FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, I.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

BEVEZETÉS

A sztochasztikus folyamatok statisztikai vizsgálata mindössze mintegy 20 éves múltra tekint vissza. Az első jelentős eredmény MANN és WALD [1] nevéhez fűződik, akik az n-dimenziós diszkrét stacionárius *Gauss—Markov* folyamatok paramétereinek becslésével foglalkoztak. Itt kell megemlítenünk NEUMANN JÁNOS nevét is, aki az egydimenziós időben diszkrét stacionárius *Gauss—Markov* folyamat paramétereinek becslésével foglalkozott és ő javasolta az ún. széria-korrelációs együttható bevezetését. Az első összefoglaló jellegű munka U. GRENANDER [1] 1950-ben megjelent dolgozata. Munkája úttörő jelentőségű, elsősorban az időben folytonos folyamatok statisztikája terén s mind a mai napig nem vesztette el aktualitását, amit az is mutat, hogy orosz nyelvre nemrég fordították le és könyv alakban adták ki. A. N. KOLMOGOROV még 1948-ban felvetette a stacionárius *Gauss—Markov* folyamat paraméterei becslésének a problémáját, mint az egyik legfontosabb feladatot a folyamatok statisztikájában. Már akkor megjegyezte, hogy a problémának csak úgy van értelme — és különleges sajátossága, — ha a paramétereket nem külön-külön vizsgáljuk, hanem együttesen. Részleges megoldást nyújtott LINNIK [1] dolgozatában. További eredményeket ért el ebben az irányban LUVSZANCEREN [1], [2]. A probléma teljes megoldását, abban a formában ahogyan azt KOLMOGOROV felvetette és lényegében a megoldást is várta, a szerző adta meg disszertációjában [1].

A sztochasztikus folyamatok (vagy egyszerűen folyamatok) statisztikája az ötvenes években óriási fellendülésnek indult, elsősorban a rádiótechnikai és más fizikai alkalmazások hatására. Ebben az időben bontakozik ki a valószínűségszámításban a folyamatok elmélete és kezd ott központi helyet elfoglalni. Az utóbbi időben jelent meg P. BILLINGSLEY [1] értékes könyve *Markov* folyamatok statisztikai vizsgálatáról, azonban ő főleg időben diszkrét folyamatokkal foglalkozik s jelen dolgozattal nincsen kapcsolata.

Dolgozatomban a matematikai statisztika elemeinek és a sztochasztikus folyamatok elméletének ismeretét feltételezem, azonban ahol erre szükség van, a megfelelő irodalmi utalás szerepelni fog. Az olvasó számára talán lényeges megszorításnak tűnik, hogy eleinte csak *Gauss* folyamatokkal foglalkozom, de amint az irodalomból megállapítható, az eddigi kutatások tulajdonképpen csak *Gauss* folyamatokra vonatkoznak — bár sok eredmény átvihető más típusú folyamatokra is — és az ismert alkalmazási problémákban ez a feltétel teljesül is. Másrészt látni fogjuk, hogy a feladatok még *Gauss* folyamatok esetén is jóval bonyolultabbak, mint független megfigyeléseknél.

Jelen és a későbbi dolgozatok is összefoglaló jellegűek, tehát az ismertetett anyag részletes tárgyalását adják az új eredmények ismertetése mellett, hogy ily módon az olvasó teljes képet kapjon a tárgykörről. Elsődleges célom azoknak a sajátosságoknak a megmutatása, melyek éppen a folyamatok statisztikai problémáira jellemzőek s független megfigyeléssorozatok esetén nem fordulnak elő. A legalapvetőbb ily tulajdonság annak megvizsgálása pl. paraméter becslések esetén, hogy az ismeretlen paraméter becslései milyen határeloszlással bírnak? Itt az alapvető nehézség abban áll, hogy az ismeretlen paraméterértékek közel lehetnek (és a gyakorlatban legtöbbször ez a helyzet) egy olyan értékhez, mely értékre az addig reguláris folyamat szingulárissá válik. Szinguláris folyamatok esetén pedig nem érvényes a centrális határeloszlástétel, ily módon a becslések eloszlása nem lehet egyenletesen (a paraméter értékekben) aszimptotikusan normális eloszlású (még ha minden paraméter értékre az is), ami azt jelenti, hogy a becslések alapján nyert konfidencia intervallumok szerkesztése nem történhet a határeloszlás segítségével. Természetesen ez az egyik megfogalmazási lehetőség, más úton a folyamatokra jellemző speciális tulajdonságokat az információ elmélet segítségével nyerhetünk.

Erre a problémakörre aspiranturám ideje alatt A. N. KOLMOGOROV hívta fel a figyelmemet. Az ő útmutatásai és állandó segítsége, valamint JA. G. SZINAJ értékes megjegyzései tették lehetővé disszertációm megírását. Ezen a helyen is kifejezem mindkettőjüknek köszönetemet.

Dolgozatom felhasználja disszertációm eredményeit és részletes bizonyítással tartalmazza azokat a tételeket, melyek a [2], [3] dolgozatokban bizonyítás nélkül jelentek meg.

IDŐBEN FOLYTONOS, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, EGYDIMENZIÓS ESET

1. §. A folyamat jellemzése. Fizikai értelmezés és matematikai leírás

A fizikai folyamatok egy igen jelentős részében a folyamat lefolyását nem a

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t) \qquad (\lambda > 0)$$

differenciálegyenlet írja le, (melynek megoldása $x = x_0 e^{-\lambda t}$), hanem egy ún. sztochasztikus differenciálegyenlet, melyet

$$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)\,dt + d\zeta(t), \qquad (\mathbf{M}\zeta(t) = \mathbf{M}\xi(t) = 0) \tag{1. 1}$$

alakba írunk, ahol $\zeta(t)$ az ún. *Wiener* folyamat (független növekményű, *Gauss—Markov* folyamat) $\zeta(t+\tau)$ és $\xi(t)$, $\tau > 0$-ra függetlenek. A továbbiakban — ahol ezt külön nem jegyezzük meg — csak *Gauss* folyamatokkal foglalkozunk. A fenti differenciálegyenletnek az értelmezése a következő integrálegyenlet segítségével történik: $\xi(t)$ a megoldása a

$$\xi(t) - \xi(t_0) = -\lambda \int_{t_0}^{t} \xi(s)\,ds + \zeta(t) - \zeta(t_0) \tag{1. 1'}$$

integrálegyenletnek, ahol az integrál négyzetes középben értendő, a megoldás létezése és egyértelműsége következik általános tételekből (DOOB [1], ITO [1]), természetesen négyzetes középben.

Az (1. 1) differenciálegyenlettel jellemzett sztochasztikus folyamat lefolyása abban különbözik a közönséges differenciálegyenlettel leírttól, hogy a csillapodás nem történik folyamatosan, hanem bizonyos perturbálás lép mindig fel.

Amennyiben pl. a *Wiener* folyamat leírja az ideális gázban vagy folyadékban levő részecske mozgását magának a részecske sebességének a figyelembevétele nélkül, úgy a stacionárius *Gauss—Markov* folyamat figyelembe veszi a részecske sebességét is. Megemlítjük még, hogy a kis sztochasztikus perturbáló tagot figyelembe vevő eljárást a differenciálegyenletek elméletében ANDRONOV és PONTRJAGIN [1] vezette be.

Az (1. 1) egyenlet interpretálható úgy, mint a $\xi(t)$ sebességű véletlen hatásoknak alávetett részecske mozgásegyenlete, ahol a súrlódási erő arányos a részecske sebességével. Hasonlóan interpretálható $\xi(t)$ mint egy véletlen változásoknak alávetett potenciál, ahol a potenciál növekedése arányos magával a potenciállal.

Mivel feltettük, hogy a folyamat *Gauss* típusú és $\mathbf{M}\xi(t)=0$, a folyamatot egyértelműen megadja a kovariancia függvénye. Bebizonyítjuk a következő ismert tételt:

1. TÉTEL. *Az egydimenziós $\xi(t)$ Gauss folyamat $\left(\mathbf{M}\xi(t)=0\right)$ markovitásának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $R(s,t)$ függvénye eleget tegyen az alábbi feltételnek:*

(1. 2) $$R(s,t)=R(s,u)\,R(u,t), \qquad s<u<t,$$

ahol

$$R(s,t)=\frac{\mathbf{M}\xi(s)\xi(t)}{D\xi(s)}.$$

Bizonyítás. Ha a $\xi(t)$ folyamat *Gauss* és *Markov* típusú, akkor

$$\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u),\xi(s)\}=\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u)\}=R(u,t)\xi(u)$$

és $\xi(t)-\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u),\xi(s)\}$ merőleges $\xi(s)$-re (ha $s<u$), amit a következőképpen jelölünk: $\xi(t)-\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u),\xi(s)\}\perp\xi(s)$, így

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(s)\}=\mathbf{M}\{\xi(s)\xi(u)R(u,t)\}=R(u,t)\mathbf{M}\{\xi(s)\xi(u)\}.$$

$\mathbf{D}\xi(s)$-el osztva megkapjuk az (1. 2) összefüggést.

Tegyük most fel, hogy a valós *Gauss* $\xi(t)$ folyamatra teljesül a (1. 2) összefüggés, akkor nyilván teljesül az

$$\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(s)\}=R(u,t)\mathbf{M}\{\xi(s)\xi(u)\}=0$$

összefüggés is, azaz $\xi(t)-R(u,t)\xi(u)\perp\xi(s)$, ha $s<u$, tehát 1 valószínűséggel

$$R(u,t)\xi(u)=\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u)\}=\mathbf{M}\{\xi(t)|\xi(u),\xi(s_1),\ldots,\xi(s_n)\},$$

ahol $$s_i<u,\quad (i=\overline{1,n}),$$

tehát a folyamat *Markov* folyamat.

Abban a speciális esetben, amikor a folyamat stacionárius és $\mathbf{D}^2\xi(s)=\sigma_\xi^2$, $R(s,t)=R(t-s)$,

(1. 3) $$R(t_1+t_2)=R(t_1)R(t_2),$$

következésképpen

(1. 4) $$R(t)=\sigma_\xi^2 e^{-\lambda|t|}.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy az (1. 1) egyenletben szereplő λ paraméter és a korrelációs függvényben szereplő λ paraméter azonosak. Az (1. 1') megoldása ugyanis stacionárius *Gauss—Markov* folyamat lesz, ily módon korrelációs függvénye (1. 4) alakú. Ha $\mathbf{M}(d\zeta(t))^2=\sigma_\zeta^2 dt$, akkor fennáll a $\sigma_\zeta^2=2\lambda\sigma_\xi^2$ összefüggés is (1. 1) alapján.

Könnyen belátható, hogy a szeperábilis $\xi(t)$ folyamat folytonos, nem differenciálható 1 valószínűséggel (*Kolmogorov* tétele, l. DOOB [1], 576 o.).

Az $\int_{t_0}^{t}\xi(t)dt=\eta(t)$ folyamat létezik négyzetes középben és igaz a következő összefüggés:

$$\mathbf{M}\eta(t)\eta(s) = \frac{\sigma_\xi^2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda s}+e^{-\lambda t}+2\lambda s-1-e^{-\lambda(t-s)}\right]. \tag{1. 5}$$

Nyilván

$$\mathbf{M}\eta(t)\eta(s) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\sigma_\xi^2 e^{-\lambda|t_1-t_2|}dt_1 dt_2$$

és innen egyszerű számolással adódik állításunk. Bebizonyítjuk még a következő tételt:

2. TÉTEL: *A stacionárius Gauss—Markov folyamat kielégíti az* (1. 1) *differenciálegyenletet, azaz a $\xi(t)-\xi(t_0)+\lambda\eta(t)$ folyamat egy Wiener folyamat.*

Bizonyítás. Az (1. 5) összefüggés alapján

$$\mathbf{M}(\eta(t))^2 = \frac{2\sigma_\xi^2}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda t}+\lambda t-1\right], \tag{1. 6}$$

másrészt, ha $t_2\geqq t_1\geqq s_2\geqq s_1$, akkor

$$\mathbf{M}\big(\eta(t_2)-\eta(t_1)\big)\big(\eta(s_2)-\eta(s_1)\big) = \frac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left(e^{\lambda s_2}-e^{\lambda s_1}\right)\left(e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}\right) = \tag{1. 7}$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{M}\big(\xi(t_2)-\xi(t_1)\big)\big(\xi(s_2)-\xi(s_1)\big).$$

Igaz az is, hogy

$$\mathbf{M}\big(\eta(t)\xi(s)\big) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left[2-e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t-s)}\right] & \text{ha } t>s \\[2ex] \dfrac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left[e^{-\lambda(s-t)}-e^{-\lambda s}\right] & \text{ha } t\leqq s \end{cases} \tag{1. 8}$$

és így

$$\mathbf{M}\big[\big(\eta(t_2)-\eta(t_1)\big)\big(\xi(s_2)-\xi(s_1)\big)\big] = \frac{\sigma_\xi^2}{\lambda}\left(e^{\lambda s_2}-e^{\lambda s_1}\right)\left(e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2}\right) = \tag{1. 9}$$

$$= \mathbf{M}\big[\big(\eta(s_2)-\eta(s_1)\big)\big(\xi(t_2)-\xi(t_1)\big)\big].$$

(1. 9) és (1. 7) alapján belátható, hogy a

$$\lambda\eta(t)+\xi(t)-\xi(t_0)$$

folyamat független növekményű és normális, azaz *Wiener* folyamat, amivel állításunkat igazoltuk.

BAXTER tételéből [1] következik, hogy

$$\lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \to 0} \sum [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^2 = \sigma_\zeta^2 \cdot T \qquad \text{(1 valószínűséggel)}, \tag{1.10}$$

ahol $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ egy felosztása a $[0, T]$ intervallumnak. Ily módon bár az egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov* folyamatot 3 paraméterrel, az m, σ_ξ^2, λ paraméterekkel (ahol $m = \mathrm{M}\xi(t)$) lehet megadni, (1. 10) segítségével a σ_ζ^2 „diffúziós együttható" egyetlen realizáció alapján 1 valószínűséggel meg van határozva, így a $\sigma_\zeta^2 = 2\lambda\sigma_\xi^2$ összefüggés miatt az ismeretlen paraméterek száma 2 (vagy m és λ, vagy m és σ_ξ^2). Természetesen ebben a speciális esetben nem szükséges általános tételekre hivatkozva bizonyítani az (1. 10) összefüggést, elemi számolások segítségével is beláthatjuk (1. 10) helyességét.

Egyszerű számolással belátható, hogy

$$R(t) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut}}{|\lambda + iu|^2} \, du,$$

így a folyamat spektrál sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(u) = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\pi} \frac{1}{|\lambda + iu|^2}$$

alakú.

2. §. A likelihood hányados. Elégséges statisztikák és azok eloszlása

Az (1. 10) összefüggés más megfogalmazásban azt fejezi ki, hogy két különböző $\sigma_{\zeta_1}^2 \neq \sigma_{\zeta_2}^2$ „diffúziós együtthatójú" stacionárius *Gauss—Markov* folyamathoz tartozó, a $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ realizációk terén értelmezett P_1 és P_2 mértékek egymásra nézve szingulárisak.

A $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ realizációk R_ξ tere felfogható mint a $\xi(0)$ valós számegyenes és a $\eta(t) = \xi(t) - \xi(0)$ realizációk terének direkt szorzata. Jelölje W a jólismert *Wiener*-féle feltételes mértéket $(0, \sigma_\zeta)$ paraméterekkel a $0 < t \leq T$ intervallumon értelmezett függvények terén, L pedig a közönséges *Lebesgue* mértéket a számegyenesen. Legyen $V = L \times W$. Ha P jelöli az m, λ, σ_ξ^2 paraméterű $\xi(t)$ stacionárius *Gauss—Markov* folyamathoz tartozó mértéket a P mérték abszolút folytonos V-re nézve és a V szerinti *Radon—Nikodym* deriváltja (lásd CH. STRIEBEL).

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \frac{1}{\sigma_\zeta} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma_\zeta^2}\left[s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T + \frac{1}{2}\varkappa s_{02}^2\right]\right\} \tag{2.1}$$

lesz, ahol

$$\varkappa = \lambda T, \tag{2.2}$$

$$s_{01}^2 = \frac{1}{2}\{[\xi(o) - m]^2 + [\xi(T) - m]^2\}, \qquad s_{02}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (\xi(t) - m)^2 \, dt. \tag{2.3}$$

Innen látható, hogy ismert m esetén s_{01}^2, s_{02}^2 alkotják az ismeretlen λ (vagy σ_2^ξ) paraméter elégséges statisztikai rendszerét. Ha λ ismert és m ismeretlen (2. 1) következő alakjából (vö. GRENANDER 65. o.).

$$(2.4)\quad \frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_\zeta}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma_\zeta^2}\left[-2m\left(\frac{\xi(o)+\xi(T)}{2}+\frac{\varkappa}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+m^2\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)-\frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T+\frac{\varkappa}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)\,dt+\frac{\xi^2(o)+\xi^2(T)}{2}\right]\right\}$$

látható, hogy az ismeretlen m paraméter elégséges statisztikája az

$$(2.5)\qquad m_1 = \frac{\xi(o)+\xi(T)}{2},\quad m_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt$$

statisztikák súlyozott számtani közepe

$$(2.6)\qquad m^* = \frac{m_1+\frac{\varkappa}{2}m_2}{1+\frac{\varkappa}{2}}.$$

Ismeretlen m, λ paraméterek esetén (2. 1)-et írjuk át a következő alakba

$$(2.7)\quad \frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_\zeta}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma_\zeta^2}\left[s_1^2-\frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T+\frac{1}{2}\varkappa s_2^2+(m-m_1)^2+\frac{\varkappa}{2}(m-m_2)^2\right]\right\},$$

ahol

$$(2.8)\qquad s_1^2 = \frac{1}{2}\{[\xi(o)-m_1]^2+[\xi(T)-m_1]^2\} = \frac{1}{4}[\xi(T)-\xi(o)]^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi(t)-m_2]^2\,dt.$$

A (2. 7) formula alapján látható, hogy az m_1, m_2, s_1^2, s_2^2 rendszer egy elégséges statisztikát alkot.

A

$$(2.9)\qquad t=t'\cdot T,\quad \xi=\xi'\sigma_\zeta\sqrt{T}$$

leképezéssel az általános feladatot a $T=1$ és $\sigma_\zeta=1$ esetre vezethetjük vissza, amikor is $\lambda'=\lambda.\,T=\varkappa$, azaz az időegység megválasztásától függetlenül ismert m esetén a folyamat realizációi egyetlen paraméterrel, $\varkappa$-val vannak jellemezve. A későbbiekben gyakran feltesszük, hogy a (2. 9) leképezést már elvégeztük és a λ paraméter helyett egyszerűen $\varkappa$-át írunk. Ekkor (2. 1) a következő alakú lesz

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\exp\left\{-\varkappa\left[s_{01}^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varkappa s_{02}^2\right]\right\}. \tag{2. 1'}$$

Formálisan a (2. 1) ill. (2. 1') összefüggések „levezethetők" a következő módon is.

Legyen $\mathbf{M}\xi(t)=0$, akkor $\xi(0)$ sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi(o)}(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_\zeta^2}}=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{1}{\sigma_\zeta}e^{-\frac{\lambda x_0^2}{\sigma_\zeta^2}} \tag{2. 10}$$

alakú, másrészt az (1. 1') összefüggés alapján a $\zeta(t)$ és $\xi(t)$ folyamatok sűrűségfüggvény „funkcionálja" között a következő összefüggést kapjuk

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\int_0^T\frac{d\zeta^2}{dt}\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\int_0^T\frac{(d\xi+\lambda\xi\,dt)^2}{dt}\right\}= \tag{2. 11}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\zeta^2}\left[\int_0^T\frac{d\xi^2}{dt}+2\lambda\int_0^T\xi\,d\xi+\lambda^2\int_0^T\xi^2(t)\,dt\right]\right\}.$$

Felhasználjuk közben, hogy az $m(x, t)$, $b(x, t)$ együtthatójú $\eta(t)$ diffúziós folyamatra az $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ változók együttes sűrűségfüggvényének közelítő kifejezése

$$p(x_0, \ldots, x_n)=p_0(x_0)\prod_{i=0}^{n-1}[2\pi b(x_i, t_i)]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta_i}-a_i\right]^2\frac{\Delta_i}{b_i}\right\}$$

lesz, ahol

$$t_{i+1}-t_i=\Delta_i,\ \eta_i=\eta(t_i),\ a_i=a(x_i, t_i),\ b_i=b(x_i, t_i),\ t_n=T,\ t_0=0.$$

Ebben a kifejezésben szereplő összeg pedig a

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\left[\frac{d\eta}{dt}-a(x, t)\right]^2\frac{dt}{b(x, t)}$$

alakú integrálhoz hasonlít.

Ismeretes azonban, hogy (lásd DOOB, 444. o.)

$$\int_0^T\xi\,d\xi=\frac{1}{2}[\xi^2(T)-\xi^2(o)]-\frac{1}{2}T\sigma_\zeta^2.$$

Így (2. 10) figyelembevételével (2. 11)-ből formálisan kiadódik (2. 1'). Az ilyen egyszerű „számolások" precíz bizonyítása azonban jóval hosszadalmasabb, amiről az olvasó meggyőződhet a fenti (2. 1) összefüggés (CH. STRIEBEL), de más összefüggések bizonyítása kapcsán is (lásd pl. JU. V. PROHOROV cikkét).

A

$$m_1 = \frac{\xi(o)+\xi(T)}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt,$$

$$s_{01}^2 = \frac{1}{2}\{[\xi(o)-m]^2+[\xi(T)-m]^2\}, \quad s_{02}^2 = \int_0^T (\xi(t)-m)^2\,dt$$

elégséges statisztikarendszer eloszlásának meghatározását végezzük el a következőkben. Legyen az egyszerűség kedvéért $m=0$, akkor a fenti valószínűségi változók együttes karakterisztikus függvénye

$$\text{(2. 13)} \quad \mathbf{M}\exp\{i\alpha_1 m_1 + i\alpha_2 s_{01}^2 + i\alpha_3 m_2 + i\alpha_4 s_{02}^2\} = \frac{2\sqrt{\lambda}\, e^{\frac{\varkappa}{2}}(\varkappa^2 - 2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{T}\,[\varphi(\alpha_2,\alpha_4)]^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot \exp\frac{1}{2}\left\{-\frac{\alpha_1\alpha_3\sigma_\xi^2+\alpha_3^2\sigma_\xi^2}{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}T+\left(\frac{i\alpha_1}{2}-T\frac{i\alpha_3\lambda+\alpha_2\alpha_3\sigma_\xi^2}{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\left(\frac{i\alpha_1\sigma_\xi^2}{2}\left(1+e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\right)+i\alpha_3\sigma_\xi^2\frac{1-e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{(\varkappa-T\sigma_\xi^2 i\alpha_2+\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4})e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}-(\varkappa-T\sigma_\xi^2 i\alpha_2-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4})}{T\cdot\varphi(\alpha_2,\alpha_4)}+$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\xi^2\left(1+e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\right)-i\alpha_3\sigma_\xi^2\frac{1-e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\frac{(\varkappa-T\sigma_\xi^2 i\alpha_2+\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4})-(\varkappa-T\sigma_\xi^2 i\alpha_2-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4})e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}}{T\varphi(\alpha_2,\alpha_4)}\right]\right\},$$

ahol

$$\text{(2. 14)} \quad \varphi(\alpha_2,\alpha_4) = \frac{1}{T^2}e^{\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}(\varkappa-T\sigma_\xi^2 i\alpha_2+\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4})^2-$$

$$-\frac{1}{T^2}e^{-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4}}(\varkappa-T\sigma_\xi^2 i\alpha_2-\sqrt{\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4})^2.$$

A (2. 13) és (2. 14) összefüggésből következik, hogy m_1, m_2 karakterisztikus függvénye

$$\text{(2. 15)} \quad \exp-\frac{1}{2}\left\{\alpha_1^2\frac{\sigma_\xi^2(1+e^{-\varkappa})}{4\lambda}+\alpha_1\alpha_3\frac{\sigma_\xi^2(1-e^{-\varkappa})}{T\lambda^2}+\alpha_3^2\frac{\sigma_\xi^2\left(T+\frac{e^{-\varkappa}-1}{\lambda}\right)}{\varkappa^2}\right\},$$

míg s_{01}^2, s_{02}^2 karaktirisztikus függvénye

$$\frac{2\sqrt{\frac{\lambda}{T}}\,e^{\frac{\varkappa}{2}}(\varkappa^2-2T\sigma_\xi^2 i\alpha_4)^{\frac{1}{4}}}{[\varphi(\alpha_2,\alpha_4)]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.16}$$

Ha $\varkappa=\lambda T\to 0$ $(\sqrt{\lambda}m_1, \sqrt{\lambda}m_2, \lambda s_{01}^2, \lambda^2 s_{02}^2)$ karakterisztikus függvénye

$$\frac{\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)e^{-\frac{(\alpha_1+\alpha_3)^2}{2(1-\sigma_\xi^2 i\alpha_2)}\sigma_\xi^2-\frac{\varkappa\sigma_\xi^2}{12}\alpha_3^2}}{\left\{1-\sigma_\xi^2 i\alpha_2+\frac{\varkappa}{2}\left[(1-\sigma_\xi^2 i\alpha_2)^2+1-2\sigma_\xi^2\frac{i\alpha_4}{T}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}+o(\varkappa) \tag{2.17}$$

alakú, amiből következik, hogy $\varkappa\to 0$ esetén m_1 és s_{01}^2 aszimptotikusan elégséges statisztikarendszert alkot.

A (2..13) *összefüggés bizonyítása.*

Legyen

$$m_1^{(n)}=\frac{\xi_1+\xi_n}{2},\quad s_{01}^{(n)}=\frac{\xi_1^2+\xi_n^2}{2},\quad m_2^{(n)}=\sum_2^n \xi_i\cdot\Delta t,\quad s_{02}^{(n)}=\sum_2^n \xi_i^2\cdot\Delta t,$$

ahol

$$\Delta t=\frac{T}{n},\quad \xi_i=\xi\left(\frac{i-1}{n}T\right),\ (i=1,2,\dots,n)\quad \text{és}\quad \beta=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

Nyilván

$$\mathbf{M}e^{i(\alpha_1 m_1^{(n)}+\alpha_2 s_{01}^{(n)}+\alpha_3 m_2^{(n)}+\alpha_4 s_{02}^{(n)})}= \tag{2.18}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}(1-\beta^2)^{-\frac{n-1}{2}}\int\dots\int e^{-\frac{1}{2}[XA_nX^*-XC^*]}\,dx_1\dots dx_n,$$

ahol

$$A_n=\frac{1}{\sigma^2(1-\beta^2)}\begin{pmatrix} a_1 & -\beta & 0 & 0\cdots 0\\ -\beta & a & -\beta & 0\cdots 0\\ 0 & -\beta & a & -\beta\cdots 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots a & -\beta\\ 0 & 0 & \cdots -\beta & a_1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma^2(1-\beta^2)}B_n,$$

$$a_1=1-i\alpha_2\sigma_\xi^2\Delta t,\quad a=2(1-\lambda\Delta t-i\alpha_4\sigma_\xi^2\Delta t+\lambda^2(\Delta t)^2+o(\Delta t)),$$

$$C^*=2\begin{pmatrix}\frac{i\alpha_1}{2}\\ i\alpha_3\Delta t\\ \vdots\\ i\alpha_3\Delta t\\ \frac{i\alpha_1}{2}\end{pmatrix}.$$

Közben felhasználtuk, hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$(2.19)\quad f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}(1-\beta^2)^{-\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\beta^2)}\cdot\left[(1-\beta^2)x_1^2 + \sum_2^n (x_i-\beta x_{i-1})^2\right]\right\},$$

vagy mátrix alakban

$$(2.19')\quad f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}(1-\beta^2)^{-\frac{n-1}{2}}\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\beta^2)} X R_n^{-1} X^*\right\}$$

alakú, ahol

$$R_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & & & & 1+\beta^2 & -\beta \\ 0 & 0 & & & & & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$X = (x_1, \dots, x_n), \quad X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(2. 19) egyszerűen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy ξ_n kielégíti a

$$(2.20)\quad \xi_{n+1} = \beta\xi_n + \zeta_{n+1}$$

differencia egyenletet, ahol ζ_n egy független *Gauss* eloszlású valószínűségi változó sorozat (fehér zaj) és $\sigma_\xi^2 = (1-\beta^2)\sigma_\xi^2$, ahol σ_ξ^2-et egyszerűen σ^2-el jelöljük. A (2. 20) leképezés ($i=1, 2, \dots, n$) függvénydeterminánsának értéke 1, így (2. 19) egyszerűen következménye a ζ_i ($i=\overline{1}, n$) változók függetlenségének.

Elégítse ki a $d_1, d_2, \dots, d_n$ számsorozat az

$$(2.21)\quad \begin{aligned} a_1 d_1 - \beta d_2 &= \frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 \cdot \Delta t \\ -\beta d_1 + a d_2 - \beta d_3 &= i\alpha_3 \sigma_\zeta^2 (\Delta t)^2 \\ &\vdots \\ -\beta d_{k-1} + a d_k - \beta d_{k+1} &= i\alpha_3 \sigma_\zeta^2 (\Delta t)^2 \\ &\vdots \\ -\beta d_{n-1} + a_1 d_n &= \frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 \Delta t \end{aligned}$$

egyenletrendszert, akkor

$$XA_nX^*-XC^* = YA_nY^*-D_n \tag{2.22}$$

alakba írható, ahol

$$D_n = a_1 d_1^2 + a(d_2^2+\ldots+d_{n-1}^2)+a_1 d_n^2 - 2\beta(d_1 d_2+\ldots+d_n d_{n-1}) = \tag{2.23}$$

$$= d_1(a_1 d_1 - \beta d_2) + d_2(ad_2-\beta d_1-\beta d_3)+\ldots+d_{n-1}(ad_{n-1}-\beta d_{n-2}-\beta d_n)+$$

$$+d_n(a_1 d_n - \beta d_{n-1}) = \frac{i\alpha_1}{2}(d_1+d_n)\sigma_\zeta^2\cdot\Delta t + i\alpha_3\sigma_\zeta^2(\Delta t)^2\sum_2^{n-1} d_i.$$

A (2. 21) egyenletrendszer partikuláris megoldása

$$d_i = d = \frac{i\alpha_3\sigma_\zeta^2}{\lambda^2-2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} \qquad (i=2,\ldots,n-1),$$

míg az általános megoldás

$$d_i = d+\theta_1 u_1^i+\theta_2 u_2^i \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{2.24}$$

alakú, ahol u_1, u_2 az

$$\beta u^2 - au - \beta = 0$$

egyenlet két gyöke, azaz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{a-\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2\beta} = 1-\Delta t\sqrt{\lambda^2-2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}+o(\Delta t),\\ u_2 &= \frac{a+\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2\beta} = 1+\Delta t\sqrt{\lambda^2-2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}+o(\Delta t). \end{aligned} \tag{2.25}$$

θ_1, θ_2 a (2. 21) egyenletrendszer első és utolsó egyenletéből, mint „kezdeti feltételekből” határozhatók meg, tehát

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2\Delta t - \frac{i\alpha_3\sigma_\zeta^2\Delta t(\lambda-i\alpha_2\sigma_\zeta^2)}{\lambda^2-2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)\cdot\\ &\cdot\frac{a_1u_2^n-\beta u_2^{n-1}-(a_1u_2-\beta u_2^2)}{(a_1u_1-\beta u_1^2)(a_1u_2^n-\beta u_2^{n-1})-(a_1u_2-\beta u_2^2)(a_1u_1^n-\beta u_1^{n-1})}\\ \theta_2 &= \left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2\Delta t - \frac{i\alpha_3\sigma_\zeta^2\Delta t(\lambda-i\alpha_2\sigma_\zeta^2)}{\lambda^2-2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)\cdot\\ &\cdot\frac{a_1u_1-\beta u_1^2-(a^1u_1^n-\beta u_1^{n-1})}{(a_1u_1-\beta u_1^2)(a_1u_2^n-\beta u_2^{n-1})-(a_1u_2-\beta u_2^2)(a_1u_1^n-\beta u_1^{n-1})} \end{aligned} \tag{2.26}$$

CRAMER ismert tétele szerint (CRAMER 136. o.)

$$\int\ldots\int\exp\left\{-\frac{1}{2}XA_nX^*\right\}dx_1\ldots dx_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}|A_n|^{-\frac{1}{2}}$$

és így (2. 22) alapján (2. 18) a következő alakú lesz:

$$(2.27) \qquad (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} |B_n|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{D_n}{2\sigma_\zeta^2 \Delta t}}.$$

Először határozzuk meg $e^{\frac{D_n}{2\sigma_\zeta^2 \Delta t}}$ határértékét amint $n \to \infty$. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$a_1 u_1 - \beta u_1^2 = \Delta t\left(\lambda - i\sigma_\zeta^2 \alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$a_1 u_2 - \beta u_2^2 = \Delta t\left(\lambda - i\sigma_\zeta^2 \alpha_2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$a_1 u_1^n - \beta u_1^{n-1} = e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\left(\lambda - i\sigma_\zeta^2 \alpha_2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(1),$$

$$a_1 u_2^n - \beta u_2^{n-1} = e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\left(\lambda - i\sigma_\zeta^2 \alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(1),$$

és így

$$(2.28) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{2\sigma_\zeta^2 \Delta t} = \frac{1}{2}\Bigg\{-\frac{\alpha_1\alpha_3\sigma_\zeta^2 + \alpha_3^2\sigma_\zeta^2 T}{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} +$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2} - \frac{i\alpha_3\lambda + \alpha_3\alpha_2\sigma_\zeta^2}{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)\Bigg[\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 + \frac{i\alpha_1\sigma_\zeta^2}{2} e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}} + i\alpha_3\sigma_\zeta^2 \frac{1 - e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\lambda - i\sigma_\zeta^2\alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}} - \left(\lambda - i\alpha_2\sigma_\zeta^2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)}{\varphi(\alpha_2, T\alpha_4)}\Bigg] +$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 + \frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\zeta^2 e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}} - i\alpha_3\sigma_\zeta^2 \frac{1 - e^{T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}}{\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\lambda - i\sigma_\zeta^2\alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) - e^{-T\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}}\left(\lambda - i\alpha_2\sigma_\zeta^2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right)}{\varphi(\alpha_2, T\alpha_4)}\Bigg]\Bigg\}.$$

$|B_n|$ kiszámításánál vegyük figyelembe, hogy

$$(2.29) \qquad |B_n| = a_1^2 |\tilde{B}_{n-2}| - 2\beta^2 a_1 |B_{n-3}| + \beta^4 |\tilde{B}_{n-4}|,$$

ahol $|\tilde{B}_n|$ kielégíti a

$$(2.30) \qquad |\tilde{B}_n| = a|\tilde{B}_{n-1}| - \beta^2 |B_{n-2}|$$

differenciaegyenletet és így

$$(2.31) \qquad |\tilde{B}_n| = \alpha_1 v_1^n + \alpha_2 v_2^n,$$

ahol v_1 és v_2 a

$$v^2 - av + \beta^2 = 0$$

egyenlet megoldásai, míg α_1 és α_2 az

$$|\tilde{B}_1| = a, \quad |\tilde{B}_2| = a^2 - \beta^2$$

feltételekből határozhatók meg. Azt kapjuk tehát, hogy

(2. 32) $$\alpha_1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \quad \alpha_2 = -\frac{v_2}{v_1 - v_2}.$$

Végül

(2. 33) $$|B_n|^{-1/2} = \left\{ \frac{v_1^{n-3}}{v_1 - v_2} [a_1 v_1 - \beta^2]^2 - \frac{v_2^{n-3}}{v_1 - v_2} [a_1 v_2 - \beta^2]^2 \right\}^{-1/2}.$$

Mivel

$$v_1 = 1 - \lambda \Delta t + \Delta t \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} + o(\Delta t),$$

$$v_2 = 1 - \lambda \Delta t - \Delta t \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} + o(\Delta t),$$

azt kapjuk, hogy

$$a_1 v_1 - \beta^2 = \Delta t \left(\lambda - \sigma_\zeta^2 i\alpha_2 + \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$a_1 v_2 - \beta^2 = \Delta t \left(\lambda - \sigma_\zeta^2 i\alpha_2 - \sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4}\right) + o(\Delta t),$$

$$v_1^{n-3} = e^{T(\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} - \lambda)} + o(1),$$

$$v_2^{n-3} = e^{-T(\sqrt{\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4} - \lambda)} + o(1),$$

és így

(2. 34) $$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} |B_n|^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\lambda}(\lambda^2 - 2\sigma_\zeta^2 i\alpha_4) e^{\frac{\lambda T}{2}}}{\varphi(\alpha_2, T\alpha_4)} (1 + o(1)).$$

(2. 27) (2. 28) és (2. 34)-ből következik (2. 13), amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Az itt ismertetett eljárás természetesen az egyik lehetséges módja az $m_1, m_2, s_{01}^2, s_{02}^2$ funkcionálok karakterisztikus függvényének meghatározására. Másik út kínálkozik oly módon, hogy a feltételes karakterisztikus függvényre (a $\xi(0) = x$ feltétel mellett) differenciálegyenletet írunk fel, s amely differenciálegyenletnek a megoldását (melynek egyértelműségét DÜNKIN [1] eredményei biztosítják) keressük meg.

Legyen ugyanis

(2. 35) $$u(T, x) = \mathbf{M}\{e^{i(\alpha_1 m_1 + \alpha_2 s_{01}^2 + \alpha_3 T m_2 + \alpha_4 T s_{02}^2)} |_{\xi(0) = x}\}.$$

Ekkor egyszerűen belátható, hogy

(2. 36) $$u(T + \Delta T, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta T}\, \sigma_\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1 - x + \lambda x \Delta T)^2}{2 \Delta T \sigma_\zeta^2}} \left[u(T, x) + \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1 = x} (x - x_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\bigg|_{x_1 = x} \frac{(x_1 - x)^2}{2} + \ldots \right] (1 + i\alpha_4 x^2 \Delta T)(1 + i\alpha_3 x \Delta T) \left[1 - \frac{i\alpha_1}{2}(x_1 - x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_1^2}{8}(x_1 - x)^2 + \ldots \right] \left[1 - \frac{i\alpha_2}{2}\left((x_1 - x)^2 + 2x(x_1 - x)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_2^2}{8}(4x^2(x_1 - x)^2 + \ldots) + \ldots \right] dx_1.$$

$\Delta T \to 0$ esetén (2. 36)-ból a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk $u(T, x)$-re:

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left[-x(\lambda + i\alpha_2) - \frac{i\alpha_1}{2}\right] + u\left[x^2\left(\lambda i\alpha_2 + i\alpha_4 - \frac{\alpha_2^2}{2}\right) + \right. \tag{2. 37}$$

$$\left. -x\left(\lambda\frac{i\alpha_1}{2} + i\alpha_3 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{2}\right) - \frac{i\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1^2}{8}\right].$$

A (2. 37) differenciálegyenlethez hasonló egyenlet megoldása szerepelni fog a későbbiekben, így ezt most elhagyjuk.

3. §. A paraméterek becslései és eloszlásaik.

Legyen λ ismert, akkor a várható érték maximum likelihood becslése (2. 4)-ből

$$\hat{m} = \frac{\xi(o) + \xi(T) + \lambda\int\limits_0^T \xi(t)\,dt}{2 + \lambda T} \tag{3. 1}$$

normális eloszlású (m, σ_1) $\left(\text{ahol } \sigma_1^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2(1+\varkappa)^2}\,(4\varkappa + 1 - e^{-\varkappa})\right)$ paraméterekkel (vö. GRENANDER 115. o.).

Ez a becslés minimális szórású, mivel a $\frac{dP}{dV}$ likelihood hányados a LEHMANN—SCHEFFÉ [1] értelemben teljes függvényrendszert alkot ismeretlen m esetén.

Legyen $m = 0$ és λ (vagy σ_ξ^2) ismeretlen. λ maximum likelihood becslése (2. 1) alapján

$$\log\frac{dP}{dv} = c + \frac{1}{2}\log\frac{\lambda}{\sigma_\xi^2} - \frac{\lambda}{\sigma_\xi^2}\left[s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 T + \frac{1}{2}\lambda T s_{02}^2\right]$$

miatt a következő egyenlet megoldása lesz:

$$\frac{\sigma_\xi^2}{2\lambda} - \left(s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 T\right) - \lambda T s_{02}^2 = 0, \tag{3. 2}$$

vagy σ_ξ^2-re $\left(\sigma_\xi^2 = \frac{\sigma_\zeta^2}{2\lambda} \text{ alapján}\right)$

$$\sigma_\xi^4 - \left(s_{01}^2 - \frac{1}{2}\sigma_\zeta^2 T\right)\sigma_\xi^2 - \frac{T}{2}\sigma_\zeta^2 s_{02}^2 = 0. \tag{3. 3}$$

Könnyű belátni, hogy (3. 3) egyetlen pozitív megoldása

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = 1/2(s_{01}^2 - 1/2\sigma_\zeta^2 T) + 1/2\sqrt{(s_{01}^2 - 1/2\sigma_\zeta^2 T)^2 + 2T\sigma_\zeta^2 s_{02}^2}. \tag{3. 4}$$

Legyen az egyszerűség kedvéért

$$d = 1/2(s_{01}^2 - 1/2\sigma_\zeta^2 T),$$

akkor, mint az könnyen belátható

$$P\{\hat{\sigma}_\xi^2 < y\sigma_\xi^2\} = P\{d + \sqrt{d^2 + 1/2\,T\sigma_\xi^2 s_{02}^2} < y\sigma_\xi^2\} = \tag{3. 5}$$

$$= P\left\{\frac{2\varkappa\lambda}{y^2\sigma_\xi^2} s_{02}^2 + \frac{2\lambda}{y\sigma_\xi^2} s_{01}^2 < \frac{\varkappa}{y} + 1\right\}.$$

A (2. 16) összefüggésből belátható, hogy a $\eta_y = \frac{2\varkappa^2}{y^2\sigma_\xi^2} s_{01}^2 + \frac{2\varkappa}{y\sigma_\xi^2} s_{01}^2$ valószínűségi változó aszimptotikusan normális eloszlású, ha $\varkappa \to \infty$ és a $\hat{\sigma}_\xi^2$ becslés ekvivalens az s_{02}^2 becsléssel. Igaz a következő (tegyük fel, hogy $\sigma_\xi^2 = 1$ és $T = 1$, azaz elvégeztük a (2. 9) transzformációt).

3. 1. TÉTEL: *Ha* $m = 0$ *és* $\varkappa \to \infty$ *az*

$$s_{02}^2 \sim \sigma_\xi^2$$

becslés aszimptotikusan efficiens és az

$$\frac{s_{02}^2 - \sigma_\xi^2}{s_{02}^2 \sqrt{2/\varkappa}}$$

hányados eloszlása tart a (0, 1) *normális eloszláshoz.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással adódik a várható értékre és szórásnégyzetre, hogy

$$\mathbf{M}s_{02}^2 = \sigma_\xi^2$$

$$\mathbf{D}s_{02}^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\varkappa^2}(2\varkappa + e^{-2\varkappa} - 1), \tag{3. 6}$$

és s_{02}^2 karakterisztikus függvénye

$$f(\alpha) = \tag{3. 7}$$

$$= \frac{2\left(1 - \frac{4i\alpha\sigma_\xi^2}{\varkappa}\right)^{1/4} e^{\varkappa/2}}{\left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}\right)^2 e^{\varkappa\sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}\right)^2 e^{-\varkappa\sqrt{1 - \frac{4i\alpha}{\varkappa}\sigma_\xi^2}}\right]^{1/2}}$$

alakú (vö. (2. 16)) $\varkappa \to \infty$ esetén az

$$\frac{s_{02}^2 - \sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 \sqrt{2/\varkappa}}$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$-hez tart, azaz normális eloszlású lesz. Másrészt $s_{02}^2 \to \sigma_\xi^2$ valószínűségben, ha $\varkappa \to \infty$, így CRAMER ismert tétele szerint (CRAMER, 281. o.) a tétel állítása igaz. Mivel a (2. 1′) likelihood függvényrendszer nem teljes (erre a problémára később még visszatérünk), nem létezik minimális szórású torzítatlan becslése σ_ξ^2-nek (vagy $\varkappa$-nak).

Egy becslést aszimptotikusan efficiensnek nevezünk, ha aszimptotikus eloszlása létezik s az megegyezik a maximum likelihood becslés aszimptotikus eloszlásával.

Legyen továbbra is $\sigma_\xi^2=1$ és $T=1$. (2. 16)-ból látható, hogy $\varkappa\to 0$ esetén $2\varkappa s_{02}^2$ és $\varkappa s_{01}^2$ karakterisztikus függvénye

$$f(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{(1-i\alpha_1-2i\alpha_2)^{1/2}}+o(\varkappa), \tag{3. 8}$$

alakú, azaz s_{01}^2 és s_{02}^2 aszimptotikusan ekvivalensek. A (3. 8) összefüggésből látható, hogy

$$\frac{s_{02}^2}{\sigma_\xi^2}=2\varkappa s_{02}^2$$

$\varkappa\to 0$ esetén χ^2 eloszlású 1 szabadságfokkal:

$$P\left\{\frac{s_{02}^2}{\sigma_\xi^2}<x^2\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^2}e^{-y/2}y^{-1/2}\,dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-y^2/2}\,dy. \tag{3. 9}$$

$\varkappa$ nem túl nagy és nem túl kicsiny értékeire az s_{01}^2 és s_{02}^2 statisztikákat kell felhasználni $\varkappa$ (illetve σ_ξ^2) becslésére. A $\varkappa$ paraméterre vonatkozó konfidencia intervallumok megszerkesztése a (3. 5) összefüggés alapján az $\eta_y=\frac{\varkappa^2}{y^2}s_{02}^2+\frac{\varkappa}{y}s_{01}^2$ valószínűségi változó eloszlásának meghatározása segítségével történhet. Az η_y változó karakterisztikus függvénye (vö. (2. 16)).

$$f_{\eta_y}(\alpha)= \tag{3. 10}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{2}{y^2}i\alpha\right)^{1/4}e^{\varkappa/2}}{\left[\left(1-\frac{i\alpha}{y}+\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}\right)^2e^{\varkappa\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}}-\left(1-\frac{i\alpha}{y}-\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}\right)^2e^{-\varkappa\sqrt{1-\frac{2}{y^2}i\alpha}}\right]^{1/2}}$$

alakú. Tetszőleges előre megadott α szint és σ_ξ^2 esetén a (3. 11)

$$P_{\sigma_\xi^2}\{\hat{\sigma}^2>x\}=\alpha \tag{3. 11}$$

egyenletnek egyetlen $x=\varphi(\sigma_\xi^2)$ megoldása lesz. Ennek inverz függvénye

$$\varphi^{-1}(x)=\psi_\alpha(x) \tag{3. 12}$$

szintén egyértelműen meghatározható és σ_ξ^2-re konfidenciahatárt szolgáltat, azaz σ_ξ^2-ben azonosan

$$P_{\sigma_\xi^2}\{\sigma_\xi^2\leqq\psi_\alpha(\hat{\sigma}^2)\}\equiv\alpha. \tag{3. 13}$$

$\varkappa\to\infty$ és $\varkappa\to 0$ esetén ezek a konfidenciahatárok megegyeznek a megfelelő aszimptotikus eloszlás által szolgáltatott konfidenciahatárokkal.

A konfidenciahatárok effektív kiszámítása egydimenziós esetben még nem történt meg. Komplex stacionárius *Gauss—Markov* folyamat esetén a $\varkappa$ „csillapodási együttható”-n (melynek becslésénél a megfelelő elégséges statisztikákból nyert maximum likelihood becslés karakterisztikus függvénye (3. 10) négyzete) vonatkozó számításokat a MOSZKVAI LOMONOSZOV EGYETEM *Valószínűségszámítási Tanszékén* végeztük el A. N. KOLMOGOROV vezetése alatt (lásd ARATÓ, RICSKOVA, SZINAJ).

Ismeretlen m és λ (vagy σ_ξ^2) esetén (2. 7) alapján a maximum likelihood egyenletek a következők lesznek:

$$\frac{\sigma_\xi^2}{2\lambda}(s_1^2 - 1/2\sigma_\xi^2 T) - \lambda T s_2^2 - (m-m_1)^2 - \lambda T(m-m_2)^2 = 0, \tag{3. 14}$$

$$2(m-m_1) + \lambda T(m-m_2) = 0.$$

A (3. 14) egyenletrendszer megoldása túlságosan bonyolult, érdemes azonban megjegyezni, hogy az $\hat{m}$ és $\hat{\lambda}$ becslések között

$$\hat{m} = \frac{2m_1 + \hat{\varkappa} m_2}{2+\hat{\varkappa}} \tag{3. 15}$$

alakú összefüggés áll fenn. Amint később látni fogjuk, σ_ξ^2 (vagy λ) becslése esetén a legtermészetesebb olyan statisztikákkal dolgozni, amelyek nem függnek a $\xi(t)$ folyamat kiindulási pontjától. Ilyen rendszer lehet pl. $s_1^2, s_2^2, (m_1-m_2)^2$. Nagy $\varkappa$ értékek esetén nem nehéz az m, λ paraméterekre megfelelő becslést találni (legyen ismét $\sigma_\xi^2 = 1$, $T=1$), fennáll a következő

3.2 TÉTEL: *$\varkappa \to \infty$ esetén az*

$$m \sim m_2, \quad \sigma_\xi^2 \sim s_2^2$$

becslések együttesen aszimptotikusan efficiensek és

$$\frac{m_2 - m}{2s_2^2}, \quad \frac{s_2^2 - \sigma_\xi^2}{s_2^2 \sqrt{2/\varkappa}}$$

együttes eloszlása tart a $\left(0, 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ *normális elosztáshoz.*

Bizonyítás. Egyszerű számolásokkal adódik, hogy

$$\mathbf{M} m_2 = m, \quad \mathbf{D} m_2 = \frac{2\sigma_\xi^2(\varkappa + e^{-\varkappa} - 1)}{\varkappa^2},$$

$$\mathbf{M} s_2^2 = \sigma_\xi^2 - \frac{2\sigma_\xi^2}{\varkappa}\left[1 + \frac{1}{\varkappa}(e^{-\varkappa} - 1)\right] \tag{3. 16}$$

$$\mathbf{D} s_2^2 = \frac{\sigma_\xi^4}{\varkappa}\left\{2 + \frac{1}{\varkappa}(e^{-2\varkappa} - 1) + \frac{8}{\varkappa^3}(\varkappa + e^{-\varkappa} - 1)^2 - \frac{4}{\varkappa^2}(4\varkappa + 2\varkappa e^{-\varkappa} - 7 + 8e^{-\varkappa} - e^{-2\varkappa})\right\}.$$

(2. 13)-ból látható, hogy $\varkappa \to \infty$ esetén, $m_2 - m$, s_{02}^2 együttes karakterisztikus függvénye

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2 2\sigma_\xi^2}{\varkappa} + o\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right\} \exp\left\{i\alpha_2\sigma_\xi^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2\frac{2\sigma_\xi^4}{\varkappa} + o\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right\} \tag{3. 17}$$

alakú, amiből látható, hogy aszimptotikusan normális eloszlásúak. CRAMER már említett tétele szerint, mivel $m_2 \to m$ és $s_{02}^2 \to \sigma_\xi^2$ valószínűségben, a

$$\frac{m_2 - m}{\sqrt{\frac{2\sigma_\xi^2}{\varkappa^2}(\varkappa + e^{-\varkappa} - 1)}}, \quad \frac{s_{02}^2 - \sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}}$$

és

$$\frac{m_2 - m}{2s_2^2}, \quad \frac{s_2^2 - \sigma_\xi^2}{s_2^2 \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}}$$

mennyiségek együttes aszimptotikus eloszlása megegyezik (felhasználva, hogy $\left.\sigma_\xi^2 = \frac{1}{2\varkappa}\right)$. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Tetszőleges T és σ_ξ^2 esetén — ami a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos — a 3.2 tétel nyilvánvaló következménye a

3.2′ TÉTEL: *Ha* $\varkappa = \lambda T \to \infty$ *az*

$$m \sim m_2, \quad \lambda \sim \frac{\sigma_\xi^2}{2s_2^2} = \hat{\lambda}$$

becslések együttesen efficiensek és az

$$\frac{m_2 - m}{\sqrt{\frac{2\sigma_\xi^2}{\lambda^2 T^2}(\lambda T + e^{-\lambda T} - 1)}}, \quad \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{2\lambda}{T}}} \quad \left(\text{vagy} \quad \frac{\sigma_\xi^2 - s_2^2}{\sigma_\xi^2 \sqrt{\frac{2}{\lambda T}}}\right)$$

hányadosok együttes eloszlása tart a $\left(0, 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ *normális eloszláshoz.*

$\varkappa \to 0$ esetén az m_1 és m_2 statisztikák aszimptotikusan ekvivalensek, ami belátható karakterisztikus függvényük viselkedéséből. Ugyanakkor az s_1^2 és s_2^2 statisztikák

$$s_1^2 = \frac{1}{4}[\xi(1) - \xi(0)]^2, \tag{3.17}$$
$$s_2^2 = \int_0^1 (\xi(t) - \xi(0))^2\, dt - \left(\int_0^1 (\xi(t) - \xi(0))\, dt\right)^2$$

alakjából látható, hogy aszimptotikusan függetlenek mind az $m, \varkappa$ paraméterektől, mind pedig az m_1, m_2 statisztikáktól, ha $\varkappa \to 0$. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben az m paraméter teljesen szabad (nincsen rá semmilyen megkötésünk), míg a $\varkappa$ paramétert nem lehet alulról becsülni (azaz a σ_ξ^2 paramétert felülről).

A matematikai statisztikában jól ismert tény, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(n \geqq 2)$ egy független megfigyelésekből álló minta, ahol az egyes változók egy ismeretlen (m, σ) paraméterű normális sokaságból származnak, akkor az ismeretlen m paraméterre tetszőleges α megbízhatósági szinten véges konfidencia intervallum szerkeszthető. (CRAMER 563 o.).

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\alpha > 1/2$ szint esetén is léteznek olyan $\bar{h}(x_1, \ldots, x_n)$ és $h(x_1, \ldots, x_n)$ függvények, melyekre

$$P\{\bar{h}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqq m\} \geqq \alpha, \quad P\{h(\xi_1, \ldots, \xi_n) < m\} > \alpha$$

m és σ-ban egyenletesen. A $\bar{h}(\cdot)$ és $\bar{h}(\cdot)$ függvények független ek σ-tól. Ha $n=1$, azaz egyetlen ξ_1 megfigyelésünk van, ilyen $\bar{h}(\cdot)$ és $\bar{h}(\cdot)$ véges értékű függvények nem léteznek (azon természetes kikötés mellett, hogy $\bar{h}(\infty) > -\infty$ és $\bar{h}(-\infty) < \infty$).

Stacionárius *Gauss—Markov* folyamatokra igaz a következő (tegyük fel, hogy $T=1$, $\sigma_\zeta = 1$).

3.3 TÉTEL: *Legyenek $\alpha > 1/2$ és $\mu(\xi), \bar{\mu}(\xi)$ valós értékű ($-\infty$ és $+\infty$ értékeket is felvevő) az R_ξ téren a $C_{[0,1]}$ metrikában folytonos funkcionálok,*[1] *melyek eleget tesznek minden m és $\varkappa$ értékre ($-\infty < m < \infty$, $\varkappa > 0$) a*

$$P\{m \geqq \bar{\mu}(\xi)\} \geqq \alpha$$

$$P\{m < \bar{\mu}(\xi)\} \geqq \alpha$$

feltételeknek. Akkor

$$P\{\mu(\xi) = -\infty\} \geqq f(\varkappa, \alpha)$$

$$P\{\bar{\mu}(\xi) = +\infty\} \geqq f(\varkappa, \alpha),$$

ahol $f(\varkappa, \alpha)$ a funkcionálók választásától független (azon természetes feltevés mellett, hogy $\inf_\mu \bar{\mu}(\infty) > -\infty$, $\sup_\mu \bar{\mu}(<\infty) < \infty$, *vagy* pl. *azon feltevés mellett, hogy eltolás esetén a funkcionál értéke az eltolás értékével változik) és*

$$f(\varkappa, \alpha) \to 1/2, \quad ha \quad \varkappa \to 0.$$

3.4. TÉTEL: *Legyen $\alpha > 0$ és $\varkappa(\xi)$ az R_ξ téren értelmezett pozitív, a $C_{[0,1]}$ metrikában folytonos funkcionál, mely minden m és $\varkappa$ értékre eleget tesz a*

$$P\{\varkappa \geqq \varkappa(\xi)\} \geqq \alpha$$

feltételnek. Akkor

$$P\{\varkappa(\xi) = 0\} \leqq g(\varkappa, \alpha),$$

ahol a pozitív $g(\cdot)$ függvény nem függ a funkcionál választásától (azon természetes feltétel mellett, hogy $\varkappa(\infty) = \varkappa(-\infty) = \infty$) és

$$g(\varkappa, \alpha) \to 1, \quad ha \quad \varkappa \to 0.$$

Megjegyzés. Természetesen $\varkappa \to \infty$ esetén az f és g függvények tetszőleges fix $\alpha < 1$ esetén 0-hoz tartoznak. Ez a 3.2 tétel következménye, melynek értelmében aszimptotikusan jó konfidencia intervallumok szerkeszthetők.

A 3.3 tétel bizonyítása.

Szimmetria okokból elegendő az állítást pl. $\bar{\mu}(\xi)$-re bizonyítani. Korlátos $\bar{\mu}(\xi)$ funkcionálra nem állhat fenn a $P\{m < \bar{\mu}(\xi)\} \geqq \alpha$ összefüggés minden m, $\varkappa$-ra, mivel, ha $\bar{\mu}(\xi) \leqq K < \infty$

$$P_{K,\varkappa}\{K < \bar{\mu}(\xi)\} = 0.$$

[1] Végtelen értékeket is felvevő funkcionálók folytonossága a $-\infty, +\infty$ pontokkal lezárt számegyenes topológiája által indukált folytonosságot jelenti.

Feltevéseink szerint elég nagy c értékre létezik olyan ($\bar{\mu}$-tól független) $\xi_0(t) \geqq \geqq -k > -\infty$, hogy $\bar{\mu}(\xi) \leqq c$ ha $\xi(t) \leqq \xi_0(t)$ (minden $0 \leqq t \leqq 1$-re). Legyen

$$\Gamma = \{\xi : \bar{\mu}(\xi) < c\}, \quad \Gamma_1 = \{\xi : -\varkappa^{-1+\delta} \leqq \xi \leqq \xi_0\},$$

ahol $0 < \delta < 1/2$. Nyilván $\Gamma \supset \Gamma_1$, $P(\Gamma) \geqq P(\Gamma_1)$ és

$$P_{c,\varkappa}\{c < \bar{\mu}(\xi)\} = 1 - P_{c,\varkappa}\{\Gamma\} \leqq 1 - P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\}. \tag{3.18}$$

Felhasználva a

$$\frac{dP}{dV} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp\Big\{-\varkappa(\xi_0 - c)^2 - 1/2\big[\varkappa\{(\xi(1)-c)^2 - (\xi(0)-c)^2\} - \\ -\varkappa + \varkappa^2 \int_0^1 (\xi(t)-c)^2\,dt\big]\Big\}$$

összefüggést azt kapjuk, hogy

$$P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\} = \int_{\Gamma_1} \frac{dP}{dV}\,dV \geqq \left(1 - \frac{\varkappa^{2\delta}}{2}\right) \int_{\Gamma_1} \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\, e^{-\varkappa(x_0-c) - \frac{\varkappa}{2}[(x_1-c)^2 - (x_0-c)^2]}\, dL \times dW. \tag{3.19}$$

Legyen

$$\Gamma_2 = \{\xi : -\varkappa^{-1+\delta} \leqq \xi \geqq \xi_0,\ 0 < t \leqq 1;\ -\varkappa^{-1+\delta} + \varkappa^{-\varepsilon} < \xi(0) \leqq \xi_0(0) - \varkappa^{-\varepsilon}\},$$

ahol ε a $0 < \varepsilon < \delta/2$ intervallumban tetszőleges, és

$$\Gamma_3 = \{\xi : \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |\xi(t) - \xi(0)| < \varkappa^{-\varepsilon},\ -\varkappa^{-1+\delta} + \varkappa^{-\varepsilon} < \xi(0) \leqq \xi_0(0) - \varkappa^{-\varepsilon}\}.$$

A *Wiener* folyamatra jól ismert (lásd DOOB 353. o.)

$$\int_{\Gamma_3} dW \geqq 1 - 2\varkappa^{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{\varkappa^{-2\varepsilon}}{2}} \tag{3.20}$$

összefüggést felhasználva, az

$$\int_{\Gamma_2} e^{-\frac{\varkappa}{2}[(x_1-c)^2 - (x_0-c)^2]}\, dW \geqq e^{-\varkappa^{-\varepsilon}(\varkappa^{\delta} + |c|\varkappa)} \int dW \geqq e^{-\varkappa^{-\varepsilon}(\varkappa^{\delta} + c|\varkappa|)} \cdot \\ \cdot \left(1 - 2\varkappa^{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{\varkappa^{-2\varepsilon}}{2}}\right) \tag{3.21}$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Jelölje $\Phi(x)$ a $(0, 1)$ normális eloszlásfüggvényt, akkor

(3.22)

$$\int_{\Gamma_2} \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\, e^{-\varkappa(x_0-c)^2}\, dx_0 = \Phi\{\sqrt{2\varkappa}(\xi_0(0) - c - \varkappa^{-\varepsilon})\} - \Phi\{\sqrt{2\varkappa}(-\varkappa^{-1+\delta} - c + \varkappa^{-\varepsilon})\}.$$

(3. 19), (3. 21) és (3. 22)-ből nyerjük a

$$(3.23)\quad P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\} \geqq \left(1-\frac{\varkappa^{2\delta}}{2}\right)(1-\varkappa^{\delta-\varepsilon})\left(1-2\varkappa^{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{\varkappa^{-2\varepsilon}}{2}}\right)[\Phi\{\sqrt{2\varkappa}(\xi_0(0)-$$

$$-c-\varkappa^{-\varepsilon})\}-\Phi\{\sqrt{2\varkappa}(-\varkappa^{-1+\delta}-c+\varkappa^{-\varepsilon})\}]$$

egyenlőtlenséget. Innen $\varkappa\to 0$ esetén látható, hogy

$$P_{c,\varkappa}\{c<\bar{\mu}(\xi)\}=1-P_{c,\varkappa}\{\Gamma_1\}\leqq\frac{1}{2}+\varepsilon_0,\quad \text{ha}\quad \varkappa<\varkappa_0(\varepsilon_0),$$

tetszőleges kicsiny $\varepsilon_0>0$ értékre. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A 3.3 tétel a következőképpen is megfogalmazható: *ha a stacionárius Gauss—Markov folyamat m és $\varkappa$ (vagy σ_ξ^2) paramétere ismeretlen, akkor m-re a folytonos funkcionálok segítségével nem lehet véges konfidencia intervallumokat szerkeszteni.* Nem véges konfidencia intervallumok szerkesztésére ($\varkappa$-ra való minden megkötés nélkül) a továbbiakban még visszatérünk. Szerkesztésük hasonló ahhoz a módszerhez, ahogyan $\varkappa$-ra (vagy σ_ξ^2-re) történik ismert m esetén a konfidencia intervallum szerkesztése, azonban a 3.3 tétel által kifejezett speciális tulajdonságokat figyelembe vesszük.

KOROLLÁRIUM. *A bizonyításból látható, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van oly $A(\varepsilon)$, hogy (elég kis $\varkappa$ esetén)*

$$\sup_{m,\varkappa<\varkappa_0} P_{m,\varkappa}\{\bar{\mu}(\xi)>m\}\leqq\frac{1}{2}+A\varkappa_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Ezzel az $f(\varkappa,\alpha)$ függvény viselkedésére kaptunk becslést.

A 3.4 tétel bizonyítása hasonlóan történik, mint a 3.3 tételé. A tétel állítása szerint a $\varkappa$ paraméterre nem lehet 0-tól különböző alsó konfidenciahatárt szerkeszteni semmilyen megbízhatósági szinten.

IRODALOM

АНДРОНОВ, ПОНТРЯГИН: О статистическом рассмотрении динамических систьем. ЖЭТФ 3, 165 (1933).

АРАТО, М.: [1] Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов, Disszertáció, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.

[2] О достаточных статистиках стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее применения*, **6** (1961) 216—218.

[3] Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса, Д. А. Н., **145** (1962) 13—16.

АРАТО, М. — КОЛМОГОРОВ, А. Н. — СИНАЙ, Я. Г.: Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского процесса, Д. А. Н., **146** (1962) 747—750.

АРАТО, М. — Рыкова, Л. В. — СИНАЙ, Я. Т.: Доверительные границы для коэффициента затухания комплексного стационарново гауссовского марковского процесса, *Теория вероятностей и ее применение* (sajtó alatt).

BAXTER, G.: A strong limit theorem for Gaussian Processes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 522—525.

BILLINGSLEY, P.: *Statistical Inference for Markov Processes*, Chicago, 1961.
CRAMER, H.: *Mathematical Methods of Statistics*, Uppsala, 1945.
DOOB, J. L.: Вероятностные процессы, Москва, 1956.
ДЫНКИН, Е. Б.: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов Д. А. Н., **104** (1955) 691—693.
GRENANDER, U.: Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Mat.* **1** (1950) 195—277.
GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, New York, 1957.
КОЛМОГОРОВ, А. Н.: [1] Несмещенные оценки, Изв. А. Н. С. С. С. Р. **14** (1950) 303—326.
[2] Стационарные последовательности в гильбертоваи пространстве, Бюлл. М. Г. Y. **2** (1941) 6.
LEHMANN, E.—SCHEFFÉ, H.: Completness, Similar Regions and Unbiased Estimation, *Sankhya* **10** (1950), 305., **15** (1956), 219.
ЛИННИК, Ю., В.: Об одном вопросе статистики зависимых наблюдении ИЗВ. А. Н. С. С. С. Р. **14** (1950) 501—522.
ЛИВСАНЦЕРЕН, Ш.: [1] Оценки найбольшего правдоподобия и доверительные множества для неизвестных параметров стационарного гауссовского поцесса марковского типа, Д. А. Н. **98** (1954) 723—826.
[2] Disszertáció, Moszkva, 1954., МТУ.
MANN, H. B.—WALD, A.: On the statistical treatment of linear stochastic difference equations, *Econometrica* **11** (1943), 173—220.
NEUMANN, J.: Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance, *Annals of Math. Stat.* **12** (1941) 367—395.
ПРОХОРОВ, Ю. В.: Сходимость случайных працессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теор. вер. и ее прим. **1** (1956) 177—338.
STRIEBEL, CH.: Densities for Stochastic Processes, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959). 559—567.

(Beérkezett: 1963. IX. 9.)