy nemlineáris vektor-függvény és lineáris egyenlet rendszer alakjában adhatók meg:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}(\delta)\mathbf{X} + \mathbf{P} &= 0 \\ \mathbf{D}(\mathbf{X}) &< \mathbf{S}(\delta)\end{aligned}\right\}.$$

Ennek az algoritmusnak részletes kifejtéséről eltekintünk, helyette közöljük az eljárás lényeges pontjait.

A 2. tétel alapján és figyelembe véve, hogy $\mathbf{P}^2 = 0$, és $\mathbf{A}$ mátrix nemszinguláris, felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\delta)\mathbf{P}; \qquad \begin{bmatrix}\mathbf{X}^1\\ \mathbf{X}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^+)^T\mathbf{P}^1\\ \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{G}^+\mathbf{F}(\mathbf{G}^+)^T\mathbf{P}^1\end{bmatrix}.$$

Ha a $\mathbf{G}^+$, $\mathbf{G}\mathbf{G}^+$ és $(\mathbf{G}^+)^T\mathbf{P}^1$ mátrixokat az $\mathbf{F}$ mátrix blokkjainak megfelelően particionáljuk, akkor az $\mathbf{X}$ mátrix blokkjai így írhatók:

$$\mathbf{X}^1_{l,t} = \sum_{i\in J} \mathbf{G}^+_{l,i}\mathbf{F}_{ii}\mathbf{C}^1_{it}\ (l = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\mathbf{X}^2_{s,t} = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{F}^{-1}_{ss}\mathbf{G}_s\mathbf{X}^1_{l,t} = - \sum_{i\in J} \mathbf{F}^{-1}_{ss}\mathbf{C}^2_{si}\cdot\mathbf{F}_{ii}\cdot\mathbf{C}^1_{it}\ (s = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol $\mathbf{C}^1 = (\mathbf{G}^+)^T\mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}^2 = \mathbf{G}\mathbf{G}^+$.

E formákból kiindulva (19) általánosítása képpen az $\mathbf{X}$ mátrix tetszőleges blokkjainak a báziscsere utáni formáját a következőképpen adhatjuk meg:

$$\hat{\mathbf{X}}^1_{l,t} = \sum_{i\in J^*} \mathbf{G}^+_{l,i}(\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii})\mathbf{C}^1_{it} + \mathbf{X}^1_{l,t},$$

$$\hat{\mathbf{X}}^2_{s,t} = - \sum_{i\in J^*} \mathbf{F}^{-1}_{ss}\mathbf{C}^2_{si}(\hat{\mathbf{F}}_{ii} - \mathbf{F}_{ii})\mathbf{C}^1_{it} + \mathbf{X}^2_{st'},\ \text{ha}\ \mathbf{S}\notin J^*.$$

$$\hat{\mathbf{X}}^2_{s,t} = - \sum_{i\in J^*} (\hat{\mathbf{F}}^{-1}_{ss}\mathbf{C}^2_{si}\hat{\mathbf{F}}_{ii}\mathbf{C}^1_{it} - \mathbf{F}^{-1}_{s,s}\mathbf{C}^2_{si}\mathbf{F}_{ii})\mathbf{C}^1_{it} + \mathbf{X}^2_{s,t},$$

$$\text{ha}\ \mathbf{S}\in J^*.$$

Tehát nemlineáris esetben a feladat lineáris modelljében levő (10) feltétel helyett a következőt kell szerepeltetni:

$$\mathbf{S}(\delta) - \mathbf{D}(-[\mathbf{A}(\delta)]^{-1}\mathbf{P}) > 0\,. \tag{20}$$

IRODALOM

1. Szabó J.—Roller B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
2. Albert A.: Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse, Academic Press, New York 1972
3. Holnapy D.: Adatbank alkalmazása a műszaki tervezés automatizálásához. Számológép, Nim Igüszi. 1975/2
4. Garfinkel R. S.—Nemhauser G. L.: Integer Programing, John Wiley, New York 1972
5. Gallagher R. H.—Zienkiewicz O. C.: Optimum Structural Design, John Wiley, London 1973

Automated Designing with Integer Programming. In this paper the author presents a possible model for the general solution of automated designing. The design problem is defined as follows: a design of a structure with given geometry and composed from a given stock of elements is looked for, where for the elements the equilibrium, compatibility and limiting conditions are fulfilled and where the structure is optimum from some point of view (weight, cost, or their ratio). For the problem thus defined the mathematical model for linear limiting conditions is established and then it is extended to the case of non-linearity. In both cases the problems are reduced to that of a „0—1" integer programming task to which the enumeration method can be applied. For this method the inversion of a large matrix would be necessary. A solution method is shown for avoiding this.

Automatisiertes Projektieren mittels integer Programmierung. In der vorliegenden Arbeit wird ein mögliches Modell für die Automatisierung des statischen Projektierens in allgemeiner Form definiert. Die Projektierungsaufgabe wird so interpretiert, daß ein, aus dem gegebenen Vorrat an Elementen herstellbares Projekt mit gegebener Geometrie gesucht wird, bei welchem für die Elemente die Gleichgewichts-, Kompatibilitäts- und einschränkenden Bedingungen erfüllt sind und wo ferner unter irgendeinem Gesichtspunkt (Gewicht, Kosten oder deren Verhältnis) die Konstruktion optimal ist. Für das so definierte Problem wird das mathematische Modell für lineare einschränkende Bedingungen aufgeschrieben und dann auch auf nichtlineare Fälle ausgedehnt. In beiden Fällen werden die Probleme auf eine »0—1« ganzzahlige Programmierungsaufgabe zurückgeführt, für deren Lösung die Abzählmethode wirksam angewendet werden kann. Bei der Verwendung der Abzählmethode wäre bei jedem Schritt die Inversion einer großen Matrix notwendig. Es sind auch Lösungsverfahren vorgeführt, wo dies vermieden wird.