

VÉKONYFALÚ, NYITOTT KERESZTMETSZETŰ RÚDSZERKEZETEK GÉPI SZÁMÍTÁSA

KURUTZNÉ KOVÁCS MÁRTA*

[Beérkezett: 1976. március 30-án]

A térbeli rúdszerkezet mátrix egyenletei formailag nem változnak, ha a vékonyfalú, nyitott szelvényű rudakat a Vlaszov-elmélet szerinti gátolt csavarással vesszük számításba. A számítási eljárást számpéldákkal is szemléltetjük.

Bevezetés

A könnyűszerkezetes építési mód és általában a rendszer-szerű (system building) építés térhódítása során előtérbe kerül a vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű rúdszerkezetek elmélete. Célszerűnek látszott, a modern számítástechnika lehetőségeit kihasználva, VLASZOV elmélete [1] alapján egy olyan algoritmusrendszert kidolgozni, amellyel kiegészítve a rúdszerkezetek meglevő gépi számítási rendszerét, rúdszerkezetek komplex vizsgálatát végezhetjük el.

Rúdszerkezetek általános elemzésével foglalkozó művekben [2] általában tömör, szimmetrikus keresztmetszetű, szabad öblösödésű rudakból álló szerkezetek gépi számításra alkalmas algoritmusrendszerét találjuk. A [2]-ben leírt számítási módszereket használtuk fel, illetve terjesztettük ki vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű rúdelemekből álló szerkezetek esetére.

Jelen dolgozatban e munka eredményeiről számolunk be, számszerű összehasonlítást adva a gátolt, illetve gátolatlan csavarású rúdszerkezetek elmozdulásai, illetve igénybevételei között.

1. A rúdszerkezet alapegyenlete

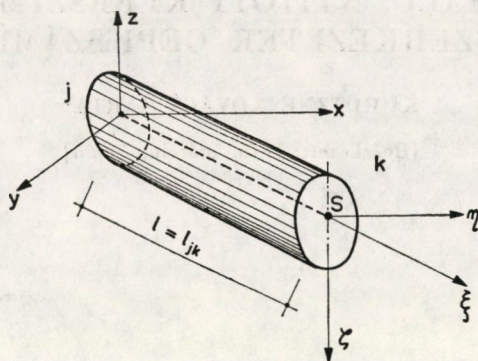
A rúdszerkezetet ([2] jelöléseit felhasználva) az elmozdulásmódszer szerint az

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}$$

egyenlet alapján számítjuk, amelyben

- \mathbf{u} a szerkezet csomópontjainak elmozduláskomponenseit tartalmazza;
- \mathbf{K} az egész szerkezet merevségi mátrixa,
- \mathbf{q} a szerkezet csomópontjain működő terhek vektora.

* Kurutzné Dr. Kovács Márta, 1118 Budapest, Serleg u. 8.



1. ábra

\underline{K}_{jk}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{EA}{l}$						$\frac{EA}{l}$					
2		$\frac{12EI_z}{l^3}$				$\frac{6EI_z}{l^2}$		$-\frac{12EI_z}{l^3}$				$\frac{6EI_z}{l^2}$
3			$\frac{12EI_y}{l^3}$			$\frac{6EI_y}{l^2}$			$\frac{12EI_y}{l^3}$			$-\frac{6EI_y}{l^2}$
4				$\frac{GI_x}{l}$							$-\frac{GI_x}{l}$	
5					$\frac{4EI_y}{l}$				$\frac{6EI_y}{l^2}$		$\frac{2EI_y}{l}$	
6						$\frac{4EI_z}{l}$		$-\frac{6EI_z}{l^2}$				$\frac{2EI_z}{l}$
7							$\frac{EA}{l}$					
8								$\frac{12EI_z}{l^3}$				$-\frac{6EI_z}{l^2}$
9									$\frac{12EI_y}{l^3}$		$\frac{6EI_y}{l^2}$	
10										$\frac{GI_x}{l}$		
11											$\frac{4EI_y}{l}$	
12												$\frac{4EI_z}{l}$

SZIMMETRIKUS

2. ábra

A csomópontok u elmozdulásainak ismeretében a rudakban ébredő igénybevételek meghatározhatók.

A szerkezet \underline{K} merevítési mátrixát az egyes rúdelemek \underline{K}_{jk} elemi merevítési mátrixaiból állítjuk össze. A tömör keresztmetszetű rúdelem elemi merevítési mátrixa a súlypontra vonatkozó keresztmetszeti jellemzőket tartalmazza. Így az 1. ábrán feltüntetett jk rúdelem elemi merevítési mátrixát a 2. ábra

mátrix biztosítja és

$$\mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} v_{\xi, S} \\ v_{\eta, S} \\ v_{\zeta, S} \\ \varphi_{\xi, S} \\ \varphi_{\eta, S} \\ \varphi_{\zeta, S} \end{bmatrix}, \text{ továbbá } \mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} v_{\xi, F} \\ v_{\eta, F} \\ v_{\zeta, F} \\ \varphi_{\xi, F} \\ \varphi_{\eta, F} \\ \varphi_{\zeta, F} \end{bmatrix}$$

az S súlypont, illetve az F nyírási középpont elmozdulásait tartalmazó vektorok.

Ezek alapján tehát a vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű rúdelem \mathbf{K}_{jk}^v elemi merevségi mátrixát a tömör keresztmetszetű rúdelemnek megfelelő \mathbf{K}_{jk} elemi merevségi mátrix alábbi transzformációja útján nyerjük:

$$\mathbf{K}_{jk}^v = \mathbf{D}^* \mathbf{A} \mathbf{K}_{jk} \mathbf{D},$$

ahol \mathbf{D} a fenti \mathbf{D}_0 mátrixokból alkotott hiperdiagonálmátrix:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}$$

és \mathbf{A} az alábbi diagonálmátrix:

$$\mathbf{A} = \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \rangle.$$

(A \mathbf{K}_{jk}^v mátrixot a 4. ábra szemlélteti.) Az \mathbf{A} mátrixban szereplő α tényező a rúdelem megtámasztási viszonyaitól, tehát a csavarás gátoltságától függő állandó, amelynek meghatározásával a következő pontban foglalkozunk.

3. A rúdelem megtámasztási viszonyainak hatása a csavarásra

A rúdelem két végén levő megtámasztás határozza meg, hogy a rúdelem csavarása gátolt vagy szabadon létrejöhessen. Sőt, mivel az összetett és főleg térbeli szerkezeteknél az egyes csomópontokban a befogási viszonyok nem is jellemezhetők mindig egyértelműen, a gyakorlatban leggyakrabban az ún. részlegesen gátolt csavarás jelensége lép fel. Bonyolítja még a vizsgálatot az is, hogy több rúd csatlakozási pontja környezetében a geometriai viszonyok sem írhatók le egyértelműen. Ugyanis a súlypontokat tartalmazó szilárdsági tengelyek metszéspontját tekintve csomópontnak, a nyírási középpontokat felfűző tengelyek többnyire kitérő egyeneseket alkotnak. Mindezek alapján a valóságban csak ritka esetben lép fel tökéletesen gátolt vagy szabad csavarás, legtöbbször a kettő kombinációjáról van szó. Az erre vonatkozó vizsgálat

$\frac{EA}{l}$						$-\frac{EA}{l}$					
	$\frac{12EI\zeta}{l^3}$		$\frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F$		$\frac{6EI\zeta}{l^2}$		$-\frac{12EI\zeta}{l^3}$		$-\frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F$	$\frac{6EI\zeta}{l^2}$	
		$\frac{12EI\eta}{l^3}$	$-\frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F$	$-\frac{6EI\eta}{l^2}$			$-\frac{12EI\eta}{l^3}$	$\frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F$	$-\frac{6EI\eta}{l^2}$		
			$\frac{GI\xi}{l} \cdot \alpha + \frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F^2 + \frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F^2$	$\frac{6EI\eta}{l^2} \cdot \eta_F$	$\frac{6EI\zeta}{l^2} \cdot \zeta_F$		$-\frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F$	$\frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F$	$-\frac{GI\xi}{l} \cdot \alpha - \frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F^2 - \frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F^2$	$\frac{6EI\eta}{l^2} \cdot \eta_F$	$\frac{6EI\zeta}{l^2} \cdot \zeta_F$
				$\frac{4EI\eta}{l}$			$\frac{6EI\eta}{l^2}$	$-\frac{6EI\eta}{l^2} \cdot \eta_F$	$\frac{2EI\eta}{l}$		
					$\frac{4EI\zeta}{l}$		$-\frac{6EI\zeta}{l^2}$	$-\frac{6EI\zeta}{l^2} \cdot \zeta_F$		$\frac{2EI\zeta}{l}$	
						$\frac{EA}{l}$					
							$\frac{12EI\zeta}{l^3}$	$\frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F$		$-\frac{6EI\zeta}{l^2}$	
							$\frac{12EI\eta}{l^3}$	$-\frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F$	$\frac{6EI\eta}{l^2}$		
								$\frac{GI\xi}{l} \cdot \alpha + \frac{12EI\eta}{l^3} \cdot \eta_F^2 + \frac{12EI\zeta}{l^3} \cdot \zeta_F^2$	$\frac{6EI\eta}{l^2} \cdot \eta_F$	$\frac{6EI\zeta}{l^2} \cdot \zeta_F$	
									$\frac{4EI\eta}{l}$		
										$\frac{4EI\zeta}{l}$	

SZIMMETRIKUS

4. ábra

meglehetősen bonyolult, így egyelőre az alábbiakban a megtámasztási peremfeltételek legegyszerűbb eseteit fogjuk részletezni, de nem zárjuk ki az általánosítás lehetőségét.

A keresztmetszet saját síkjában történő elfordulásának $\vartheta = \vartheta(\xi)$ függvényét az öblösödés

$$EJ_{\omega} \vartheta^{IV} - GJ_{\xi} \vartheta'' - \frac{dM_{\xi}}{d\xi} = 0$$

differenciálegyenletének megoldásaként kapjuk. Mivel — feltételezésünk szerint — a rúdelem csak a határoló csomópontjain terhelt, így az M_{ξ} csavarónyomaték a rúd mentén konstans, a differenciálegyenlet homogénné válik:

$$EJ_{\omega} \vartheta^{IV} - GJ_{\xi} \vartheta'' = 0.$$

Itt J_ξ a súlypontra vonatkozó csavarási inercianyomaték, J_ω pedig a nyírási középpontra vonatkozó szektorális inercianyomaték. E és G a rugalmassági modulusok.

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\vartheta = c_1 + c_2 \xi + c_3 \sinh \frac{k}{l} \xi + c_4 \cosh \frac{k}{l} \xi,$$

ahol

$$k = l \sqrt{\frac{GJ_\xi}{EJ_\omega}},$$

és $l = l_{jk}$ a rúdelem hossza. Az

$$M_\xi = -EJ_\omega \vartheta''' + GJ_\xi \vartheta' = \frac{GJ_\xi}{l} \left(l \vartheta' - \frac{k^3}{l^2} \vartheta''' \right) = \frac{GJ_\xi}{l} c_2 l = \text{konstans}$$

csavarónyomaték a rúdelem megtámasztási viszonyaitól függő c_2 állandó függvénye. Ha figyelembe vesszük, hogy a tömör keresztmetszetű rúdelem merevségi mátrixában a csavarásra jellemző tag GJ_ξ/l volt, látható, hogy a vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű rúdelem gátolt csavarását az

$$\alpha = c_2 l$$

tényező jellemzi. Most vizsgáljuk meg, milyen értéket vesz fel α a legegyszerűbb megtámasztási viszonyok esetén:

a) Mindkét végén a teljes keresztmetszet mentén mereven befogott rúdelem esetében a

$$\xi = 0 \quad \text{és} \quad \xi = l \quad \text{helyen}$$

$\vartheta = 0$, azaz a keresztmetszet saját síkjában nem fordulhat el, és $\vartheta' = 0$, azaz a teljes befogás miatt nem is öblösödhetik.

Ennek alapján az

$$\alpha = c_2 l = - \frac{k \sinh k}{2 - 2 \cosh k + k \sinh k}$$

érték a mindkét végén befogott rúdelem tökéletesen gátolt csavarásának felel meg.

b) Mindkét végén csupán a keresztmetszet kontúrja mentén mereven befogott rúdelem esetében a

$$\xi = 0 \quad \text{és} \quad \xi = l \quad \text{helyen} \quad \vartheta = 0 \quad \text{és} \quad EJ_\omega \vartheta'' = 0$$

azaz — mivel szabadon öblösödhetik a keresztmetszet — az öblösödési nyomaték zérus. Ebből $\vartheta'' = 0$.

Ennek alapján

$$c_2 = \frac{1}{l} \quad \text{és így} \quad \alpha = 1,$$

amely nyilvánvaló, hiszen a rúd szabad öblösödése biztosítva van.

c) Egyik végén teljesen, másik végén csupán a kontúrja mentén mereven befogott rúdelem esetében

$$\text{a } \xi = 0 \text{ helyen } \vartheta = 0 \text{ és } \vartheta' = 0,$$

$$\text{a } \xi = l \text{ helyen } \vartheta = 0 \text{ és } \vartheta'' = 0.$$

Ezek figyelembevételével:

$$\alpha = \frac{k \cosh k}{k \cosh k - \sinh k}.$$

A legegyszerűbb peremkényszerek esetén tehát α fenti értékeit vesszük figyelembe a vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű rúdelem merevségi mátrixának felírásakor. A teljes szerkezet merevségi mátrixát pedig az ilymódon előállított elemi merevségi mátrixokból építjük össze.

4. Példák

A fenti módszer alapján program készült, amely tetszőleges geometriájú, tömör és vékonyfalú keresztmetszetű rudak kombinációjából álló, síkbeli vagy térbeli rúdszerkezet gépi számítására használható. E programmal futtattuk az alábbi számpéldákat is.

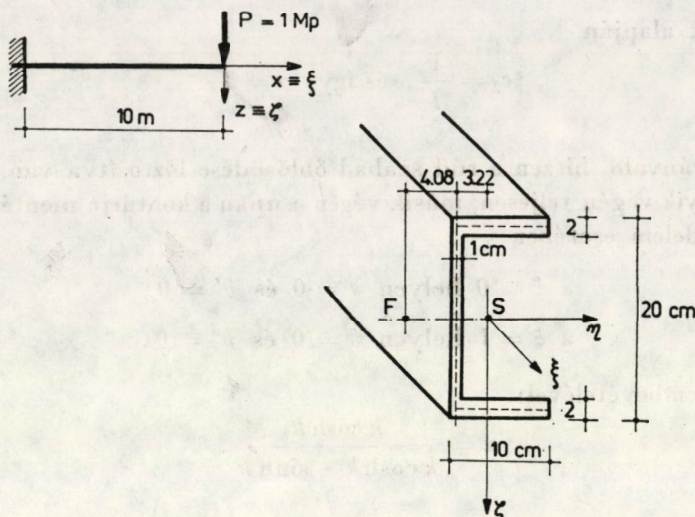
a) A levezetett eredmények ellenőrzéseképpen az 5. ábrán látható konzolt vizsgáltuk. A keresztmetszet adatai az alábbiak:

$$\begin{aligned} F &= 56 \text{ cm}^2 \\ J_{\xi} &= 61,6 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta} &= 3592 \text{ cm}^4 \\ J_{\zeta} &= 563 \text{ cm}^4 \\ J_{\omega} &= 32\,650 \text{ cm}^6 \\ \eta_F &= -7,3 \text{ cm} \\ \zeta_F &= 0. \end{aligned}$$

A rugalmassági modulusok: $E = 2100 \text{ Mp/cm}^2$ és $G = 0,4 E$. Ha a konzol végén ható 1 Mp nagyságú ζ irányú teher a súlyponton átmenő függőleges síkban működik, akkor a konzolvégi keresztmetszet súlypontja az alábbi elmozdulásokat végzi:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & \varphi_x &= \vartheta = -0,131, \\ v_y &= 0, & \varphi_y &= -0,666, \\ v_z &= 0,451 \text{ m}, & \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a súlypontján átmenő síkban, de nem szimmetriasíkjában terhelt rúd el is csavarodik. A súlypont (x, z) síkra merőleges eltolódása csak azért nem következik be, mert a keresztmetszet a terhelés síkjára merőlegesen szimmetrikus. Most tegyük át a terhelést a nyírási középponton átmenő síkba. Ezt úgy vesszük figyelembe, hogy egy W erőpár segítségével



5. ábra

a nyírási középponton ható terhet a súlypontra redukáljuk. Ennek az erőpárnak a nagysága az 5. ábra szerint:

$$W = P(0,0408 + 0,0322) = 0,073 \text{ mMp.}$$

A nyírási középponton átmenő síkban történő terhelés hatására a végkeresztmetszet súlypontjának elmozdulásai:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & \varphi_x &= \vartheta = 0, \\ v_y &= 0, & \varphi_y &= -0,666, \\ v_z &= 0,442 \text{ m}, & \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a nyírási középponton terhelt rúd elcsavarodást nem szenved, és ezért a súlypont z irányú (függőleges) eltolódása is csökkent. A csökkenés mértéke az elcsavarodás megszűnéséből adódott:

$$0,451 - 0,442 = 0,131 \cdot 0,073.$$

b) Tekintsük a 6. ábrán látható tartót, amelynek keresztmetszeti jellemzői az alábbiak:

$$\begin{aligned} F &= 30,72 \text{ cm}^2 \\ J_\xi &= 6,17 \text{ cm}^4 \\ J_\eta &= 976,8 \text{ cm}^4 \\ J_\zeta &= 383,8 \text{ cm}^4 \\ J_\omega &= 4829,0 \text{ cm}^6 \\ \eta_F &= 4,25 \text{ cm} \\ \xi_F &= 2,48 \text{ cm}. \end{aligned}$$

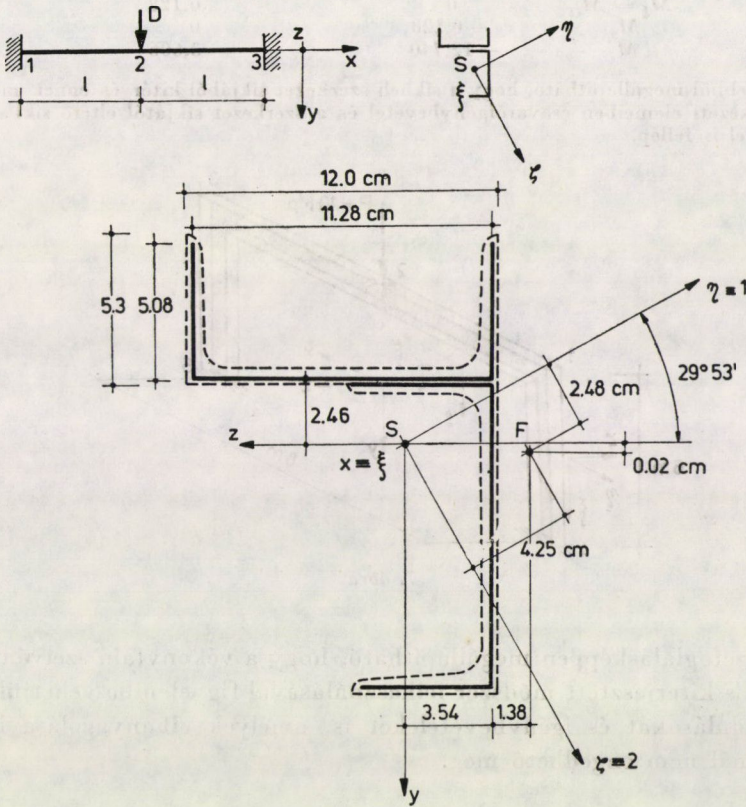
A rugalmassági modulusok: $E = 2100 \text{ Mp/cm}^2$; és $G = 0,4 E$. A tartó közepén 10 Mp nagyságú függőleges terhelés működik a súlypontra átmenő függőleges síkban. Az erő alatti keresztmetszet súlypontjának elmozdulásai:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & \varphi_x &= \vartheta = 1,005, \\ v_y &= 0,125 \text{ m}, & \varphi_y &= 0, \\ v_z &= -0,037 \text{ m}, & \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Látható, hogy a keresztmetszet nemcsak elcsavarodik, hanem súlypontja még ki is tér az (x, y) síkból. Most működtessük a terhet a nyírási középponton átmenő függőleges síkban, ekkor a súlypont elmozdulásai:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & \varphi_x &= \vartheta = 0, \\ v_y &= 0,076, & \varphi_y &= 0, \\ v_z &= -0,0372, & \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Tehát a nyírási középponton terhelt tartó keresztmetszetei nem csavarodnak el, de súlypontjuk (x, y) síkból való kitérése megmarad, mivel a keresztmetszetnek nincs szimmetriatengelye és a terhelés síkja egyik főiránnyal sem esett egybe. Az eltolódáskülönbségek pedig az elcsavarodás megszűnéséből adódnak.



ó. ábr.

Most a tartó jobb végi befogása helyett villás megtámasztást alkalmazunk, azaz a keresztmetszetnek csak a kontúrját fogjuk be mereven. Ekkor a súlyponton átmenő függőleges teher hatására a rúd szabadon öblösödhetik és ekkor a középső keresztmetszet súlyponti elmozdulásai:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & \varphi_x &= \vartheta = 1,214, \\ v_y &= 0,136, & \varphi_y &= 0, \\ v_z &= -0,037, & \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Ha a terhelés a nyírási középponton átmenő függőleges síkban működik, akkor az elmozdulások a két végén mereven befogott tartóéval azonosnak adódnak.

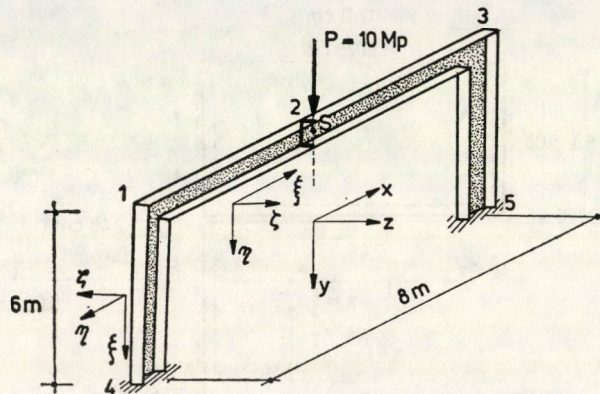
c) Utolsó példaként tekintsük a 7. ábrán levő két végén befogott keretet, amelynek keresztmetszete megegyezik az 5. ábrán szereplő keresztmetszettel. A tartó terhelése a vízszintes rúd közepén, a keresztmetszet súlypontján átmenő függőleges síkban ható 10 Mp nagyságú erő. A vízszintes rúd középső csomópontjának súlyponti elmozdulásai az alábbiak:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & \varphi_x &= \vartheta = 0,231, \\ v_y &= 0,082, & \varphi_y &= 0, \\ v_z &= -0,09, & \varphi_z &= 0. \end{aligned}$$

Miután a szerkezet kitér a síkjából, az egyes rúdvégi igénybevételek is eszerint alakulnak:

	1—2 gerenda	1—4 oszlop
N_{ξ}	-1,811	-5,000
T_{η}	5,000	-1,811
T_{ζ}	0	0
$M_{\xi} = M_{cs}$	0	0,128
M_{η}	-0,128	0
M_{ζ}	-12,740	3,606

Mindebből megállapítható, hogy a síkbeli szerkezet síkjából kitér és ennek megfelelően egyes szerkezeti elemeiben csavaróigénybevétel és a szerkezet síkjától eltérő síkban hajlítóigénybevétel is fellép.



7. ábra

Összefoglalásképpen megállapítható, hogy a vékonyfalú szelvények számítására is kiterjesztett módszer felhasználásával figyelembe vehetjük azokat az elmozdulásokat és igénybevételeket is, amelyek elhanyagolása bizonyos feladatoknál nem engedhető meg.

IRODALOM

1. WLASSOW, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe I—II. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964
2. SZABÓ J.—ROLLER B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
3. OVERRATH, J.: Grosse Stabverformungen und kinetische Stabilität nach der Elementmethode von Szabó. Dissertation. Braunschweig 1975

Computer Calculation of Structures Consisting of Thin-walled Open-section Bars. The matrix equations of space structures do not change in their forms if the thin-walled open-section beams will be taken into account according to Vlassov's theory with a restrained torsion. The computation method is also demonstrated by numerical examples.

Berechnung von dünnwandigen Stabkonstruktionen mit offenen Querschnitten mit Hilfe von Rechenanlagen. Die Matrixgleichungen der räumlichen Fachwerke ändern sich nicht in der Form, wenn man die dünnwandigen Stäbe mit offenem Querschnitt gemäss der Vlassowschen Theorie mit behinderter Drillung in Betracht nimmt. Das Rechenverfahren wird durch numerische Beispiele demonstriert.