

AZ ARTIN-GYŰRŰK ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL

Írta: KERTÉSZ ANDOR

Emil Artin emlékének

1. 1962. december 20-án, életének 65. évében, váratlanul elhunyt EMIL ARTIN. Halála súlyos veszteség nemcsak a hamburgi Egyetem Matematikai Szemináriuma számára, ahol professzorként tevékenykedett, hanem egyben az egész matematika számára is, amelyet számos alapvető fontosságú eredménnyel gazdagított.

EMIL ARTIN sokoldalú tudományos tevékenységet folytatott. Ennek bizonyítéka 7 könyv és több mint 40 tudományos dolgozat. ARTIN elsősorban az algebrai számelmélet, a topológia és az algebra területén dolgozott. Különösen kiemelendő az a hatás, amelyet a modern algebra fejlődésére gyakorolt. Az ő jelentősége az algebra fejlődésében nemcsak abban áll, hogy nagyfontosságú eredményeket ért el, mint pl. a féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó ún. WEDDERBURN—ARTIN-féle struktúra-tételek, ideálméleti eredményei, a testek elrendezhetőségéről szóló SCHREIER-tel közös tétele, vagy az alternatívgyűrűk jellemzéséről szóló nevezetes tétele, hanem abban is, hogy igen nagy részt vállalt ennek az újonnan keletkezett tudománynak megszerezésében. Így pl. VAN DER WAERDEN nevezetes könyve részben ARTIN előadásaira épül.

Nem lehet feladatomban, hogy EMIL ARTIN tudományos munkásságát itt részletesen ismertessem és életművét méltassam.

E dolgozatban az Artin-gyűrűk elméletének néhány újabb eredményével és problémájával foglalkozunk, s amikor ezt tesszük, tisztelettel és hálával emlékezünk EMIL ARTIN-ra, aki ennek az elméletnek alapjait lerakta, s a további kutatásokhoz értékes ösztönzést adott.

2. Az újabb irodalomban olyan asszociatív gyűrűt neveznek Artin-gyűrűnek, amely balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget.¹ ARTIN-nak köszönhetjük ugyanis azt a nagyfontosságú felfedezést, hogy a véges rangú asszociatív algebrák elméletének lényeges eredményei a minimumkövetelménynek eleget tevő gyűrűk sokkal szélesebb osztályára is átvihetők, sőt ez az általánosítás a problémáknak egy sokkal természetesebb tárgyalását teszi lehetővé [1]. Az Artin-gyűrűk vizsgálata a modern gyűrűelmélet magvát alkotja; éspedig nemcsak azért, mert a gyűrűelmélet történetileg az algebrák elméletéből fejlődött ki, s így természetesen először az algebrák osztályához legközelebb álló gyűrűosztályokat, az Artin-féle és Noether-féle gyűrűk osztályait vizsgálták, hanem azért is, mert azok a módszerek,

¹ Azaz, a gyűrű balideáljainak bármely (nem üres) rendszere tartalmaz minimális elemet. Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a gyűrű balideáljainak bármely csökkenő láncja véges sok lépés után megszakad. — E referátumban gyűrűn mindig asszociatív gyűrűt értünk. — Az algebrában járatos olvasó a lábjegyzeteket a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatja.

amelyek az Artin-gyűrűk vizsgálata során alakultak ki, az általános gyűrűelméletben is hasznosnak bizonyultak. Gondolhatunk itt pl. arra az EMMY NOETHERNEK köszönhető felismerésre, hogy bizonyos gyűrűk szerkezete a vektorterek lineáris transzformációival függ össze, s ezáltal bizonyos gyűrűelméleti problémákat vektorterekre vonatkozó problémáknak tekinthetünk. Jóllehet a gyűrűelméletben már egész sor ilyen jellegű tétel ismeretes, még ma sem vagyunk abban a helyzetben, hogy ezt a felfedezést kellő mértékben értékelhessük, hiszen még nem láthatjuk, hogy milyen messze vezethetnek a benne rejlő lehetőségek. Mindamellett világos, hogy az a törekvés, hogy bizonyos gyűrűk szerkezetét vektorterek lineáris transzformációinak segítségével írjuk le, hosszú időre meghatározta a gyűrűelmélet arculatát.

3. Legyen R tetszőleges Artin-gyűrű és N az R radikálja.² Mint ismeretes, N nilpotens ideál. Az N radikálra vonatkozólag két szélső esetet különböztethetünk meg: az R gyűrű lehet radikálmentes (azaz $N=0$), ez az ún. *féligegyszerű gyűrűk* esete; továbbá az R lehet radikálgyűrű (azaz $N=R$), és ez az ún. *nilpotens Artin-gyűrűk* esete. A féligegyszerű és nilpotens Artin-gyűrűk osztályát kielégítő módon le lehet írni. Először ezzel a két osztállyal foglalkozunk.

4. A WEDDERBURN—ARTIN-féle struktúratétel szerint *bármely féligegyszerű gyűrű véges sok, ferdetest feletti mátrixgyűrű direkt összegével izomorf*. Eszerint egy féligegyszerű gyűrűt véges sok ferdetest, és ugyanannyi, egyértelműen hozzájuk rendelt természetes szám, ti. a szóban forgó kvadratikus mátrixok típusa, teljesen meghatározza.

A féligegyszerű gyűrűket számos más jellemző tulajdonság is kitünteti az összes gyűrű osztályában. Ilyen például a NOETHER által felfedezett tulajdonság: *egy féligegyszerű gyűrű egységelemes és véges sok minimális balideál direkt összege* [22]; vagy a GOLDMAN-féle tulajdonság: *bármely balideálnak van jobbegységeleme* ([10], erre vonatkozólag lásd még [7]).

Említsünk néhányat a további jellemzések közül is. Az R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van jobbegységeleme, és teljesül a következő (egymással ekvivalens) tulajdonságok egyike:

- a) R -nek van véges sok maximális balideálja, amelyek metszete a nullideál;
- b) R tetszőleges 0-tól különböző elemének baloldali annullátora az R gyűrű véges sok maximális balideáljának metszete;
- c) R bármely balideálja szerváns balideál R -ben;³
- d) R összeesik balideáljai bármely maximális független rendszerének (direkt) összegével ([19], [20]).⁴

² Egy gyűrű radikálját úgy definiálják, mint a gyűrű összes nilpotens balideáljának az összegét. Egy gyűrű valamely L balideálját (ideálját) nilpotensnek hívják, ha alkalmas m természetes számra $L^m = 0$.

³ Az R gyűrű valamely L balideálját *szervánsnak* nevezzük, ha bármely L feletti egyismeretlenes lineáris egyenletrendszer, amely R -ben megoldható, L -ben is megoldható.

⁴ Az R gyűrű balideáljainak valamely $S = [L_\lambda]_{\lambda \in A}$ rendszerét *függetlennek* nevezzük, ha bármely $\lambda \in A$ esetén $L_\lambda \cap \sum_{\substack{\tau \in A \\ \tau \neq \lambda}} L_\tau = 0$. Az S független rendszer maximális, ha R bármely 0-tól különböző L' balideálja esetén az $[S, L']$ rendszer nem független.

Egy olyan jellemzés, amelynél a jobbégységelem létezését nem kell megkövetelni a következő: *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha van véges sok moduláris maximális balideálja, amelyek metszete a nullideál.*⁵

A féligegyszerű gyűrűk további jellemzéséhez szükségünk van a STEINFELD OTTÓ által bevezetett kváziideál fogalmára. Egy R gyűrű valamely Q additív rész-csoportját kváziideálnak nevezzük, ha

$$RQ \cap QR \subseteq Q$$

teljesül [23]. *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha radikálmentes és véges sok minimális kváziideáljának direkt összegeként áll elő* [20]. Példák mutatják, hogy a NOETHER-féle jellemzésnek olyan élesítése, amely az imént említett tételben a radikálmentesség helyett az egységelem létezését követelné meg, nem lehetséges.

Legyen R tetszőleges gyűrű, Γ (nem üres) indexhalmaz és S az x_α ($\alpha \in \Gamma$) határozatlanok halmaza. Tekintsük R felett az

$$(1) \quad f_\beta = r_\beta \quad (r_\beta \in R; \beta \in \Omega)$$

egyenletek rendszerét, ahol Ω egy másik tetszőleges indexhalmazt jelöl és valamennyi f_β az x_α határozatlanoknak R feletti lineáris kifejezése (azaz véges sok x_α -nak R -ből és a racionális egész számok Z gyűrűjéből vett együtthatókkal való lineáris kombinációja).⁶

$$(2) \quad f_\beta = \sum_{j=1}^{k(\beta)} (a_{\beta j} x_{\alpha(\beta, j)} + m_{\beta j} x_{\alpha(\beta, j)}) \quad (a_{\beta j} \in R; m_{\beta j} \in Z; \alpha(\beta, j) \in \Gamma).$$

Azt mondjuk, hogy az (1) egyenletrendszer R -ben megoldható, ha létezik olyan $x_{\alpha(\beta, j)} \rightarrow h_{\alpha(\beta, j)}$ egyértelmű leképezés, ahol $h_{\alpha(\beta, j)} \in R$, $\beta \in \Omega$ és j (minden β -ra) befutja az $\{1, \dots, k(\beta)\}$ halmazt, hogy az (1) egyenletek $x_{\alpha(\beta, j)} = h_{\alpha(\beta, j)}$ helyettesítéssel teljesülnek.

Az (1) egyenletrendszer (R -ben, vagy R valamely bővítésében) való megoldásához nyilvánvalóan szükséges a következő feltétel teljesülése: egy

$$s_1 f_{\beta_1} + s_2 f_{\beta_2} + \dots + s_l f_{\beta_l} + u_1 f_{\beta_1} + u_2 f_{\beta_2} + \dots + u_l f_{\beta_l} = 0 \quad (s_i \in R; u_i \in Z)$$

alakú egyenlőségéből mindig következik

$$s_1 r_{\beta_1} + s_2 r_{\beta_2} + \dots + s_l r_{\beta_l} + u_1 r_{\beta_1} + u_2 r_{\beta_2} + \dots + u_l r_{\beta_l} = 0.$$

Ha ez a követelmény teljesül, akkor az (1) egyenletrendszert *kompatibilisnek* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű *lineárisan zárt*, ha bármely R feletti kompatibilis lineáris egyenletrendszer R -ben megoldható. GACSÁLYI SÁNDOR kimutatta, hogy bármely ferdetest lineárisan zárt [9]. A ferdetestek azonban korántsem merítik ki a lineárisan zárt gyűrűk osztályát.

1. Probléma. Meghatározandó az összes lineárisan zárt gyűrű.

⁵ Az R gyűrű L balideálját *modulárisnak* nevezik, ha R -nek van jobboldali egységeleme modulo L , azaz, ha bármely $x (\in R)$ elemre $x - xe \in L$ teljesül.

⁶ Félreértés elkerülése céljából megjegyezzük, hogy két lineáris formát akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha bármely határozatlan mindkét formában ugyanazzal az R -beli, ill. Z -beli együtthatóval van ellátva. Így például mindig $ax \neq mx$ ($a \in R; m \in Z$), még abban az esetben is, ha $m=1$ és a az R gyűrű esetleges egységeleme. — Ha R egységelemes gyűrű, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy (2)-ben minden β -ra és j -re $m_{\beta j}=0$.

A lineárisan zárt gyűrűk osztályához tartoznak a féligegyszerű gyűrűk. Példák mutatják azonban, hogy a lineárisan zárt gyűrűk még ezek által sincsenek kimerítve; a lineáris zártságához ugyanis sem a radikálmertesség, sem pedig a minimumkövetelmény nem szükséges. Ha az R gyűrű féligegyszerű, akkor bármely R feletti (1) kompatibilis lineáris egyenletrendszer R -ben megoldható, és az egyenletrendszer összes megoldása egy

$$x_\alpha = c_\alpha + \sum d_i t_i \quad (\alpha \in \Gamma; d_i \in R)$$

alakú képletrendszer segítségével nyerhető, ahol a t_i -k az R gyűrű bizonyos T_i részhalmazából szabadon választható paraméterek, a c_α konstansok pedig az (1) egyenletek jobboldalain álló konstansok (véges bal-) lineáris kombinációi [14], [18].

A féligegyszerű Artin-gyűrűket mint lineárisan zárt gyűrűket jellemzi a következő tétel: *egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha bármely balideálja (mint gyűrű) lineárisan zárt* [18].

5. Térjünk át most a nilpotens Artin-gyűrűk esetére. CH. HOPKINS [12] dolgozatában nilpotens Artin-gyűrűkkel is foglalkozik. Kimutatja, hogy ha egy nilpotens gyűrű balideáljaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget, akkor jobbideáljaira nézve is és megfordítva. Továbbá, nilpotens Artin-gyűrű részgyűrűire nézve is minimumkövetelménynek tesz eleget. A nilpotens Artin-gyűrűk additív csoportja torziócsoporthoz tartozik, tehát bármely nilpotens Artin-gyűrű véges sok nilpotens Artin-féle p -gyűrű direkt összege [12].⁷

HOPKINS vizsgálataival kapcsolódva SZELE TIBOR [26] további eredményeket ért el, megadva a nilpotens Artin-gyűrűknek egy viszonylag teljes leírását. A viszonylagosság itt azt jelenti, hogy amint a WEDDERBURN—ARTIN-féle struktúratétel a radikálmert Artin-gyűrűk szerkezetének leírását a ferdetestek esetére vezeti vissza, éppen úgy a SZELE-féle elmélet a nilpotens Artin-gyűrűket a véges nilpotens gyűrűk segítségével jellemzi. SZELE vizsgálatainak az a felismerés a kiinduló pontja, hogy *nilpotens Artin-gyűrű additív részcsoportjaira nézve is minimumkövetelménynek tesz eleget*, és így KUROS [21] szerint egy ilyen gyűrű additív szerkezete tökéletesen ismeretes:

$$R = C(p_1^{n_1}) + \dots + C(p_k^{n_k}) \quad (1 \leq n_i \leq \infty).^8$$

HOPKINS ismertetett tételei közvetlen következményei ennek az eredménynek. SZELE bizonyította a következőt is: *Ha a nilpotens R gyűrű balideáljaira nézve maximumkövetelménynek tesz eleget, akkor maximumkövetelménynek tesz eleget az R additív csoportja is a részcsoportjaira nézve*, s így R additív csoportja véges sok ciklikus csoportnak a direkt összege. Egy ilyen gyűrű additív csoportja tehát teljesen ismert. Ezzel kapcsolatos a

2. Probléma. Meghatározandó azoknak a nilpotens gyűrűknek a szerkezete, amelyek balideáljaikra nézve maximumkövetelménynek tesznek eleget.

⁷ Egy R gyűrűt p -gyűrűnek neveznek (p rögzített prímszám), ha R bármely 0-tól különböző elemének (additív) rendje a p szám hatványa. — Ha az R gyűrű additív csoportja torziócsoporthoz tartozik, akkor az R gyűrűt torziógyűrűnek ill. torziómert gyűrűnek nevezzük.

⁸ Itt p_i prímszámot jelöl. $C(p_i^{n_i})$ -vel a $p_i^{n_i}$ rendű ciklikus csoportot jelöljük, ha $n_i < \infty$ és a PRÜFER-féle kváziciklikus csoportot, ha $n_i = \infty$. — A „+” jel itt és az alábbi (3) képletben Abel-csoportok direkt összegét jelöli.

6. Tekintsük most az Artin-gyűrűk általános esetét. Itt alapvető fontosságú az additív szerkezet meghatározása. SZELE TIBOR bebizonyította, hogy tetszőleges R Artin-gyűrű R^+ additív csoportja mindig

$$(3) \quad R^+ = \sum_{\text{véges}} \mathfrak{R} + \sum_{p^\infty} C(p^\infty) + \sum_{p^k | m} C(p^k)$$

alakú,⁹ ahol m rögzített természetes szám, a direkt összeg első és harmadik tagjában fellépő direkt összeadandók halmazának számossága tetszőleges, míg a másodikban fellépőké véges [8]. FUCHS LÁSZLÓ kimutatta, hogy egy (3) alakú Abel-csoportra mindig lehet Artin-gyűrűt építeni [6]. Bármely Artin-gyűrű, mely nem tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú részcsoportot, egy torziómentes Artin-gyűrűnek és véges sok, csupa különböző prímszámhoz tartozó Artin-féle p -gyűrűnek gyűrűelméleti direkt összege [8]. Azt a kérdést, hogy vajon hasonló állítás általában is érvényes-e, SZÁSZ FERENC válaszolta meg:

Bármely Artin-gyűrű egy torziómentes Artin-gyűrűnek és véges sok Artin-féle p -gyűrűnek a (gyűrűelméleti) direkt összege [25]. Ez a tétel a tetszőleges Artin-gyűrűk struktúráproblémáját visszavezeti a torziómentes Artin-gyűrűk és az Artin-féle p -gyűrűk vizsgálatára. A torziómentes Artin-gyűrűk esetében figyelemre méltó az a tény, hogy az ilyen gyűrűknek mindig van baleségelemük, s ez egységelem, ha a gyűrű egyetlen balannullátora a zéruselem [25], továbbá, hogy az ilyen gyűrűk bármely balideáljának additív csoportja algebrailag zárt Abel-csoport. Másrészt lényeges, hogy egységelemes Artin-féle p -gyűrű additív csoportja véges, tehát igen egyszerű szerkezetű.

FUCHS és SZELE [8] bizonyította be a következő tételt: *Artin-gyűrű balideáljaira nézve akkor és csak akkor tesz eleget a maximumkövetelménynek is, ha nincs $C(p^\infty)$ típusú részcsoportja.*

Legyen R Artin-gyűrű és N az R radikálja. Az R/N faktorgyűrű radikálmentes Artin-gyűrű (azaz félegyszerű gyűrű), az N radikál azonban mint gyűrű általában nem Artin-féle. A nilpotens Artin-gyűrűkre vonatkozó SZELE-féle tétel alapján könnyű belátni, hogy N akkor és csak akkor Artin-féle, ha additív csoportja véges sok $C(p^k)$ ($1 \leq k \leq \infty$) típusú csoport direkt összege. Artin-gyűrűk radikáljának additív csoportját vizsgálva SZÁSZ FERENC [25] bebizonyította a következő tételt: *Egy R Artin-gyűrű N radikáljának torziórészgyűrűje N gyűrű-direkt összeadandója. Egy G Abel-csoport valamely Artin-gyűrű radikáljának akkor és csak akkor additív csoportja, ha*

$$G \cong \sum_{\text{véges}} \mathfrak{R} + \sum_{p^\infty} C(p^\infty) + \sum_{p^k | m} C(p^k).$$

Olyan Artin-gyűrűkre vonatkozólag, amelyek jobbideáljaira nézve is minimumkövetelménynek tesznek eleget, J. DIEUDONNÉ és H.-J. HOEHNKE folytattak vizsgálatokat [5], [11]. Tisztázatlan azonban még a következő kérdés:

3. Probléma. Melyek azok az Artin-gyűrűk, amelyek jobbideáljaira nézve is minimumkövetelménynek tesznek eleget? (E kérdésre olyan felelet volna kíváncs, amely lehetőleg a gyűrű additív szerkezetével függ össze.)

A félegyszerű és nilpotens Artin-gyűrűk osztálya csupa ilyen gyűrűből áll. Másrészt, mint ismeretes, nem minden Artin-gyűrű rendelkezik ezzel a tulajdon-

⁹ $\mathfrak{R}$ -rel jelöljük a racionális számok additív csoportját.

sággal. Nem régen SZÁSZ FERENC bizonyította be, hogy minden végtelen m számossághoz van olyan egységelemes gyűrű, amelynek pontosan három balideálja (és pedig R maga, a radikál és a nullideál), de legalább m különböző jobbideálja van [24]. Ez a tétel igenlő feleletet ad a következő, SZELE TIBOR által felvetett kérdésre: van-e olyan gyűrű, amelynek csak véges sok balideálja, de végtelen sok jobbideálja van?

Egységelemes Artin-gyűrű nem tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú részcsoportot. Ez a tulajdonság tehát szükséges ahhoz, hogy egy Artin-gyűrű beágyazható legyen egységelemes Artin-gyűrűbe. Megfordítva, FUCHS és SZELE kimutatta, hogy ha egy Artin-gyűrű nem tartalmaz $C(p^\infty)$ típusú részcsoportot, akkor mindig beágyazható egységelemes Artin-gyűrűbe [8]. Megoldatlan még azonban a következő beágyazási probléma:

4. Probléma. Meghatározandó az összes olyan gyűrű, amely beágyazható Artin-gyűrűbe.

Egy ilyen gyűrű additív csoportja nyilvánvalóan egy torziómentes csoport, egy korlátosrendű torziócsoport és véges sok $C(p^\infty)$ típusú csoport direkt összege.

7. A félegyszerű gyűrűket, mint operátortartományokat is figyelemre méltó tulajdonságok jellemzik. Egy idevonatkozó eredmény szerint egy R gyűrű akkor és csak akkor félegyszerű, ha bármely R -modulus a maximális triviális részmodulusnak és egy teljesen redukálható R -modulusnak a direkt összege [10].¹⁰ Példaként említünk egy másik eredményt is: egy R gyűrű akkor és csak akkor félegyszerű, ha R -nek bármely L balideáljára és a tetszőleges G R -modulus bármely g elemére az Lg részmodulus G -nek direkt összeadandója [13].

Az ún. injektív modulusok¹¹ osztálya is alkalmas arra, hogy a félegyszerű gyűrűket jellemezze: egy R gyűrű akkor és csak akkor félegyszerű, ha bármely R -modulus a maximális triviális részmodulusnak és egy injektív R -modulusnak a direkt összege ([3], [16]).

5. Probléma. Adjunk meg olyan moduluselméleti tulajdonságot, amely pontosan az Artin-gyűrűket jellemzi.

A kommutatív egységelemes Artin-gyűrűk ugyanis jellemezhetők ilyen módon: egy kommutatív, egységelemes R gyűrű akkor és csak akkor Artin-féle, ha tetszőlegesen sok projektív¹² unitér R -modulus komplett direkt összege szintén projektív [4].

¹⁰ Egy G R -moduluson olyan additív Abel-csoportot értünk, amelynek az R gyűrű baloldali operátortartománya. Ha R egységelemes gyűrű, s R egységeleme a G moduluson identikus operátorként hat, akkor a G R -modulust unitér R -modulusnak nevezzük. Egy G R -modulus összes olyan x eleme, amelyre $Rx=0$ részmodulust alkot. Ezt a részmodulust a G maximális triviális részmodulusának mondják. — Az egyszerű R -modulusok direkt összegeként előálló R -modulusokat teljesen redukálhatónak nevezzük. Egyszerű az olyan R -modulus, amelynek legfeljebb két részmodulusa (ti. a zérus-részmodulus és maga a modulus) van.

¹¹ Injektívnek neveznek egy olyan R -modulust, amely minden őt tartalmazó R -modulusnak direkt összeadandója.

¹² Egy R -modulust projektívnek neveznek, ha direkt összeadandója valamely szabad R -modulusnak.

IRODALOM

- [1] ARTIN, E., Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg* 5 (1927), 251–260.
- [2] ARTIN, E., NESBITT, C. J. and THRALL, R. M., *Rings with minimum condition*, Ann Arbor, 1948.
- [3] CARTAN, H. and EILENBERG, S., *Homological Algebra*, Princeton, 1956.
- [4] CHASE, S. U., Direct product of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* 97 (1960), 457–473.
- [5] DIEUDONNÉ, J., Sur les systèmes hypercomplexes, *J. reine u. angew. Math.* 184 (1942), 178–192.
- [6] FUCHS, L., Ringe und ihre additive Gruppe, *Publ. Math. Debrecen* 4 (1956), 488–508.
- [7] FUCHS, L. and SZELE, T., Contribution to theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 3 (1952), 235–239.
- [8] FUCHS, L. and SZELE, T., On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged* 17 (1956), 30–40.
- [9] GACSÁLYI, S., On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen* 2 (1952), 292–296.
- [10] GOLDMAN, O., A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 1021–1027.
- [11] HOEHNKE, H.–J., Lösung eines Problems von Ch. Hopkins, *J. reine u. angew. Math.* 198 (1957), 112–120.
- [12] HOPKINS, CH., Rings with minimal condition for left ideals, *Ann. of Math.* 40 (1939), 712–730.
- [13] KERTÉSZ, A., A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése, *Acta Univ. Debrecen* 1 (1954), 151–153.
- [14] KERTÉSZ, A., The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen* 4 (1955), 79–86.
- [15] KERTÉSZ, A., Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8 (1957), 235–257.
- [16] KERTÉSZ, A., Systems of equations over modules, *Acta Sci. Math. Szeged* 18 (1957), 207–234.
- [17] KERTÉSZ, A., Correction to my paper „System of equations over modules”, *Acta Sci. Math. Szeged* 19 (1958), 251–252.
- [18] KERTÉSZ, A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében II., *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 9 (1959), 15–50.
- [19] KERTÉSZ, A., Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében III., *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 9 (1959), 105–120.
- [20] KERTÉSZ A., és STEINFELD, O., A féligegyszerű gyűrűk jellemzéseiről, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 9 (1959), 301–314.
- [21] KUROSCH, A., Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, *Math. Ann.* 106 (1932), 107–113.
- [22] NOETHER, E., Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.
- [23] STEINFELD, O., On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4 (1953), 289–298.
- [24] SZÁSZ, F., Szele Tibor egy gyűrűelméleti problémájának a megoldása, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 12 (1962), 47–50.
- [25] SZÁSZ, F., Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Série sci. math. astr. phys.* 11 (1963), 351–354.
- [26] SZELE, T., Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen* 4 (1955), 71–78.

(Beérkezett: 1963. V. 20.)