

INFINITÉZIMÁLIS MÓDSZEREK PASCAL MATEMATIKÁJÁBAN

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

MADAME PÉRIER — Pascal nénje — és MARGUERITE PÉRIER — unokahuga¹ — megegyezően mondják el PASCAL matematikához való „visszatérését”. És mivel PASCAL életére vonatkozóan lényegében még ma is erre a két forrásra vagyunk utalva, az infinitézimális matematika, mint fogfájás elleni gyógyszer, klasszikus receptté vált a matematikátörténeti anekdoták iránt érdeklődő matematikusok körében.

MADAME PÉRIER leírása szerint öccsét, aki az 1654-es megtérése óta kizárólagosan vallási kérdésekkel foglalkozott, 1658 elején sajnálatos módon kezdte gátolni ebben az üdvös foglalkozásában betegsége. „Öcsém bajainak ez a kiújulása — írja — fogfájással kezdődött, ami teljesen meggátolta az alvását. De hogyan lehetne ébren egy olyan szellem, mint az övé, anélkül, hogy gondolkozna valamin. Ezért jutott eszébe az egyébként oly gyakori és kimerítő álmatlanságaiban egy éjjel valami a roulette-el kapcsolatban. Az első gondolatot második követte, a másodikat harmadik és végül egymást váltó gondolatok sokasága; s ezek, mintegy akarata ellenére, úgy-

¹ A PASCAL család a francia közéletben a XVII. század eleje óta egyre nagyobb szerepet játszó „hivatalnok nemesség” közé tartozott. BLAISE PASCAL születésének idején (1623) apja, ÉTIENNE PASCAL a clermont-i *Cour des Aides* elnöke volt. A kisfiú korán elveszíti anyját, s innentől kezdve apja részesíti rendkívül gondos, elsősorban a matematika és természettudományokra kiterjedő nevelésben. ÉTIENNE PASCAL 1631-ben három gyermekével Párizsba költözik. A legidősebb, GILBERTE, a későbbi Madame PÉRIER, ekkor 11 éves, a legkisebb, JACQUELINE hat, BLAISE, a két lány közötti egyetlen fiú, nyolc. A harmincas évek Párizsa páratlan méretű társadalmi kohó, ahol spontán alakuló és egymással több-kevesebb összefüggésben levő csoportokban mintegy kikísérleteződnék az újkori szellemi élet szervezeti formái. A szalón, az akadémia, a természettudományos és matematikai társaság és a szabadgondolkodó költőfilozófusok cabaret-klubjai a legfontosabbak ezek között a csoportosulások között. ÉTIENNE PASCAL elsősorban a MERSENNE atya körül összegyűlő természettudósokkal és matematikusokkal van jóban, de bejáratos a kalandos életű Mme SAINCOT-hoz is, akinek a testvére, CHARLES VION DALIBRAY, a cabaret költők egyik legjellegzetesebb képviselője. DALIBRAYVAL és barátjával, LE PAILLEUR-rel BLAISE PASCAL később is jóban marad, hiszen pl. meghívja őket arra a nevezetes látogatásra is, amivel 1647 nyarán az éppen Párizsban tartózkodó DESCARTES tiszteli meg a két testvért, BLAISE-t és JACQUELINE-t, akik ekkor éppen BLAISE légnyomás-kísérleteit rendezik sajtó alá, s szenvedélyesen tanulmányozzák azt a vallási-világnézeti irányt, aminek nemrégiben az egész PASCAL család, de a francia hivatalnok nemesség nagy része is egyre inkább, a hívévé vált: a jansenizmust. BLAISE életét ettől kezdve a természettudomány, a matematika, a jansenizmus, JACQUELINE, a mély hit és az elegáns, nagyvilági élet ma már teljességgel kibogozhatatlan keveredése determinálja. Keveredés, amely néhol már olyan tökéletes, hogy a szintézis látszatát kelti, de ez a szintézis mindvégig látszat marad, amin átütnek újra és újra az ellentétes tendenciák. Ez az ötvenes évek nagy műveinek a jellegzetessége és háttere. A PASCAL család azonban, amelyik a politikai reményeit veszítő hivatalnok nemességgel együtt egyre inkább áldozatul esik a megmerevedő, bigottá váló jansenizmusnak, PASCAL műveit és életét a szekta igényeinek megfelelően fésüli át. GILBERTE leánya, MARGUERITE PÉRIER, aki gyermekkorától a nagy jansenista apácakolostorban, Port Royal-ban nevelkedett, úgy él és ír, mint egy XII. vagy XIII. századi apáca. BLAISE életéről szóló leírása a borzalmas és realista részletek, a vakhit és a babona által átszőtt, jellegzetes „középkori” apáca krónika.

hogy még saját maga is meglepődött rajta, feltárták előtte a roulette bizonyítását. De mivel minden ilyesmiről már régen lemondott, nem is gondolt rá, hogy valamit is leírjon belőle. Mégis beszélt róla egy olyan személynek, akinek teljes tisztelettel tartozott, mind érdemeit illetően, mind az általa mutatott vonzalom elismerése-képpen, és ez a személy olyan tervet formált erről a felfedezéséről, ami csupán Isten dicsőségét tartotta szem előtt, és rávette öcsémet, hogy írjon csak le mindent, ami erről eszébe jut, és nyomtattassa ki.”²

Ugyanígy, de a kegyes körítés helyett realista részletekkel gazdagon mondja el a történetet Marguerite, és megnevezi a „magas személyt” is: „M. de ROANNEZ jött látogatni és azt találva, hogy semmi baja sincs, megkérdezte, mitől gyúgyult meg. Azt felelte, hogy a roulette-től, amin a fejét törte, s amit megtalált. M. de ROANNEZ meglepődve ezen a hatáson, de magán a dolgon is, mert tudta, milyen nehéz probléma az, megkérdezte, mi vele a szándéka. Nagybátyám azt felelte, hogy ez pusztán gyógyszerként szolgált neki, és semmi másra nem akarja használni. M. de ROANNEZ azt felelte erre, hogy jobb hasznát is lehetne venni ennek; hogy az atheis-ták leküzdésére irányuló igyekezetükben jól meg lehetne mutatni ezáltal, hogy a geometriát és a bizonyítás alá eső dolgokat tekintve is többet tud, mint ők együt-tesen; és így, ha a hit kérdéseiben engedelmeskedik, az azért van, mert tudja, meddig érnek a bizonyítások, és azt tanácsolta neki, hogy helyezzen letétbe 60 pistole-t és hirdessen versenyt minden kitűnő matematikus között, akit csak ismer és ajánlja fel a nyereséget annak, aki megtalálja a probléma megoldását. M. PASCAL így tett, és letétbe helyezett 60 pistole-t M. de CARCAVY-nál, aki az egész Európából érke-zendő pályamunkák egyik elbírólójává neveztetett ki, és a határidőt 18 hónapban tűzte ki.”³

Próbáljuk megérteni először is a két elbeszélés tendenciáját. A Pascal család szemében PASCAL főműve a *Pensées* volt, s ez a nagy apologetikus mű az ő szemük-ben sajnálatos módon befejezetlen maradt, s elsősorban ezt a töredékességet kellett valahogyan megmagyarázni. „Gyengélkedései voltak azok, amik meggátolták abban, hogy tovább dolgozzon tervén” írja Mme PÉRIER. Olyan súlyos beteg lesz — írja —, hogy miután egy évet (1657—58) dolgozott a nagy művön, gyakorlatilag semmit sem képes többé végezni. Tudományra — világi hívság — természetesen már régen nem is gondol, de betegsége és súlyos álmatlansága addig fokozódik, hogy egy fog-fájásos éjjel hirtelen, saját akarata ellenére eszébe jut a ciklois-probléma és meg-oldja. Közlésre — világi hiúság — természetesen nem is gondol, hiszen az egész csak „gyógyszer” volt számára, de barátja, akinek halálával és tisztelettel tartozik, s aki nem más, mint ROANNEZ herceg, Poitou kormányzója, rábírja a kiadásra: végül is Isten dicsőségére szolgál az, ha egy odaadó híve old meg olyasmit, amin a világ legnagyobb matematikusai hiába törték a fejüket. A tendencia nyilvánvaló: a mélyen vallásos Pascal család szemében a *Pensées* szigorú apologetikája után PASCAL matematikai hattyúdala kellemetlen zavart jelentene, tehát deus ex ma-china-val át kell siklani rajta. Ennél súlyosabb dolgokat is tett a Pascal család a geni-ális matematikus ellen; egyik matematikai főműve, amit még LEIBNIZ látott kéz-iratban, s sajnos visszaadott a családnak, eltűnt a kezük között.

² *La vie de Monsieur Pascal érite par Madame Périer, sa soeur, femme de Monsieur Périer, conseiller de la Cour des Aides de Clermont.* — Oeuvres complètes de Pascal, édition Pléiade. Texte établi et annoté par Jacques Chevalier. Paris 1954 (továbbiakban: Éd. Pléiade) 3—34, 19.

³ *Mémoire sur la vie de M. Pascal. Écrit par Mademoiselle Marguerite Périer, sa niece.* — Éd. Pléiade 35—41, 40.

A különösebb inkább az, hogy a történészek máig mennyire hatása alatt állnak MADAME és MARGUERITE PÉRIER kegyes elbeszéléseinek. Még PASCAL életének olyan kitűnő ismerője is, mint JEAN MESNARD, törést lát 1658-ban PASCAL fejlődésében, amit 1659-ben egy újabb „megtéréssel” kellett a világi hívságba visszaeső PASCALnak kompenzálnia. Ez az újabb „megtérés” azért vált szükségessé, mert az 1658-as év matematikai műveinek — nevezzük továbbiakban rövidség kedvéért *Roulette-leveleknek* — a hangját mindennek lehet nevezni, csak keresztényi alázatnak nem. A Pascalok érthetően igyekeztek átsiklani e felett a számukra kellemtelen tény felett, de MESNARD-t már nem köti a családi és a jansenista diszkréció. „Látjuk, amint ellenfeleit piszkolja — írja Mesnard — amint hevesen reagál a legkisebb ellentmondásra, amint olyan versenyt tűz ki, ami azt hivatott kimutatni, hogy egyetlen európai tudós sem képes versenyezni vele. Úgy rendezi a dolgot, hogy a lehető legkisebbre csökkentse versenytársai esélyeit és minden megoldási kísérletet, amit elküldhettek neki, eleve félvállról kezel. Visszatért belé a gög.”⁴

De a *Roulette-levelekben* nem ez a „gög” és sértő hang a legfeltűnőbb, ez nem hiányzik PASCAL vallásos írásaiból sem. S egyébként is a kor egyházi vitairódmán edzett füleinek a *Roulette-levelek* sértő kitételei nem lehetnek szokatlanok. S végül — ami a legfontosabb — Pascal az 1658-as matematikai kutatásaival párhuzamosan *folytatja* teológiai és egyházpolitikai harcait is, gyakorlati síkon a jezsuiták, elméleti téren a kálvinizmus ellen. A *Roulette-levelekben* nem a „gög, még nem is a vitakozókedv a legfeltűnőbb, hanem az, hogy éppen olyan céltudatos és jólszervezett propagandakampány benyomását keltik, mint az 1656-ban a jezsuiták ellen indított *Vidéki levelek*.⁵ A *Roulette-levelekben* is teljes harci aktivitásában látjuk Pascalt, félelmetes vitakészsége csúcán. S így egyszerre más megvilágításba kerülnek a *Roulette-levelek*. Nem egy haldokló nagybeteg fájdaloműző foglalkozását tükrözik többé, de nem is egy világi „gögbe” visszaeső vallásos lélek válságát. A *Roulette-levelek* jelentését nem elég Pascal biografikus adatai és pszichológiája felől vizsgálni, meg kell kísérlni kibontani a mű tudományos és tudománypolitikai *környezetét* is. Ezt kísérli meg a jelen tanulmány.

1658-ban a ciklois-kérdés már nagyon régi. Magát a görbét⁶ — amit az egyenesen legördülő kör egy pontja ír le — már a XVII. század elején vizsgálta GALILEI,

⁴ MESNARD, Jean: *Les conversions de Pascal* — Blaise Pascal, l'homme et l'oeuvre. Cahiers de Royaumont. Philosophie N° I. Paris 1956 (továbbiakban: P, CR.) 46–77, 60.

⁵ *Les Provinciales ou les Lettres écrites par Louis de Montalte, à un Provincial de ses amis, et aux RR. PP. Jésuites: sur le sujet de la Morale et de la Politique de ces Pères.* Cologne 1657 — Éd. Pléiade 567–904. Az ötvenes évek során jezsuiták és jansenisták elkeseredett harcot vívnak a vezetőszerp megszerzéséért a kialakuló abszolutisztikus monarchiában. A harc ideológiai téren a kegyelemtan bizonyos tételei körül koncentráldott, amiket az Egyház JANSENIUS tanításában eretneknek nyilvánított. A jansenisták vezetője, a „nagy ARNAULD” úgy próbál kisiklani az eretnység vádjá alól, hogy a pápa kiátkozáshoz való *jogát* elismeri, de tagadja, hogy a rekriminált tételek *tényleg* benne vannak JANSENIUS művében. PASCAL a *Vidéki levelekben* az ARNAULD álláspontjának a népszerűen megírt védelmét vállalja, miután ARNAULD védekezése a Sorbonne előtt elbukott. PASCAL azonban messze túllát ARNAULD jogászai ügyeskedésén, a *Vidéki levelek* egyre inkább elegáns, világos, nagyvilági stílusban megírt moralizáló esszék lesznek, teológiai tekintetben pedig elhajlanak a hivatalos jansenista ideológiától a tradicionális, thomista felfogás felé.

⁶ Görbék mozgások összetételéből való származtatása nem új, jól ismeri már a görög matematika is, de csak mint a kör és egyenes geometriájából adódó problémák — pl. kockamegkettőzés, körkvadratura, szögharmadolás — segédgörbéivel foglalkozott velük. A XVII. században a mozgásösszetevésből származó görbék, közöttük a ciklois, vagy ahogy a generálására célozva nevezték, *roulette*, az érdeklődés központjába kerülnek. DESCARTES a mozgásösszetevés által generált görbék között elkülönít egy nagy csoportot, amelyikbe tartozó görbék minden egyes pontja véges

s a harmincas évek közepén az akkor éppen GALILEI műveivel foglalkozó MERSENNE atya körkérdest intézett leveleiben a francia matematikusokhoz a görbe jellegére, ívhosszára és a görbe alatti területre vonatkozóan. Bizonyos részletkérdésekre adott is valamiféle megoldást⁷ a College de France matematikaprofesszora, GILES PERSONNE (1602–1672), vagy ahogy szülőhelyéről nevezte magát, ROBERVAL. Ez a megoldás nehézkes, mechanikus, inkább csak intuitive megsejtett, semmint bizonyított volt. Nem is mulaszthatta el ROBERVAL nagy ellenfele, DESCARTES, hogy egy ragyogó, egyszerű bizonyítással meg ne szégyenítsé a hivalkodó párizsi professzort, aki élete egyik főfeladatának tekintette a hollandiai filozófus bosszantását.

1658-ban DESCARTES már nyolc éve halott, de híre egyre nő, nemcsak Hollandiában és Angliában, Párizsban is. Akadnak lelkes hívei a jezsuiták és a bencések között is, sőt, maga a jansenisták vezére a „nagy ARNAULD” is vonzódik bizonyos tanításaihoz. Csak két hely van Párizsban, ahol maradéktalanul ellenségei DESCARTES-nak: Mme de SABLIÈRE kényeskedő szalonja és a College de France. Mme de SABLIÈRE szalonjában DESCARTES régi ellenfelének, GASSENDINEK a hívei uralkodnak és LA FONTAINE gúnyolja DESCARTES tanait az állatok és emberek közötti különbségről. A College de France-ban ROBERVAL gyaláz mindent, amit valaha is tanított DESCARTES.

ROBERVAL egyébként másokat is támadott, ha nem is olyan lelkesen mint DESCARTES-ot, ugyanis akárhová nézünk a XVII. század két középső negyedében, mindenütt ott látjuk ROBERVALT, prioritási harcokba keveredve. ROBERVAL rakoncátlankodását egyes történészek azzal magyarázzák, hogy három évenként egy-egy új felfedezéssel kellett megvédenie tanszékét, s így a közbeeső felfedezéseit a védelemre tartogatva, mások megelőzték. Azonban DESCARTES-al szembeni viselkedését semmiképpen sem lehet „önvédelemmel” magyarázni, s a prioritás-igényeit is alaposabban át kellene nézni ahhoz, hogy legalábbis részben jogos voltuk felől dönhessünk. Később egyébként sem szorult már tanszéke periodikus védelmére, s azért nem lett semmivel sem barátságosabb. ROBERVAL mindenütt támad, ahol a francia, közelebről a köréje tömörülő párizsi matematikusok érdekeit sértve látja. Ebben a tekintetben hasonlít a viselkedése a JOHN WALLISÉHOZ⁸, aki az angol matematikának tesz hasonló „szolgáltatásokat”.

BLAISE PASCALnak még atyai jóbarátja ROBERVAL. Blaise apja, ÉTIENNE PASCAL még első párizsi tartózkodása alatt, a harmincas években köt vele szoros barátságot, s már együtt harcolnak a MERSENNE atya körül kialakuló kis tudóscsoport tagjaiként bizonyos, a csoporton kívül álló matematikusok által képviselt nézetek ellen. ÉTIENNE PASCAL és ROBERVAL kooperációja később átöröklődik a fiúra, s

algebrai egyenlettel adható meg, s rendszeres vizsgálataiban csak ezekre a görbékre szorítkozik. A nem ide tartozó görbékkel — amiket mechanikusoknak nevez — csak átmenetileg foglalkozik leveleiben. PASCAL nem tesz ilyen különbséget a görbék között. Az ő számára egy görbét nem a generáló mozgás, hanem két egyeneshez, a „bázishoz” és a „tengelyhez” való viszonya jellemez.

⁷ ROBERVAL egy megfelelő módon definiált görbe — *compagne de la cycloïde*, a mai sinus-görbe — segítségével határozza meg a ciklois területét, teljesen a CAVALIERI-féle indivisibiliamatematika szabályainak megfelelően. L. MORITZ CANTOR: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Zweiter Band. Erster Halbband, von 1200–1650. Leipzig 1899 (továbbiakban Cantor II) 878–880.

⁸ JOHN WALLIS (1616–1703) foglalkozására nézve anglikán teológus volt, a restauráció után királypárti érzelmeinek jutalmaképpen II. Károly káplánja, majd püspök lett. A forradalom alatt az oxfordi egyetemen tanított, egyik alapító tagja a Royal Society-nek. Ahol csak alkalma nyíltott rá, erőlesen — és többnyire igazságtalanul — védte az angol matematikusok prioritás-igényeit.

meglepő, milyen állhatatosan és hűséggel védi mindenütt BLAISE a ROBERVAL igazát, ott is, ahol a mérges professzornak — mi előttünk nyilvánvalóan — nincs igaza. Pl. a parabola és a spirális ívhosszáról írott értekezésében, ahol az itáliai matematikusok ROBERVALÉVAL azonos, de sokkal korábbi eredményeit még csak meg sem említi⁹.

A roulette versenyt lezáró vitában is PASCAL metsző gúnyja elsősorban ROBERVAL két ellenfele ellen irányul. Az egyik, LALOUÈRE Toulouse-i jezsuita professzor, azt „merészelte” állítani, hogy ugyanarra az eredményre jutott, de jobb módszerrel, mint ROBERVAL. A másik, JOHN WALLIS pedig ugyanazzal a módszerrel kapott az 1655-ben megjelent *Arithmetica infinitorum* c. művében sokkal általánosabb eredményeket, amelyek módszerrel ROBERVAL és FERMAT már hosszú évek óta dolgoztak, de eddig még csak az eredményeiket tették közzé. LAOUÈRE és WALLIS megsemmisítésén kívül a versenyt lezáró vitalevelek feladata a TORICELLI ROBERVALLAL szembeni jogos prioritás-igényének a cáfolata és DESCARTES érdemeinek az elkendőzése volt. Őket úgyszólván teljesen kiirtja a ciklois-probléma előtörténetéből. A verseny résztvevői közül pedig egyedül WREN munkája iránt tanúsít megértést, de a WREN által beküldött pályamű nem a kitűzött kérdésekre adott válasz volt, s egyébként is WREN antik módszert alkalmazott, s nem az új, Itáliából elindult indivisibilia-módszert, amivel ROBERVAL és PASCAL dolgoztak, s aminek a teljesítőképességét és francia eredetét voltak hivatva igazolni a *Roulette-levelek*. Mert ezek az írárok a ciklois ürügyén voltaképpen ezt a Roberval—Pascal-féle módszert védik mások jogos vagy jogtalan prioritás-igényeivel szemben.

A XVII. század egyik legtöbbször tartott, legféltebb „szellemi tulajdona” ugyanis a módszer volt. Csalhatatlan módszereket dolgoztak ki az üdvözléstől a szerencsejátékig, a drámaírástól az ABC tanításáig mindenre. S az a módszer, amit a *Roulette-levelek* ROBERVAL és PASCAL számára szeretnének biztosítani, semmiképpen sem nevezhető — ez már abban a korban világosan látszott — az ő tulajdonuknak. Hosszú fejlődés eredménye, amiben többek között TORRICELLI¹¹ és mesterei: GALILEI és CAVALIERI¹², továbbá DESCARTES és JOHN WALLIS is fontos szerepet játszottak. Ebben a fejlődésben az újkori matematika egyik leghatalmasabb eszközének, az infinitézimális módszernek a megszületését lehet nyomon követni. PASCAL propagandájának genialitását mi sem bizonyítja jobban, minthogy a legutóbbi időkig éppen a *Roulette-levelek* tartották az első „integrálszámításról szóló értekezésnek.”¹³

⁹ *Lettre de A. Dettonville a Monsieur A. D. D. S. en lui envoyant la démonstration a la manière des anciens de l'égalité des lignes spirale et parabolique.* — Éd. Pléiade 313—327, 313—314.

¹⁰ Sir CHRISTOPHER WREN (1632—1723) építész, matematikus és csillagász, a restauráció korabeli London városképének a legfőbb kialakítója. Mint matematikust, a ciklois rektifikációja tette híressé, ami iránt PASCAL is elismeréssel adózott, s nem maradt rá hatás nélkül. L. Derek T. WHITE-SIDE: „Wren, the mathematician” *Notes and Records of the Royal Society* 15 107—111, 1960.

¹¹ EVANGELISTA TORRICELLI (1608—1647) a XVII. század második negyedének egyik legjelentősebb matematikusa is. Működése mint kísérletezőnek, fizikusnak és matematikusnak egyaránt számos ponton érintkezik a PASCALÉVAL és ROBERVALÉVAL, s ez önmagában véve is kiindulópontot jelentett prioritás-vitákra, amit még fokozott, hogy a TORRICELLI módszereihez csatlakozó WALLIS „védelmébe vette” mesterét ROBERVAL—PASCAL igényeivel szemben.

¹² BONAVENTURA CAVALIERI (1598?—1647) GALILEI tanítványa, a GALILEI után fellendülő új itáliai matematikai fejlődés egyik elindítója és legnagyobb hatású mestere. 1621 és 29 között készült, 1635-ben megjelent műve, a *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* a XVII. század új infinitézimális módszereinek első összefoglalása.

¹³ Például ÉMILE PICARD: „C'est le premier Traité de calcul intégral” cit. J. Chevalier, Ed. Pléiade 175.

Óvatosabb matematikatörténészek inkább szerettek „Integrálszámítás előtti integrálásról”¹⁴ vagy indivisibilia-matematikáról beszélni. Az elnevezéseknél és dicsérő jelzőknél azonban súlyosabb hiba volt az, hogy az egész módszert sajnálatos módon „végtelen kicsi” elemekből összetevődő véges összeg előállításaként értékelték félre a matematikatörténészek¹⁵, míg A. KOYRÉ egy alapvető tanulmányában meg nem magyarázta, hogy éppen ellenkezőleg, CAVALIERI indivisibiliageometriájában az ez ellen való tiltakozásról van szó.¹⁶ CAVALIERI módszerének a lényege nem „végtelen sok” „végtelen kicsi” elem „összegezése”, hanem az antik, *reductio ad absurdum*ra alapuló kimeríthetlenségi elv megkerülése¹⁷. CAVALIERI a síkalakzatokat párhuzamos egyenesek halmazának (*aggregatum*) tekinti, nem összegének. Két ilyen halmaz kétféleképpen hasonlítható össze, *collective*, *hoc est comparando aggregatum ad aggregatum*, és *distributive*, *sc. comparando sigillatim quamlibet rectam figurae ABCba ... cuilibet rectae figurae EFGefg ... in direction existenti*.¹⁸ Azaz, ha két alakzat azonos irányban vett elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés állapítható meg, a két alakzat egészében is megfelel egymásnak. Az indivisibilia módszerben kontinuum számosságú halmazok összehasonlításáról van

¹⁴ Vö. ZEUTHEN, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig, 1903, 248–300.

¹⁵ Vö. Cantor II 877: Cavalieri betrachtete die Indivisibilien jeder Oberfläche nach Maassgabe unendlich vieler Linien, die eines Körpers nach Maassgabe unendlich vieler Flächen, und deshalb wurden Vorwürfe gegen Cavalieri erhoben, als meine dieser, die Oberfläche, der Körper beständen wirklich aus Linien, aus Flächen. — CANTOR ezzel a kifogással a kortárs-matematikusokra, elsősorban ROBERVALra utal, de modern matematika történészek sem mindig mutatnak mélyebb megértést CAVALIERI munkája iránt, mint ROBERVAL. Vö. pl. PIERRE HUMBERT: *Cet effrayant génie ... L'oeuvre scientifique de Blaise Pascal*, Paris 1947, 216: Cavalieri considérait les lignes, les surfaces et les volumes comme décomposables en une infinité d'éléments qu'il appelait indivisibles: une ligne était une accumulation de points, une surface une accumulation de droites, un volume, une superposition de plans. Telle qu'elle était ainsi proposée, l'idée était fausse, car il est bien évident qu'en entassant les uns sur les autres des plans, dont par définition l'épaisseur est nulle, on n'obtiendra jamais un volume d'épaisseur non nulle: accumulez zero, cela donnera toujours zero. — Ez az idézet nemcsak azért érdekes, mert bizonyítja a tévedések szívós életét (ROBERVAL-HUMBERT: 300 év), hanem azért is, mert a második mondat, amiben HUMBERT az indivisibiliamatematikát — ti. amit ő annak tart — kritizálja, éppen az indivisibilia módszer egyik alapelve. Végtelenül vékony elemek összegezésének érti félre Cavalieri módszerét még OTTO TOEPLITZ is, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949, 57. — Érdemes kiemelni viszont, milyen tisztán látta már 1912-ben Cavalieri módszerének lényegét LEON BRUNSCHWIG: L'essentiel de la méthode est dans la comparaison des elements générateur, qui permet de traiter chaque figure, plane ou solide, "in ratione omnium suorum indivisibilium collective et (si in iisdem reperiatur una quaedam communis ratio) distributive ad invicem comparatorum". Si l'on fait de plus appel à la considération de leur infinité, c'est uniquement afin de ne pas avoir à tenir compte de leur nombre. LEON BRUNSCHWIG: *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris 1912, 166).

¹⁶ KOYRÉ, A.: *Bonaventura Cavalieri et la géométrie des continues* — Évantail de l'histoire vivante. Hommage a Lucien Febvre I–II. Paris 1953, I 319–340.

¹⁷ Az antik kimeríthetlenségi módszer jó összefoglalása található pl. B.L. van der WAERDEN: *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart 1956, 304–306, és főleg E. J. DIJKSTERHUIS: *Archimedes*, Copenhagen 1956, 130–133. DIJKSTERHUIS interpretációját foglalja össze és teszi modern matematikai logikai aparátussal könnyen hozzáférhetővé WHITESIDE alább idézett monográfiája.

¹⁸ Kollektive, azaz halmazt halmazhoz hasonlítva, és disztributive, ti. adott irányban összehasonlítva *ABCba* alakzat egy tetszőleges egyenesét ... *EFGefg* alakzat egy tetszőleges egyenesével. cit.: WHITESIDE, Derek Thomas: *Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century*. — *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1961) 179–388 (továbbiakban: WHITESIDE), 313.

szó, s ezért nincs szükség határátmenetre. Az exhaustios eljárás és a limes módszer megbontja a kontinuumot, mert a természetes számok sora szerint rendezhető értékekkel közelít meg egy soha el nem érhető, ill. a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ összefüggésben egy pontosan definiált matematikai szerkesztés eredményeként adódó határértéket. CAVALLIERI, a kontinuum számosságú halmazokban maradva, elkerüli ebből a kétféle — görög és modern — aritmetizációból adódó nehézségeket.

Ezt nem értették meg a matematikatörténészek, s ezért értették félre, egy helytelenül alkalmazott görög vagy modern eljárásnak, az indivisibiliamatematikát. PASCAL azonban tökéletesen tisztában volt az indivisibiliamatematika lényegével. Az aritmetikai háromszög problémaköréből kinőtt *Potestatum numericarum summa*-ban pontosan az indivisibilia elmélet szellemének megfelelően adja meg az egész számok hatványai között talált összefüggésekből a folytonos mennyiségek között fennálló analóg összefüggésekre való áttérés szabályát. Az elv, amely a diszkontinuus mennyiségekről a folytonos mennyiségekre való áttérést lehetővé teszi az, hogy „bármely számban is adunk folytonos mennyiségeket egy náluk magasabbrendű folytonos mennyiséghez, utóbbin azok semmit sem növelnek. Így pontok a vonalhoz, vonalak a felületekhez, felületek a testekhez semmit sem tesznek hozzá: vagy hogy számokról szóló traktátushoz jobban illő szavakat használjak, semmit sem tesznek hozzá a gyökök a négyzetekhez, a négyzetek a köbökhöz, köbök a kvadrato-kvadrátokhoz. Úgyhogy az alacsonyabbrendű mennyiségeket, mint nulla értékkel rendelkezőket, nem kell tekintetbe venni. Fentieket, amik az indivisibilia elméletben járatosak előtt jól ismertek, azért fűztem hozzá, hogy kitűnjön ebből a példából, amelyben a folytonos mennyiségek dimenzióival való számolást az egész számok hatványainak az összegéhez lehet kapcsolni, hogy látszólag legtávolabb eső dolgokat hogyan fűz egybe az egységet kedvelő természet.”¹⁹

A példa, amit az idézett szöveg említ, pár sorral feljebb olvasható, s nem egyéb, mint az akkor már jól ismert parabolakvadtarura általánosítása:

„A vonalak összessége úgy aránylik legnagyobbikuk négyzetéhez, mint1:2.
A vonalak négyzeteinek az összessége úgy aránylik a legnagyobbikuk köbéhez, mint1:3.
A vonalak köbeinek az összessége úgy aránylik a legnagyobb negyedik hatványához, mint1:4.

Tetszőleges fokú vonalak mindjének az összessége (*summa omnium*) úgy aránylik a legnagyobbjuk közvetlenül következő magasabb fokához, mint az egység eme magasabbfokú vonal kitevőjéhez.”²⁰

A mi jelölésünkben:

$$\frac{\int_0^x x^n dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

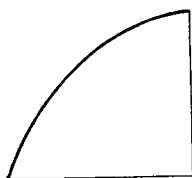
Azonban a mai formulák alkalmazása csak a megértés gyorsabbá tételére jó, a „summa omnium” nem $\int$ és a formula indoklásában nem összegezés, hanem

¹⁹ *Potestatum numericarum summa* — Éd. Pléiade 166–171, 171.

²⁰ Uo. 171.

az az analógia szerepel, amit PASCAL az aritmetikai háromszög segítségével egész számok sorainak a hatványaira talált. Pl. a négyzetre emelés esetében: „Természetes számok bármely számmal kezdődő sorában az utolsó tagot közvetlenül követő szám négyzetéből levonva a legkisebb tag négyzetét és a tagok számát, az eredmény egyenlő lesz a tagok összegének a kétszeresével.”²¹ Pl. ha a kérdéses számsor 5, 6, 7, 8, akkor $9^2 - 5^2 - 4 = 2 \cdot (5 + 6 + 7 + 8)$.

Innen az indivisibiliamatematika fent megadott elvei szerint a parabolák kvadraturájánál, mivel itt a „tagok összegé”-nek (*aggregatum ex omnibus*) maga a parabola alatti terület felel meg, s a vonalak négyzetéhez képest első hatványukat nem kell figyelembe venni, azonnal megkapjuk a másodfokú parabolára fent megadott szabályt.



1. ábra

Az egész számokra kapott eredmények kontinuumra való alkalmazását tehát a végtelenek „hierarchiája” tette lehetővé, aminek a felfedezését a matematika- és filozófiatörténészek egészen a legutóbbi időkig PASCALnak tulajdonították, holott maga PASCAL hangsúlyozta, hogy *quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensionis conferat, satis norunt qui in indivisibilium doctrina tantisper versati sunt*.²² A. KOYRÉ vette észre először, hogy PASCAL itt megelőző matematikusok munkájához kapcsolódik. „Ami az egész számok hatványainak az összegezése és az indivisibilia (folytonos mennyiségek) összegezése közötti összefüggést illeti — írja KOYRÉ —, ez kétségkívül kevésbé ismert ügy volt, és sokkal újabb, de éppen ez alkotja az alapját FERMAT és ROBERVAL munkáinak, akinek a hatása úgy látszik felváltja PASCALnál DÉSARGUES hatását.”²³

Az egész számok hatványösszegei és a folytonos mennyiségek hatványai közötti párhuzam képezte azonban nemcsak FERMAT és ROBERVAL, hanem még inkább WALLIS munkájának az alapjait is. WALLIS *Arithmetica infinitorum*-át FERMAT és ROBERVAL jól ismerték, s régóta vitában állottak az angol matematikussal.²⁴ CARCAVY, a roulette ürügyén kitűzött metodikai verseny egyik döntőbírája pedig nemcsak MERSENNE utódja, hanem ROBERVAL és PASCAL barátja is volt, aki már PASCAL DESCARTES-al vívott prioritási vitájában is PASCAL mellé állott.²⁵ A roulette-kihívás

²¹ Uo. 170.

²² „Akik valamennyire is járatosak az indivisibilia elméletben, azonnal értik, mennyiben alkalmazhatók ezek a fogalmak görbék által határolt területekre”. Uo. 170–171.

²³ KOYRÉ, A.: *Pascal savant*. P. CR. 259–295, 266. KOYRÉ ebben az alapvető fontosságú tanulmányában — melyik KOYRÉ tanulmány nem az? — azt mutatja ki, hogy PASCAL távolról sem emelkedett annyira kora tudományos vizsgálatainak a színvonala felé, mint azt az eddigi, hagiographikus-jellegű PASCAL irodalom állította. Pascal est un mathématicien d'un très grand talent, qui a eu la bonne chance d'avoir été, dans sa prime jeunesse, formé par Désargues ou, du moins, d'en avoir subi une profonde influence, et qui a eu la malchance d'avoir été, dans son âge mûr, profondément influencé par Roberval (im. 270). — Jelen közlemény KOYRÉ tanulmányának a téziséhez kapcsolódik, de szeretné kimutani, hogy szerencsére ROBERVAL hatása nem volt olyan mély, mint azt KOYRÉ — s talán maga PASCAL is — hitték. PASCAL a ROBERVAL-féle indivisibilia zsargon alatt visszatalál a tisztább görög forrásokhoz az infinitezimális matematika területén is.

²⁴ L. HOFMANN, J. E. *Geschichte der Mathematik* II., Berlin 1957, 36–37.

²⁵ DESCARTES és PASCAL között MERSENNE halála után romlik el véglegesen a viszony, amikor a nagy tapintattal rendelkező és jóindulatú MERSENNE feladatát, a tudósok egymás közötti levelezésének — ami akkor a tudományos folyóiratokat pótolta — lebonyolítását a jansenista-szimpatizáns CARCAVY veszi át. CARCAVY oly módon értesíti DESCARTES-et pl. PASCAL barométer-kísérleteiről

eleve úgy volt megtervezve, hogy PASCAL dicsősége és ROBERVAL prioritása biztosítva legyen.

Ezekben a következtetésekben kétségkívül igazat kell adnunk KOYRÉnak. Azonban KOYRÉ szerint metodikában sem hoztak semmi újat a *Roulette-levelek*, az alkalmazott módszer egyszerűen az indivisibiliamatematika „félreértése”. KOYRÉ véleménye szerint PASCAL „úgy látszik nem értette meg CAVALIERI fogalmainak a mélyebb értelmét, hiszen CAVALIERI számára egy geometriai objektum indivisibilis elemei eggyel kevesebb dimenzióval rendelkeztek, mint ez az objektum maga.”²⁶ PASCAL viszont a *Roulette-levelekben* úgy fogja fel a területet, mint „kis négyszögek indefiniált számának az összegét”, s az így felfogott területet azonosnak veszi a CAVALIERI által definiált „vonalak összegével.”²⁷

Ugyanez a véleménye a matematikátörténetben is kitűnően járatos BOURBAKInak²⁸, s ez volt már lényegében CANTOR felfogása is.²⁹ Szerintük ROBERVAL és nyomában PASCAL „félreértették” vagy legalábbis átinterpretálták CAVALIERI infinitezimális módszerét, de ez a „félreértés” termékeny volt, mert ebből született meg LEIBNIZ kezén az integrálszámítás.

PASCAL fentebb ismertetett vizsgálatai azonban azt mutatták, hogy ő tökéletesen tisztában volt az indivisibilia módszerrel, s ha a *Roulette-levelekben* a vonal aggregátumok helyett végtelenül finomítható négyszög beosztás összegeként állítja elő a területet, annak más oka kell legyen, nem az indivisibilia módszer „félreértése”. ROBERVAL valóban azt hitte, hogy az indivisibilia módszert „javítja meg”, amikor a „vonallösszeget” indefinit-kicsiny négyszögek összegével váltja fel. De PASCAL csupán elnevezéseiben követi ROBERVALT, PASCALnál egészen másról van szó, nem az indivisibilia módszer „megjavításáról”. PASCAL a *Roulette-levelekben* más módszert használ, mint amire még az aritmetikai háromszöggel kapcsolatos infinitezimális megfontolásaiban hivatkozott, a *Roulette-levelek* módszere nem az indivisibilia módszer többé.

Már CANTOR felhívta rá a figyelmet,³⁰ hogy a XVII. század NEWTON—LEIBNIZ előtti matematikájában az indivisibilia módszer mellett kifejlődik egy másik módszer is, amelyik az antikvitás megközelítő módszereihez kapcsolódva területeket keskeny területsávok, térfogatokat keskeny paralelepipeda számának a növelésével akart kimeríteni. *Exhaurire*: a szó is most lép fel először, GREGORIUS a SANTO VINCENTIO³¹

is, ami a nagy filozófusra fölöttébb sértő volt. S már ekkor, 1649-ben kénytelen DESCARTES a ciklois-kérdésben is védekezni ROBERVAL prioritás-igényeivel szemben: Car, pour l'aire de la ligne décrite par la Roulette, dont il s'est fort vanté, c'est Torricelli qui l'a trouuée: & c'est moy qui luy ay enseigné à en trouuer les tangents (DESCARTES levele CARCAVYHOZ, 1649. aug. 17-én. Ouvres, Adam-Tannery-féle kiadás V 391–401, 400.).

²⁶ KOYRÉ, A.: *Pascal savant*. P, CR. 269.

²⁷ Uo. 270.

²⁸ BOURBAKI, NICOLAS: *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960., 194: Il est vrai que par la suite beaucoup de mathématiciens, tel que Roberval et Pascal, préfèrent voir, dans ces ordonnées de la courbe dont on fait la „somme”, non des segments de droite comme Cavalieri, mais des rectangles de même hauteur infiniment petite, ce qui n'est pas un grand progrès du point de vue de la rigueur (quoi qu'en dise Roberval).

²⁹ Cantor II 877, de CANTOR haladásnak tartja ROBERVAL átértelmezését.

³⁰ Uo. 895.

³¹ GREGORIUS a S. VINCENTIO (1584–1667) belga jezsuita páter 1647-ben megjelent, de évtizedek óta készen levő műve, az *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conicorum*, Antwerpen 1647. számos nehezen érthető antik geometriai stílusban megírt tétel mellett néhány meglepően modern és a későbbiekben nagy jelentőségű elvet tartalmaz, amit elsősorban J. E. HOFMANN nyo-

munkájában. CANTOR nagy művét azonban G. ENESTRÖM kritikája s a nyomában orientálódó matematikatörténetírás „megbízhatatlannak” minősítette,³² s mikor több mint egy félévszázad múlva WHITESIDE újra felfedezi a XVII. század matematikájának ezt a fontos irányát, már nem is hivatkozik CANTORRA.

WHITESIDE alapvető fontosságú monográfiájával egybeült kell részletesen foglalkoznunk, itt csak az exhaustiós módszereket ismertető fejezetét futjuk át, mert enélkül PASCAL infinitezimális matematikáját nem lehet megérteni. WHITESIDE fedezi fel, hogy a CAVALIERI—ROBERVAL-féle indivisibilia módszerekkel ellentétben, amelyek végeredményben kontinuum számosságú halmazok megfeleltetésén alapulnak, az exhaustiós módszerek utat nyitnak a végtelen, ill. a kontinuum aritmetizálása felé. WHITESIDE szerint a XVII. század úgy általánosítja az „egyszerű” görög exhaustiós technikát, hogy az „aequivalenssé válik egy konvex ponthalmazon értelmezett CAUCHY—RIEMANN-féle határozott integrállal.”³³

Egyelőre tekintsünk el attól a ténytől, hogy a görög módszer csak azért látszik „egyszerűnek” WHITESIDE előtt, mert a valós számok jólrendezhetőségéből indul ki, s így a görög módszer bonyolult arányelméleti struktúráját a ponthalmazok elméletének a szellemében fogalmazhatja át.³⁴ A mi szempontunkból most az a fontos, hogy WHITESIDE interpretációját elfogadva, a görög módszer, PASCAL módszere és a RIEMANN-integrál valóban nagyon közel kerülnek egymáshoz. A XVII. század matematikusainak a WHITESIDE által megfogalmazott „arkhimédészi modellt” csak az egyenlőség egyenlőtlenség melletti megengedésével kellett általánosítaniuk ahhoz, hogy alkalmassá váljon konvex görbék alatti területeknek a számítására.

Ebben a XVII. század által kibővített exhaustiós modellben centrális szerepet játszik a konvexitás fogalma. Már maga PASCAL tisztában volt ezzel, és a *Dimension des lignes courbes*-ban külön *avertissement*-ként, elvként emeli ki: „Feltételezem az arkhimédészi elv érvényességét: Ha két, azonos síkban fekvő, közös végpontú görbe vonal ugyanazon oldal felé görbül, az, amelyik benne foglaltatik a másikkban, rövidebb lesz mint az, amelyik magában foglalja.”³⁵

A matematikatörténetírás, folyton LEIBNIZ elődjét keresve PASCALban, PASCAL matematikai oeuvre-jéből az „előremutató” (értsd: LEIBNIZ felé mutató) vonásokat emelte ki: a „karakterisztikus háromszöget”, a „görbe mentén történő integrálást”, a „kettős integrálást”, a „parciális integrálást”, s átsiklott, mint az antikvitás felé való visszatérésen a *Dimension des lignes courbes* problematikáján.³⁶ PASCAL maga is az antik módszer alkalmazásának nevezte ezt a művét, s a matematikatörténetírás szívesen hitt neki. Ennek a műnek a módszere ugyanis valóban semmiképpen sem illeszthető be azokba a keretekbe, amiket a matematikatörténetírás gyártott

mán — csak a legutóbbi évek történetírása kezd igazán értékelni. L. pl. CH. NAUX: „L'Opus géométricum de Grégoire de Saint-Vincent”, *Revue d'Histoire des Sciences* 15 (1962), 93—104.

³² Egyedül GEORGE SARTON kelt ismételtlen CANTOR nagy művének a védelmére. Kétségtelen, hogy CANTOR, mint a késő tizenkilencedik század többi nagy történésze is — talán csak BURCKHARDT és ACTON volt kivétel — túlságosan megértette a forrásait, ott is, ahol azok alig, vagy egyáltalán nem érthetőek. CANTOR a tudománytörténetírás kritika és interpretáció előtti korában írt, abban a boldog korban, amikor a történészek még elhitték, hogy a források valóban arról szólnak, ami le van írva bennük.

³³ WHITESIDE 335.

³⁴ Uo. 332—333.

³⁵ Éd. Pléiade 320.

³⁶ HOFMANN, J. E.: *Geschichte der Mathematik* II. Berlin 1947, 42.: azonban mint „bedeutzende Einzelleistung”-ot emeli ki.

magának a CAVALIERI—TORRICELLI—ROBERVAL—PASCAL-féle „indivisibilia” elmélet-ről, mint a LEIBNIZ-féle kalkulus „elődjéről”.³⁷ WHITESIDE azonban kimutatta, hogy PASCAL éppen ebben a művében, a „kibővített exhaustios modell” egyik legmesteribb alkalmazásával, a kor legfontosabb matematikai tendenciáihoz csatlakozik. S így ez a mű, ahelyett, hogy az antikvitás felé való visszatérést jelentene, a kor legjellegzetesebb matematikai tendenciáinak egyikét fejleszti tovább.

Az alábbiakban megkíséreljük kimutatni, hogy ezt a módszert használta PASCAL már a *Roulette-levelek*ben is, csupán ott még az indivisibiliamatematikából származó elnevezések köntösébe öltöztette.³⁸ De ezt a módszert — WHITESIDE-től eltérően — nem tekintjük a CAUCHY—RIEMANN-féle integrál elődjének, vagy éppen korai megfogalmazásának, mert PASCAL módszeréből hiányzik a konvergencia, a határérték fogalma. PASCAL módszerének a lényegét a XVII. század hasonló módszereihez viszonyítva kell megérteni.

Az exhaustiós módszer területszámításra való adaptálásának az ötlete nem új, hiszen ezt használta már EUDOXOS a körterület számítására. S láttuk, hogy a XVII. században ez a módszer LUCA VALERIO,³⁹ GREGORIUS a SANTO VINCENTIO és tanítványaiak kezén fokozatosan újraéled. GREGORIUS a SANTO VINCENTIO tanítványa volt A. TACQUET,⁴⁰ akinek kitűnő összefoglaló munkáit PASCAL is jól ismerte.

És ezt a módszert alkalmazza, s hozzá éppen a ciklois területének a kiszámítására, DESCARTES is.⁴¹ De nem úgy, amint azt WHITESIDE modern matematikai-logikai apparátussal dolgozó strukturanalizise vázolja. És nem úgy, amint PASCAL a *Dimension des lignes courbes*-ban. A DESCARTES eljárásában sajátságosan keveredik indivisibilia módszer és exhaustiós módszer. Az indivisibiliamatematikából megtartja azt az elvet, hogy két geometriai alakzat — folytonos halmaz — összehasonlítását azok elemeinek az összehasonlítására vezeti vissza. De a területet nem ezeknek az egy-egy kisebb dimenziójú elemeknek, a vonalaknak az „összességeként” adja meg,

³⁷ Még az egyébként olyan jól tájékozott BOURBAKI is. Im. 194. Egyedül KOYRÉ hívta fel a figyelmet arra, hogy PASCAL infinitezimális matematikájában nem szabad LEIBNIZ „elődjét” látni, s hogy pl. a „karakterisztikus háromszög” PASCAL számára egyáltalában nem „karakterisztikus”, mivel PASCAL ne pense pas *rapport*, il pense *objet* et c'est pour cela qu'il manque la découverte leibnizienne... KOYRÉ, im. 269.

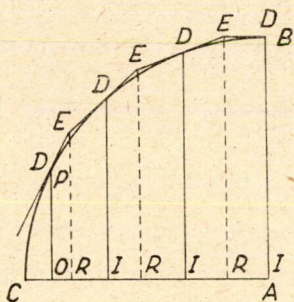
³⁸ JEAN ITARD felismeri ezt aényt. A *Lettre de Monsieur Dettonville a Monsieur Carcavi*-ből idézve azt a részt, ahol PASCAL az indefinit számú négyszög összege helyett a somme des ordonnées elnevezés használatát indokolja (Éd. Pléiade 232), megjegyzi: En fait, c'est un résumé de la méthode d'exhaustion des Anciens, et de son expression plus rapide dans le langage des indivisibles. JEAN ITARD: „De l'algèbre symbolique au calcul infinitesimal.” — *Histoire générale des sciences publiée sous la direction de René Taton, tome II. La science moderne (de 1450 à 1800)*. Paris 1958, 207–241, 224.

³⁹ LUCA VALERIO (552–1608) 1604-ben megjelent *De centro gravitatis solidorum*-a éppen az antik exhaustiós eljárás felélesztésével hatott a XVII. századi infinitezimális módszerek fejlődésére. Már ez a mű is mutatja, hogy a XVII. századi infinitezimális módszerek szempontjából milyen jelentősek voltak a súlypont-problémák, amik PASCAL roulette-kihívásának a lényegét is teszik. Erre a kérdésre nézve I. PIERRE COSTABEL: „Autour de la méthode de Galilée pour la détermination des centres de gravité”, *Revue d'Histoire des Sciences* 8 (1955), 116–128.

⁴⁰ A. TACQUET (1612–1660) szerepét ebből a szempontból már CANTOR felismerte, Cantor II 896. ANDREAS TACQUET: *Cylindricorum et annularium libri IV...* Antwerpen 1651 és a folytatását képező *Cylindricorum et annularium liber quintus...* Antwerpen 1659 címen megjelent könyvei a kor kedvelt tankönyvei közé tartoznak. L. ELISABETH SAUVENIER—GOFFIN: Les sciences mathématiques et physiques à travers le fonds ancien de la bibliothèque de l'Université de Liège. II. Les XVII^e et XVIII^e siècles. — *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*. Cinquième série-tome V., 135.

⁴¹ DESCARTES levele MERSENNE-hez 1638 július 27-én. Adam—Tannery-féle kiadás, II 253–288.

mint ez az indivisibilia módszerben történik, hanem egy végtelenül finomítható területbeosztással kimeríthetetlen *összegként* definiálja. S éppen ez a keverés a lényege annak a módszernek is, amit PASCAL a *Roulette-levelekben* és a *Traité des sinus du quart de cercle*-ben használ. PASCAL azonban sokkal világosabban, módszeresebben jár el, mint DESCARTES. Ami DESCARTESnél egyszerű, „evidens” ötletként jelentkezik, az PASCALnál propositiókkal alátámasztott levezetés formáját ölti. DESCARTES két végtelenül finomítható területbeosztást akkor tekint egyenlőnek, ha a beosztások egyes elemei — a kis részterületek — egyenlőek: „Mivel, ha egy mennyiség minden része egyenlő egy másik mennyiség minden részével, az egész is szükségszerűen egyenlő az egészszel; és ez annyira világos fogalom, hogy azt hiszem, csupán a minden dolognak az igazsággal ellentétes névadás szenvedélyének a megszállottai tagadhatják.”⁴²



2. ábra

PASCAL nem evidenciára hivatkozik, hanem *definiál*: „Legyen (2. ábra) ABC egy körnegyed, melynek AB sugarát tekintsük tengelynek és a reá merőleges AC sugarat bázisnak; legyen D a körív egy tetszőleges pontja, melyből meghúzzuk a DI sinust az AC sugárra; és a DE érintőt, amelyen tetszés szerint vegyünk fel két E pontot s húzzunk ezekből merőlegeseket az AC sugárra.

Azt állítom, hogy a DI sinus és az EE' érintő szorzata egyenlő a bázis két párhuzamos közé bezárt RR' szakaszából és az AB sugárból alkotott szorzattal (3 ábra).

Az AD sugár ugyanis úgy aránylik a DI sinushoz, mint EE' aránylik RR' -hez vagy EK -hoz: ami világosan kitűnik a DIA és az EKE' derékszögű háromszögek hasonlóságából, utóbbi pedig az $EE'K$ vagy EDI és DAI szögek egyenlőségéből következik.

I. Propositio

A körnegyed egy tetszőleges ívében vett sinusok összege egyenlő a bázis két szélső sinus közé zárt szakaszának és a sugárnak a szorzatával.

A bizonyítás előkészítése

Legyen BP egy tetszőleges körív, amit D pontokban indefiniált számú részre osztunk, ahonnan meghúzzuk a PO , DI stb. sinusokat: ... AO méri a $BAPO$ ív szélső sinusai közötti távolságot. ...

Az I. Propositio bizonyítása

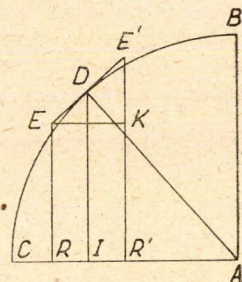
Azt állítom, hogy a DI sinusok összege (megszorozva mindegyik a DD ívek egyikével, amint az magától értetődik) egyenlő az AO egyenes és az AB sugár szorzatával.

Mert minden D pontban meghúzza a DE érintőt, amelyek mindegyike E pontokban metszi a szomszédját, és meghúzza az ER merőlegeseket, látható, hogy mindegyik DI sinus és EE érintő szorzata egyenlő a megfelelő RR távolságok és az AB

⁴² Uo. 262.

sugár szorzataival. Így tehát a DI sinusok mindegyikét megszorozva a saját (egymás között mind egyenlő) EE érintőjével, az így kapott négyszögek halmaza (ensemble) egyenlő lesz az egyes RR szakaszok AB sugárral képezett négyszögeinek a halmazával; azaz (mivel mindegyik érintő meg van szorozva a sinussal és mindegyik szakasz az AB sugárral) a DI sinusok összege (somme) megszorozva mindegyik az EE érintők egyikével egyenlő az RR távolságok összegének, vagyis AO -nak az AB -vel képezett szorzatával. De mindegyik érintő egyenlő az egymás között egyenlő DD ívek egyikével. Úgyhogy az egyenlő kis ívek egyikével megszorított sinusok összege egyenlő a sugár és az AO távolság szorzatával.”⁴³

Mi sem egyszerűbb, mint ezt az eredményt a vonal mentén vett integrálás nyelvére lefordítani, s ha az ember LEIBNIZ felől gondolkodik, ez szinte elkerülhetetlen. De PASCAL még annyira se ismerte LEIBNIZ matematikáját, mint a mai matematikusok, viszont összehasonlíthatatlanul jobban ismerte náluk a görög matematikát és kora modern matematikai módszereit. Ismerte, egyetlen szóban utal is rá,⁴⁴ DESCARTES roulette területét megadó módszerét is. S ez a módszer lényegében, gondolati struktúráját tekintve ugyanaz, amit PASCAL használ a fentebb idézett szövegben. DESCARTES a következőképpen jár el: vesz két területet, az egyik, a kör területe adott, a másikat, a ciklois egy szegmentumának a területét úgy kell kis, végtelenül finomítható területrészekből megszerkeszteni, hogy mindegyik kis területrésztnek feleljen meg az adott kör egy-egy kis részlete. Ezt a ciklois-szegmentumban s a neki megfelelő félkörben létesített háromszögebeosztással éri el, a két beosztás különböző alakú, de egyenlő területű háromszögeit megfeleltetve egymásnak. Magát a ciklois-szegmentumot egy jellegzetesen indivisibiliamatematikai megfontolással hozza olyan alakra, ahol ez az összehasonlítás könnyen elvégezhetővé válik: kimutatja két, a kérdéses ciklois-szegmentumban s egy félkörben felvett egyenes sereg egyes egyeneseiről, hogy egyenlő hosszúak. Ahhoz, hogy ebből a két terület egyenlőségére lehessen következtetni, az indivisibiliamatematika alapszabálya szerint a két egyenes seregnek azonosan irányítotttnak kell lenni, azonos párhuzamos egyenesekből kell állani. De ezt az azonos irányítottságot létrehozva, DESCARTES a kör és a ciklois-szegmentum azonos hosszúságú, párhuzamos egyenes szakaszai közötti összefüggést nemcsak arra használja fel, hogy segítségével a két terület egyenlőségét bizonyítsa. Ezen túlmenően egy-egy területbeosztást létesít a két összehasonlítandó területben az indefinit párhuzamos egyenesek felhasználásával, s az egyes részterületek páronkénti egyenlőségéből következtet a két egész terület egyenlőségére.⁴⁵



3. ábra

⁴³ *Traité des sinus du quart de cercle*, Éd. Pléiade 275–282, 275–277.

⁴⁴ *Histoire de la roulette ...* 10 octobre 1658. Éd. Pléiade 194–200, 195: on reçut leurs solution — írja MERSENNE régi felhívására célozva — presque en même temps, l'une de M. de Fermat, conseiller au parlement de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes; et toutes deux différentes l'une de l'autre, et encore de celle de M. de Roberval, de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes il n'est pas difficile de reconnaître qu'elle est celle de l'auteur, car il est vrai qu'elle a un caractère particulier, et qu'elle est prise par une voie si belle et si simple qu'on connaît bien que c'est la naturelle.

⁴⁵ Az *AKFGCHELA* ciklois-szegmentumot DESCARTES egy egyszerű, de hosszadalmas indivisibilia geometriai megfontolással $\varphi\psi\chi\omega\varphi$ alakra hozza, ebben és egy $\alpha\delta\beta$ félkörben azonos

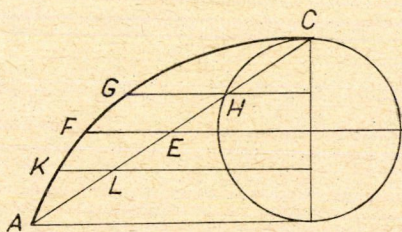
A kis részterületek számát úgy kell szaporítani, *qu'on voudra à l'infini*,⁴⁶ írja DESCARTES, hogy közben a két összterület egymásnak megfelelő részterületei egyenlők maradjanak.

PASCAL bizonyításában az adott terület — ami DESCARTES-nál a félkör volt — egy négyszög, az összehasonlítandó, kis részterületekből megszerkesztendő terület a sinusgörbe egy része alatti terület. A két területbeosztás egyenlőségének a kimutatására szolgál a BC körívet helyettesítő érintősokszög egyes kis $EE'K$ elemi háromszögeire alapított bevezető lemma, amit a matematikatörténetírás a „karakterisztikus háromszög” bevezetéseként ismert félre. PASCAL-nál azonban szó sincs egy „véges” és egy „végtelen kicsi” háromszög összehasonlításáról, mint LEIBNIZ-nál. PASCAL-nál ez a lemma egyszerűen két indefinit területbeosztás területegyenlőségének a kimutatására szolgál. PASCAL matematikája, éppen úgy, mint a DESCARTESÉ, sokkal precízebb, mint LEIBNIZ és a LEIBNIZ nyomában orientálódó matematika. Az infinitezimális módszerek területén egész a XIX. század elejéig nem érik el újra a pascali precizitást.

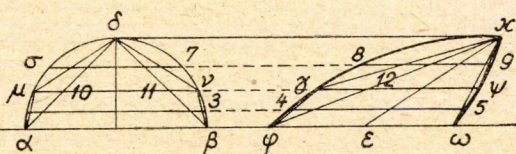
De ez a pascali precizitás egészen más jellegű, mint a XIX. századi. A végtelen finomítás ugyanis PASCAL-nál éppen úgy nem határátmenet jellegű, mint DESCARTES-nál. Nem szabad meglepősen PASCAL olyan megfogalmazása sem, hogy az EE sokszögbeosztás a végtelen finomítás esetében egyenlő lesz a DD körívvel, „mert ekkor az összes, egymás között egyenlő EE érintőknek az összege nem különbözik az egész BP ívtől, ill. az egymással egyenlő DD ívek összegétől, csak egy bármely adottnál kisebb mennyiséggel.”⁴⁷

Csak mi ismerjük itt fel az érintősokszög beosztás „határértékét” a körívben, PASCAL-nál szó sincs a függvényfogalom által lehetővé tett, a limes-összefüggésben szereplő végtelenről. A PASCAL végtelenje még az antik „kimeríthetetlen”. De a kimeríthetetlenséget a körülményes *reductio ad absurdum*ra való hivatkozás helyett elvként mondja ki, s ezzel túllép a görög kimeríthetetlen-végtelen fogalmán a modern limes-végtelen felé. Ahhoz azonban, hogy a modern végtelennel összeejthető lenne, hiányzik belőle a konvergencia kritérium. Az a megállapítás hiányzik, hogy az egyre

párhuzamos egyenes sereg egyeneseinek $a\beta$ és $\varphi\omega$, $\mu\nu$ és $\gamma\psi$ szegmentumairól kimutatja, hogy egyenlők, s ebből az indivisibilia geometria szabályai szerint következik a két idom, $\alpha\delta\beta$ és $\varphi\gamma\kappa\psi\omega\epsilon\varphi$



4. ábra



5. ábra

6. ábra

egyenlősége. De DESCARTES nem elégszik meg ezzel a bizonyítással. A két idomon átfutó, indefinit számú párhuzamos vonalat arra is felhasználja, hogy egy-egy, a félkört, ill. a $\varphi\gamma\kappa\psi\omega\epsilon\varphi$ ciklois-szegmentumot egyre jobban megközelítő, indefinit számú háromszögbeosztást is létesítsen a segítségükkel, amelyeknek az egyes elemi háromszögeiről kimutatja, hogy egyenlő területűek.

⁴⁶ Idézett levél, Adam—Tannery-féle kiadás II., 262.

⁴⁷ *Traité des sinus du quart de cercle*, Éd. Pléiade 277.

kisebb oldalhosszúságú érintőszögek és a körív közötti különbségek természetes számok szerint rendezett sorában mindig találhatunk olyant, amelyiktől kezdve minden tag kisebb mint egy tetszőlegesen kicsiny ε , s hogy csak az ε -tól függ, hanyadik lesz ez a különbség a természetes számok szerint elrendezett különbségek sorában.

Formulában: ha a $K_m = |(EE)_m - BP|$ különbségek $K_1, K_2, \dots, K_m, \dots$ sorában minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N = N(\varepsilon)$ természetes szám úgy, hogy az n -ik különbség $K_n = |(EE)_n - BP| < \varepsilon$ hacsak $n > N$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat konvergens és határértéke BP ; $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = BP$.

A mi szá munkra ez az összefüggés definiálja a végtelent. A XVII. század azonban nem ismeri a határérték fogalmát,⁴⁸ és nem ismeri a függvény fogalmát sem úgy, ahogy azt ma értjük. De a végtelent, azt ismeri a XVII. század is, mint ahogy ismerték a görögök is. Azonban mind a háromféle végtelen más és más. A XIX. század a függvényfogalom segítségével definiálta, mondhatnánk „skatulyába zárta” a végtelent. A görögök nem ismerték a függvényt, de valamire, ami bizonyos fokig helyettesítette ezt a matematika szívéet jelentő fogalmat, nekik is szükségük volt. Ez volt az arány. De míg a függvény szinte természetéből következően kívánja magába zárnai a zérust és a végtelent, az arány éppen ellenkezőleg, kiveti magából. Az arányelmélet számára a végtelen a nem-arány, az *alogos*, az irrationális. S ahol, mint pl. a körterület kiszámításánál nem lehet kiküszöbölni, ott megkerülük: azt bizonyítják, hogy a körterület-soha nem mérhető ki semmiféle egyenes vonalak által határolt sokszöggel, bármilyen kicsire választjuk is a sokszögek oldalait. Ez a nem-kimeríthetőség azonban bizonyítható, s amit bizonyítani lehet, az van. SZABÓ ÁRPÁD vizsgálatai mutatták meg,⁴⁹ hogy a bizonyíthatóság kriteriuma milyen óriási jelentőségű volt a matematika kialakulása szempontjából. S arra is ő hívta fel a figyelmet, hogy ez a kriterium a pontosan megadható és pontosan meg nem adható ellentéppárba alakulva még a PLATON korabeli matematikai aranykorban is milyen nagy szerepet játszott a görög matematika fogalomalkotásában.⁵⁰

A mi esetünkben ez a kriterium kétféle terület megkülönböztetésére vezetett. Vannak olyan területek, amik egyenes vonalalak által határolt idomokkal kimeríthetők, s vannak olyanok, amik nem. Az előbbi területeket mindig pontosan át lehet alakítani négyzetté, utóbbiakat nem. Ezeket csak megközelíteni lehet, tetszés szerinti pontossággal. A görög matematika nagy hiányossága, hogy kitér ennek a megközelíthetőségnek a direkt, exakt definíciója elől, sohasem jut el a limes fogalom szilárd aritmetikai konstrukciójához. A görög matematika számára nincs határérték, a görög matematika számára csak „kimeríthetetlen” van. Ez a kimeríthetetlen, tartalmát illetően persze nagyon hasonlít a mi limes fogalmunkhoz, úgyannyira, hogy a modern és a görög matematikát egyaránt oly kitűnően ismerő és művelő B. L. van

⁴⁸ A végtelen sorok elméletének a kialakulása előtt nem célszerű határértékről beszélni, még abban az óvatosabb és módosított értelemben sem, ahogyan pl. UGO CASSINA teszi: *Il cocetto di limite in Luca Valerio e Pietro Mengoli*, Actes du Symposium International des sciences physiques et mathématiques dans la première moitié du XVII^e siècle. Pise—Vinci 16—18 Juin 1958. Paris 1960, 8—18.

⁴⁹ SZABÓ ÁRPÁD: „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I—II”. *Matematikai Lapok*, 8 8—36, 232—247.

⁵⁰ SZABÓ, Á.: „Anfänge des euklidischen Axiomensystems.” *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960) 37—106. Továbbá „Der mathematische Begriff *ὄραμα* und das sog. geometrische Mittel.” (Megjelenés alatt.)

der WAERDEN azonosnak veszi a kettőt.⁵¹ S ez így is van, ha a modern limes fogalom ismeretében interpretáljuk át a görög eljárást. De a görögök számára ott, ahol mi most jóldefiniált aritmetikai konstrukcióval dolgozunk, s pontok egymásbatolt végtelen soraival sűrítjük tele a teret, a görögök számára ott nem volt semmi. Ahol mi most egy korlátos halmaz egyetlen sűrűsödési pontját, a határértéket látjuk, ott a görögök egy általuk abszolútnak elismert érvényű, de *közvetett* bizonyítás, a *reductio ad absurdum* segítségével igazolják valaminek a létezését — adott esetben a körét —, de ezt a valamit nem tudják egy aritmetikai konstrukció segítségével megragadni.

A görög gondolkodás hanyatlásakor, a későhellenisztikus korban, amikor a matematika újra épp olyan szorosan összefonódik metafizikai megfontolásokkal, mint a görög gondolkodás kezdetekor,⁵² a kör és a gömb esetében ez a bizonyíthatóság és mégis konkrétan meg-nem-ragadhatóság speciális metafizikai értelmet nyer. A körterület, ami nem mérhető és mégis van, mert értelemmel megragadható, magassabbfokú létezést jelent, mint az érzékszervekkel megragadható négyzeté. A kör és a gömb a neoplatonizmusban a magasabbfokú létezés szimbóluma lesz. Azonos az Egy-gyel, ami megint nem más, mint maga a létező, az Isten.

A keresztény gondolkodás ezt a kört kapja örökségül, a kört, amelyik magába zárja az eget és a végtelent. A keresztény középkor egyik utolsó nagy gondolkozója, NICOLAUS CUSANUS foglalta talán össze legfrappánsabban ezt a szétágazó, évezredes kommentár-irodalmat: a végtelen a *coincidentia oppositorum* realizációja, ahol az Egyik és a Másik összeesnek, a végtelen egyenes kör, de egyúttal háromszög is, négyszög, ötszög, sokszög.⁵³ Kör, amelyiknek a középpontja mindenütt van, s kerülete nincsen sehol. A végtelennek csak a *létezését* ismerjük, a természetét nem.

Nous connaissons qu'il y a un infini et ignorons sa nature ... írja PASCAL a híres *Infini. Rien* fragmentumban.⁵⁴ A végtelen világmindenség *est une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part*.⁵⁵ Még a szavak is ugyanazok, mint CUSANUSnál, akit egyébként PASCAL valószínűleg nem ismert első kézből.⁵⁶ De erre nem is volt szüksége. Mióta M. de GANDILLAC kimutatta,⁵⁷ hogy a *Pensées*

⁵¹ WAERDEN, B. L. van der: *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart 1956., 306: Der moderne Limesbegriff ist in seiner vollen Schärfe darin vorhanden: Die eingeschriebenen Polygone nähern sich dem Kreis in dem präzisen Sinn, dass die Differenz kleiner gemacht werden kann als ein beliebig vorgegebenes Flächenstück. — Ugyanezzel a felfedezéssel MORITZ CANTOR még WALLIST ajándékozta meg (Cantor II 901). Leghelyesebb talán, ha megtarjuk CAUCHY-nak. A végtelen aritmetizációja — a határérték fogalma — a sorelmélet olyan fokú fejlettségét követeli meg, ami a XIX. század előtt nem található meg.

⁵² VÖ. JOJA, ATHANASE: „Éléatisme et logique formelle” — *Études d'Histoire et de Philosophie des Sciences*. Éditions de l'Académie de la République Populaire Roumaine 1962., 243–287, 287: Dans la conception des Éléates, PHYSIS s'est transformée en META-physis. Mais tout cela ne fut pas l'aventure personnelle d'un certain Parménide fils d'un certain Pyres, mais une aventure de la pensée humaine. Et point une simple aventure, mais une étape, une halte nécessaire.

⁵³ TÓTH I. hívta fel rá a figyelmet, hogy ezzel a definícióval túllép a görög fogalmon az *aktuális végtelen* felé (I. Tóth: „La géométrie non euclidienne dans le développement de la pensée.” — *Études d'Histoire et de Philosophie des Sciences* 53–70. 68), ami bizonyos fokig könnyíti az „exhaustios végtelen” és az „indivisibilia végtelen” közelítését.

⁵⁴ PASCAL, BLAISE: *Pensées sur la Religion et sur quelques autres sujets*. Avantpropos et notes de Louis Lafuma. Édition Delmas I–II Paris 1947, I C, 188.

⁵⁵ Uo. I 14^o, 203.

⁵⁶ MESNARD szerint a hasonlóságok valószínűleg GASSENDI közvetítésével magyarázhatók (P, CR. 380), de a *Pensées* végtelen fogalmához nagyon hasonló gondolatok találhatók, mint JEAN ORCIBAL kimutatta, CHARRON-nál is („Le fragment infini-rien et ses sources”, P, CR. 159–195).

⁵⁷ GANDILLAC, M. de: „Pascal et le silence du monde”. — P, CR. 342–385.

végtelenre vonatkozó kitételei milyen ősi, elterjedt és sokszor banalitásszámba menő megfogalmazásokon alapulnak, a filozófiatörténészek is egyre nagyobb súlyt helyeznek az irodalomtörténész G. LANSON figyelmeztetésére: PASCALnál csillogó stílus sokszor sejtet eredetét ott is, ahol a kor közismert banalitásait ismétli el.⁵⁸ A *Pensées*-ban az indivisibiliamatematika végtelenje — *Le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant*⁵⁹ — mellett megjelenik a görög-neoplatonikus végtelen is, a *Pensées* végtelen fogalmán ugyanazt a keverést látjuk, mint az 1658-as év matematikai termésében, aminek a kedvéért egy alkalmi fogfájás következtében abbahagyta volna a *Pensées*-n való munkát.

S ha hinni lehet a *Pensées* kronológiáját és eredeti elrendezését illetően oly nagy nehézségekkel küzdő PASCAL-filológiának, akkor a matematikai szempontból centrális jelentőségű *Infini. Rien* töredék a *Pensées* genezise és felépítése szempontjából is központi jelentőségű, s lehet, hogy az egész nagy apologetikus mű alapötletét jelentené.⁶⁰ S akkor AMOS DETTONVILLE⁶¹ és SALAMON de TULTIE⁶² megmaradhat ugyanaz a BLAISE PASCAL. A *Roulette-levelek* és a *Pensées* ugyanazon a végtelen fogalmon épülnek.

A görögök megkerülték a végtelent, mint „kimeríthetlent”, a modern matematika befogta a limes fogalommal. PASCAL a görögök által nyíltan feltárt „kimeríthetlenséget” elrejtette az indivisibilia geometriából átvett elnevezések és néhol fogalmak mögé. Matematikai munkája legvégén, a *Dimension des lignes courbes*-ban szétválasztja az indivisibilia fasszádtól a görög lényegét, s ehhez a művéhez szinte törés nélkül csatlakozhatna CAUCHY munkája. De PASCAL itt is a XVII. század keretei között marad, a „kimeríthetlenség” nála nem axiomatikus jellegű, a valós számtest jólrendezhetőségén alapuló fogás, mint nálunk, a „kimeríthetlenség” nála metafizikai realitás. Ugyanúgy, mint még CUSANUS számára, ugyanúgy, mint a kortárs-gondolkodás számára általában.

Ez elől a végtelen elől menekült DESCARTES az algebrai egyenletek pontos, tiszta világába. A behelyettesíthető világába. Amiből a függvények és a modern matematika formavilága nő ki, aminek a segítségével a XIX. század definiálja majd a végtelent.

(Beérkezett: 1963. IV. 1.)

⁵⁸ BRUNET, GEORGES: *Un prétendu traité de Pascal. Le Discours sur les passions de l'amour*. Paris 1959, 47–48.

⁵⁹ „A véges megsemmisül a végtelen jelenlétében és pusztá semmivé válik” — *Pensées*, Éd. Lafuma I C, 188.

⁶⁰ Vö. BRUNET, GEORGES: *Le Pari de Pascal*, Paris 1956, 47–48 és 50–51.: Or le Pari porte sur l'existence de Dieu, et a pour point de départ cette affirmation que „nous sommes incapables de connaître ni ce qu'il est ni s'il est.” S így nem érvényes az Isten végtelenségére alapozó Istenbizonyíték, mert a végtelen létezését tudjuk. „Nous connaissons l'existence de l'infini et ignorons sa nature, parce qu'il a été due comme nous, mais non pas des bornes comme nous. Mais nous ne connaissons ni l'existence ni la nature de Dieu, parce qu'il n'a ni été due ni bornes.” (*Pensées* éd. Lafuma I C, 188). BRUNET szerint a Pari — az Isten léte történet „fogadásán” alapuló Istenbizonyíték — az infini-rien fragmentumból nő ki: A l'origine on trouve un projet de réfutation de la preuve de l'existence de Dieu fondée sur l'idée de l'infini (im. 118).

⁶¹ *Louis de Montalte*-ből, amely név alatt PASCAL a *Vidéki leveleket* kiadta, készített anagramma, amely alatt a *Roulette-levelek* és általában az 1658-as év matematikai termése megjelent.

⁶² *Louis de Montalte*-ből készített másik anagramma, amelyen PASCAL a nagy apologetikus művét szándékozott publikálni.