TENZORIÁLISAN ÖSSZEFÜGGŐ TEREK EKVIVALENCIA ÉS GÖRBÜLET ELMÉLETÉHEZ

Írta: TAMÁSSY LAJOS

Bevezetés

A párhuzamos eltolás, vagy a vele igen szoros kapcsolatban levő kovariáns vagy abszolút deriválás vizsgálata a differenciálgeometria egyik fontos részét képezi.[1] Annak ellenére azonban, hogy a vektorok deriválása a differenciálgeometriai vizsgálatok egy jelentős részét teszi ki, a tenzorok abszolút deriválása egészen a legutóbbi időkig alig volt közvetlen vizsgálat tárgya. Ennek oka valószínűleg az, hogy a tenzoroknak egy kontra-, illetve hozzá adjungált kovariáns vektor n él szerinti felbontásának felhasználásával, tehát közvetett úton, a vektorok abszolút deriválása könnyen kiterjeszthető a tenzorokra is[2].

Ezen az úton azonban részben nem adódik a tenzorok abszolút deriválásának bizonyos természetes követelményeket kielégítő legáltalánosabb módja, részben elhalványul a tenzorok abszolút deriválásának geometriai háttere. A jelen munka bizonyos valenciájú tenzorok által képezett vektortereknek közvetlen affin egymáshozrendelése útján, a vektorok közbeiktatása nélkül vizsgálja a tenzorok abszolút deriválását. Ez az út a tenzoroknak a fent említettnél általánosabb deriváltjához vezet. Erre az abszolút deriváltra pedig egy affinösszefüggő geometria építhető, mely a közönséges affinösszefüggést speciál esetként tartalmazza, és melyben állandóan előtérben marad a tenzorok abszolút deriválásának geometriai oldala.

A tekintetbe vett tenzorok halmaza itt a páros rendű tenzorok és invariánsok halmaza lesz. A továbbiakból világosan kitűnik azonban, hogy a páros rendű tenzorok halmaza minden nehézség nélkül pótolható az $n \cdot k$ rendű tenzorok halmazával, ahol k tetszőleges rögzített természetes szám ($k \geqq 3$), n pedig végigfut a természetes számokon. Az általános esetben az összefüggések felírása és az eredmények megfogalmazása nyilván bonyolultabb. Így megelégszünk ennek a ténynek itten való megemlítésével, és eredményeinkben ezt nem fogjuk kifejezésre juttatni.

A tenzorok között a közönséges affinösszefüggő tér (az L_n) által indukáltnál általánosabb konnexió létesítésének a gondolata — ha nem is az itt vázolt felfogásban — először S. HOKARI-nál [13] (1934) található meg. A háború után E. BOMPIANI [2] (1946) vizsgálta a kérdést, majd A. COSSU [5—7] foglalkozott több munkájában a problémakörrel. 1960-ban a szerzőnek jelent meg ilyen irányú vizsgálatokat tartalmazó munkája [18], majd M. KUCHARSEWSKI [14] foglalta össze a problémakör addigi eredményeit. Ugyanakkor S. GOŁAB [12] az említett általánosabb affinössze-

[1] Az ezeken a fogalmakon nyugvó különböző affinösszefüggő geometriák megalapozásával több magyar matematikus is foglalkozott. Így VARGA OTTÓ [21] a vonalelemterek affinösszefüggését alapozta meg. FARKAS MIKLÓS [11] a WEYL [22] által bevezetett affinösszefüggő pontterek fogalmának egy koordinátamentes felépítését adta, míg SOÓS GYULA [17] a vonalelemterek lineáris összefüggését a fibrált terek fogalmán keresztül globális eszközökkel vezette be.

[2] Lásd A. DUSCHEK—W. MAYER [8] I. fejezetet és II. fejezet 2. §.

függő tér összefüggési objektumának algebrai komitánsait vizsgálta meg, ami szintén ehhez a tárgykörhöz sorolható. S. BOCHNER-nél [3] (1951) is felmerül az alapprobléma kissé általánosabb formában, amennyiben ő a tenzorokat az általánosabb, de kevésbé használatos tenzoroidokkal pótolja.[3]

VARGA OTTÓnak, PAUL GÜNTHERnek és SOÓS GYULÁnak értékes megjegyzéseiért e helyen is köszönetemet fejezem ki.

1. §. Az összefüggési koefficiensek

1. Alapterünk egy tetszőleges pontjában a kontravariáns vektorok összessége egy n dimenziós E_n vektorteret alkot, melyet az alaptér érintőterének nevezünk. A kovariáns vektorok ehhez duális érintőterét E_n^*-al jelöljük. Bár ez a két tér, mint két n dimenziós vektortér izomorf, és így tisztán algebrai szempontból azonos, mégis, ha az alaptér nem metrikus, úgy nincs semmi indok a közöttük lehetséges végtelen sok izomorf leképezés közül bármelyiknek a kiválasztására. Ha azonban az alapterünk pl. egy *Riemann* tér, akkor a metrika az E_n és E_n^* között egy jól meghatározott izomorfiát tüntet ki. (Mi az E_n és E_n^*-ot mint lényegesen különbözőket fogjuk fel.)

Az E_n érintőtérnek az alaptérrel való kapcsolata abban nyilvánul meg, hogy ha az alaptérben egy $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x)$ koordinátatranszformációt hajtunk végre, akkor az (x_0) koordinátájú P_0 pont érintőterében az $\mathfrak{e}_i \to \bar{\mathfrak{e}}_i$ bázistranszformációt kell végrehajtanunk, ahol $\mathfrak{e}_i = A_i^s \bar{\mathfrak{e}}_s$, azaz $\bar{\mathfrak{e}}_i = B_i^s \mathfrak{e}_s$; $A_s^i B_j^s = \delta_j^i$ és $A_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}(x_0)$.

Az E_n, ill. E_n^* tereknek önmagukkal vagy egymással alkotott tenzori szorzatai képezik a szorzattereket. Pl. ha az E_n bázisvektorai az $\mathfrak{e}_i$ – k $(i=1, 2, \ldots, n)$, úgy az önmagával alkotott n^2 dimenziós $E_n^{(2)}$ szorzattér definíció szerint az $\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_j$ párok által van felfeszítve, és abban különbözik egy n^2 dimenziós vektortértől, hogy itt nincsenek az összes $\bar{\mathfrak{e}}_i \otimes \bar{\mathfrak{e}}_j = A_{ij}^{rs}(\mathfrak{e}_r \otimes \mathfrak{e}_s)$ $\left(|A_{ij}^{rs}| \neq 0\right)$ bázistranszformációk megengedve, hanem csak azok, ahol A_{ij}^{rs} $A_i^r A_j^s$ formájú $\left(|A_r^i| \neq 0\right)$, és egy ilyen transzformációt akkor kell az $E_n^{(2)}$-ben végrehajtani, ha az E_n-ben az $\mathfrak{e}_i = A_i^r \bar{\mathfrak{e}}_r$ transzformáció következik be.[4]

2. Keressünk az n dimenziós tér páros rendszámban kontra-, ill. kovariáns tenzorainak és invariánsainak $\mathfrak{P}$ halmaza felett a tenzor komponenseiben, a komponensek első parciális deriváltjaiban, és a koordinátadifferenciálokban külön-külön lineáris, valamint az utóbbiban homogén, általában a helytől függő olyan abszolút differenciáloperátort, mely tenzorhoz vele egyenlő rendű tenzort rendel, mely független a koordinátarendszertől, összegnél és szorzatnál megtartja a közönséges differenciálra ismert szabályokat és invariánshoz a közönséges differenciált rendeli. Azaz, ha ez az operátor ϑ, akkor

$$\vartheta T = L_i\left(T, \frac{\partial T}{\partial x}, x\right) dx^i \tag{1}$$

[3] S. BOCHNER [3] 463. oldal.

[4] Ezekre a fogalmakra nézve lásd A. LICHNEROWITZ [15] 85., 86., 89. pont, vagy N. BOURBAKI [4] munkáját.

(2) $$\vartheta T^{i\dots}{}_{\dots s} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\cdots\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s}\,\vartheta T^{k\dots}{}_{\dots l}$$

(3) $$\overline{\vartheta T} = \vartheta \overline{T}$$

(4) $$\vartheta(T+U) = \vartheta T + \vartheta U$$

(5) $$\vartheta(T\cdot U) = \vartheta T\cdot U + T\cdot\vartheta U$$

(6) $$\vartheta I = dI,$$

ahol T és U $\mathfrak{P}$ elemei, L_i bilineáris T és $\frac{\partial T}{\partial x}$-ben, I invariánst, d pedig a közönséges differenciált jelöli. $\bar{x}$-al az új koordinátákat, felülvonással általában az új koordinátarendszerben vett értékeket jelöljük.

Első feladatunkul a legáltalánosabb ilyen típusú operátor formájának meghatározását tűzzük ki. Először csak másodrendű tenzorokra szorítkozunk. Az itt nyert eredményből azonban már könnyű lesz az általános formát meghatározni.

ϑT^{ij} (1) és (4) miatt T^{kl} és $\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}$-ben együttesen csak lineáris lehet, és ϑT^{ij} kifejezésében nem szerepelhet T^{kl} és $\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}$-től szabad, csak x-től függő tag. Így

(7) $$\vartheta T^{ij}(x) = \psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}(x)\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}\,dx^t + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t}(x)\,T^{kl}\,dx^t.$$

Ahhoz, hogy ϑT^{ij} a koordinátarendszertől független legyen, és hogy másodrendű kontravariáns tenzort képezzen, a ψ-knek és a γ-nak

(8) $$\bar{\psi}^{ab}{}_{cd}{}^{e}{}_{f} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d}\frac{\partial \bar{x}^e}{\partial x^r}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^f}\,\psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{u}$$

(9) $$\bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_{f} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^f}\,\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} +$$
$$+\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^c\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d}+\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d\partial \bar{x}^m}\right)\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^f}\,\psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}$$

szerint kell transzformálódniuk.

Tekintsük most a $T^{ij}(x)U_{ij}(x) = I(x)$ kifejezést. $I(x)$ abszolút differenciálja (5) és (6) szerint is kiszámítható. Ezek egybevetéséből

(10) $$T^{ij}\vartheta U_{ij} = T^{ij}(dU_{ij} - \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}\,U_{kl}\,dx^t) +$$
$$+\,U_{ij}\left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^t} - \psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}\right)dx^t.$$

Ennek tetszőleges $T^{ij}(x)$ tenzorra tetszőleges dx^t mellett fenn kell állnia. Így pl. ha $T^{11} = 1$, minden más komponens pedig zéró. Ebből látható, hogy ahhoz, hogy

$\frac{\partial T^{kl}}{\partial x^r}$-től független, (5) és (6)-nak is eleget tevő ϑU_{ij} létezzék, szükséges a jobboldali második zárójelében levő kifejezés eltűnése, azaz

$$\psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t} = \delta^i_k \delta^j_l \delta^r_t .$$

A $\psi^{ij}{}_{kl}{}^{r}{}_{t}$ ilyen megválasztása független a koordinátarendszertől, mert (8) szerint ψ is tenzor. Így (7), (10) és (9)-ből

$$\vartheta T^{ij} = dT^{ij} + \gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} T^{kl} dx^t \tag{11}$$

$$\vartheta U_{ij} = dU_{ij} - \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t} U_{kl} dx^t \tag{12}$$

$$\bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_{f} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^c \partial \bar{x}^f} \delta^b_d + \delta^a_c \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^d \partial \bar{x}^f} + \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^d} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^f} \gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} . \tag{13}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy (13) figyelembevételével (12) is eleget tesz (1)—(4)-nek, és ezek (5)-öt is kielégítik.

Ha most $\vartheta A^{ij\dots}{}_{vp\dots}$-t akarjuk meghatározni, ahol A $\mathfrak{P}$ egy magasabbrendű eleme, akkor A-t kontraháljuk $\mathfrak{P}$ másodrendű elemeivel, míg invariánst nem kapunk. Erre alkalmazzuk (5)-öt és (6)-ot, majd ezek eredményeinek egybevetéséből

$$\vartheta A^{ij\dots}{}_{vp\dots} = dA^{ij\dots}{}_{vp\dots} + (\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} A^{kl\dots}{}_{vp\dots} + \dots - \gamma_{vp}{}^{kl}{}_{t} A^{ij\dots}{}_{kl\dots} - \dots)\, dx^t . \tag{14}$$

Újból könnyen ellenőrizhető (1)—(6) teljesedése. Ezen paragrafus meggondolásainak menetét figyelembe véve igaz a következő tétel:

1. TÉTEL: *A kontra-, ill. kovariáns indexeikben párosrendű tenzorok körében az* (1)—(6) *feltételeknek eleget tevő legáltalánosabb abszolút differenciáloperátor* (14) *formájú, ahol az operátort meghatározó mennyiségek transzformációs törvénye* (13).

Megjegyezzük, hogy ha a $\mathfrak{P}$ halmazt leszűkítenénk pl. a másodrendű kontravariáns tenzorok halmazára, és így a másodrendű kovariáns tenzorokat és az invariánsokat is kizárnánk, ez már lényeges megszorítást jelentene. Ekkor ugyanis a felsorolt követelményeknek — melyek közül ebben az esetben (5) és (6) természetesen kiesne — eleget tevő legáltalánosabb differenciáloperátor nem (11), hanem (7) formájú lenne.

(11)-et a következőképpen is megkaphattuk volna: Legyen az $E_n^{(2)}(x)$ egy bázisa $\mathfrak{e}_i(x) \otimes \mathfrak{e}_j(x)$ és az $E_n^{(2)}(x+dx)$ egy bázisa az $\mathfrak{e}'_k(x+dx) \otimes \mathfrak{e}'_l(x+dx)$. Ezek között egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz az egyik bázisnak a másik térre való leképezése. Nyilvánvalóan az összes ilyen leképezés leírható az $(\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_j) \to (\mathfrak{e}'_i \otimes \mathfrak{e}'_j) - \gamma_{ij}{}^{kl}(x+dx)\,(\mathfrak{e}'_k \otimes \mathfrak{e}'_l)$ formában. Ha még a dx-ben való linearitást is megköveteljük, úgy ez az $(\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_j) \to (\mathfrak{e}'_i \otimes \mathfrak{e}'_j) - \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}(x)\,(\mathfrak{e}'_k \otimes \mathfrak{e}'_l) dx^t$ formát veszi fel. Tekintsük most a $T = T^{ij}(\mathfrak{e}_i \otimes \mathfrak{e}_j) \in E_n^{(2)}(x)$ tenzort. Ehhez az előbbi leképezés az $E_n^{(2)}(x+dx)$

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= T^{ij}(x)[(\mathfrak{e}'_i \otimes \mathfrak{e}'_j) - \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}(x)(\mathfrak{e}'_k \otimes \mathfrak{e}'_l)\, dx^t] = \\ &= [T'^{ij}(x+dx) - dT^{ij}(x)](\mathfrak{e}'_i \otimes \mathfrak{e}'_j) - \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t} T^{ij}(x)(\mathfrak{e}'_k \otimes \mathfrak{e}'_l)\, dx^t = \\ &= T'^{ij}(x+dx)(\mathfrak{e}'_i \otimes \mathfrak{e}'_j) - [dT^{kl} + \gamma_{ij}{}^{kl}{}_{t}(x) T^{ij}(x)\, dx^t](\mathfrak{e}'_k \otimes \mathfrak{e}'_l) \equiv T' - \vartheta T \end{aligned}$$

elemét rendeli, ahol (11) a $T' - \tilde{T} = \vartheta T$ különbség komponenseivel azonos. (12) és (13)-at a továbbiakban az (1)—(6) követelményekből lehetne levezetni. — Az itt tárgyalt és az 1. tételben megoldott probléma azonban nem azonos, mint ezt az 1. tételt követő megjegyzés is megvilágítja.

Ezekután definiáljuk $\mathfrak{P}$ elemeinek két szomszédos $P(x)$ és $P'(x+dx)$ pontban való párhuzamosságát.

DEFINÍCIÓ: $A(P)$ párhuzamosan van eltolva P'-be, ha $\vartheta A = 0$.

A $\mathfrak{P}$ felett a γ segítségével definiált teret $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$-val jelöljük, és tenzoriálisan összefüggőnek nevezzük.

Megjegyezzük még, hogy *a)*: A (13) transzformációs törvény eleget tesz a tranzitív tulajdonságnak. Így a γ-k egy lineáris másodosztályú differenciálgeometriai objektumot alkotnak.[5] *b)*: Nincs értelme γ két felső indexében, ill. két első indexében való szimmetriáról beszélni, mert ezek a tulajdonságok egy transzformációnál általában elvesznek. Azonban a $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \gamma_{lk}{}^{ji}{}_t$ összefüggés invariáns. Arra nézve, hogy egy szimmetrikus, ill. antiszimmetrikus T^{ij}-vel együtt ϑT^{ij} is hasonló tulajdonságú legyen, ez az összefüggés szükséges és elegendő.[6]

2. §. A redukció esete

1. $\mathfrak{P}$ felett az (1. 1)—(1. 6)-nak a

$$DA^{ij\dots}{}_{vp\dots} = dA^{ij\dots}{}_{vp\dots} + (\Gamma_t{}^i{}_k A^{kj\dots}{}_{vp\dots} + \dots - \Gamma_t{}^k{}_v A^{ij\dots}{}_{kp\dots} - \dots)\, dx^t \tag{1}$$

$$\overline{\Gamma}_b{}^a{}_c = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c} + \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c} \Gamma_j{}^i{}_k \tag{2}$$

is eleget tesz. Így a DA eltűnésével is definiálhatunk egy affinösszefüggést. Ezt $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-val jelöljük és indukáltnak nevezhetjük, mivel a Γ közönséges affinösszefüggés hozta létre. Megmutatjuk, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ speciálesetként tartalmazza $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-t. Az 1. tétel értelmében elegendő lenne csak arra rámutatni, hogy ϑ nem ekvivalens D-vel $\mathfrak{P}$ felett. Azt is meg akarjuk azonban mutatni, hogy ϑ hogyan és mikor tartalmazza D-t.

Ezt a kérdést másodrendű kontravariáns tenzorok esetében E. BOMPIANI, míg vegyes másodrendű tenzorok esetén hozzá hasonló úton A. COSSU vizsgálta.[7] Bompiani eredménye szerint a redukcióhoz szükséges és elegendő, hogy egy tetszőleges (2) transzformációjú Γ geometriai objektum segítségével képezett

$$P_{kl}{}^{ij}{}_t \overset{\text{def}}{=} \gamma_{kl}{}^{ij}{}_t - \delta^i_k \Gamma_l{}^j{}_t - \delta^j_l \Gamma_k{}^i{}_t$$

tenzor felbontható legyen a

$$P_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta^i_k T_l{}^j{}_t + \delta^j_l T_k{}^i{}_t \tag{3}$$

formában (ahol T valamilyen tenzor). Könnyű látni, hogy ha P, mely függ Γ-tól, valamilyen Γ mellett felbontható a (3) formában, akkor minden más Γ^* mellett is

[5] Lásd K. YANO [23] 18. oldal vagy J. ACZÉL—S. GOŁAB [1] I. fejezet.
[6] Lásd E. BOMPIANI [2] 481. oldal, vagy M. KUCHARZEWSKI [14] 68. oldal.
[7] E. BOMPIANI [2] 481. oldal, és A. COSSU [6] 422. oldal.

felbontható. — Ez a feltétel azonban relatív, mivel továbbra is nyitott kérdés, hogy P-nek mikor létezik a (3) felbontása, és hogy melyek a felbontásban fellépő T tenzor komponensei.

Gyorsan hozzájuthatunk ehhez az eredményhez az előző bekezdésben elmondottaktól függetlenül és számunkra kissé alkalmasabb formában is. Legyenek adva az x koordinátarendszerben a Γ-k, és ezzel

$$DT^{ij} = dT^{ij} + (\Gamma_k{}^i{}_t T^{kj} + \Gamma_l{}^j{}_t T^{il})\, dx^t. \tag{4}$$

(1. 11) és (4) csak a megfelelő T^{kl} koefficienseiben különbözik. Definiáljuk tehát úgy a γ-kat, hogy T^{kl} koefficiensei a két kifejezésben egyenlők legyenek. Így legyen

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta_l^j \Gamma_k{}^i{}_t + \delta_k^i \Gamma_l{}^j{}_t. \tag{5}$$

Könnyű látni, hogy ebben az esetben (1. 14) is összeesik (1)-gyel. (5) egy zéróra redukált formában (2) és (1. 13) figyelembevételével tenzorreláció. — Továbbá adott γ mellett (5) általában nem állhat fenn, hiszen (5) szerint pl. a $\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t$ közül többnek el kell tűnnie. Így igaz a

2. TÉTEL. *A ϑ segítségével definiált affinösszefüggés speciálesetként tartalmazza a $\mathfrak{P}$ felett a D segítségével definiált affinösszefüggést. Hogy az előbbi az utóbbira redukálódjon, annak szükséges és elegendő feltétele* (5) *teljesedése.*

2. Kérdés, mikor oldható meg (5).

Mivel ezen egyenletrendszer megoldhatósága csak a γ-tól függ, és a megoldhatóság független a koordinátarendszertől, így kell, hogy a γ-k között a koordinátarendszertől független összefüggések létezzenek, melyek (5) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételeit fejezik ki. Ezeket akarjuk most meghatározni.[8] Eközben megkapjuk (5) független egyenleteit, melyek mind egyetlen ismeretlent tartalmaznak és így (5) megoldására — a megoldhatóság fennállta esetén —, egyidejűleg egy igen egyszerű eljárást is kapunk.

Mivel (5) jobboldala szimmetrikus az i és j, valamint k és l-ben, így a megoldhatósághoz szükséges, hogy

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t - \gamma_{lk}{}^{ji}{}_t = 0 \tag{6}$$

fennálljon. Továbbá (5)-ből következően szükséges a

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = 0 \qquad \text{ha } i \neq k \text{ és } j \neq l \tag{7}$$

összefüggés is. (6) és (7) teljesedését a továbbiakban feltesszük.

Most az (5) egyenletrendszer egyenleteit három részre bontjuk:

A) ahol $i \neq k$ és $j \neq l$.

Ezek elhanyagolhatók, mert (7) figyelembevételével minden $\Gamma_p{}^v{}_t$-re teljesednek.

B) ahol $i = k$, de $j \neq l$.

Így ezek

$$\gamma_{1l}{}^{1j}{}_t = \Gamma_l{}^j{}_t, \ \ldots, \ \gamma_{nl}{}^{nj}{}_t = \Gamma_l{}^j{}_t \qquad (j \neq l) \tag{8}$$

[8] A legközvetlenebb ilyen feltétel az (5) lineáris egyenletrendszer koefficienseiből alkotott eredeti és bővített mátrix rangjának megegyezését kifejező. Ez azonban egy viszonylag bonyolult összefüggés, melynél áttekinthetőbbet fogunk megadni.

formájúak. Ezen részrendszer megoldhatóságának a szükséges és elegendő feltétele az, hogy

$$\gamma_{r_0 l}{}^{r_0 j}{}_t - \gamma_{s_0 l}{}^{s_0 j}{}_t = 0 \qquad (j \neq l) \tag{9}$$

legyen. (Ha két indexre szummázni kellene, de azok a $_0$ jellel vannak ellátva, akkor a szummáció elmarad.)

C) ahol $i=k$ és $j=l$.

Az idetartozó egyenletek

$$\text{(10)}\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \gamma_{11}{}^{11}{}_t = 2\Gamma_1{}^1{}_t, \ldots, \gamma_{nn}{}^{nn}{}_t = 2\Gamma_n{}^n{}_t \\ &\text{b)} \quad \gamma_{12}{}^{12}{}_t = \Gamma_1{}^1{}_t + \Gamma_2{}^2{}_t, \ldots, \gamma_{n-1n}{}^{n-1n}{}_t = \Gamma_{n-1}{}^{n-1}{}_t + \Gamma_n{}^n{}_t \end{aligned}$$

formájúak, amely részrendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele az, hogy

$$\gamma_{k_0 l_0}{}^{k_0 l_0}{}_t - \frac{1}{2}(\gamma_{k_0 k_0}{}^{k_0 k_0}{}_t + \gamma_{l_0 l_0}{}^{l_0 l_0}{}_t) = 0 \tag{11}$$

legyen.

(6), (7), (9) és (11) együtt (5) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele egy tetszőleges kiinduló koordinátarendszerben. Azonban a megoldhatóság független a koordinátarendszertől, mivel (5) tenzorreláció. Így ha (6), (7), (9) és (11) egy koordinátarendszerben fennáll, úgy ezeknek minden koordinátarendszerben fenn kell állani.[9] Ezzel megmutattuk, hogy

3. TÉTEL. *(5) megoldhatóságának, azaz annak, hogy* $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$*-ra redukálódjon a koordinátarendszertől független szükséges és elegendő feltétele* (6), (7), (9) *és* (11) *fennállása. Ebben az esetben a* $\Gamma_j{}^i{}_k$ *értékeit* (8) *és* (10, a) *szolgáltatják.*

(8) és (10)-ből látható, hogy (5) megoldása egyértelmű:

4. TÉTEL. *A* $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ *legfeljebb egyféleképpen redukálódik egy* $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$*-ra.*

(8) és (10, a) segítségével a γ-ból (2) transzformációjú Γ-t vezettünk le. Tehát az így meghatározott Γ a γ-nak egy algebrai komitánsa.[10] A γ-ból azonban algebrai úton több (2) transzformációjú geometriai objektumot lehet képezni, habár ezen objektumok közül a 4. tétel értelmében legfeljebb egy elégíti ki (5)-öt. Az ilyen algebrai komitánsok meghatározása a tárgya S. GOŁAB egy újabb dolgozatának. A kérdéssel foglalkozott ugyanakkor M. KUCHARZEWSKI is.[11] Ilyen algebrai komitáns a következő paragrafusban értelmezendő $G_k{}^h{}_t$ $\frac{1}{n+1}$-szerese is. GOŁAB vizsgálataiban a 3. tétel eredményei újra kiadódnak[12] kissé megváltoztatott formában, aminek az oka az, hogy bár (5) megoldása egyértelmű, ez a megoldás a γ komponensei között a megoldhatóság esetében fennálló (6), (7), (9) és (11) miatt többféleképpen fejezhető ki.

[9] Ez még nem jellemzi azt, hogy a felsorolt egyenletek tenzorrelációk, csak azt, hogy a felsorolt egyenletek transzformáltjai ekvivalensek az új koordinátarendszerben felírt (6), (7), (9), (11) egyenletek rendszerével. (6) és (7)-ről azonban közvetlenül, míg (9) és (11)-ről kisebb számolással látható, hogy valóban tenzorrelációk.

[10] Lásd J. ACZÉL—S. GOŁAB [1] 16. oldal, vagy J. A. SCHOUTEN [16] 164. oldal.

[11] S. GOŁAB [12], és M. KUCHARZEWSKI [14] 6. §.

[12] S. GOŁAB [12] 20. oldal.

3. A γ és a Γ-k között (5)-ön kívül más érdeklődésre számottartó kapcsolat is fennállhat. Így pl. a

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_t = \delta_l^j \Gamma_k{}^i{}_t + \delta_k^i \Gamma^*_l{}^j{}_t, \tag{12}$$

(ahol Γ és Γ^* két különböző (2) transzformációjú objektum). Ezt a kettősredukció esetének fogjuk nevezni. A kettősredukció felléptének feltételeit ugyanúgy vizsgálhatjuk, mint ahogyan az előző pontban a közönséges redukció esetét vizsgáltuk. Ebben az esetben is fenn kell állni (7)-nek, (6)-nak azonban nem. A B) esetben (6) hiánya miatt (9) mellett a megoldhatóságnak egy másik feltétele is jelentkezik:

$$\gamma_{kr_0}{}^{ir_0}{}_t - \gamma_{ks_0}{}^{is_0}{}_t = 0 \qquad (i \neq k). \tag{13}$$

Végül a C) esetben (10) helyett a

$$\gamma_{i_0j_0}{}^{i_0j_0}{}_t = \Gamma_{i_0}{}^{i_0}{}_t + \Gamma^*_{j_0}{}^{j_0}{}_t \tag{14}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Mint könnyű látni, (14) megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele

$$\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t - \gamma_{i_0j_0}{}^{i_0j_0}{}_t + \gamma_{r_0j_0}{}^{r_0j_0}{}_t = 0. \tag{15}$$

Az említett feltételek fennállta esetén a megoldás:

$$\begin{aligned} &\Gamma_k{}^i{}_t = \gamma_{k1}{}^{i1}{}_t = \ldots = \gamma_{kn}{}^{in}{}_t \qquad (i \neq k) \\ &\Gamma^*_l{}^j{}_t = \gamma_{1l}{}^{1j}{}_t = \ldots = \gamma_{nl}{}^{nj}{}_t \qquad (j \neq l) \\ &\Gamma_{i_0}{}^{i_0}{}_t = \gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t + c_t \\ &\Gamma^*_{j_0}{}^{j_0}{}_t = \gamma_{r_0j_0}{}^{r_0j_0}{}_t c_t, \end{aligned} \tag{16}$$

ahol r tetszőleges index, c_t pedig r rögzítése után választott konstans.

Ha közönséges, azaz (5) formájú redukció lehetséges, akkor nyilván kettős redukció is lehetséges (pl. abban a speciális formában, hogy $\Gamma^* = \Gamma$). Fordítva azonban nem. — Kérdés, mennyiben erősebbek a közönséges redukció feltételei, mint a kettős redukcióé?

A közönséges redukció feltételei: (6), (7), (9), (11). Jelöljük ezeket I-gyel. A kettős redukció feltételei: (7), (9), (13), (15). Jelöljük ezeket II-vel. — Először megmutatjuk, hogy I-ből következik II. (6) fennállta esetén ugyanis (13) összeesik (11)-el; továbbá (11)-ből következik (15). Ha ugyanis (15) baloldalán $\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t$-t és $\gamma_{r_0j_0}{}^{r_0j_0}{}_t$-t ezek (11)-ből vett értékeivel pótoljuk, akkor $\frac{1}{2}[\gamma_{i_0i_0}{}^{i_0i_0}{}_t + \gamma_{j_0j_0}{}^{j_0j_0}{}_t] - \gamma_{i_0j_0}{}^{i_0j_0}{}_t$-t kapunk eredményül, ami (11) szerint zéró. — Könnyű látni, hogy II-ből nem következik I. Ha azonban II-höz még (6)-ot is hozzávesszük, akkor ezekből már következik I. Ehhez egyedül (11) teljesedését kell megmutatni. Képezzük a

$$\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \frac{1}{2}[\gamma_{i_0i_0}{}^{i_0i_0}{}_t + \gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t] \tag{17}$$

kifejezést, mely olyan típusú, mint (11) baloldala. Fejezzük ki (15)-ből $\gamma_{r_0r_0}{}^{r_0r_0}{}_t$-t, valamint az i_0 és r_0 szerepének (15)-ben való felcserélése után $\gamma_{i_0i_0}{}^{i_0i_0}{}_t$-t. Helyettesítsük ezeket a (17) kifejezésbe. Így a $\gamma_{i_0r_0}{}^{i_0r_0}{}_t - \frac{1}{2}[\gamma_{i_0r_0t}{}^{i_0r_0} + \gamma_{r_0i_0}{}^{r_0i_0}{}_t]$ kifejezéshez jutunk, ami (6) figyelembevételével zérót ad. Így (15) és (6)-ból (11) következik.

Ha tehát a kettős redukció feltételeihez még (6)-ot is hozzávesszük, akkor a közönséges redukció (szükséges és elegendő) feltételeivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk. Így azt is lehet mondani, hogy a kettős redukció feltételei (7), (9), (13), (15); míg a közönséges redukció feltételeihez ezeken kívül még (6) is hozzátartozik. Ilyen formában a közönséges és kettős redukció aszerint válik szét, hogy (6) teljesedik vagy sem.

6. TÉTEL: *A közönséges redukció egy szükséges és elegendő feltétel rendszere* (7), (9), (13), (15) *(azaz a kettős redukció feltételei) és* (6).

Megjegyezzük, hogy bár a közönséges redukció esetében (16) mindig megoldása a kettős redukció (12) alapegyenletének, ebben a megoldásban azonban csak akkor lesz $\Gamma=\Gamma^*$, azaz (16) csak akkor megoldása egyúttal (5)-nek is, ha c_t-t úgy választjuk, hogy

$$c_t \equiv \Gamma_{r_0}{}^{r_0}{}_t = \frac{1}{2}\gamma_{r_0 r_0}{}^{r_0 r_0}{}_t.$$

3. §. Az ekvivalencia

Egy, az x koordinátarendszerre vonatkoztatott $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ tér, és egy, az $\bar{x}$ koordinátarendszerre vonatkoztatott $\{\mathfrak{P}, \bar{\gamma}\}$ tér akkor ekvivalens egymással, ha van olyan egyértelműen megfordítható

$$x^i = x^i(\bar{x}) \tag{1}$$

függvényrendszer, mely a két tér pontjait úgy rendeli egymáshoz, hogy az egymásnak megfelelő pontokban a γ és $\bar{\gamma}$ között az (1.13) összefüggés áll fenn. Ha az említett tulajdonságokkal rendelkező (1) függvényrendszer létezik, akkor (1.13) ekvivalens

$$\bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_f(\bar{x})p^g_a p^h_c = p_c{}^g{}_f p^h_d + p_d{}^h{}_f p^g_c + \gamma_{kl}{}^{gh}{}_t(x)p^k_c p^l_d p^t_f \tag{2}$$

$$\left(p^g_a(\bar{x}) \equiv \frac{\partial x^g}{\partial \bar{x}^a}; \quad p_c{}^g{}_f(\bar{x}) \equiv \frac{\partial^2 x^g}{\partial \bar{x}^c \partial \bar{x}^f}\right)$$

összefüggéssel, ami adott γ és $\bar{\gamma}$ mellett az (1) függvényrendszerre kirótt differenciálegyenletrendszer. (2)-t egy úgynevezett vegyes rendszerré[13] alakítjuk át, és ennek segítségével a kívánt tulajdonságú megoldás létezésére feltételeket fogunk levezetni.

Tegyük fel, hogy a fenti tulajdonságokkal rendelkező (1) függvényrendszer létezik, és jelöljük (1) $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x)$ inverzének x^k szerinti parciálisait q^j_k-val. (2)-ből

$$p^g_a p^h_b(\bar{\gamma}_{fc}{}^{ba}{}_d + \bar{\gamma}_{df}{}^{ba}{}_c - \bar{\gamma}_{cd}{}^{ab}{}_f) = p_c{}^g{}_d p^h_f + p_d{}^h{}_c p^g_f + (\gamma_{tk}{}^{hg}{}_l + \gamma_{lt}{}^{hg}{}_k - \gamma_{kl}{}^{gh}{}_t)p^h_c p^l_d p^t_f.$$

Ezt q^f_g-vel kontrahálva,

$$p_c{}^h{}_d = \frac{1}{n+1}(\bar{G}_c{}^b{}_d p^h_b - G_k{}^h{}_l p^k_c p^l_d), \tag{3}$$

ahol

$$G_k{}^h{}_t \equiv \gamma_{rk}{}^{hr}{}_t + \gamma_{tr}{}^{hr}{}_k - \gamma_{kt}{}^{rh}{}_r. \tag{4}$$

[13] Lásd J. M. THOMAS—O. VEBLEN [20], vagy L. P. EISENHART [9] 16. oldal, vagy L. P. EISENHART [10] 1. §. vagy L. TAMÁSSY [19].

(3) segítségével (2)-t olyan formára hozhatjuk, ami a további összefüggések áttekinthetőségét nagymértékben elősegíti. $p_c{}^g{}_d$ (3) szerinti értékét (2)-be visszahelyettesítve,

$$A^{gh}{}_{klt}p^k_c p^l_d p^t_f = \bar{A}^{ab}{}_{cdf}p^g_a p^h_b, \tag{5}$$

ahol

$$A^{gh}{}_{klt} \equiv (n+1)\gamma_{kl}{}^{gh}{}_t - (\delta^h_l G_k{}^g{}_t + \delta^g_k G_l{}^h{}_t). \tag{6}$$

Így az említett vegyes rendszer a (3)-at jelentő

$$\text{(8)}\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = p^i_a(\bar{x}) \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial p^g_c}{\partial \bar{x}^d} = \frac{1}{n+1}\left(\bar{G}_c{}^a{}_d(\bar{x})p^g_a - G_k{}^g{}_l(x)p^k_c p^l_d\right) \end{aligned}$$

differenciálegyenletekből és az (5) skalárösszefüggésből áll. Nyilván a (2) differenciálegyenletrendszer minden megfordítható megoldása kielégíti a (8), (5) vegyes rendszert és fordítva. Ugyanis ha az (5) összefüggést (melyben az A (6) által van meghatározva) megfelelően rendezzük, és a (8, b) jobboldalán álló kifejezéseket (8, b) baloldalával, ill. $p_c{}^g{}_d$-vel helyettesítjük, akkor (2)-t kapjuk vissza. Így a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ és $\{\mathfrak{P}, \bar{\gamma}\}$ akkor és csak akkor ekvivalens, ha (8)- és (5)-nek van olyan megoldási rendszere, melyben (1) megfordítható.

A (8), (5) vegyes rendszer megoldhatóságára alkalmazható a *Thomas—Veblen*-féle tétel.[13] Ebből a célból képezzük (8) integrabilitási feltételeit (8) figyelembevételével. (8, a) integrabilitási feltétele (8, b) figyelembevételével

$$\bar{S}_c{}^a{}_d p^g_a = S_k{}^g{}_t p^k_c p^t_d, \tag{9}$$

ahol[14]

$$S_k{}^g{}_t \equiv \frac{1}{n+1}(G_k{}^g{}_t - G_t{}^g{}_k). \tag{10}$$

(8, b) integrabilitási feltétele (8) figyelembevételével

$$\bar{R}^a{}_{bcd}p^s_a = R^s{}_{hji}p^h_b p^j_c p^i_d, \tag{11}$$

ahol[14]

$$R^s{}_{hji} \equiv \frac{1}{(n+1)^2}(G_h{}^v{}_j G_v{}^s{}_i - G_i{}^v{}_j G_v{}^s{}_h) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial G_j{}^s{}_h}{\partial x^i} - \frac{\partial G_j{}^s{}_i}{\partial x^h}\right). \tag{12}$$

(5) $\bar{x}^s$ szerinti deriválása előtt megjegyezzük, hogy a G

$$\bar{G}_j{}^s{}_i = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}\left[(n+1)\frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}G_v{}^m{}_t\right] \tag{13}$$

transzformációs törvénye alapján $\frac{1}{n+1}G_i{}^j{}_k$ alkalmas arra, hogy segítségével a

[14] Az $1/n+1$ faktor beiktatásának a célszerűségét a 12. és 13. tétel világítja meg.

szokott módon kovariáns deriváltat képezzünk.[15] Az $\frac{1}{n+1}G$ segítségével az $\bar{x}^s$ szerint képezett kovariáns deriváltat egy függőleges vonal mögé írt s betűvel jelölve, (5) $\bar{x}^s$ szerinti parciálisa (8) figyelembevételével

$$\bar{A}^{ab}{}_{cdf|s}p^g_a p^h_b = A^{gh}{}_{klt|v}p^k_c p^l_d p^v_s. \tag{14}$$

Könnyen látható, hogy egy tetszőleges mennyiség tenzoriális transzformációs törvényét leíró kifejezés $\bar{x}^u$ szerinti deriváltja (8) figyelembevételével egy olyan kifejezést ad, mely ezen mennyiség $\frac{1}{n+1}G$ segítségével képezett kovariáns deriváltjának tenzoriális transzformációs törvényét írja le. Így a *Thomas—Veblen*-féle kritérium segítségével a következő feltételt kapjuk.

7. TÉTEL: *A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ és $\{\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\gamma}\}$ tér ekvivalenciájához szükséges, hogy létezzék olyan N szám, hogy az A, S, R-nek az $\frac{1}{n+1}G$ segítségével képezett első $N-1$ kovariáns deriváltja tenzoriális transzformációs törvényét kifejező összefüggések kompatibilisek legyenek $\bar{x}$ minden értékére egy n dimenziós tartományban, és hogy az N-edik kovariáns deriváltak transzformációs törvényét kifejező összefüggések az előzők következményei legyenek.*

Az elegendőséghez azt kell még biztosítani, hogy a megoldások közt szereplő $x^i(\bar{x}, c)$ függvényrendszer (ahol c a megoldásban fellépő konstansokat jelöli) megfordítható legyen, azaz a $|p^i_a(\bar{x}, c)|$ determináns valamilyen c értékrendszerre ne tűnjön el. Hasonló kérdéssel foglalkozik a szerző [19] dolgozatának 1. tétele is, aminek bizonyításában az volt a lényeges, hogy a p^i_a elemei között több mint n^2-n „szabadon választható" legyen, ami biztosítva van, ha a megoldásban fellépő paraméterek száma nagyobb, mint az ismeretlenek száma mínusz n. Az említett tétel bizonyításának gondolatmenete alapján igaz a

8. TÉTEL: *A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ és $\{\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\gamma}\}$ tér ekvivalenciájához elegendő, ha a* (8), (5) *vegyes rendszer megoldható, és a megoldásban fellépő konstansok száma minden $\bar{x}$ pontban nagyobb, mint az ismeretlenek számának és n-nek a különbsége.*

Ez nyilván teljesül, ha minden integrabilitási feltétel azonosság.

Megemlítjük, hogy [19] 3. és 4. tétele alapján és azokhoz hasonló formában az ekvivalencia szükséges és elegendő feltételeit is megfogalmazhatjuk.

Az ekvivalencia kérdésével újabban a fentiektől különböző módon M. KUCHARZEWSKI is foglalkozott.[16]

A 7. és 8. tételből, illetve a hozzájuk vezető meggondolásokból már világosan kitűnik a

9. TÉTEL: *Az A, R és S, valamint ezek $\frac{1}{n+1}G$ segítségével képezett kovariáns deriváltjai a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy teljes differenciálvariáns rendszerét képezik.*

[15] Lásd L. P. EISENHART [9] 3. oldal.

[16] M. KUCHARZEWSKI [14] 5. §.

4. §. Görbület és torzió

1. DEFINÍCIÓ: A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ teret akkor nevezzük affinnak, ha van olyan koordinátarendszer, ahol a γ összes komponense azonosan eltűnik.

Az előző paragrafus és az itteni definíció értelmében a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin voltának a feltétele az, hogy a

$$p_c{}^g{}_f p_d^h + p_d{}^h{}_f p_c^g + \gamma_{kl}{}^{gh}{}_t(x) p_c^k p_d^l p_f^t = 0 \tag{1}$$

differenciálegyenletrendszernek legyen az

$$x^i = x^i(\bar{x}) \tag{2}$$

függvényekre megfordítható megoldása.

10. TÉTEL: $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ *affin voltának szükséges és elegendő feltétele az R és A görbületi és az S torziótenzor eltűnése.*

R, A és S tenzorok. Ha ugyanis $x^i = x^i(\bar{x})$ nem ismeretlen függvényeket jelentenek, mint az előző paragrafusban, hanem egy transzformációt leíró ismert függvényrendszert, akkor (3. 11), (3. 5) és (3. 9) nem feltételek, hanem transzformációs törvények. Ez azonban azt jelenti, hogy R, A és S tenzorok.

Az említett tenzorok eltűnése valóban szükséges. A γ komponensei, ill. ezek parciálisai (3. 12), (3. 6), (3. 10) és (3. 4) szerint ugyanis az R, A és S kifejezéseinek minden tagjában előfordulnak. Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin, akkor definíciónk szerint van olyan koordinátarendszer, melyben a γ minden koefficiense azonosan eltűnik. Ekkor azonban eltűnnek a γ parciálisai, és így az R, A és S is, és ez tenzorvoltuk miatt minden koordinátarendszerben igaz.

Az előző paragrafus első két tételére támaszkodva megmutatjuk, hogy R, A és S eltűnése esetén $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ ekvivalens az $\bar{x}$ koordinátarendszerre vonatkoztatott azon $\{\mathfrak{P}, \bar{\gamma}\}$-val, melynél $\bar{\gamma}$ azonosan eltűnik. Ez definíciónk értelmében tételünknek azt az állítását bizonyítja, hogy a mondott feltételek elégségesek.

Megoldandó vegyes rendszerünk most a

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = p_a^i(\bar{x}) \\ &\text{b)} \quad \frac{\partial p_c^g}{\partial \bar{x}^d} = -\frac{1}{n+1} G_k{}^g{}_t(x) p_c^k p_d^t \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszerre redukálódik. A (3. 8b)-ben szereplő $\bar{G}$ a $\bar{\gamma}$ eltűnése miatt esik ki. A (3. 5) baloldala feltételünk, jobboldala pedig a $\bar{\gamma}$ eltűnése miatt válik zéróvá. Ebben az esetben R és S feltételünkben szereplő eltűnése miatt létezik a 7. tételben megkívánt tulajdonságokkal rendelkező N, mégpedig $N=1$. — Az integrabilitási feltételek itt azonosságok lévén, a megoldásban fellépő paraméterek száma megegyezik (3) ismeretleneinek számával. Így teljesül a 8. tétel feltétele is. Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy a 10. tételben mondott feltételek elegendők.

2. Az A tenzor geometriai jelentése.

11. TÉTEL: *Annak, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy szimmetrikus $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódjon, szükséges és elegendő feltétele az A görbületi tenzor eltűnése.*

Tegyük fel, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik, azaz (2. 5) fennáll. Ezt az A (3. 6) kifejezésébe helyettesítve (3. 4) figyelembevételével A-ra a következő kifejezést kapjuk:

$$A^{gh}{}_{klt} = 2\{(n-1)\delta_l^h \Gamma_{[k}{}^{g}{}_{t]} + \delta_l^h \delta_t^g \Gamma_{[k}{}^{r}{}_{r]} + (n-1)\delta_k^g \Gamma_{[l}{}^{h}{}_{t]} + \delta_k^g \delta_t^h \Gamma_{[l}{}^{r}{}_{r]}\}. \tag{4}$$

Ebből látható, hogy ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy szimmetrikus $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódik, akkor $A=0$.

Tegyük fel megint, hogy $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik és helyettesítsük (2. 5)-öt (3. 4)-be. Így

$$G_k{}^g{}_t = 2\Gamma_k{}^g{}_t + (n-1)\Gamma_t{}^g{}_k + 2\delta_t^g \Gamma_{[r}{}^{r}{}_{k]}. \tag{5}$$

Ha most $A=0$, akkor (3. 6) szerint $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik egy olyan $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra, ahol $\Gamma = \frac{1}{n+1} G$, azaz

$$G_k{}^g{}_t = (n+1)\Gamma_k{}^g{}_t. \tag{6}$$

Ezt (5)-be helyettesítve

$$(n-1)\Gamma_{[k}{}^{g}{}_{t]} = \delta_t^g \Gamma_{[r}{}^{r}{}_{k]}. \tag{7}$$

Ha itt $g \neq t$, akkor $\Gamma_k{}^g{}_t = \Gamma_t{}^g{}_k$. Ha pedig $g=t$, akkor (7)-ből

$$\Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]} = \frac{1}{1-n} \Gamma_{[k}{}^{r}{}_{r]} \qquad (t_0\text{-ra nem szummázunk!}) \tag{8}$$

azaz $\Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]}$ független t értékétől. Így $\Gamma_{[k}{}^{r}{}_{r]} \equiv \Gamma_{[k}{}^{1}{}_{1]} + \ldots + \Gamma_{[k}{}^{n}{}_{n]} = n\Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]}$. Ezt (8)-ba visszahelyettesítve $\left(1 - \frac{n}{1-n}\right) \Gamma_{[k}{}^{t_0}{}_{t_0]} = 0$, azaz a $g=t$-re is $\Gamma_k{}^g{}_t = \Gamma_t{}^g{}_k$, ami azt jelenti, hogy az $A=0$ esetében $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy szimmetrikus $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódik.

A 11. tételből, (6)-ból, valamint az R definícióját jelentő (3. 12)-ből következik a

12. TÉTEL: *Az A tenzor eltűnése esetén R és S a Γ által indukált (közönséges) affinösszefüggő tér görbületére és torziójára redukálódik.*

Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin, akkor a 10. tétel szerint eltűnik az A. Ekkor a 11. tétel szerint $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ egy $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$-ra redukálódik, és ez a redukció a 4. tétel szerint egyértelmű. $\{\mathfrak{P}, \Gamma\}$ azonban egy része az összes tenzorok $\mathfrak{T}$ halmaza felett a Γ által generált közönséges affinösszefüggő térnek. Az R és S eltűnése (10. tétel) miatt azonban a 12. tétel szerint eltűnik a $\{\mathfrak{T}, \Gamma\}$-nak mind a görbülete, mind a torziója. Így igaz a

13. TÉTEL: *Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ affin, (a jelen paragrafus elején adott definíció értelmében), akkor ez egy közönséges affin térnek a párosrendű tenzorokat magában foglaló része.*

Bár az 1 § (6), (7), (9) és (11) összefüggései elég egyszerű tenzoriális formában írt szükséges és elegendő feltételét adják a $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukciójának, megmutatjuk, hogy ilyen feltétel az A segítségével is nyerhető.

14. TÉTEL: *A $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukciójának szükséges és elegendő feltétele, hogy A az*

$$A^{gk}{}_{klt} = (n-1)\delta_l^h U_k{}^g{}_t + \delta_l^h \delta_t^g U_k{}^r{}_r + (n-1)\delta_k^g U_l{}^h{}_t + \delta_k^g \delta_t^h U_l{}^r{}_r \tag{9}$$

formában legyen előállítható, ahol U valamilyen, az alsó indexeiben antiszimmetrikus tenzor.

Ha $\{\mathfrak{P}, \gamma\}$ redukálódik, akkor az A (4)-ből is nyerhető, ami (9) formájú, tehát a feltétel szükséges.

A feltétel elegendő is. Válasszunk egy olyan $\overset{*}{\Gamma}$-ot, hogy erre

$$2\overset{*}{\Gamma}{}_{[j}{}^{i}{}_{k]} = U_{j}{}^{i}{}_{k} \tag{10}$$

álljon fenn. Legyen

$$\overset{*}{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_{t} \overset{\text{def}}{=} \delta^{i}_{k}\overset{*}{\Gamma}{}_{l}{}^{j}{}_{t} + \delta^{j}_{l}\overset{*}{\Gamma}{}_{k}{}^{i}{}_{t}. \tag{11}$$

Így

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} = \overset{*}{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_{t} + T_{kl}{}^{ij}{}_{t}, \tag{12}$$

ahol T tenzor.[17] — Ki fogjuk mutatni, hogy T előállítható két redukálódó $\bar{\gamma}$ és $\tilde{\gamma}$ különbségeként, amiből T felbonthatósága következik, a (11)-hez hasonló formában, ami (12)-vel együtt már a γ redukcióját fogja biztosítani.

Képezve a $\overset{*}{\gamma}$ segítségével a (3. 6) szerinti A^* tenzort, azt találjuk, hogy $A = A^*$, mivel A^* a $\overset{*}{\gamma}$ redukciója miatt (4) formájú, ez pedig (10) alapján a feltétel szerint (9) formájú A-val egyenlő. Másrészről, ha (3. 6)-ban a γ helyébe a (12) szerinti $\overset{*}{\gamma} + T$-t helyettesítjük, akkor $A = A^* + H$, ahol

$$H^{gh}{}_{klt} \equiv (n+1)T_{kl}{}^{gh}{}_{t} - \delta^{h}_{l}(T_{rk}{}^{gr}{}_{t} + T_{tr}{}^{gr}{}_{k} - T_{kt}{}^{rg}{}_{r}) - \delta^{g}_{k}(T_{rl}{}^{hr}{}_{t} + T_{tr}{}^{hr}{}_{l} - T_{lt}{}^{rh}{}_{r}).$$

Az $A = A^*$ alapján $H = 0$.

Legyen most $\bar{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_{t}$ a szimmetrikus $\bar{\Gamma}_{j}{}^{i}{}_{k}$-ból a (11) formában képezett objektum. Így a 11. tétel szerint $\bar{A} = 0$. Legyen továbbá $\tilde{\gamma} \overset{\text{def}}{=} \bar{\gamma} - T$. Így (3. 6)-ból $\tilde{A} = \bar{A} - H$, és $\bar{A} = H = 0$ miatt $\tilde{A} = 0$. Ekkor viszont $\tilde{\gamma}$ redukálódik valamilyen $\tilde{\gamma}_{kl}{}^{ij}{}_{t} = \delta^{i}_{k}\tilde{\Gamma}_{l}{}^{j}{}_{t} + \delta^{j}_{l}\tilde{\Gamma}_{k}{}^{i}{}_{t}$ formában. Így a $\tilde{\gamma} = \bar{\gamma} - T$-ből

$$T_{kl}{}^{ij}{}_{t} = \delta^{i}_{k}(\bar{\Gamma}_{l}{}^{j}{}_{t} - \tilde{\Gamma}_{l}{}^{j}{}_{t}) + \delta^{j}_{l}(\bar{\Gamma}_{k}{}^{i}{}_{t} - \tilde{\Gamma}_{k}{}^{i}{}_{t}) \equiv \delta^{i}_{k}t_{l}{}^{j}{}_{t} + \delta^{j}_{l}t_{k}{}^{i}{}_{t},$$

ahol t tenzor. T-nek ezt az értékét (12)-be helyettesítve, (11) figyelembevételével, és a $\overset{*}{\Gamma} + t = \Gamma$ jelöléssel

$$\gamma_{kl}{}^{ij}{}_{t} = \delta^{i}_{k}(\overset{*}{\Gamma}{}_{l}{}^{j}{}_{t} + t_{l}{}^{j}{}_{t}) + \delta^{j}_{l}(\overset{*}{\Gamma}{}_{k}{}^{i}{}_{t} + t_{k}{}^{i}{}_{t}) = \delta^{i}_{k}\Gamma_{l}{}^{j}{}_{t} + \delta^{j}_{l}\Gamma_{k}{}^{i}{}_{t},$$

tehát γ redukálódik.

IRODALOM

[1] ACZÉL, J.—GOŁAB, S.: *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa, 1960.

[2] BOMPIANI, E.: Le connessioni tensoriali, *Atti Acad. Naz. Lincei* **1** (1946), 478—482.

[3] BOCHNER, S.: A new viewpoint in differential geometry, *Canadian Journal of Math.* **3** (1951), 460—470.

[4] BOURBAKI, N.: *Élémente de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre. Chapitre III: Algèbre multilinéaire.*, Paris, 1948.

[17] Ez látható a γ, ill. a $\overset{*}{\gamma}$ (1.13) transzformációs törvényéből.

[5] COSSU, A.: Sulle connessioni tensoriali integrabili, *Atti Acad. Naz. Lincei* **19** (1955), 258–264.

[6] COSSU, A.: Connessioni tensoriali per tensori doppi misti, *Atti Acad. Naz. Lincei*, **19** (1956), 421–427.

[7] COSSU, A.: Nozioni generali sulle connessioni tensoriali di specie qualunque, *Rend. Mat. ed Appl.* **21** (1962), 167–218.

[8] DUSCHEK, A.—MAYER, W.: *Lehrbuch der Differentialgeometrie, Band* II., Leipzig, 1930.

[9] EISENHART, L. P.: *Non Riemannian-geometry*, New York, 1927.

[10] EISENHART, L. P.: *Continuous groups of transformations*, Princeton, 1933.

[11] FARKAS, M.: Discussion of the geometry of affinelly connected spaces by direct method, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961), 25–54.

[12] GOŁAB, S.: Sur les comitants algebriques d'une objet de la connexion linéaire tansorielle, *Annali di Mat. Pura ed Appl.* **54** (1961), 13–21.

[13] HOKARI, S.: Über die Bivektorübertragung, *Journal Fac. Sci. Hokkaido Univ.* **2** (1934), 104—117.

[14] KUCHARZEWSKI, M.: Über die Tensorübertragung, *Annali di Mat. Pura ed Appl.* **54** (1961), 64–83.

[15] LICHNEROWICZ, A.: *Algèbre et Analyse linéaires*, Paris 1947.

[16] SCHOUTEN, J. A.: *Ricci-calculus*, Berlin 1954.

[17] SOÓS, GY.: A Finsler-féle fibrált terek elméletéhez, *Magy. Tud. Ak. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **13** (1963), 17–64.

[18] TAMÁSSY, L.: Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 65–82.

[19] TAMÁSSY, L.: Über die geometrische Anwendung eines Differentialgleichungssystems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11** (1960), 187–196.

[20] THOMAS, J. M.—VEBLEN, O.: Projective invariants of affine geometry of paths. *Annals of Math.* **27** (1926), 279–296.

[21] VARGA, O.: Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7–17.

[22] WEYL, H.: Reine Infinitesimalgeometrie, *Math. Zeitschrift* **2** (1918), 384–411.

[23] YANO, K.: *The theory of Lie-derivatives and its applications*, Amsterdam 1956.

(Beérkezett: 1963. VIII. 6.)