

A NEWTONI INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS KIALAKULÁSA A XX. SZÁZADI MATEMATIKA TÖRTÉNETÍRÁS TÜKRÉBEN

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

I.

MORITZ CANTOR nagy műve¹ 85. fejezetében kezdi az infinitézimális számítás ismertetését. A fejezet címe: „Sorok. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton.”

A XIX. század matematikájának egyik legjellemzőbb területét alkották a végtelen sorok. Az a tény, hogy CANTOR ezek felől indul a matematika mindmáig legnagyobb kalandjának, az infinitézimális számításnak az ismertetésébe, már magában véve is jelzi az interpretáció várható jellegét.

A végtelen sorok elméletének legfontosabb, alapvető kérdése ma az, hogy egy sor összetartó-e vagy sem, konvergens-e vagy divergens.

Mit tartott erről a XVII. század? CANTOR szerint — semmit.

Szerinte egy sor konvergenciára való megvizsgálásának a szükségessége „természetesen” csak a XIX. században merül fel, a XVII. és XVIII. század erre még csak nem is gondol. Az egyetlen kivétel akkor állt elő, „ha egy sort egy vele azonos függvény gyakorlati kiértékelésére akartak felhasználni. Ebben az esetben önmagától jelentkezett az a kellemetlenség, hogy divergens sorokkal való számolás nem vezet a kívánt eredményre, s ezen segíteni kellett” — úgy, hogy önkéntelenül is, intuitive konvergens sorokat alkalmaztak, a fogalom tisztázása, sőt felvetése nélkül. Így jár el lényegében JAMES GREGORY, a nagy skót matematikus 1668-ban megjelent *Exercitationes Geometriae*-jében.²

Teljesen a GREGORYÉHOZ hasonló sorfelfogással és részben azonos eredményekkel találkozunk NICOLAUS MERCATOR 1668-ban Londonban megjelent *Logarithmo-technica*-jában. Ez a németalföldi matematikus Londonban élt, ahol „WALLIS és közvetlen tanítványai olyan felületek kvadraturájára voltak képesek, amelyeket az abszcisszatengely, két ordináta és az

$$y = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \dots + a_\mu x^{m_\mu}$$

egyenletű görbe határolt. Az egyenlő szárú hiperbola esetében ez már 1647 óta ismert volt GREGORIUS A SANTO VICENTIO által, aki ezt a területet logaritmus segítségével számította ki, a hiperbola egyik asymptotáját választva abszcisszának. De a hiperbola egyenlete ebben az esetben nem a fenti alakot öltötte, hanem $xy = 1$ volt, és ezért a két eredmény egyetlen tétellé való összefogására minden kísérlet sikertelennek bizonyult.

¹ *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-) Band. Von 1668—1758.* Leipzig 1898.

² Uo. 58—60.

Itt az a pont, ahol közbelépett MERCATOR. A hiperbola egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ formára alakította át, és volt bátorsága az $\frac{1}{1+a}$ kifejezésben csak jelzett osztást az algebra közönséges szabályai szerint végre is hajtani.

Így tehát az

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \dots$$

in infinitum sor érvényességét tette fel.

Mai fogalmaink számára ez a lépés csaknem naivul egyszerű, akkor azonban új volt, s olyan horderejű, hogy a kortársak alig voltak képesek felmérni, bármennyire is becsülték azonnal MERCATOR felfedezését.”³

CANTOR szerint tehát az infinitézimális számítás első nagy jelentőségű lépése az volt, hogy MERCATOR az egyenlő szárú hiperbola $xy=1$ egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ alakra hozta, s az itt csak kijelölt osztást a közönséges osztás törvényei szerint valóban el is végezte.

Ezzel mintegy felbátorított a végtelennel való munkára. Ezt az irányt folytatja a fiatal NEWTON, aki 1669-ben küldte el COLLINSnak *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* c. értekezését, amit COLLINS lemásolt, megmutatta Lord BROUNCKERnek, mindketten nagyon megdicsérik, de semmit se tettek a megjelenése érdekében, még a Royal Society jegyzőkönyveibe se vezetik be.

Pedig a dolgotnak több szempontból is óriási jelentősége van.

A 86. fejezetben CANTOR a kontinens matematikusainak a sorelméletben elért eredményeit ismerteti, az infinitézimális analízis newtoni formájának a felfedezését a 88. fejezetben kíséri tovább, amelynek a címe: „Kúpszeletek. Síkgörbék elmélete.” Ez a fejezet a mi szempontunkból igen fontos.

1669-ben jelent meg ISAAC BARROW *Lectiones geometricae* c. könyve, amelyikben fiatal tanítványa, NEWTON is segített. BARROW geometriája a mozgás fogalmából indul ki. „Az időt valamilyen alakzattal ábrázolja, amelyik az egyenletességet fejezi ki, névszerint egyenessel és körrel. Hiszen az időt egydimenziós és a pillanat folytonos folyásából előálló mennyiségnek lehet tekinteni. (BARROW, *Lectiones geometricae* 6. oldal: *ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginatur.*) Végül BARROW csak az egyenest választja az idő érzékeltetésére és egy, az idővonalra merőlegesen állított egyenest az egyes pillanatokban uralkodó sebesség érzékeltetésére. Ezeket a sebességegyeneseket azonos vagy különböző hosszúságúaknak veszi, aszerint, hogy a sebességet állandónak vagy változónak képzei. A sebességvonalak összessége által képezett területek az adott időben adott sebességekkel történő mozgások, az egyesített sebesség (Uo. 10: *aggregata velocitas*), a mozgató erő (Uo. 13: *vis motiva*) képét adják.”

„Az AEZZ négyyszög és az AEY háromszög megvilágosítja, mit ért a fentiek alatt ... BARROW a Z, Y stb. pontok helyeit (Ort) a mozgás alkalmazásával nyeri. Így jut el a görbékhez, amelyekkel a második felolvasás foglalkozik.”⁴

³ Uo. 53–54.

⁴ Uo. 127–128.

Az érintőszerkesztés módszerét is a mozgások összetételének a segítségével ismerteti, ahogy azt már előtte is tették ROBERVAL és TORRICELLI. Ezt a módszert igen jól ismerték Angliában. WALLIS már 1659-ben védelmébe veszi TORRICELLIT ROBERVAL plagizációs vádjával szemben.⁵ HUYGENS is érintő-problémaként kezelte genialis módon az evolvens-evoluta kérdését.⁶

Az érintőprobléma tehát a kor egyik centrális — és legjobban kidolgozott — matematikai kérdés-komplexuma, WALLIS és BARROW semmi lényegesen újat nem hoztak a kérdésben, csupán lehetővé tették az angol matematikának az itáliai, GALILEI tanítványai körében kialakult módszerekhez való csatlakozását.

A következő, 89. fejezet „NEWTON és LEIBNIZ első felfedezései az infinitézimális számítás területén”. A fejezet annak a megállapításával kezdődik, hogy mindaz, amit az előző fejezetben ismertetett, „rég ismert módszerek szellemes felhasználóinak volt köszönhető”. De amit NEWTON az 1669-es *De analysi*...-jében közölt COLLINSSzal,

az már egészen új. Az írás az $y = ax^n$ alakú görbék kvadraturájával kezdődik, amit

$\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ alakban ad meg. Ez az eredmény nem új (war nichts weniger als neu),

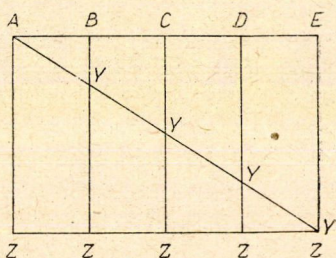
WALLIS már 1655-ben ismerte. Új volt azonban a bizonyítás. Ahol WALLIS intuitív módon bizonyított, ott NEWTON új bizonyítási módszert alkalmazott.

„NEWTON bizonyítása a következő. Jelölje x egy $AD\delta$ görbe AB bázisát, jelölje y a reá merőleges BD applikátát, z az ABD területet. Jelölje o betű a kicsiny $B\beta$ vonalszakaszt (ezt az o -t nem szabad, mint néha teszik, zérussal összetéveszteni). Legyen továbbá $BK = v$, és a $BKH\beta (=ov)$ négyzög területe legyen egyenlő a $B\beta D\delta$ területtel. NEWTON adotttnak veszi z -nek x -től való függését, és megkeresi ebből az összefüggésből y -t; mai írásmódban, amit NEWTON nem ismert, azt mondanánk $z = \int y dx = F(x)$ -

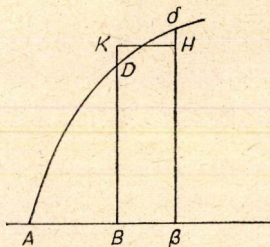
ből megkeresi $y = \frac{dF(x)}{dx}$ -et.”

A továbbiakban NEWTON a binomiális tétel segítségével történő sorbafejtést alkalmaz és hatványsorokat differenciál, „de a szorzatok és hányadosok differenciálásának még nyoma sincs”.⁷

Ez a NEWTON-féle fluxiók-kalkulus lényege, bár magát a nevet még nem használja. A „folyás” fogalmának és elnevezésének az eredete valószínűleg NAPIER-re vagy CAVALIERIRE nyúlik vissza. Végeredményben tehát nem új, de a lényeg a jelzésen van, és pontokkal való jelölés kétségkívül NEWTONtól származik. Az írás, amiben ezt kifejti, a *Methodus fluxionum et serium infinitorum* csak halála után, 1736-ban jelenik meg nyomtatásban, de valószínűleg az 1670-es évek elején (1671) írta. NEWTON



1. ábra



2. ábra

⁵ Uo. 129.

⁶ Uo. 134–143.

⁷ Uo. 150–151.

itt a matematikai mennyiségeket úgy tekinti, mint amelyek folytonos mozgás útján jönnek létre, és *fluenseknek* nevezi őket. Azt a sebességet, amellyel a fluensek nőnek vagy csökkennek, *velocitas*-nak vagy *fluxio*-nak nevezi, és a fluens jelölésére használt betű fölé tett ponttal jelöli. A jelölés — hangsúlyozza CANTOR — jelenti NEWTON nagy lépését, hiszen egyébként ezeket a fogalmakat előtte már alkalmazták az itáliaiak. De NEWTON azáltal, hogy ugyanazt a betűt használja egy matematikai mennyiség — fluens — és a mennyiség változásának — fluxio — a jelölésére, megnyitja az utat egy új, egységes kalkulus kialakítása felé.

ÉS CANTOR nem mulasztja el megjegyezni, hogy ebben LEIBNIZ messze NEWTON felett áll, nemcsak a jelölésben, hanem a jelöléssel összefüggő műveleti szabályok kidolgozásában is: LEIBNIZ teremti meg a differenciálszámítás algoritmusát.⁸

NEWTON a *Methodus*-ban két problémát tűz ki. 1. Adva van két fluens egymáshoz való viszonya, határozzuk meg a fluxióik közti viszonyt. 2. Adva van egy olyan egyenlet, amely fluensek fluxióit is tartalmazza, meg kell határozni a fluensek egymáshoz való viszonyát.

„Az általános módszer, amit NEWTON a fluxiókat is tartalmazó egyenletről a fluensek között fennálló egyenletre való visszatérésre alkalmazott, ... a fluensek hatványai szerint rendezett végtelen sorokba való sorbafejtésből áll.” A sorbafejtésben azonban hibákat követett el — jegyzi meg CANTOR.⁹

A CANTOR-féle rekonstrukció lényeges pontjai a következőkben foglalhatók össze:

1. A XVII. század 50-es és 60-as éveiben Angliában JOHN WALLIS körében jelentős eredményeket érnek el az abszcisszatengely, két ordináta és egy magasabb fokú parabola által határolt terület kiszámításában.

2. MERCATOR egy zseniális sorbafejtés segítségével felismeri, hogy az egyenlő szárú hiperbola alatti terület ugyancsak a WALLIS-féle módszerekkel számítható ki. Ezáltal közismertté teszi a sorbafejtés kvadraturában való nagy jelentőségét. Hasonló, részben még nagyobb eredményeket ér el ezen a területen JAMES GREGORY.

3. BARROW (TORRICELLI és ROBERVAL nyomán) az érintőmeghatározás kérdését egy mozgásgeometriai modell segítségével oldja meg, amelyben a görbét egy pont mozgása által létrejöttnek képzei úgy, hogy a mozgás sebessége egy tengelyre — az időtengelyre — való vetülete mozgás közben konstans.

4. NEWTON az 1669-es Collinsnak küldött írásában általánosítja WALLIS eredményeit és — a binomiális tétel segítségével — új bizonyítását adja az $y = ax^{\frac{m}{n}}$ és $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kifejezések közötti kölcsönös összefüggésnek. Ezáltal felismeri, hogy differenciálás és integrálás inverz műveletek. CANTOR ezt tartja az infinitézimális számítás felfedezése szempontjából legjelentősebb lépésnek.

5. Később — a *De analysi* ... továbbfejlesztéseként — NEWTON NAPIERTŐL vagy CAVALIERITŐL vett mozgásgeometriai megfontolásokra alapítva, a matematikai mennyiségeket folytonos mozgás által létrejött *fluens*-eknek, a mennyiségek változásának a sebességét a fluensek *fluxió*-inak nevezve, egységes jelölési módhoz jut, amely a fluensek közötti relációk és a fluxiók közötti relációk közötti összefüggés

⁸ Uo. 187.

⁹ Uo. 155–166.

jellegét (integrálás és differenciálás inverz műveletek) még jobban kidomborítja. Ez a módszere is sorbafejtésen alapul és nehézkes. Egészében véve a LEIBNIZ jelölési és számolási módja sikerültebb: az infinitézimális számítás algoritmusát LEIBNIZ teremti meg.

A Cantor-féle rekonstrukcióhoz csatlakozik — annak kisebb-nagyobb fogyatékosságait fokozatosan kiküszöbölve — a német matematikátörténészek zöme.

Az első jelentős módosítást CANTOR interpretációján ZEUTHEN¹⁰ végzi, ZEUTHEN interpretációja lesz a másik nagy interpretációs vonal kiindulása, amelyet a legtöbb angol és francia matematikátörténész követ. ZEUTHEN az infinitézimális számítás genezisének a centrumába a területszámítás helyett az érintőmeghatározás és az érintőből való görbემeghatározás (fordított érintőfeladat) problematikáját helyezi. Láttuk, hogy CANTOR a területmeghatározás problémái mellett ezt kevésbé jelentősnek ítélte. ZEUTHEN szerint itt hoz a XVII. század az antikvitás infinitézimális problémáihoz képest először jelentős újítást. Az új tulajdonképpen már megjelenik a XVII. század legelején: a NAPIER-féle logaritmus-definícióban és GALILEINÉL. GALILEI és NAPIER egy tényleges, ill. egy képzelt pontnak a mozgását vizsgálva, tulajdonképpen a folytonos függvény fogalmát teremti meg, és a NEWTON-féle fluxiók módszert készítik elő. De előbb még egy hosszú kerülőt kell végigjárnia a matematikának: az antikvitás exhausziós és demokritoszi módszereihez csatlakozva.¹¹ Ezt a nagy kitérőt ZEUTHEN „integrálszámítás előtti integrálás” (Integration vor der Integralrechnung) néven foglalja össze: ide sorolja KEPLER, TORRICELLI, GREGORIUS A SANTO VICENTIO, FERMAT, PASCAL, ROBERVAL és HUYGENS terület, térfogat, súlypont meghatározásra szolgáló módszereit. Ezek mind az antik geometriai módszerek egyre tökéletesebb elsajátításán alapultak.

De az antik módszerek újratanulása közben a matematika fejlődése olyan gyors lett, hogy elkerülhetetlenné váltak intuitív bizonyítási módszerek is: ezeket alkalmazva jut WALLIS — aki egyébként szintén jól ismerte a szigorú antik módszereket — a híres kvadraturáira.¹²

Az intuitív módszerek szerepelnek az egyre nagyobb jelentőségűvé váló végtelen sorok elméletében is.

ZEUTHEN egyetért CANTORral: szerinte sem jutottak eddig lényegében túl az antikvitás infinitézimális módszerein. Ekkor jelentkezik az új (s egyben a zeutheni interpretáció CANTORTÓL való eltérése). A XVII. század közepén, második felében számos problémát — mint pl. érintőmeghatározás, maximum-minimum feladatok, algebrai egyenletek gyökeinek az összeesése — közös csoportba foglalnak össze. Ismerte ezeket az antikvitás is, de nem tekintette őket — szemben az integrációs módszerekkel — közös csoportba foglalhatóknak.¹³

TORRICELLI és ROBERVAL egymástól függetlenül — TORRICELLI közvetlenül GALILEIhez kapcsolódva — meghatározzák a hajított test parabolikus pályájának az érintőjét a mozgások összetevésének a segítségével. A TORRICELLI-iskola jelentős részleteredményeket ért el, de általános módszert kinematikus érintőmeghatározással nem lehetett adni. Ehhez algebrára volt szükség.¹⁴ Itt lép be a fejlődésbe a nagy Toulouse-i matematikus, FERMAT.

¹⁰ ZEUTHEN, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*. Leipzig 1903.

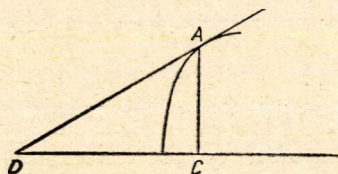
¹¹ Uo. 235–237.

¹² Uo. 248–280.

¹³ Uo. 316.

¹⁴ Uo. 322–325.

FERMAT a maximum-minimum problémával hozza kapcsolatba az érintőmeghatározást: ez jelenti az első nagy lépést az új infinitézimális számítás megteremtése felé. Abból indul ki, hogy a CA ordináta és a CD szubtangens (s_t) közötti viszony érintés esetében maximum vagy minimum lesz,¹⁵ s egyes esetekben már a kvadratura és az érintőmeghatározás között fennálló inverz-viszonyt is felismeri. Az inverz-viszony általános voltának a felismerése BARROW érdeme.



3. ábra

BARROW ezen tételét — az érintőszerkesztés és a kvadratura közötti összefüggést kifejező „megfordíthatósági tételt” (Umkehrungssatz) — implicate már NAPIER kimondotta volt logaritmus-definíciójában, s főleg GALILEI a $\frac{ds}{dt} = gt$ törvényében, amit ő grafikusan integrált, s kapta az

$s = \frac{g}{2}t^2$ eredményt. Az érintőszerkesztés és a kvadratura közötti összefüggés

implicite benne volt a DE BEAUNE-feladatban. Ezt az összefüggést használja fel WALLIS, amikor a TORRICELLI—ROBERVAL-féle érintőszerkesztést általánosítva egy fordított érintőfeladatnak differenciálegyenlet alakot ad, kinematikai megfogalmazásban. WALLISON át jut BARROW-hoz, aki általánosítja és explicite kimondja.

BARROW általános megfordítási tételét TORRICELLI kinematikai érintőmódszerével és tisztán geometriai úton bizonyítja. Módszere nem egy bizonyos görbére vonatkozik, hanem általános: összefüggést ad egy tetszőleges y függvény és $v = \frac{dy}{dx}$

között, s kimutatja, hogy ez az összefüggés egy $y = \int v dx$ kvadraturával fejezhető ki. De BARROW-nál még hiányzik a differenciálhányados fogalma.¹⁶

NEWTON itt is, akárcsak a fizikában, azt az utat járja következetesen végig, amire GALILEI lépett. Az idő, mint független változó (parameter) segítségével jellemez mennyiségeket (fluensek, x , y , z stb.), s így ezeknek megadhatók a sebességei (fluxiók, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, stb.) és azok viszonyai: $\dot{x}/\dot{y}$ stb.

A módszer segédeszközét a *De analysi per aequationes infinitas*-ban adta meg, sorbafejtésekkel. NEWTON már tisztában van azzal, hogy a fluxióképzés (differenciálás) és a kvadratura inverz műveletek. „Az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ viszony képzésénél fogva pontosan

ugyanaz, mint a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados, és magát NEWTON $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... fluxió-meghatározását a dx , dy differenciálok tiszta, mindenféle meghatározatlan «végtelen kicsi» fogalomtól mentes definícióinak lehet tekinteni.”¹⁷

Erre utal egyébként az is, hogy $\dot{x} = 1$ esetében $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$ -ot ír, s ezt z -vel, fluxióját $\dot{z}$ -val vagy $\ddot{y}$ -val jelöli. „Látjuk, hogy a független változó fogalom, ha ez a kifejezés

¹⁵ Uo. 330–333.

¹⁶ Uo. 354.

¹⁷ Uo. 375.

még nem is fordul elő, olyan tisztán és egyszerűen áll előttünk, akár egy modern tankönyvben.”¹⁸

A *Principia* is sokkal egyszerűbb lett volna, ha a fluxiók módszert használja. Mégsem alkalmazza. Egy olyan mennyiséget, amely egy másik mennyiség valamilyen függvénye, nem fluensek relációjával, hanem egy görbe ordinátájával reprezentál, s az integráció helyett inkább geometrikus kvadraturákat alkalmaz.¹⁹ LEIBNIZ nem jelent elvi haladást NEWTONhoz képest, jelentősége szerencsés szimbolikus jelölésmódjában van, ami a továbbiakban egységes számolási módszer alapjává válhatott.²⁰

A ZEUTHEN-féle interpretáció CANTORÉtól való eltérései az alábbiakban foglaltak össze:

1. Igen nagy jelentőséget tulajdonít a függvényfogalom megjelenésének, s ezt már GALLIEIRE és NAPIER-re vezeti vissza.

2. Semmi — vagy majdnem semmi — jelentőséget sem tulajdonít a további fejlődés szempontjából az antik módszerek újraéledésének.

3. A kvadratura-problémákkal való foglalkozásnál fontosabbnak tartja a (később) differenciálással megoldható problémák előtérbe nyomulását és egy csoportba való összefoglalását.

4. Központi jelentőséget tulajdonít BARROW megfordítási tételének.

5. NEWTON fluxiók módszerében látja a GALILEINél megindult problémák betetőzését, ezt a módszert lényegében a mai differenciálszámítással veszi azonosnak. Emellett csak alárendelt szerepet tulajdonít — a differenciálszámítás szempontjából — a *De analysi* ...-nek.

6. Kétségtelennek tartja NEWTON módszerének eredetiségét és elvileg tisztább voltát LEIBNIZÉval szemben, de elismeri a leibnizi módszer számolástechnikai előnyeit.

A következő — véleményünk szerint igen jelentős — lépést a newtoni infinitézimálkalkulus történetének felderítésében OTTO TOEPLITZ tette. Helyesebben nem is pontosan ő, hanem a göttingeni matematika, aminek TOEPLITZ inkább csak „szócsöve” volt. S ez nem lekicsinylés akar lenni, ellenkezőleg: a legnagyobb dicséret. Nem lehet elégszer figyelmeztetni arra, mit jelentett a modern matematika történetében Göttingen. Az egyik legnagyobb göttingeni matematikus, FELIX KLEIN *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* c. könyvének harmadik kötete, a *Präzisions- und Approximationsmathematik* (Berlin 1928) az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából nélkülözhetetlen részleteket tartalmaz. „Minden gyakorlati területen van a pontosságnak egy küszöbértéke” — állapítja meg —, de van-e ilyen küszöbérték a térbeli elképzelésben is? Az aritmetikában ugyanis nincs, „az a pontosság, amivel a számok definiálhatók, korlátlan”.²¹

Teljesen ebbe a precíziósmatematikába tartozik pl. a kommenzurábilis — inkommenzurábilis közötti különbségtevés. De hová tartozik a függvény? Az empirikus görbe ugyanis nem függvényt definiál, hanem egy $y=f(x) \pm \varepsilon$ „függvénysávot” (Funktionsstreifen). Egy empirikus görbe mindig — akkor is, ha nem rajzoljuk, csak „elképezzük” — korlátozott pontosságu lehet, „és így nem a precíziósmatematika éles

¹⁸ Uo. 376.

¹⁹ Uo. 394.

²⁰ Uo. 412.

²¹ KLEIN, FELIX: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. 3. Bd. *Präzisions- und Approximationsmathematik*. Berlin 1928. 4.

függvényfogalmának, hanem a függvénysávnak felel meg”.²² A precíziósmatematika éles, $y=f(x)$ függvényfogalma empirikusan se meg nem valósítható, se el nem „képzeltető”.

Lehet-e a precíziósmatematika $y=f(x)$ függvényfogalmát úgy beszűkíteni, hogy az az empirikus görbénél megszokott tulajdonságokat, illetve ezekkel analóg tulajdonságokat mutasson? Lehet. A precíziósmatematika $f(x)$ függvényfogalmának ehhez az alábbi öt tulajdonsággal kell rendelkeznie:

1. Kontinuitás, — azaz sehol se szakadjon meg, ne „ugorjon” a görbe. — Ennek a követelménynek a precíziósmatematikában az ún. „folytonos” függvények felelnek meg.

2. Az x tengely, a görbe, és két ordinátája közt mindig legyen egy terület (Flächeninhalt) elhatárolható. — Ennek a követelménynek megfelel az a precíziósmatematikai tétel, hogy minden folytonos függvény integrálható.

3. A görbének véges intervallumban csak véges számú maximuma vagy minimuma legyen. — Ez nem következik a folytonosságból, mert pl. $y = x \sin \frac{1}{x}$ esetében a hullámok sűrűsödésének soha nincs vége. Ehhez meg kell követelni, hogy „az $y=f(x)$ függvény az éppen vizsgált intervallumban véges számú monoton (csak növekvő vagy csak csökkenő) darabra essen szét”.²³

4. Empirikus görbéinknek irányt is tulajdonítunk: ezt egy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ úgynevezett differenciáhányaddal fejezzük ki, ahol $\Delta x \neq 0$ kicsi a görbe hosszához, de nagy a szélességéhez képest. „Az empirikus görbe a tapasztalat szerint megközelítőleg egybeesik az x, y -ből $x + \Delta x, y + \Delta y$ -ba vezető egyenessel.”

A precíziósmatematikában a Δx minden előre megadott értéknél kisebb lehet, s ebben az esetben az (x, y) és $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pontokat összekötő szelő minden határon túl közeledik az (x, y) pontbani érintőhöz, a szelő irányát kifejező $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differenciáhányados pedig az érintő irányát megadó kifejezéshez, amit — differenciáhányadosnak neveznek, és y' -vel vagy $\frac{dy}{dx}$ -el jelölnek. De ilyen differenciáhányados nem minden folytonos függvény esetében létezik, pl. az $f(x) = |x|$ függvénynek, ami minden valós x -hez abszolút értékét rendeli, az $x = 0$ pontban nincs differenciáhányadosa — a függvényt ábrázoló görbének nincs egyértelműen megadott iránya. Azért ha azt akarjuk, hogy a folytonos függvény megfeleljen egy empirikus görbének — „aminek mindig van iránya” —, meg kell követelni a differenciáhányados létezését.²⁴

Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező függvények adják vissza kvalitatíve az empirikus görbénél megszokott sajátságokat. De ezzel még semmit sem tudunk a kvantitatív viszonyokról. Arra a kérdésre, hogy „mennyire lehet egy empirikus görbét lefutás, irány és görbület szempontjából egyszerű, analitikusan definiált függvényekkel megközelíteni?”²⁵ — a sorbafejtések adnak választ.

²² Uo. 17.

²³ Uo. 23.

²⁴ Uo. 24–26.

²⁵ Uo. 51.

Nem mintha a „természet” különösebben kedvelné az egyszerű, fentiek értelmében definiált függvényeket, s nem mintha ezek lennének a precíziósmatematika legfontosabb részei. Pusztán arról van szó, hogy a precíziósmatematikának ezek a részei aránylag könnyen alkalmazhatók a mindig csak korlátozott pontosságú megfigyelésekre.²⁶

Nos, éppen a KLEIN által a fizikai alkalmazhatóság érdekében a függvénytől megkívánt pontokat járja végig TOEPLITZ²⁷ szerint a nyugat-európai matematika fejlődése. CAVALIERI az első, aki először lép túl — nem sokkal — ARKHIMÉDÉSZ parabolakvadraturáján, amennyiben sikerül — arkhimédészi exhauszciós módszerrel „feltornáznia” magát az ARKHIMÉDÉSZ által megoldott másodfokú parabola ($y=x^2$) kvadraturájáról az $y=x^9$ -el leírható paraboláig, $y=x^{10}$ -nél azonban megakadt.

FERMAT-nak sikerül — végtelen geometriai sor összegének a segítségével 1650 körül megoldania az $y=x^k$ parabola kvadraturáját tetszőleges k egész kitevőre.²⁸

Ez idő tájt — 1647 — kerül közlésre GREGORIUS A SANTO VINCENTIONAK csupa mesterként, üres tételt tartalmazó nagy könyve végén az egyenlő szárú hiperbola:

$$y=x^{-1}, \text{ azaz } y=\frac{1}{x} \text{ kvadraturája.}$$

Mint GREGORIUS felfedezéséből is látszik, a területszámítás egyre inkább bizonyos meghatározott alakú idomokra: az abszcissza, a görbe és két ordinátája által határolt területekre kezdett korlátozódni. Ezekre vonatkozik CAVALIERI két fontos tétele.²⁹

Könnyű felismerni, hogy eddig a KLEIN-féle 1. és 2. követelmény birodalmában mozgottunk. Most TOEPLITZ — megfelelően a KLEIN-receptnek — bevezeti a „monotonitást”. És itt elhagyja a történelmi sorrendet, — kitérőt végez, visszafelé, a múltba. A nyugat-európai matematika történetében nem itt volt a folytatás. A nyugati matematika csak később ért el a monotonia fogalmához. ARKHIMÉDÉSZ azonban már ide is eljutott: axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia fogalmat.³⁰

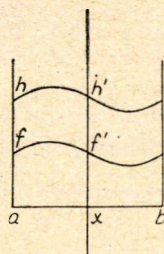
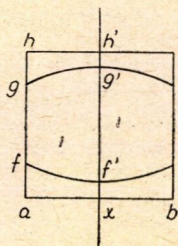
Az európai matematika más, pontatlanabb, intuitív úton közeledett a területszámítás általános megoldásához: az indivizibiliák útján. Nem tudták, hogy ebben

²⁶ Uo. 51–84.

²⁷ TOEPLITZ, OTTO: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949.

²⁸ Uo. 51–52.

²⁹ Uo. 55: 1., Ha egy f görbe alatti terület F , egy g görbe alatti G és úgy van szerkesztve egy h görbe, hogy minden egyes ordinátájára $xh' = xf' + xg'$ akkor $H = F + G$. 2., Ha h görbe úgy van szerkesztve, hogy minden ordinátáján a -tól b -ig $xh' = \rho \cdot xf'$, akkor $H = \rho F$.



³⁰ Uo. 60–73.

is megelőzte őket ARKHIMÉDÉSZ, mert ezt a módszert tárgyaló „Módszer”-e csak 1906-ban került elő. HEIBERG találta meg egy kivakart és szent szöveggel teleírt bizánci kézíraton, Isztambulban.

Az európai matematikán a XVII. század első felében valóságos tevékenységi láz vesz erőt. Az indivizibilia-módszer diszkussziói mellett egyre intenzívebben foglalkoznak az érintőmeghatározás kérdésével, a megfordított érintő feladattal, maximum-minimum problémákkal, a GALILEI-iskolában mozgásmatematikával, a sebességgel, NAPIER a képzelt mozgás egy különös esetével: a logaritmussal.

Ezekben a felfedezésekben csírájában benne van az integrál- és differenciálszámítás. „És ez a fejlődés legvilágosabban kiemeli azt a pontot, amit a szokásos ábrázolással többnyire elrejtene, szinte szándékosan, bár az egyetlen meglepő gondolat az egészben.”³¹ 1650 körül voltaképpen már minden kellék együtt van, ami az infinitézimális számításhoz szükséges. Mégsem jöhetett létre addig, amíg ez az „egyetlen meglepő gondolat” napvilágra nem jön. Ez az „egyetlen meglepő gondolat” a XVII. század egész addigi, szerteágazó, értékes, de nagyon pontatlan, intuitív indivizibilia-fogalomra, vagy az antik geometria fogalmaira építő részletkutatását egyszerre összefogja, egységesíti, s — integrál-differenciálszámítássá alakítja át.

Mi ez a meglepő gondolat?

Bizonyos fokig visszatérés ARKHIMÉDÉSZhez, aki axiomatizálta az ívhossz-meghatározáshoz szükséges monotonia-fogalmat. Felismerte, hogy „ívhossz”-ról matematikailag, azaz pontosan, csak akkor beszélhetünk, ha előre megköveteljük a létezését. Ha körülhatároljuk, gondosan kizárjuk mindazokat a veszélyeket, amik eleve lehetetlenné tennék a róla való matematizálást. Ahogy TOEPLITZ mondja: megadjuk a kívánt dolog matematikai „receptjét”.³²

Ehhez a meglepő arkhimédészi gondolathoz tér vissza a XVII. század hatvanas éveinek a végén ISAAC BARROW, NEWTON mestere. Kimutatja, hogy az érintőmeghatározás (differenciálás) és területszámítás (integrálás) nem magától értetődő, mindig elvégezhető műveletek. Észreveszi, hogy csak akkor tudunk érintőt szerkeszteni egy görbéhez, ha a görbét előre olyannak vettük fel, hogy legyen érintője. Hasonlóképpen csak akkor beszélhetünk egy görbe alatti területről, ha a görbét előre olyannak választottuk, hogy ez a terület létezzen. Azaz legyen a -tól b -ig mindenütt végigcsúsztható a görbe mentében, ugrás nélkül, egy tetszés szerint keskeny π_1 terület (folytonosság) és legyen a görbe véges ab szakaszokkal csupa vagy csak növekvő, vagy csak csökkenő részekre felosztható (monotonia). S ha ez a két feltétel kielégül, azaz folytonos és monoton függvények esetében, az érintőszerkesztés és területmeghatározás összetartoznak, egyik következik a másikból, egymás után alkalmazva megsemmisítik egymás hatását, pontosan úgy viselkednek ebből a szempontból, mint a hatványozás és gyökvonás: egymás megfordított műveletei.

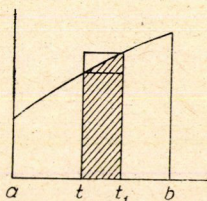
ISAAC BARROW felfedezi 1667-ben azt, amit ma az infinitézimális számítás fundamentális tételének nevezünk: differenciálás és integrálás (folytonos és monoton függvények esetében) egymásnak inverz műveletei.

Láttuk, ugyanezt tartotta már ZEUTHEN BARROW nagy tételének, csak még folytonosság és monotonia nélkül. ZEUTHEN még nem hallgatta FELIX KLEINT, ZEUTHENNél még egészen másként fedezte fel BARROW ugyanazt ...

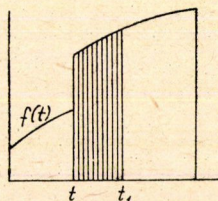
³¹ Uo. 91.

³² Uo. 60.

TOEPLITZ megmagyarázza BARROW-nak, tulajdonképpen mit is vitt végbe. Felfedezte a „Fundamentalsatz”-ot: „Ha $F(t) = \int_a^t f(x) dx$, $a \leq t \leq 1$, $f(x)$ folytonos és monoton, akkor $F'(t) = f(t)$. BARROW bizonyítása éppen olyan egyszerű, mint



4. ábra



5. ábra

amilyen világos. Tekintsük $F'(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t}$ határátmenetet. Mármost

$F(t_1) - F(t) = \int_a^{t_1} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx = \int_t^{t_1} f(x) dx$ a vonalkázott alakzat területe. Mivel $f(x)$ monoton

$$f(t) < f(x) < f(t_1) \text{ ha } t < x < t_1$$

és $(t_1 - t)f(t) < \int_t^{t_1} f(x) dx < (t_1 - t)f(t_1)$; így $f(t) < \frac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t} < f(t_1)$.

Ha $t_1 \rightarrow t$, akkor $f(t_1)$ minden függvényértéket felvesz t_1 és t között. Ha az $f(x)$ függvény $x = t$ -nél megszakadna (ettől monoton még lehetne) akkor $\lim_{t_1 \rightarrow t} f(t_1)$ nem lenne egyenlő $f(t)$ -vel. Ha $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = f(t)$ függetlenül attól, hogy jobbról vagy balról közeledik az x a t -hez, akkor az $f(x)$ függvényt az $x = t$ helyen folytonosnak nevezük. Mivel előre feltételeztük, hogy $f(x)$ függvény folytonos, következik, hogy

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t} = f(t)^{33}.$$

Ha egyáltalán lehetséges egyetlen embert megtisztelni az infinitézimális számítás felfedezője címmel — véli TOEPLITZ —, akkor az ISAAC BARROW... BARROW azonban bizonyosan nem pályázna erre a címre. Nagy könyve megjelenése után visszavonul a Bibliához, és a geometria csak kedvtelése marad, de mindig szigorúan EUKLIDÉSZ modorában.

A prioritásharcnak — TOEPLITZ szerint — nem LEIBNIZ és NEWTON, hanem BARROW és NEWTON között kellett volna kitörni, a prioritásharc — mint CANTOR olyan szépen kifejtette — politikai kérdés volt a tory NEWTON és a fejedelmét, a whig-jelölt hannoveri választót támogató LEIBNITZ között.

De a harc gyökerei nem itt voltak. A harc gyökerei „a matematika egész fejlődésében találhatók, kiváltképpen a függvényfogalom fejlődésében.”³⁴

³³ Uo. 92–93.

³⁴ Uo. 123.

DESCARTES a görög geometria nagy részét algebraizálta, de tudatosan a görög matematika egy részére szorítkozott: az infinitézimális eljárásokhoz — TOEPLITZ szerint — nem nyúlt.

Ennek következtében alakul ki kétféle függvényfogalom. Az egyik a DESCARTES által kirekesztett infinitézimálgeometriai megfontolásokhoz csatlakozik. Csírájában már GALILEINél és CAVALIERINél is megtalálható, és BARROW-ban ér csúcsára. Ez az irány jelenti a geometriai függvényfogalom kialakulását. A függvény itt a geometriai és mechanikai képek összefogásából és általánosításából alakul ki, egy szabályt jelent, amely minden, adott a és b határok közt fekvő x értékhez egy $y=f(x)$ számot rendel.

DESCARTES analitikus geometriájához csatlakozva fejlődik ki a másik irány. Ez az irány a függvényt sokkal szűkebben értelmezi, algebrai kifejezésnek fogja fel (Rechenausdruck): racionális törtfüggvénynek, gyöknek, polinomnak, végtelen sornak.

„GREGORIUS A SANTO VICENTIO, a jezsuita páter és HUYGENS még a régi, görög módon gondolkoznak; BARROWt megragadja a geometriai függvényfogalom fejlődése és megkísérli beépíteni a görög gondolkozásmódba. NEWTON alig pár évvel fiatalabb BARROW-nál, de ő már az új, algebrai kifejezésekre alapított függvényfogalom generációjához tartozik.”³⁵ A „generációváltás” a matematika történetében éppen olyan jelentős, mint a művészettörténetben. Csak az új generáció: NEWTON és LEIBNIZ generációja érti meg a BARROW-féle tétel lényegét, azt az óriási megkönnyítést, amit ez a tétel a számolás, a kalkulus szempontjából jelent.

Összefoglalva TOEPLITZ interpretációját, azt látjuk, hogy szerinte az első lépés a folytonosság fontosságának a megsejtése volt, ami a parabolákra való szorítkozásban és a mozgás segítségülhívásában nyilvánult. A görbe alatti terület kvadraturájában a módszer további fejlődését a speciális alakú területek bevezetése segítette elő. Azután esetenként, a folytonosság és a szakaszonkénti monotonia biztosításával, intuitív határatmenettel történt az érintőszámítás, a fordított érintőfeladat, a maximum-minimum problémák, evolvens-evoluta problémák megoldása. A fejlődés végső következményét BARROW vonta le: megeremtetette a megfordíthatóan differenciálható-integrálható függvény fogalmát.

Ez a fejlődés nagyjából annak a négy kvalitatív követelménynek felel meg, amit FELIX KLEIN kívánt meg a fizikában célszerűen alkalmazható függvényektől. A KLEIN-féle kvantitatív lépcsőt TOEPLITZ interpretációjában NEWTON és LEIBNIZ jelentik: megmutatják, hogyan kell tetszőleges pontossággal számolni az ilyen függvényekkel.

TOEPLITZ könyve máig legteljesebb és legszebben megírt vázlata az infinitézimális számítás korai történetének. S mivel az a perspektíva, amiből az egész fejlődést tekinti — ti. a fizikai alkalmazások perspektívája — bizonyos fokig valóban egyben a történelmi fejlődés perspektívája is, sok helyen történelmileg is helyes képet ad a kalkulus kialakulásáról. De nem szabad elfelejteni, hogy az infinitézimális számítás csak a XVIII. és XIX. században forrott össze elválaszthatatlanul a fizikával, a XVII. században a két diszciplína még függetlenül fejlődik egymástól. Elég arra emlékeztetni, hogy NEWTON nagy fizikai művében, a *Principiában* nem alkalmazza azokat az infinitézimális módszereket, amiknek akkor már két évtizede birtokában volt, s amik számunkra elválaszthatatlanul egybeforrottak a newtoni

³⁵ Uo. 124.

fizika fogalmával, s hogy HUYGENS, a modern fizika NEWTONnal és GALILEivel egyenrangú megteremtője sohasem alkalmazta a kalkuluszt.

Könnyű már nekünk elképzelni pl. GALILEIT, amint egy vízióra és egy különböző hajlásszögre beállított lejtő segítségével „integrálja” a fizika első „differenciál-egyenleteit” ...

De GALILEI bizonyosan nem gondolt arra, hogy differenciálegyenletet integrál. A történelem alapvető igazságtalansága, hogy nem lehet megkérdezni azokat, akikről írunk: ők mit gondolnak arról, amit róluk állítunk. Így minden történetírás — bizonyos fokig — múltba vetített utópia: a jelen értelmét és gyökereit keresi. Azért csak az lehet jó történetíró, akinek a múlthoz, amiről ír, köze van. Akinek a tárgyalt múlt egy kicsit saját története. Végeredményben két megbízható történetírói műfaj van: a memoár és a — levelezés.

Nos, a göttingeni iskola memoárjait az infinitézimális számítás eredetéről így kell megítélni. Egy előnye bizonyosan van: észrevette és kiemelte azt az éles fordulatot, ami a matematika történetében a XVII. század közepén bekövetkezik: a kvantitativ módszerek, a számolás, a kiszámítás elképesztő és hirtelen térhódítását, a számtáblázatokkal, logaritmussal és szögfüggvényekkel való munka terjedését, ami nélkülözhetetlen előfeltétele volt az infinitézimális kalkulusnak.

De nekünk, akik nem rendelkezünk olyan sok éves matematikai memóriával, mint a göttingiaiak, kötelességünk ezt a személyes és megleghangú történetet egy objektív, hideg, óriási filológiai apparatúrával dolgozó, nagyon nehezen olvasható, nagyon megbízható, túlságosan is pontos, szigorú leírással kiegészíteni.

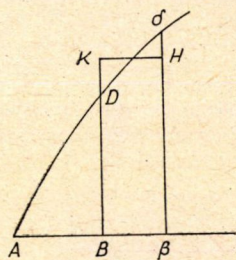
JOSEPH E. HOFMANNra gondolok: ő a matematikatörténész a XVII. század szép, de zavaros vizein.

Der große NEWTON wird häufig genannt und ist doch kaum bekannt — kezdi a NEWTON korai matematikájáról írott nagy monográfiáját.³⁶ NEWTON legendává lett, az igazi NEWTON-t rég elfelejtették. NEWTON — az igazi — 1664-ben kezd komolyan foglalkozni matematikával. „SCHOOTENT, a cartesíanus geometriát, OUGHTREDET, WALLIST és VIÉTET tanulmányozza. Egyébként BARROW matematikai előadásait is hallgatta.”³⁷

HOFMANN részletesen ismerteti az 1669. aug 10-én COLLINSnak küldött *De analysi per aequationes numeros terminorum infinitast*. Az első négy fejezet a sorelmélet szabályait foglalja össze, az ötödik fejezet a fluxió fogalmát vezeti be, de még a fluxió elnevezés nélkül, a további fejezetek alkalmazások: görbék hossza, sorok koefficiensei, mechanikus görbék.

Az első fejezetben közölt, $y = ax^{\frac{m}{n}}$ alakú függvények

$\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kvadraturáját és ennek a megfordíthatóságát a tizedik fejezetben igazolja. „Egy előkészítő részben $AB = x$; $BD = y$, ABD felület $= z$ jelöléseket vezeti be, és



6. ábra

³⁶ HOFMANN, JOS. E.: „Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis. I. Abhandlung: Materialien zur ersten mathematischen Schaffensperiode Newtons (1665–1675)”, *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1943. Mathematisch-naturwiss. Klasse. Nr. 2.* Berlin 1943. (továbbiakban: Vorgesch.)

³⁷ Uo. 7.

azt a feladatot tűzi ki, hogy az x és z között adott összefüggésből meghatározza y -t. Ebből a célból bevezet egy szomszédos ordinátát és $A\beta = x + o$, $A\beta\delta$ felület $= z + ov$ jelölést vezet be.

A továbbiakat a $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ vagy $\frac{4}{9}x^3 = z^2$ példán vezeti le, x -et $x + o$ -val helyettesíti, z -t $z + ov$ -vel, kiküszöböli mindkét oldalon az o -t nem tartalmazó tagot, végigoszt o -val, és így a

$$\frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + v^2$$

egyenletre jut. A továbbiakban a saját szavaival folytatom: Si iam supponamus $B\beta$ in infinitum diminui et evanescere sive o esse nihil, erunt v et y aequales, et termini per o multiplicati evanescent; quare restabit

$$\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv \text{ sive } \frac{2}{3}xx (=zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \text{ sive } x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y.$$

Quare e contra, si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Teljesen hasonlóan halad az I. fejezetben adott szabálynak az általános bizonyítása. NEWTON kimutatja, hogy $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$ -ből $y = ax^{\frac{m}{n}}$ következik, és megfordítva.³⁸

A mű befejezésül egy függvény hatványsorba fejtését adja meg.

A *De analysi* jelentősége óriási lett volna, ha ismertté válik. Talán a matematika egész fejlődése másként alakul — írja HOFMANN. COLLINS azonban jóformán semmit sem ismertetett NEWTON eredményeiből. JAMES GREGORY (1638–1675), aki évek óta foglalkozott hasonló kérdésekkel, csak pár, számára használatlan eredményt tud meg tőle, bizonyítás nélkül.

JAMES GREGORY érintő-módszere már *Geometriae pars universalis* — (Padua 1668)-ában megjelent. GREGORY skót nemes, aki a protektorátus alatt, 1663-ban Itáliába emigrál.

Padovában STEFANO DEGLI ANGELI, a galileista matematikus a TORRICELLI-kör módszereivel ismerteti meg. Ugyancsak Itáliában ismerkedik meg MICHEL-ANGELO RICCI eredményeivel.

³⁸ Uo. 16. — A latin szöveg fordítása: „Ha most feltételezzük, hogy $B\beta$ már végtelenül csökken és eltűnt, azaz o zérus lett, v és y egyenlőek lesznek, és a o -val szorzott tagok eltűnnek; tehát megmarad

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{3}xx = 2zv \text{ vagy } \frac{2}{3}xx (=zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \text{ vagy } x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y.$$

Tehát megfordítva, ha $x^{\frac{1}{2}} = y$, akkor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ lesz.” — A o -t nem szabad nullának fordítani, mint oly sok könyv, pl. D. J. STRUIK, *A matematika rövid története*, Bpest, 1958. 119. is teszi. (Ugyanezt a hibát követi el az angol kiadás is.)

RICCI az ellenreformáció jelentős személyisége, magas egyházi funkciókat töltött be. MERSENNE római tartózkodása (1644) alatt közvetítő volt az olasz és francia iskola között. RICCI hosszú éveket töltött az érintőprobléma megoldásával. Később, 1666-ban adta közre az apollonioszi szigorú módszerek továbbépítésén alapuló módszerét az $x^p y^q = z^{p+q}$ (ahol $ax + by = cz$) egyenletű görbék érintőszerkesztésére.

RICCI nyomán dolgozta ki H. SLUSE (1622–1685) $f(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k = 0$ formában előállított algebrai görbék s_i szubtangensének a meghatározására szolgáló módszerét. A szubtangenst az

$$x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} + y \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = 0$$

egyenletből kapja meg, a végbevitt osztás után a h és k -t tartalmazó tagok elhagyásával.³⁹

JAMES GREGORY a RICCI érintőszerkesztését egyszerűsíti, s SLUSE-hoz hasonlóan, a FERMAT módszerével rokon eljáráshoz jut, amennyiben az $\frac{f(x)}{s_i} \approx \frac{f(x+h)}{s_i+h}$ egyenletet írja fel, a kifejezést kifejti és rendezi h hatványai szerint, és a h elsőnél magasabb fokú hatványait tartalmazó tagokat elhagyja. Ezáltal arra az eredményre jut, amit mi $s_i = \frac{f(x)}{f'(x)}$ -szel jelölnénk.⁴⁰

GREGORY azonban messze túljut elődein. Az eddigi korszak — a „Hochbarock” — tudása arisztokratikus, nehezen elsajátítható, tudósok szűk körére szorítkozó volt. Érdeklődő, de szakmailag többnyire nem eléggé képzett közvetítők tartották a tudósok között a kapcsolatot személyesen és kiterjedt levelezésükkel.

A tudósok megélhetés és munkalehetőség tekintetében „gyakorlati” foglalkozások és bizonytalan patrónusok kényszerének és kényének voltak kiszolgáltatva.

Az 1660-as évekkel alapvető változás következik be. A tudomány önálló lesz, az akadémiákban megteremti saját szervezeti formáit, a levelezést felváltja a folyóirat, a tudományos élet határozott, elismert és egyre jobban megbecsült része lesz az államok felépítésének.

Az általános matematikai tudás most is alacsony. A kor — a Spätbarock, ahogy HOFMANN nevezi — vezéregyéniségei VIÈTE és DESCARTES nyomán átfogó módszerekre törekednek, amikkel az eddigi eredmények kisebb tudás birtokában is áttekinthetők lesznek. A régibb, nehéz geometriai módszereket felváltja a teljesítőképesebb algebrai. Ez rövid és könnyen kezelhető szimbolikához és számolástechnikához vezet, s előkészíti a hatványsormódszert. A hatványsorok az új matematika hatalmas fegyverei lesznek, *kiegészítjük*, a differenciálszámítás pedig a Spätbarock szakmai és ismeretelméleti tendenciáinak az összjátékából előálló csúcsteljesítmény.

GREGORY már itáliai tartózkodása alatt az új, végtelen sorokkal dolgozó módszer felé tájékozódik. Az arkhimédészi exhauszciós eljárás kibővítésével nagy jelentőségű módszert dolgoz ki a kúpszelet-szektorok kvadraturájára. A módszer kívül írható háromszög- és belülírható négyszögbeosztás azonos határ felé „konvergáló” (a szó tőle ered) kettős sorozatán alapul. A sorozat határértékére egyszerű közelítő for-

³⁹ BECKER, O. und J. E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik*, Bonn 1951, 198. (Továbbiakban: Becker–Hofmann.)

⁴⁰ Vorgesch., 30, Becker–Hofmann, 198.

mulákat ad meg, és megkísérli bizonyítani a körkvadratura „analitikus” — azaz a szó általa használt értelmében algebrai egyenletek segítségével történő — megoldásának a lehetetlenségét.

De hibát követ el a sorelmélet alkalmazásában, és csak az angol iskola, WALLIS, MERCATOR eredményeinek a megismerése segíti hozzá a helyes megoldáshoz. „Nehezen ássa le magát a *Logarithmotechnica* magváig”, de megismerkedve a logaritmus fogalmával, nemcsak eddigi soraira dolgoz ki sokkal jobb közelítéseket, nemcsak π -re kap igen gyorsan konvergáló sorokat, s adja szigorú bizonyítását a MERCATOR-sornak, hanem 1670 végén felfedezi a NEWTON-féle binomiális-tételt is, bevezeti folytatódagos differenciálás segítségével a hatványsorbafejtést, megadja a trigonometrikus függvények és logaritmusaiknak a sorait, visszavezeti a logaritmikus görbe ívhosszmeghatározását a hiperbolakvadraturára, s végül a sorokat egyenletmegoldásra és nehéz számelméleti problémák eldöntésére is felhasználja.

Még teljesen a geometriai-verbális felfogásban nőtt fel, és érett férfikorában sikerült áttörnie a számításos, analitikus gondolkozásmóddhoz. Az áttörés jelentőségét megérthetjük, ha meggondoljuk, hogy pl. HUYGENSnek, aki kora egyik legnagyobb matematikusa volt, sohasem sikerült. Éppen ez a legnyilvánvalóbb bizonyítéka GREGORY — „a modern matematika egyik megalapítója” — kiváló képességeinek.⁴¹

JOHN COLLINST azonban „szűklátóköre” és „NEWTON-imádata” megakadályozza GREGORY felismerésében. Mint afféle autodidaktának, fölöttébb imponált neki a nagy NEWTON barátsága, s meggondolás nélkül szolgáltatja ki neki GREGORY eredményeit. GREGORY mellett pedig senki sem áll. „If, it were not for you, I would be, as it were, dead to all the world” — idéz HOFMANN GREGORY 1671. febr. 25-én COLLINSHOZ írt leveléből.⁴² „Így történhetett, hogy GREGORY halála után csakhamar teljes feledésbe merült, és NEWTON tekintették egy sor csodálatos tétel felfedezőjének, jóllehet ezek első felfedezője a valóságban nem ő, hanem GREGORY volt.”⁴³

NEWTON csak DARY és GREGORY munkáinak — és így közvetve SLUSE eredményeinek — az átnézése után jön rá saját módszereinek az általános érvényére. „Hogy ebben mennyire befolyásolták GREGORY eredményei, amelyeket kétségkívül önállóan utánaszámolt, teljesen tisztázatlan és valószínűleg sohasem lesz felderíthető.”⁴⁴ NEWTON kortársai azonban — s ebben még GREGORY sem volt kivétel — nehézkes geometriai módszerekkel dolgoztak, „NEWTON már analitikusan gondolkozott, a szót a modern értelemben használva ... Pár sorban és általánosságban meg tudta oldani azt, amit addig nehézkes és szubtilis vizsgálatokban is csak tökéletlenül sejtetni tudtak.”⁴⁵

NEWTON sorelméletét és fluxiótanát 1665–1674 között dolgozza ki, ez a Sturm und Drang periódusa, végleges fogalmai azonban ekkor még hiányoznak. Két évre

⁴¹ Becker—Hofmann, 198. J. E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik*, 2. Bd. Berlin, 1957, 51–52. (Továbbiakban: Hofmann II.)

⁴² Vorges. 48. Vö. *The Correspondence of Isaac Newton*, Ed. by H. W. TURNBULL, Vol. I. 1661–1675, Cambridge 1959, 61. A szövegben az idézet nem hangzik annyira tragikusan, és főleg nincs NEWTON elleni éle: I can not expresse, how much I think my self engaged to you for your account of new books; if it wer not for you, I wold be, as it wer dead, to al the wordle ...

As for Mr. NEWTON his universal method, I imagine I have some knowledge of it, both as to geometrick & mechanickcurves, however I thank you for the serieses ye sent me, & send you these following in requital.

⁴³ Vorges. 49.

⁴⁴ Uo. 100.

⁴⁵ Uo. 117.

abbahagyja a matematikát, és csak 1676-ban tér vissza, de már mint Mester, aki ismereteit egyenesen kinyilatkoztatásnak érzi. S ez súlyos válságba kergeti.⁴⁶

Ugyanis: „A balsors (das Unglück) úgy hozta magával, hogy az analitikus érintőmódszer első felfedezője nem NEWTON volt, s kínosan ható szörszálhasogatással kellett bizonygatnia, hogy a SLUSE eljárása nyilván más alapokon keletkezett és nem olyan általános, mint az övé. S továbbá úgy akarta (ti. a balsors), hogy LEIBNIZ éppen SLUSETől kapta döntő indítékát, s ebben a tekintetben messzebb és mélyebbre látott, mint NEWTON.”⁴⁷

S ezután az előkészítés után már nem lesz nehéz levonni a végkövetkeztetést: Die mathematische Hochleistung des Spätbarocks ist die Erfindung des Calculus. Sie ist das ausschliessliche Verdienst des Leipziger Professorensohnes G. W. LEIBNIZ (1646–1716).⁴⁸

A „Prioritätsstreit” J. E. HOFMANN nyomán új fázisba lépett. Talán JAMES GREGORY és LEIBNIZ között kellene megvívni? A két „SLUSE-tanítvány” között, a skót és a száz között, akiktől ügyes angolok — jóllehet részben jóhiszeműen és öntudatlanul — ellopták felfedezéseiket?

J. E. HOFMANN a prioritásvita legnagyobb szaktekintélyei közé tartozik, és a leibnizi matematika genezisének a tisztázásában alapvető munkát végzett. Ma talán ő a XVII. századi matematika legjobb ismerője. S ha nem is élezi ki a kérdést ennyire, mint azt a fenti, összefüggéseiből kiragadott idézetek mutatják, a HOFMANN-interpretáció tendenciája kétségkívül NEWTON-ellenes.

S emellett az a tipikusan tudománytörténész beállítottság jellemző rá, amit JACQUES HADAMARD a NEWTON születésének háromszázadik évfordulójára rendezett ünnepségen így jellemzett: „Mind tudjuk, hogy a tudománytörténeteknek az a legnagyobb dicsőség, ha bebizonyítják, hogy soha nem fedezett fel senki semmit”.

Ezt a mondatot választotta J. O. FLECKENSTEIN a prioritásvitáról írott kitűnő kis összefoglalása mottójául.⁴⁹

FLECKENSTEIN lényegesen kevésbé elfogult, mint HOFMANN. Helyesebben, ő más szempontból elfogult. FLECKENSTEIN svájci, eredetileg csillagász volt, filozófus, s míg HOFMANN „szellemtörténeti” háttérbe ágyazza be a matematika fejlődését, ő a „gondolkodástörténeti előfeltételeket” (ideengeschichtlichen Voraussetzungen) keresi. Természetesen ő is leibniziánus, hiszen hosszú évekig foglalkozott LEIBNIZ-zal, s így az egész newtoni matematika lényegét leibnizi szemszögből — a differenciálegyenletek szemszögéből — interpretálja. Még a *Principia* főérdemét is abban látja, hogy lehetőséget ad a naprendszer n -testproblémaként, differenciálegyenlet-rendszerrel való tárgyalására.⁵⁰

⁴⁶ Uo. 118.

⁴⁷ Uo. 119.

⁴⁸ Hofmann II, 62.

⁴⁹ FLECKENSTEIN, J. O.: *Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton*, Basel und Stuttgart, 1956.

⁵⁰ Uo. 2. — A *Prinzipia*-ban természetesen szó sincs erről. Nemcsak a differenciálegyenleteket nem ismeri, az n -test problémát sem. A három-test problémáira egy speciális XVII. századi, a területelven alapuló módszert alkalmaz. — Vö.: TRUESDELL, C.: „A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason”, *Archive for History of Exact Sciences* 1, 3–36, 1960.

Ez a formai felfedezés a nagy szerinte a *Principiá*-ban, mert egyébként, tartalmilag, a gravitációs törvény semmi egyéb, mint HUYGENS 1659-es centrifugális-formulájának alkalmazása a harmadik KEPLER-törvényre.

NEWTON nagy érdeme — ha a *Principia* tételeit nem is öltözteti ebbe az új ruhába — az új matematikai kalkulus megteremtése. Ez az új kalkulus nem egyéb, mint „a dinamika algebrára való leképezése” (eine Abbildung der Dynamik auf Algebra), a változó erők dinamikájáé, ami megkövetelte a változás (út) változása (sebesség) változásának (gyorsulás) az analízisét.

A kalkulus: az erők matematikája.

GALILEI, aki a mozgást a (mozgás indivizibiliájaként felfogott) sebességnek a folytonos változásával állította elő, intuitive már érzi az erőknek ezt az új matematikáját. Azonban nemcsak ő, még DESCARTES sem érkezett el soha a dinamika algebrára való leképezéséig. Sőt: DESCARTES ebből a szempontból kitérőt jelent. DESCARTES és a cartesiánusok (ide számítja FLECKENSTEIN FERMAT és PASCAL matematikai módszereit is!) a maguk metszéspontösszeesésen, ill. szelő-határhelyezeten felépülő érintőmeghatározásaikkal csak a kinematika matematikai igényeit elégítik ki. „Ezáltal sikerül a cartesiánusoknak kinematikát űzni és azt az algebrára leképezni, de a dinamika zárva marad előttük; és ezáltal a cartesiánus fizika magasabbrendű algebrai görbék kinematikája lesz csupán.”⁵¹

A fejlődés útja nem ezen a cartesiánus geometrián át vezet, hanem GALILEI firenzei iskolájához csatlakozik, és az indivizibilia-matematikán keresztül történik. Ennek az iránynak az alapvető, nagy művét CAVALIERI írja meg: *De geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna 1635) címen.

FLECKENSTEIN a CAVALIERI-módszert a NEWTON-féle fluxió-elmélet szemszögéből interpretálja, s így nagyon szépen le tudja vezetni a newtoni matematika keletkezését — „ideengeschichtlich” — a GALILEI-iskolából.

Már csak HENRY MOREnak kell egy immateriális tér és egy egyenletesen folyó idő realitásként való feltételezésével „biztosítani az új változás-fogalom metafizikai háttérét”, BARROWnak és JAMES GREGORYnak felismerni az integrálás és differenciálás műveletének inverz voltát,⁵² és akkor „megérett Cambridge számára az idő, hogy DESCARTES algebrai módszereinek GALILEI dinamikus elképzeléseire való alkalmazásával megteremtse az infinitézimális kalkulust.”⁵³

BARROW is megteremtette volna — véli FLECKENSTEIN —, ha nincs annyira fogva a firenzeiek geometriai módszereiben. GREGORY már lényegesen tovább lát, úgyhogy tulajdonképpen nem BARROW és LEIBNIZ, hanem GREGORY és LEIBNIZ között kellene megvívni a prioritásharcot.⁵⁴

Így áll NEWTON — „ideengeschichtlich”. Még csak egy kis „induktív empirizmust” kell kölcsönvennie ahhoz, hogy megteremthesse a kalkulust, s ezt WALLIS szállítja.⁵⁵

„Közvetlenül a pubertás utáni években” bontakozik ki NEWTON géniusza, s teremti meg az infinitézimális analízis alapfogalmait: a fluens és a fluxió fogalmát, s az algoritmusát, a kalkulust.

⁵¹ Uo. 4.

⁵² Uo. 8.

⁵³ Uo. 7.

⁵⁴ Uo. 8.

⁵⁵ Uo. 10–11.

Főművében, a *Principiá*-ban csak az alapfogalmakat ismerteti, az új módszer alkalmazásától „visszariad”, s jóllehet a könyv nem egy proposícióját ennek a segítségével fedezhette fel, nagy könyvében „sehol sem alkalmazza”.

LEIBNIZ viszont épp ezen a területen, az új módszer alkalmazásainak a területén veti be legjobb képességeit, s nyomában alakul diadalmenetté az infinitézimális számítás — fejezi be interpretációját FLECKENSTEIN.

A HOFMANN és a TOEPLITZ módszeréhez hasonlítható D. TH. WHITESIDE kalkulus-interpretációja a XVII. század matematikájáról szóló nagy monográfiájában.⁵⁶ Forrás ismerete a HOFMANNéhoz fogható, s a modern matematika felől közelít a XVII. századhoz, mint TOEPLITZ tette volt.

Négy nagy fejezetre osztja a XVII. század matematikáját: aritmetikára és algebrára, függvényelméletre, geometriára (szintetikus és analitikus) és a kalkulusra. Legnagyobb részt természetesen a kalkulus ismertetése foglalja el. A kalkulushoz az utat a függvényfogalom tárgyalása készíti elő. Épp úgy, mint TOEPLITZnél, a logaritmus és geometriai modellje áll itt is a fejlődés kezdetén, mint „type-function”. A számolás és táblázatos függvények szerepét tartja ő is a következő lépésnek. De itt lényegesen tovább lát elődeinél: a táblázatok számításaiból adódó interpolációs feladatokban a „függvényfogalom” fejlődésének egyik fontos tényezőjét ismeri fel. WHITESIDE interpretációjának ez a legérdekesebb része. Az interpolációelméletet WALLIS és JAMES GREGORY uralják. Az ő kezükben lesz a táblázatok számításainak a megkönnyítését szolgáló segédszámításokból igazi matematika: differenciaszámítás. Ez a rész iskolapéldája annak, hogyan kell a matematikai gondolkodás egy fejezetét „pattern”-analízissel közel hozni a mához. WALLIS professzor — ahogy WHITESIDE ismerteti — nyugodtan előadhatná elméletét a mai Oxfordban is, a matematikában nem érezhetők a közben eltelt évszázadok, a matematikus gondolkozásmódja, „észjárása”, gondolkozási „pattern”-ja időn kívül álló, örök. Úgy adjuk vissza igazán helyesen, ha mai fogalmainkkal közeledünk hozzá, ha mai formuláinkkal írjuk le. De nem úgy, mint MORITZ CANTOR, aki a modern szimbolizmussal modern észjárást is vitt a tárgyalt gondolatokba. Utóbbihoz a „pattern”-analízis szabályai szerint nem szabad nyúlni. Az akkori észjárást kell visszaadni mai matematikai formákban, s akkor kiderül, hogy a több száz, vagy több ezer éves matematikai gondolatok épp olyan „modernek”, mint a maiak.

Láttuk, ki fedezte fel a matematikatörténetnek ilyen modern matematikai eszközökkel történő belső gondolati átvilágítását: FELIX KLEIN. Nem árt erre emlékeztetni, mert WHITESIDE éppen őt és TOEPLITZet nem idézi óriási apparaturájában. Nem „plagizálási” okokból. Egyszerűen azért, mert azok az elődök kerültek el legkönnyebben az ember figyelmét, akikkel lényegében egyetért.

A „függvényfogalom” fejlődésében a következő nagy lépést az interpoláció után a sorok jelentik a WHITESIDE interpretációjában is. Ahogy a sorelmélet történetét bevezeti, az nagyon jellemző a „pattern”-analízisre. A valós számok jólrendezhetőségét felhasználva, teljesen mai matematikai eszközökkel és szimbolizmussal, definiál bizonyos $l_0, l_1, \dots, l_n, l$ számokat, amikkel azután összeg formájában, ahhoz hasonlóan, ahogyan pl. a tizedes törteket szoktuk a 10 növekvő negatív hatványainak az összegével előállítani, definiál egy λ számot.

⁵⁶ WHITESIDE, D. TH.: Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century”, *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 179–388, 1961.

„A további haladás impliciten benne van a helyérték fogalmában és abban áll, hogy a $[l_0, l_1, \dots, l_n, l]$ rendezett halmazt λ -val jelölhetjük.

Ha az ember elérte az absztrakt gondolkodás kívánt fokát, természetesen felmerül az a kérdés, hogy milyen módon lehet értelmet adni a kötetlen $l_0, l_1, \dots, l_n, \dots$ sorozatnak, ahol n korlátlanul nagy lehet, és ahol az l_i -ket valamely a generálásukra elegendő, rekurziós formulával (pattern) definiálhatjuk.”⁵⁷ Nagyon fontos a hozzáfűzött jegyzet: „Történetileg ezt [ti. az absztrakt gondolkodás szükséges fokát] legalább akkor elérte már az ember, mikor HIPPASZUS, EUĐOXUS és a többiek, az i. e. V. században ilyen végtelen számsorozatok elméletére alapozták a valós szám-arányok definícióját. Ez a haladás közvetlenül vezetett az aktuális és potenciális végtelen közötti különbségtételre és az irracionális arány fogalmára, mint amely nem képes (racionális) arányt adni.”⁵⁸

A XVII. század — WHITESIDE szerint — inkább az alkalmazások területén jelent haladást, a sorelmélet elvi gondolati tisztázása szempontjából legfeljebb BROUNCKER és JAMES GREGORY munkái jelentősek. A sorelmélet túlnehéz a XVII. századnak. Azért olyan büszkék egy-egy könnyű kis sorbaféjtésre is, és azért hagyják el ezt az utat a könnyebb és algoritmizálásra alkalmasabbnak bizonyuló kalkulus kedvéért.

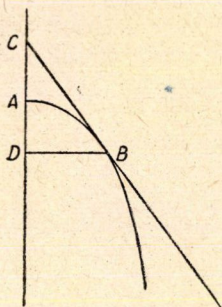
Az infinitézimális számítás — a kalkulus — kialakulását WHITESIDE ugyanazokban a lépésekben tárgyalja, mint TOEPLITZ. 1. Az intuitív eszközökkel dolgozó indivizibilia elmélet, amely a későbbi kalkulus alapötleteit és jelölési módját inspirálja, 2. visszatérés a szigorú arkhimédészi módszerekhez, 3. az érintőszerkesztés algoritmizálása, 4. végül az integrálás és differenciálás inverz műveletként való felismerése jelentik a fejlődés fő szakaszait. Nála is az integrálás-differenciálás inverz voltának a felismerése a döntő: ettől kezdve lehet infinitézimális számításról beszélni. De WHITESIDE már nem szűkíti le BARROWRA az inverz jelleg felismerését, mint ZEUTHEN és J. M. CHILD nyomán TOEPLITZ tette volt. WHITESIDE óriási forrásismerete „feldoldja” a felfedezést a századközép hatalmas matematikai irodalmában. Voltaképpen miután DESCARTES a DE BEAUNE-feladatot megoldotta, a felismerés a levegőben volt,⁵⁹ és impliciten alapul szolgált az indivizibilia-exhauszcíós módszereknek. WALLIS-ban is felcsillag a felismerése, JAMES GREGORY pedig sokkal világosabban kimondja, mint BARROW.

NEWTON 1666-ban írta le: „Enyhén modernizálva megoldását — írja WHITESIDE — azt mondhatjuk, hogy NEWTON egy OP görbét egy, az $OX=x$ és $XP=y$

⁵⁷ Uo. 252–253.

⁵⁸ Uo. 253, 2. lábjegyzet.

⁵⁹ „Voltaképpen” DESCARTES és DE BEAUNE látják, hogy a DE BEAUNE által felvetett második feladatban „kvadraturáról” van szó, anélkül, hogy területmeghatározás lenne, s hogy ez az érintőszerkesztés megfordítottja. PAUL TANNERY a DESCARTES-féle megoldás utáni klasszikus jegyzetében ezt írja: Le problème est donc bien ramené à une quadrature, et la possibilité d’obtenir en tous cas celles-ci par une sommation de termes, avec une approximation indéfinie, est démontrée. *Oeuvres de Descartes. Publ. par CH. ADAM & P. TANNERY*, II, 522. — DE BEAUNE pedig világosan rámutat ROBERVAL véleményével szemben, hogy nem érintőszerkesztésről, hanem annak a megfordítottjáról van szó: Je demande au contraire la methode, ayant une equation qui explique le rapport d’entre CD et DB , de pouvoir trouver la ligne AD . — *F. Debeaune à Mersenne*, 5 Mars 1639. *Oeuvres de Descartes*, V, 535. — DESCARTES és DEBEAUNE legalább annyi joggal tartható az érintőszerkesztés és a kvadratura megfordíthatóságának a felfedezőjének, mint WALLIS.

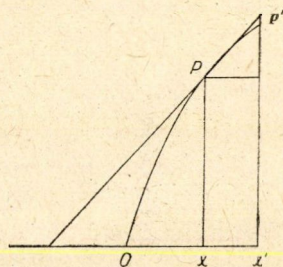


mennyiségeket összekötő $y=f(x)$ függvény által definiálnak tekint, és vesz egy másik z függvényt, (az ő «(OXPO) területe») ahol legyen $z = \int_0^x y dx = g(x)$; akkor a $g(x)$ deriváltja $\lim_{x' \rightarrow x} \left(\frac{z' - z}{x' - x} \right)$, ahol $OX' = x$, $X'P' = y'$ és $z' = (OX'P'O)$ terület. De, amint $P'X' \rightarrow PX$, $(XX'P'P)$ terület $\rightarrow PX \times XX' (= y(x' - x))$, és így

$$\lim_{x' \rightarrow x} \left(\frac{g(x') - g(x)}{x' - x} \right) = \lim_{x' \rightarrow x} \left(\frac{(XX'P'P) \text{ terület}}{XX'} \right) = PX (= y)^{60}.$$

Ez természetesen ugyanaz a bizonyítás, ami a *De analysi* 5. és 10. fejezetében szerepel, s amiről HOFMANN számolt be részletesen. WHITESIDE „pattern”-analízise azonban világosabban kidolgozza a $g(x)$ „primitív függvény” és $g'(x) = y$ „deriváltja” közötti összefüggést. Ugyanúgy, mint TOEPLITZ BARROW-nál tette volt

Magának a differenciálásnak a keresztülvitele szempontjából döntő hatással volt NEWTON-ra a SLUSIUS – HUDDE-féle szabály. WHITESIDE kimutatja, hogy NEWTON – HUDDE nyomán – már az 1660-as évek közepén eljut a mai parciális differenciál operátoroknak teljesen megfelelő műveleti szabályokhoz, s ami talán még fontosabb, jelölésekhez is. Azonban ez az 1665-ös módszer még csak algebrai függvényekre volt alkalmazható, a nem algebrai, DESCARTES által „mechanikus görbéknek”, LEIBNIZ által „transzcendens egyenleteknek” nevezett függvényekre a módszer nem terjedt ki. A haladás ezen a területen lassú volt. Ugyanis nem volt meg a „bármely görbe” geometriai modelljének megfelelő „analitikus függvény” fogalmuk.⁶¹



7. ábra

NEWTON is csak akkor mozog biztos területen, ha a „geometriai modell”-ben dolgozhat. Valóban, fluxió számításának a gondolatai itt születnek, innen általánosít.

„Ha az OP hosszúságot x analitikus mértékkel reprezentáljuk, akkor a PP' limes-vonalszakasz $P' \rightarrow P$ esetén $\lim_{o\dot{x} \rightarrow \text{zero}} (o\dot{x})$ -el reprezentálható, ahol $\dot{x}$ a pont pillan-

natnyi sebessége P -ben. Ebből az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ fluxióhányados definíciója, ha x, y -t valamely $y=f(x)$ reláció fűzi össze, azonnal adódik: mivel $y + o\dot{y} = f(x + o\dot{x})$, tehát

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = \lim_{o\dot{x} \rightarrow \text{zero}} \frac{f(x + o\dot{x}) - f(x)}{(x + o\dot{x}) - x} \left[= \frac{dy}{dx} \right].$$

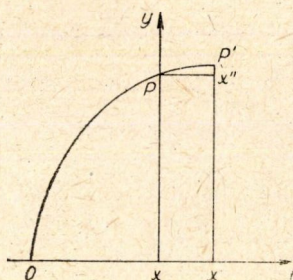
Gyakran bevezet egy olyan egyszerűsítést, amelyben x -et az időkontinuumnak tekintí (és így $\dot{x}$ állandó és egységnek vehető, mivel az idő egyenletesen „folyik”)

tehát $\dot{y} \left(= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$ reprezentálja az y növekvésének a fluxionális mértékét (fluxional

⁶⁰ Uo. 370–371.

⁶¹ Uo. 362.

rate). A geometriai modellre való lefordítás ugyanolyan közvetlen, mint az előbb. A t méri az alapul vett időskálát (ahol t a mértékegység), definiáljuk $g(y)$ -t mint az $f(y)$ reláció fluxióját, vagy megfordítva, $f(y)$ -t mint a $g(y)$ «fluensét»; és akkor ábrázolhatók «bármely mennyiség fluensei görbék alatti területekkel, a fluxiók az ordinátákkal, az idő-intervallum az abszcisszával, az idő limes-momentuma az



8. abra

abszcissza limes-momentumával, a többi fluensek limes-momentumai az abszcissza limes-momentumainak megfelelő ordinátákkal» azaz, ha $OX=t$, $PX=y=\varphi(t)$ és $XX'=t\dot{o}=o$ (mivel t -t 1-nek vettük) és $P'X''(=P'X'-PX)=\dot{y}o$, akkor a fluens az $y=\varphi(t)$ alatti OPX terület $=z=\square y$ és a fluens fluxiója a $PX=y=\dot{z}=\left(\frac{\dot{z}o}{\dot{o}}\right)$ abszcissza.”⁶²

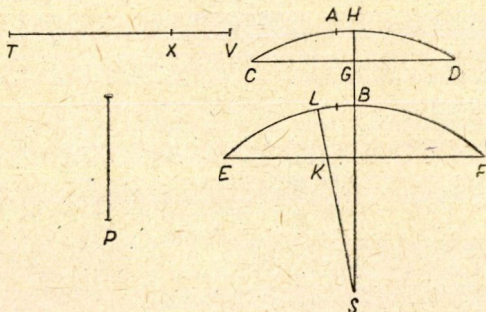
A következőkben WHITESIDE a NEWTON-féle elmélet differenciálgeometriai alkalmazásait ismerteti. Ez a dolgozata egyik legjelentősebb része. FLECKENSTEIN kivételével NEWTONnak ide vonatkozó vizsgálatait a matematikátörténészek alig méltányolják. NEWTON különösen a görbületi viszonyok analizisében jutott nagyon messze, de követői nem voltak, mert ez a terület a leibnizi analízis folytatásaként fejlődött tovább.

A pattern-analízis végeredményben ugyanoda vezetett, ahová HOFMANN ideatörténeti és TOEPLITZ szellemtörténeti vizsgálatai. De WHITESIDE analízise számtalan finom részlettel gazdagította a képet, elviszi az olvasót a forrásokig.

A matematikátörténeti pattern-analízis azoknak a történetírói áramlatoknak a megfelelője, amelyek az irodalomtörténetet irodalomtudománnyá, a zenetörténetet zenetudománnyá, a művészettörténetet struktur-analízissé alakították.

A folyamat lényegében a historizmusra való reakciónak fogható fel, s nagy hatással van kialakulására az egzisztencializmus. Az egzisztencializmus roppant

⁶² Uo. 374–375. A modern limes-jelölés ebben az esetben nagyon zavaró. Vö. pl. SAMUEL HORSLEYnek a *Principia* Prop. VI. Theor. V.-jéhez adott fluxió-elméleti magyarázatával: — si exponatur recta quaedam, TV , quae ad datum P rationem habet eam, quam sagitta KL ad sagittam GH ; tum, arcubus CAD , EBF infinite decrescentibus, si recta TV eâ lege fluat, ut semper sit ad datum P sicut sagitta KL ad sagittam GH (illas utrique sagittarum, GH , KL rectaeque TV magnitudines conferendo quae simul fiunt), & si TX sit ultima rectae TV longitudo, quam, arcubus CAD , EBF jamjam in nihilum abituris, proprius illa accesserit quam pro data quavis differentia, ... — ISAACI NEWTONI *Opera quae exstant omnia. Commentariis illustrabat SAMUEL HORSLEY*. Tomus II, London, 1879, jegyzet a Prop. VI, Theor. V.-hoz. A „minden adott különbségnél jobban” való megközelítés valóban azt a látszatot kelti, mintha a limes-fogalom alkalmazható lenne. De ez nem áll, mert a limes-fogalomban a megközelítés a természetes számok során át történik, a newtoni „limes”-ben pedig folytonos mennyiségek — DESCARTES általános mennyiségei — „folyásán” át. A XVII. század matematikája kontinuum-matematika, a XIX. századé az arithmetikai számfogalomra épül fel.



heterogén filozófia. Számtalan válfaja van, de egyben mind megegyezik: mind ahistorikus. A megelőző kor vezető nyugati filozófiája, a pozitivizmus történelemkedvelő volt, ha nem is történelemtisztelő. A pozitivisták történész lelkesedett a korhű kosztümökért, de saját gondolatait öltöztette beléjük. Így lett már MACHNÁL a tudományok története gondolkodásökonómiai példatárrá.

Az egzisztencialista történeeszt a történelem struktúrája érdekli, az eseményeké vagy a gondolkozásé. És ez a struktúra, ez a pattern modern eszközökkel közelítendő meg, mert lényegében változatlan.

Ahol az „embert” kell megismerni, belső gondolkozási formáival, ott ez a módszer néha nagyon mély interpretációkat tesz lehetővé. Ilyen volt JEAN LAPORTE nagy DESCARTES-átértékelése.⁶³

Egy ilyen interpretáció lehetősége fonódik WHITESIDE munkájában WALLIS gondolkozása köré. WALLIS WHITESIDE interpretációja az angol matematika centrális alakjává teszi. Ő benne, az indivizibilia-elmélet csúcsát jelentő WALLISban fonódnak össze, s belőle ágaznak szét a szálak. Az ő korlátai egy gondolkozási módszer belső korlátai, a többiek korlátai — ez áll még JAMES GREGORYra és még inkább NEWTONra is — a saját gondolkozásuk korlátai. WALLIS az adott gondolkozási-pattern határáig megy, s néhol meglepő intuícióval még ezeket a határokat is szét-feszíti: WALLIS megsejti a RIEMANN-integrált.⁶⁴

A többiek elhalványodnak mellette: NEWTON is. Itt vannak az egzisztencialista jellegű történetírás korlátai. A modern módszerek alkalmazása csak addig jó, amíg egyetlen ember gondolkozását kell megismerni. Egyetlen ember gondolati struktúrája lefordítható modern nyelvre. Ebben a lefordításban nem vesz el a lényeg, sőt: sokszor talán a fölösleges járulékoktól megfosztva, még jobban kidomborodik. De mihelyt gondolatok kölcsönhatásáról van szó, ez a lényeg-analízis felmondja a szolgálatot. Mert az emberek mihelyt többszámban vannak, rögtön felveszik a cselekvési és gondolkozási „illemszabályokat”, különösen olyan szemérmes emberek, mint NEWTON. És ezek a gondolkozási sablonok — az outillage mentale, ahogy LUCIEN FEBVRE nevezte — korhoz kötöttek. Egyetlen modern formula alkalmazásával meghamisíthatjuk őket. Ezeknek a gondolkozási sablonoknak is van patternje, de ezt a pattern-t nem olyan élvezetes dolog leírni, mint a gondolatok patternjét. Mert ebben semmi „modern” nincs. Poros és elavult, olyan, mint egy régi, nagy barokk paróka. A borotva-hajvágáshoz szokott egzisztencialista fej megizzad alatta, annyira, hogy elmegy a kedve a „gondolkozástól”.

⁶³ LAPORTE, JEAN: *Le rationalisme de Descartes*, Paris, ¹1945, ²1950. — LAPORTE ismeri fel, hogy DESCARTES algebrájának éppen a folytonos mennyiségekkel való munka bevezetése egyik jellegzetessége. I. m. 9.

⁶⁴ WHITESIDE, i. m. 326–327. — WALLIS jelentőségének az eltúlzását lásd már 1927-ben: J. M. CHILD, „Newton and the art of discovery”, ISAAC NEWTON 1642–1727. *A memorial vol. Ed. by W. J. GREENSTREET*, London, 1927, 117–129, 119. Szerinte nemcsak a binomiális együtthatókat

és a $\int_0^x \sqrt{1-x^2} dx$ integrál sorbafejtését, hanem a *De analysi* alaptételét is WALLISTól „vette” NEWTON.

és az elismerése WALLIS felé, frank as it is, hardly conveys the true measure of what he owed to his study of WALLIS.

II.

Az első fejezetben ismertetett NEWTON-interpretációk mind a MORITZ CANTOR-féle felfogásból nőttek ki, s lényegében azonos tendenciát követnek. Ez az irány NEWTONT elsősorban elméleti (matematikai) fizikusnak érzi, s ezért is fűzi előszere-ttel GALILEI iskolájához. A matematikus LEIBNIZ volt, ő teremti meg az új mód-szer algoritmusát.

Ez az egyetlen lehetőség a newtoni kalkulus interpretálására? Csupa óriás előd, akiknek a vállán NEWTON már alig látszik? — Nem egészen.

JACQUES HADAMARD a háromszázéves évfordulón éppen azt emeli ki, hogy NEWTONnak nem volt igazi elődje. Egyedül FERMAT volt az, „aki, ha nevet és jelölést ad $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$, $e=0$ mennyiségeinek (quantitás), kétségkívül sokkal messzebb

jut alkalmazásukban, mint így, talán olyan messze, mint maga NEWTON. Ezzel szemben annak a hozzájárulásnak az értékéről, amit LEIBNIZ hozott a differenciális jelölésével a tudományba, egyáltalán nem vagyok meggyőződve, kiváltképpen ha a magasabbrendű differenciálokról hallok beszélni.”⁶⁵

A háromszázéves évfordulók persze nem a legjobb alkalmak kritikai értékelésekre, de — HADAMARD nem áll egyedül ezzel a véleményével. Ugyanezt írja a két nagy összehasonlításáról JEAN ITARD: „NEWTON ideái alapjában véve elég közel állanak a LEIBNIZiéihoz. Ám tárgyalásmódja, anélkül, hogy a mai szigorúságot elérné, sokkal óvatosabb, mint vetélytársáé.”⁶⁶

De ITARD az óvatosságot nem tartja föltétlenül szükséges tulajdonságnak, mert szerinte az algoritmusok fokozott kiterjesztése, a bennük való egyre nagyobb bizalom, „ez a jog egy homályos és bizonyos értelemben mechanikus gondolkodás-móddhoz, amit LEIBNIZ hirdetett, ez — azt hiszem — a lényeges a matematika történetében”.⁶⁷

Már ZEUTHEN, s újabban RENÉ TATON⁶⁸ felhívták rá a figyelmet, hogy NEWTON fluxiók módszere épp úgy alkalmazható lett volna az infinitézimális geometria és a differenciálegyenletek elméletének a kiépítésére, mint a LEIBNIZ módszere.

A. S. RAMSEY⁶⁹ pedig arra emlékeztet, milyen nagymértékben fellendítette a newtoni gravitációs-elmélet a tiszta matematikát. És épp a XVIII. században, amelynek matematikáját teljesen a leibnizi módszerek fejlődésének tulajdonítják.

OSKAR BECKER, aki a „Grundlagenforschung” felől közeledett a matematika-történethez, az első fejezetben ismertetett iránnyal szemben semmiféle „ellentétet” nem lát a *Principia* elején bevezetett új módszer és a klasszikus öltözék között. Hiszen ez a bevezetés is épp olyan szigorúan klasszikus formába van öltöztetve, mint a továbbiak, — írja. S a bevezető rész scholiumában, ami szándékosan amennyire

⁶⁵ Idézi JEAN ITARD: „A propos du tricentenaire de la naissance de Newton”, *Revue d'Histoire des Sciences*, 1, 254—257, 1947—48.

⁶⁶ *Histoire générale des sciences, publ. sous la direction de RENÉ TATON. Tome II. La science moderne*, Paris 1958, 233.

⁶⁷ *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 5, 389—390, 1952.

⁶⁸ TATON. R. „La préhistoire de l'analyse géométrique.” *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 3, 89—102, 1950.

⁶⁹ RAMSEY, A. S.: *An introduction to the theory of Newtonian attraction*, Cambridge, 1940, V.

csak lehet „a klasszikus geometerek eljárását közelíti meg”, kora indivizibilia módszerével száll szembe elvi síkon, s egyféle határérték-módszert vezet be.⁷⁰

NEWTON éppen azáltal „modern”, hogy kortársainál szorosabban ragaszkodik a klasszikus deduktív görög módszerekhez? S épp azzal az indivizibilia-módszerrel száll szembe, aminek — FLECKENSTEIN szerint — csúcsát jelenti?

A BECKER véleményének a megértéséhez tudni kell, hogy számára voltaképpen csak két matematika létezik: a görög és a XIX—XX. századi. Csak ebben a két periódusban „szabad” tudomány a matematika: sem a dolgok metafizikai lényegének a megismerésére, sem a természet megismerésére nem törekszik. A matematika — BECKER szerint — ott végződik, ahol nem-matematikai kérdésekre alkalmazzák.⁷¹

Ha ezt a két elvét következetesen végigvinné, se NEWTON-t, se LEIBNIZOT nem lenne szabad matematikusnak tartania, mert ők a matematikát a természet, ill. a metafizika elveinek a megismerésére használták.

Nem voltak „matematikusok”, — mégis az egész modern matematika belőlük nőtt ki.

K. A. RYBNIKOV cikke ad kulcsot az „ellentét” megoldásához. Eszerint NEWTON a természeti jelenségek lehető legszélesebb körének a leírására alkalmas matematikai módszert akart teremteni, s ezt vélte megtalálni a fluxiók számításban. „Gondolata a következő volt. Épp úgy, mint ahogy bármely valós szám elképzelhető véges vagy végtelen tizedestört formájában, bármely valós változójú függvény is elképzelhető a változó hatványai szerint rendezett véges vagy végtelen hatványsorban.” Azért teremti meg NEWTON a hatványsorok differenciál- és integrálszámítását, s aztán már „csak” egy tetszőleges függvénynek a sorbafejtését kell megoldania. Ez természetesen nem sikerül, s RYBNIKOV szerint azért tér vissza a *Principiá*-ban az euklidészi—arkhimédészi módszerekhez. Ezért nem alkalmazza a fluxiók módszert.⁷²

Lényegében ugyanez a véleménye P. SERGESCU-nak, aki az infinitézimális számítás kialakulástörténetének egyik legnagyobb szaktekintélye. SERGESCU felismeri DESCARTES központi jelentőségét az infinitézimális-számítás történetében: DESCARTES teremtette meg a „geometriai” és „mechanikus” görbék elkülönítésével az infinitézimális számítás és a sorelmélet alapjait. Ugyanis a „geometriai” görbék érintő- és területszámítási feladataihoz elegendő volt az algebrai vagy az indivizibilia-módszer valamilyen formája.

A „mechanikai” görbéket azonban sorbafejtéssel kellett megoldani.

A görbék elméletének, az érintőszerkesztésnek, az indivizibilia-vizsgálatoknak, a sorbafejtésnek értelmes egésszé való összefogására volt szükség ahhoz, hogy később a függvényfogalom megszülethessen. Ez az összefogás a newtoni infinitézimális kalkulus.⁷³

⁷⁰ BECKER, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg—München, 1954, 150.

⁷¹ BECKER, O.: *Größe und Grenze der mathematischen Denkweise*, Freiburg—München, 1959.

⁷² RYBNIKOV, K. A.: „On the role of algorithm in the history of mathematical analysis”, *Actes du VIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences*, Florence—Milan 3—9 Septembre 1956, Paris 1958, 142—145.

⁷³ SERGESCU, P.: *Coup d'oeil sur les origines de la science exacte moderne*, Paris, 1951, 76—77.

III.

A „NEWTON-párti” észrevételek — amikből egynéhány példát idéztünk — nem sűrűsödtek olyan imponáló interpretációkká, mint az első részben ismertetett CANTOR—ZEUTHEN—TOEPLITZ—WHITESIDE vonal. A XX. századi matematika-történetírás főáramlata érintőlegesen halad el a newtoni infinitézimális analízis mellett. Kétségtől Whiteseide jutott legmesszebb a newtoni matematika gondolat-strukturális előzményeinek a feltárásában, de épp ezek az előzmények a kelleténél jobban háttérbe szorítják NEWTON tettét.

De a XX. század matematikatörténetírása még egy nagy „NEWTON-interpretációt” hozott létre, amelynek az ismertetése nélkül a kép nagyon hiányos lenne: a NEWTON-levelezés folyamatban levő kiadását. Az első kötet 1959-ben jelent meg, a harmadik 1961-ben, és 1694-ig öleli fel a NEWTON-levelezés anyagát.

H. W. TURNBULL, a kitűnő matematikatörténész irányította a kiadást, H. W. ROBINSON és J. F. SCOTT segítségével.

Az ADAM—TANNERY-féle DESCARTES kiadás mutatta legszebben, hogy egy ilyen nagy levelezés-kiadás egyben milyen hatásos interpretációt is jelent: a levelek összeállítási módja, a jegyzetek, az egyes részletek hangsúlyozása a századfordulón egészen új DESCARTES-képet teremtett, amelyik lényegében változatlan maradt JEAN LAPORTE nagy reinterpretációjáig.

Ugyanígy a NEWTON-levelezésből a newtoni infinitézimális analízis új képe bontakozik ki, ami meglehetősen eltér az első részben ismertetett interpretációs fővonalától. Érthetően a WHITESIDE hatalmas kéziratismerelettel megírt NEWTON-interpretációja jár legközelebb a *Levelezés* NEWTONához. De a *Levelezés*-ben előtérbe kerül az, amit WHITESIDE modern jelölési módja elhagyott: a newtoni matematika formavilága. S a newtoni formákban a WHITESIDÉNél modern ruhában megismert gondolatok is más jelentést nyernek.

A newtoni infinitézimalkalkulus genezise szempontjából döntő fontosságúnak kell tekinteni azt az 1666. máj. 16. keltezésű kéziratot, amit a levelezés kiadói 348.

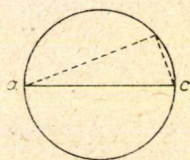
szám alatt közölnek. A címe: „Problémák mozgás általi megoldásához az alábbi hat proposíció szükséges és elegendő.”⁷⁴

Az első és második proposíció „mozgások” adott irányba eső komponensének a meghatározása, ill. mozgások összetevésének a törvénye. Már ez világosan mutatja a newtoni matematikai gondolkodás kapcsolatát BARROW-on keresztül a TORRICELLI-iskolához.

„Prop. 3. Egy önmagával párhuzamosan mozgó test minden pontja azonos (equall) mozgásban van.

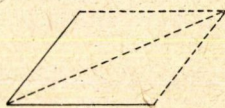
Prop. 4. Ha egy test csak körmozgást végez valamely tengely körül, pontjainak mozgása úgy aránylik, mint tengelytől való távolságuk.

Nevezzük ezt a kétféle mozgást egyszerű mozgásnak.”



Prop. 1

9. ábra



Prop. 2

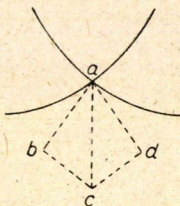
10. ábra

⁷⁴ The Correspondence of Isaac Newton (továbbiakban Corr.) Vol. III. 1688—1694, Ed. by H. W. TURNBULL, Cambridge 1961, 348, A manuscript by Newton 16 May 1666.

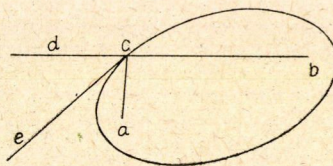
Az 5. proposíció azt mondja ki, hogy minden bonyolultabb „mozgást” ebből a két „mozgásból” kell felépíteni.

A 6. proposíció két egymást metsző görbe vonal „mozgását” analizálja ebben az értelemben: az a metszéspont által leírt harmadik görbevonal mozgásgeometriai adatait adja meg a két görbét a metszéspontjukban érintő $abcd$ síkban.

A 7. proposíció a 6. proposíció algebrai megfelelőjét adja meg: hogyan kell kiszámítani két test p és q „mozgásai” közötti viszonyt, ha a két test által leírt x és y vonal közötti reláció egyenlete van megadva.



11. ábra



12. ábra

„Mozgás” alatt NEWTON a sebességgel arányos mennyiséget ért, s így a „mozgás”-meghatározások érintőmeghatározást jelentenek. Két példát hoz fel a fenti proposíciók illusztrálására. Az első: „Húzzunk érintőt az ellipszishez. Tegyük fel, hogy az ellipszist az abc zsinór (thred) írja le, és hogy ce az érintője. Mivel az ac szár ugyanakkora sebességgel csökken, mint amekkorával a bc nő, azaz a c pont egyforma mozgással mozog a és d felé, a dce és ace szögeknek egyenlőeknek kell lenni az első proposíció miatt: és ugyanígy a többi kúpszeletnél is.”

A második példa, a nikodémészi spirális érintőjének a meghatározása, jóval bonyolultabb. Ez a példa megadja a geometriai és algebrai módszert is. A latin verzióban azonban hozzáfűzi, hogy a mechanikai görbék esetében az algebrai számítás cserbenhagy, csak a másik módszer használható.

Ez a kis írás a korabeli TORRICELLI—ROBERVAL—BARROW-féle mozgás geometria és a DESCARTES—HUDDÉ—SLUSE-féle algebraizált geometria egymás mellé helyezése, összeolvasztási kísérlete.

Meg kell figyelni, már most milyen következetesen kidolgozza a vonal és a vonal mentén történő „mozgás”, más szóval a pálya és a sebesség — még más szóval: a görbe és az érintője közötti összefüggést. És ez az új, a jövő csírája: a görbét az érintője-segítségével definiálja, erre való a hat proposíció. Már úgy adja meg a görbét, hogy legyen érintője, s ez a felfogás törli el a cartesiánus különbséget „geometriai” és „mechanikus” görbék között. Közös csoportba foglalhatókká lesznek „geometriai” és „mechanikus” görbék; az érintővel rendelkező görbék — a „differentiálható függvények” — csoportjába.

A matematikus olyan, mint a bűvész: csak azt tudja elővarázsolni a kalapból, amit előre beletett.

A matematikus is annál jobb bűvész, minél „kevesebből” minél többet elő tud varázsolni. S sajnos, NEWTON azt hitte, abban is követni kell a bűvészt, hogy az elővarázsolás módját a lehető legnagyobb titokban kell tartani.

A bűvészrecept adva volt; ha érintőt akarsz szerkeszteni, gondoskodjál róla, hogy görbéidnek legyen érintője. Csírájában már ebben az írásban meg van adva,

mi biztosítja majd ennek a feltételnek (szükséges és elegendő — mondja a cím) a teljesülését: a folytonos mozgás. De explicite csak a *De analysi*-ben jelentkezik a feltétel, ahol a sebességet egy görbe alatti terület változásának a sebességére konkretizálja.

Ezáltal megad két mennyiséget, amelyek mindig kiszámíthatók egymásból. A két mennyiség: a görbe alatti *változó terület* s a terület változásának a *sebessége*.

Mivel a görbét két mozgásból származtatja: egy abszcissa-irányú és egy ordináta-irányú mozgásból, a mozgás — területváltozás — sebessége éppen a két mozgásból összetevődő érintő abszcissa-tengelyhez való hajlását adja meg.

A két mennyiséget: változó területet és a területváltozás sebességét névvel látja el: „fluens” és „fluxió”, s ezzel az új kalkulus megszületett. Többé nem szükséges a terület-képhez ragaszkodni, aminek a segítségével a *De analysi*-ben bizonyított, a nyert új mennyiségek egészen általánosak, s definiálási módjuk biztosítja, hogy — legalábbis elvben — egyik a másikból mindig számítható.

Az új módszert nagyon részletesen és logikusan ismertető *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* csak 1736-ban jelent meg nyomtatásban, jöllehet már 1671-ben készen volt, s barátai tudtak róla.

Egy 1692-ből származó feljegyzés mutatja, hogy NEWTON eljárása közismert volt Angliában, de nem közkedvelt. „A kitűnő Mr. NEWTON — írja a névtelen jegyzetkészítő — a fluxiók tanát két proposícióra redukálta: 1. megtalálni bármely fluens mennyiségeket tartalmazó adott egyenlet fluxióit és 2. a megfordítottja. Fluens mennyiségek alatt meghatározatlan mennyiségeket (indeterminate quantities) ért, azaz olyanokat, amelyek egy görbe (curve) mozgás (local motion) általi előállításában folytonosan nőnek vagy csökkennek (perpetually increase or decrease), fluxió alatt pedig a növekvésüknek vagy csökkenésüknek a sebességét (celerity) érti.

Jöllehet a fluens mennyiségek és fluxióik (flowing quantities & their fluxion[s]) első látásra nehezen felfoghatónak tűnnek (új dolgok felfogása mindig jelent bizonyos nehézséget), mégis ő úgy véli, hogy a fogalmuk (Notion of them) csakhamar könnyebb lesz, mint a momentumok vagy végtelen kis részeké, vagy végtelen kicsi differenciáké; mivel az alakzatoknak és mennyiségeknek folytonos mozgás (continued motion) által való előállítása sokkal természetesebb és könnyebben felfogható, és ennek a módszernek a sémái sokkal egyszerűbbek, mint a részekéi...

Minden görbe vagy bármely más fluens mennyiség abszcisszáját egyenletesen növekvőnek tekinti, és fluxióját egynek veszi; a többi fluens mennyiségek fluxióit maguk a mennyiségek felé írt ponttal jelzi következőképp: Tegyük fel, hogy v, y, x, z a fluens mennyiségek, akkor megfelelő fluxióik $\dot{v}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{z}$ -al jelölendők. És mivel ezek a fluxiók is meghatározatlan mennyiségek (indeterminate quantities) és folyamatos változással (perpetual mutation) nőnek vagy csökkennek, azokat a sebességeket, amelyekkel nőnek vagy csökkennek, ezek fluxióinak tekinti...”⁷⁵

Ez a mennyiségfogalom az új a newtoni kalkulusban. A módszer, ahogy fluensek között fennálló egyenleteknek a fluxióját meghatározza — az érintőszerkesztés módszere — 1670 körül már nem új, de nem is olyan régi és magától értetődő, amilyennek a matematikátörténészek szeretnék beállítani. A *Levelezés*-ből jól kitűnik, mennyire izgató kérdés a fiatal NEWTON kortársainak az érintőszerkesztés. Az a megoldás, amit NEWTON ad, egy messzeágazó nemzetközi fejlődés csúcsa.

⁷⁵ Corr. III, 394, Newton's method of fluxions, 17 September 1692, 222–223.

Az olasz és a francia iskola eredményeit ötvöző MICHEL ANGELO RICCI tartja talán kezében a módszer kulcsát. Mikor magas egyházi funkciói miatt le kell mondania a matematikáról, RENÉ FRANCOIS WALTHER DE SLUSE, liège-i kanonok veszi át örökségét, és talál „váratlanul” egy módszert az érintő egyetlen aránnyal való kifejezésére. S ennek a segítségével — írja 1671 decemberében OLDENBURGNak — röviden és igen könnyen kapja meg ugyanazt az eredményt, amit régen nagy kerülőutakkal nyert. Ha „Isten életet és időt ad”, reméli, hogy rövidesen elküldheti a megoldást. „De ami a jövőt illeti, Isten térdein nyugszik az; én még pyrrhoszi módra semmit sem szögezsek le.”⁷⁶

1672-ben közli SLUSE „rövid és könnyű” módszerét a *Philosophical Transactions*-ban a geometriai görbékhez való érintő szerkesztésére. A következő évben módszert közöl mindenféle görbéhez való érintőszerkesztésre.

Az ő módszere éppúgy nem vált közkedvelté, mint a NEWTONÉ.

És mint a JAMES GREGORYÉ, aki SLUSE geometriai görbékhez való érintőmódszeréről megírja COLLINSnak, hogy az semmi egyéb, mint amit ő, GREGORY „FERMAT-módszernek” nevez, s ami voltaképpen az a módszer, amit NEWTON használ a *De analysi*-ban.

A kortársak se rendelkeztek sokkal biztosabb elképzelésekkel a kalkulus születéséről, mint mi.

Még COLLINS sem, akinek a kezében az erre vonatkozó levelezés jórésze összefut, s akivel NEWTON is szabadon közli felfedezéseit. Legalábbis ami az eredményeket illeti. A módszer tekintetében tartózkodóbb.

JAMES GREGORY sem ismerte NEWTON „Univerzális módszerét”, aminek a segítségével a legkülönbözőbb geometriai és mechanikai görbék problémái: érintőszerkesztés, ívhosszmeghatározás, görbék alatti terület meghatározása, adott érintőirányokhoz görbeszerkesztés stb. megoldhatók. De sejtette, hogy NEWTON módszere, éppúgy mint az övé, „tetszőleges” egyenletnek végtelen sorbafejtéséből áll. „Nagyon szeretném megismerni Mr. NEWTON módszerét, amellyel kéttagú egyenleteket végtelen-sorrá alakít... Én bármely egyenletet végtelen-sorrá tudok alakítani... Van egy módszerem, amivel a geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen-sorba tudok átvinni”, s közöl COLLINSSal számos fontos példát.⁷⁷

GREGORY példái mutatják: körülbelül ugyanott tart, ahol NEWTON a *De analysi*-ben. Tudja, hogyan kell hatványokból összetett, többtagú kifejezéseken könnyen elvégezni azokat a műveleteket, amik érintőszerkesztéshez, maximum-minimum meghatározáshoz, ívhosszszámításhoz, területszámításhoz, érintőből való görbeszerkesztéshez és kvadraturához szükségesek. Másrészt tudja azt, hogyan kell egy „tetszőleges” görbét megadó összefüggést végtelen hatványsorban kifejezni.

Harmadszor: tudja, hogy — a kor legnagyobb matematikusa Dr. BARROW, akinek a műveit tanulmányozni, módszereit követni kell. Így pl. teljesen a BARROW klasszikus geometriai modorában, a *Lectiones geometricae* egy területmeghatározásra vonatkozó problémájának a megfordításán töri a fejét.⁷⁸ „Ez a probléma

⁷⁶ Corr. I, 27, Sluse to Oldenburg 17 December 1671, 71.

⁷⁷ Corr. I, 20, Gregory to Collins 23 November 1670, 46–47.

⁷⁸ Corr. I, 18, Gregory to Collins 5 September 1670, 41–42, 4. jegyz.: hogyan kell egy *KL* görbe alatti *AKLD* terület segítségével meghatározni egy *ANMB* görbét úgy, hogy a görbe érintője bizonyos előre megadott feltételeknek tegyen eleget. Mai nyelven keresendő az $y^2[1+(dy/dx)^2] = X$ differenciálegyenlet megoldása, ahol X az x adott függvénye.

— írja COLLINSnak 1670-ben — (ha megoldható) úgy képzelem, hogy túlvinné a geometriát jelen állapotán; de oly sok nehézséget látok benne, hogy én magam reménytelenül állok vele szemben, s ezért szerényen kérdek, nem tudná-e másvalaki megoldani. Szeretném látni Mr. NEWTONnak azt a munkáját, amelyik minden görbére, általánosan alkalmazható. Valóban azt hiszem, hogy Mr. BARROW XIII-ik felolvasása annyira tökéletesítette az analitikát (analytics), hogy kevés adható általánosságban hozzá.”⁷⁹

BARROW felveszi a kesztyűt; GREGORY „szerénységét” se kell egészen komolyan venni, s mind a ketten adnak a problémára egy-egy klasszikus geometriai stílusban tartott, nehéz megoldást.

A jövő fejlődés szempontjából épp az ilyesféle fordított érintőfeladatok és a terület változásából a görbe menetére vonatkozó kérdések a legfontosabbak. De nem a BARROW nyomán.

A BARROW-féle geometriai módszer ebben a tekintetben különösen nehézkes, a végtelen sorokba való fejtést még szülőházájában, Angliában sem nagyon értik.

Kétségkívül COLLINS az egyik legjobban tájékozott matematikus a kialakulóban levő sorelmélet és infinitézimális számítás területén. NEWTON munkáját is ő ismeri talán legjobban: „...Dr. BARROW révén sikerült azóta pár új sort szerezni NEWTON általános módszeréből, s vele való megbeszélésből tudom, hogy azok bármely alakzat (figure) adott tulajdonságaiból analitikusan (ti. algebrai úton) származtathatók, és hogy minden figurára sok sor alkalmazható, és hogy egyaránt képes kvadrálni azokat a görbéket, amelyeket DESCARTES geometriaiaknak tart, és azokat, amelyeket mechanikusaknak, ezért ezzel a módszerrel minden olyan figurának, amelyek közös tulajdonsággal bírnak, a görbe vonalai kiegyenesíthetők, érintőjük és súlypontjuk meghatározható, forgástestjük is és annak második szegmentuma mérhető és minden görbénél megadható a görbe vonal egy ívhosszához tartozó ordináta és megfordítva.”⁸⁰

Ekkor COLLINSnak már birtokában volt a *De analysi*, s a *Levelezés* kiadói szerint épp ezt beszélte volna meg BARROWval.⁸¹

NEWTON új módszeréről mindenki a legnagyobb elismeréssel nyilatkozik, ő maga mégis a *Principiá*-ban, amint azt minden tudománytörténész illőnek tartja szemére vetni, nem a saját fluxióos módszerét, hanem az „elavult” geometriai módszereket alkalmazza.

Valóban egyedülálló szituáció. Felfedezi a „természet” leírására szolgáló kitűnő módszert, s amikor a „természet” addig páratlan tökéletességű matematikai leírását adja, nem alkalmazza ezt a módszert.

Azonban ő maga és kortársai nem érezték ezt az „anakronizmust”. Sőt: egyik legnagyobb angol matematikus — ha ugyan nem a legnagyobb — JAMES GREGORY zavartalanul alkalmazza egymás mellett a „haladó” sorelméleti matematikáját, s az „elavult” BARROW-féle geometriai módszereket. EDMUND HALLEY, aki szintén nem mindennapi matematikai tehetség volt, kizárólag az „elavult” módszereket alkalmazza, s amikor NEWTON nagy és tisztelt barátjának, LOCKENak a *Principia* lényegét meg akarja magyarázni, nem a fluxióos módszert, hanem az „elavult” geometriai módszert alkalmazza, ugyanazt, amit a *Principiá*-ban.

⁷⁹ Uo. 41.

⁸⁰ Corr. I, 22, Collins to Gregory 24 December 1670, 54.

⁸¹ Corr. I, 59, 14. jegyz.

S ugyanakkor ő is, kortársai is nagyon nagyra becsülték a fluxiók módszert, egyébként nem vívtak volna késhegyig menő harcot a leibnizianusokkal a prioritásért.

Nem látunk *mi* kiengesztelhetetlen ellentétet ott, ahol a korabeli Anglia és maga NEWTON semmi ellentétet nem látott? A „haladó” és „elavult” megkülönböztetését kérjük számon egy olyan koron, amelyik számára ennek a megkülönböztetésnek semmi értelme sem lehetett?

HUYGENS végig az „elavult” matematikai módszerekkel dolgozva lett kora legnagyobb matematikusa, JAMES GREORY nem szűnt meg BARROWOT csodálni, BARROW nem szűnt meg EUKLIDÉSZT és APOLLÓNIOST csodálni, DAVID GREGORY, aki egész fiatalon kerül az öreg NEWTON mellé, ezt az „elavult” módszert tanulja meg és viszi tökélyre, ebben dolgozik ROGER COTES, a *Principia* második kiadásának készítője...

S amikor JOHANN BERNOULLI meggyanúsította NEWTONT, hogy a *Principia* egy hibáját saját fluxiók elméletének hibája miatt követte el, az öreg NEWTON fölényesen utasítja vissza az ifjú óriást: a hiba közönséges számolási hiba, a tétel bizonyításának semmi köze a fluxiók számításához, s rögtön megadja a helyes bizonyítást — „elavult” geometriai módszerekkel.⁸²

Láttuk, hogy már egy egészen korai NEWTON-kéziratban fel lehet ismerni a fluxiók elmélet csiráit.

Egy még korábbi, valószínűleg még 1664-ből származó kézirat viszont a „rég” geometriához csatlakozva vezet a *De analysi...* „új” analitikája felé.

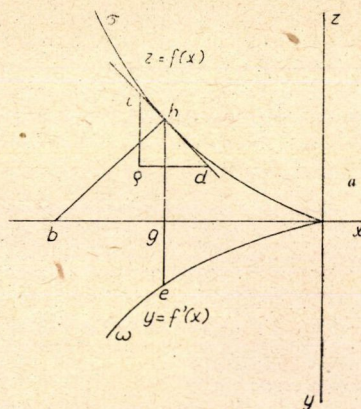
A kézirat a cambridge-i egyetemi könyvtárban őrzött ún. *Commonplace Book*-ból származik, már BREWSTER beszámolt róla, SCHOOTENBÓL és WALLISBÓL készített jegyzetek között helyezkedik el. Címe: „Kvadrálható görbe vonalak kvadrálására szolgáló módszer.”⁸³

A következőt állítja: Legyen adva egy σha görbe. Szerkesszünk egy másik $ae\omega$ görbét úgy, hogy minden ge ordinátája az előbbi görbe érintőinek $\frac{iq}{qd}$ gradienseivel legyen arányos. Akkor az ae görbe alatti aeg terület a ha görbe megfelelő gh ordinátájával lesz arányos.

Vagy modern nyelven elmondva: Ha adva van egy $z=f(x)$ görbe és a hozzátartozó $y=f'(x)=\frac{dz}{dx}$ derivált görbe, akkor $\int f'(x)dx=z$.

A bizonyítás egyszerű: Az $ae\omega$ alatti görbét beosztja az $\frac{iq}{qd}$ gradiensekhez tartozó téglalapokra,

a beosztás számát végtelenül növeli, s közben — impliciten — felhasználja az iqd háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy oldalainak aránya a háromszög bármelyik való kisebbitésében sem változik, mert a hb normális által megadott hgb háromszögből (egymásra merőleges oldalak) számítható.



13. ábra

⁸² HALL, A. R.: „Correcting the Principia;”, *Osiris*, 13, 291—326, 1958.

⁸³ Corr. II, 190, A manuscript by Newton? 1644, 144—167.

És DESCARTES módszerei jobbak, pontosabbak, matematikusabbak, mint előtte és két évszázadig utána bármi. DESCARTES olyan tökéletes, mint ARKHIMÉDÉSZ és EUKLIDÉSZ. Egyetlen dolog hiányzik DESCARTESBÓL: a folytonos változás, a mechanikus mozgás matematikai elismerése. Nem a felismerése. DESCARTES felismeri, s éppen ezért tiltja a „mechanikus” görbéket. Felismeri — és eltiltja, miután ő maga ad kezelhetőségükre néhány ragyogó példát.

NEWTON, JAMES GREGORY és LEIBNIZ nem az infinitézimális számítást teremtik meg, hanem bemerészkednek a tiltott területre a fizika, a matematika és a metafizika nevében.

Ezért lesz háromféle infinitézimális kalkulus: egy fizikai, egy matematikai és egy metafizikai.

Ez a prioritásvita „stílustörténeti” háttére: ha feldobom, differenciál, ha leesik, fluxió, de voltaképpen végtelen-sorbafejtés.

És ha nagyon-nagyon szigorú akar lenni az ember, olyan, mint a hollandiai francia kóborlovag, akkor az egész tojásbűvészetből nem marad semmi, csupán egy egyenletrendszer determinánsának a zérussal való egyenlővé tévése... Nem egy modern algebrában járatos differenciálgeométer fedezte fel, hogy a differenciálhányados voltaképpen egy sajátos „leképezés”? — Nem. Monsieur DESCARTES.

Nagy Mesterét — az egész XVII. század nagy mesterét — követte itt is ISAAC NEWTON. — Egyben nem követi: a tényleges számolással szembeni ellenszenvben. NEWTON szabadon dolgozik a számokkal és a számokat jelentő betűkkel.

Ugyanannak a *Commonplace book*-nak egy következő helyén, ahonnan az előbbi kézirat származik, egy valószínűleg 1664 végéről vagy 1665 elejéről származó bejegyzésben többek közt megtalálható a *De analysi* fő, kezdő proposíciója:

„Legyen $ab = x$ és $y = be$, akkor: ... Prop.: 3 ... Ha $a^m x^m = b^n y^n$, vagy $\frac{ax^{\frac{m}{n}}}{b} = y$, akkor $\frac{nxy}{n+m} = \frac{n \times a \times x^{\frac{m+n}{n}}}{nb+mb} = abef$, azaz az aef vonal alatt levő terület ...”

A bizonyítás teljesen a CARTESIUS—HUDDÉ-féle módszerekkel történik, mint a fenti példában. A nagy újság a törtkitevő megjelenése.

Igen fontos a következő proposíció, ami a kvadratura tagonkénti elvégzésének a lehetőségét mondja ki:

„Prop: 4. Ha $y = ax^m + bx^n$, akkor $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} = abcf...$ ”⁸⁶

Egyre inkább haladunk a módszer számolási szabályainak a rögzítése és egyezésítése, algoritmizálása felé.

A következő proposíciók (Prop. 5.—Prop. 8.) a binomiális tételt mondják ki

$(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ -re, a binomiális koefficiensek megadásával.

NEWTON a LEIBNIZHOZ intézett híres *Második levelében* mondotta volt el a binomiális sor felfedezésének a részleteit, s azóta számtalanszor idézték, hogyan jött rá WALLIS eredményeinek az interkalálásával a binomiális tételre: ...Sub initio meorum Mathematicorum ubi incideram in opera Celeberrimi Wallisij nostri...⁸⁷

⁸⁶ Corr. II, 191, A manuscript by Newton ?1665, 168.

A *Levelezés* kiadói szerint többek között a N° 191 alatt közölt⁸⁸ kézirat lehetett az, amire NEWTON a LEIBNIZHOZ írt *Epistola Posterior*-ban mint a binomiális tétel felfedezésére hivatkozik.⁸⁹ Ugyanott röviden megadják, milyen interkalációs táblákat adott meg NEWTON az $(1-x^2)^n$ egész n kitevőjű görbék alatti területek formuláinak a segítségével az $(1-x^2)^{\frac{m}{n}}$ törtkitevőjű görbék alatti területekre.

A binomiális tételhez természetesen nem elegendő a WALLIS-féle kvadraturák „induktív” általánosítása, hanem elengedhetetlen az ugyanezen kéziratban közölt 4. és 3. propozíciók, valamint a fundamentális tétel alkalmazása is.

A binomiális tétel komplex és sok forrásból táplálkozó matematikai fejlődés eredménye: a cartesiánus geometriának legalább annyi része van benne, mint „Celeberrimi Wallisij nostri”... S még valaminek. NEWTON így fejezi be az $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ sorbafejtésének az ismertetését: „Ennek a két propozíciónak az igazsága így is bizonyítható. Ha $(a+b)^{-\frac{1}{1}} = \frac{1}{a+b}$, akkor 1-et elosztom $(a+b)$ -vel, mint a tizedestörteknél és az $\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \&c$ hányadost kapom, amint mindkét oldalt $(a+b)$ -vel szorozva kitűnik. Ugyanígy (a^2+b) -ből úgy vonok gyököt, mintha tizedesszámok lennének, & $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} \&c$ -ra jutok, ami szintén igazolható a két oldal négyzetre emelésével.”⁹⁰

Nyilvánvaló, hogy ugyanazzal a számolási készséggel, ugyanazzal az algoritmusokba vetett bizalommal állunk itt szemben, amit CANTOR a MERCATOR nagy újításának tartott.

Amit megtalálunk OUGHTREDBEN, COLLINSBAN, GREGORYBAN, MERCATORBAN; az angol matematikusok nagy részében. És ami nincs meg a cartesiánusokban. NEWTONBAN valóságos számolási dühhé fokozódik a hatvanas években. Mindent ki akar számolni: azt a hatást, ami a Föld egyenlítőjén a Föld forgása következtében emeli a testeket, azt a *conatus*, amivel a Föld a Holdat mozgatja maga körül és a Földet a Nap maga körül, az eső test pályáját, ha az parabolikus, az inga „mozgását”. — GALILEIBŐL a számpéldákat veszi ki, és végigszámolja, amit az csak elgondolt... Meghagyja az itáliai mértékegységeket, majd áttér angolra — nem a mértékegység, hanem a szám fontos, a tetszőleges pontosságig kiszámítható tizedestört...⁹¹

A betűkben kijelölt műveletek éppúgy elvégezhetők, mintha közönséges számok lennének, közönséges véges vagy végtelen tizedestörtek. És ha így tekintjük őket, akkor megszűnik a descartesi tilalom a „mechanikus” problémák iránt. Éppúgy tetszőleges pontosságig elvégezhetők lesznek azok is, mint pl. egy osztás, amelyik végtelen tizedestörtre vezet.

A „szám” nem egész és nem racionális tört, a „szám”: végtelen tizedestört. A XVII. század közepi Angliában a „levegőben van” ez a nagy fontosságú tétel. Szá-

⁸⁷ Corr. II, 111.

⁸⁸ Corr. II, 191, 168–171.

⁸⁹ Corr. II, 191, 170, l. jegyz; 188, 150, 10. jegyz.

⁹⁰ Corr. II, 170.

⁹¹ Corr. III. 347, A manuscript by Newton ?1665 or 1666, 46–54.

moló mesterek és kereskedők, pénzváltók és hajóskapitányok egyaránt használják a tizedestörteket, a számolás könnyű velük, elterjed, bizalmat ébreszt maga iránt, minden kiszámíthatóvá válik: nyereség, halálozás, szaporodás, kamat.

Minden kiszámítható: a végtelen tizedestörtek varázsának a formulák sem állhatnak ellen, a végtelen tizedestörtek mintájára gyerekjáték lesz egy csak kijelölt osztást végtelen sorba törni. Egyszerre, mintegy varázsűtésre születnek NEWTON, MERCATOR, JAMES GREGORY, LORD BROUNCKER, JOHN COLLINS kezén a 60-as évek végén, 70-es évek elején a szebbnél-szebb sorbafejtések: körterületre és körívre megadott sorok, a hiperbola alatti területre megadott sorok, a logaritmikus sor, a sinus sor, a cosinus sor és így tovább...

És a sorokkal megadott összefüggések azonnal elvesztik titokzatos „mechanikus” tulajdonságaikat, a sorokkal megadott görbék azonnal kvadrálhatók, rektifikálhatók, tanulmányozhatók érintő-tulajdonságaik, szembetűnnek olyan hasonlatosságok, amelyekre a „mechanikus” definícióban gyanakodni se lehetett.

Érthető, ha JOHN COLLINS olyan szenvedélyes végtelen sor gyűjtővé, és JAMES GREGORY olyan szenvedélyes végtelen sor előállítóvá válik.

A végtelen sor, speciálisan a binomiális tétel, ad lehetőséget az érintőszerkesztés és kvadratura minden „geometriai” és „mechanikus” megkülönböztetéstől független megalapozására. Ezt végzi el NEWTON a 60-as és 70-es évek fordulóján, ezzel nyit utat egy új világba: a „mechanikus” görbék vizsgálatának a tiltott paradicsomába.

Érthető, ha öreg korában a binomiális tételt vágyott a sírkövére vésetni.

A végtelen sorban való kifejezés adta meg a lehetőségét annak, hogy a „mechanikusan”, mozgás által létrehozott görbékkel ugyanúgy bányon, mint a „geometriai” görbékkel. De ehhez a területet folytonos folyás útján keletkezőnek kell tekinteni, s a folytonos folyást reprezentáló kis o momentummal megnövelt mennyiségeket sorbafejteni.

A 60-as évek végén, 70-es évek elején a sorok látszanak a királyi útnak a matematikához. S talán csak JAMES GREGORYban és ISAAC NEWTONban, a sorelmélet két nagy elindítójában ébred fel a kétely: milyen pontosan írja le, közelíti meg egy sor a szavakban és geometriai jelekkel vagy mechanikai módon definiált összefüggést?

NEWTON egy 1670 elejéről származó levelében egy speciális sorbafejtési probléma során kísérletet tesz a megközelítés következtében előálló hiba megbecsülésére. A becslés nem általános érvényű, azonban arra mutat, hogy NEWTON milyen nagy súlyt helyez az „igazság”-hoz leginkább „konvergáló” sor megtalálására.

Ezek az ő szavai: a probléma kétféle megoldását adva, a második sorbafejtés után megjegyzi: „A haladványban minden második tag hiányzik, és így sokkal inkább konvergál az igazsághoz, mint az előbbi.” Majd újra, a hiperbola alatti területre egy új sort előállítva, amely sorban „minden második tag hiányzik, és x felével kisebb mint egyébként lenne, ami a sort konvergálóbbá teszi az igazság felé”. (Wich makes ye series more converging toward ye truth.)⁹² Könnyű ma megállapítani, hogy a sorok nem az „igazság”, hanem a limesük felé konvergálnak. Egyébként az, hogy becslést végez, mutatja: NEWTON is ilyesmire gondolhatott...

Mégis a határérték matematikai megfogalmazása előtt a sorelmélet bizonytalan marad, s nem alkalmas arra, hogy az infinitézimális számítást — mint majd a XIX.

⁹² Corr. I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

század teszi — reá alapozzák. A sorelméletnek éppúgy csak a prehistóriája kezdődik a XVII. században, mint a „korpuszkuláris filozófiának”. Mind a kettő jellegzetesen XIX. századi eredmény, egzakt sorelmélet és statisztikus mechanika.

De az infinitézimális kalkulus a maga módján a XVII. században sem primitívebb, mint a XIX. vagy XX. században. Mint ahogy EUKLIDÉSZ vagy ARKHIMÉDÉSZ se lesz „primitív” soha. A sorokról a XIX. század sokkal többet tud, mint a XVII. század. Az infinitézimális számítás alapfogalmairól csak mást. Megváltozik a matematikai kifejezőmód, a stílus, de a lényeg: az integrálás- és differenciálásnak, mint inverz műveleteknek a felfogása, a „folytonosság” és a „szakaszonkénti monotonia” biztosítása megvan a XVII. században is.

Nem naívság folytonosságról beszélni a függvény és a határérték fogalma nélkül? Hogy lehet a határérték nélkül definiálni a folytonosságot? Nos, a differenciálhatósággal. A differenciálható függvények feltétlenül folytonosak. S hogyan lehet biztosítani, hogy csak ilyen „függvények” forduljanak elő a matematikában? A fluenseket kell matematikai mennyiségeknek tekinteni, amelyekhez definíció-szerűen hozzátartoznak fluxióik, az „idő szerint vett parciális differenciálhányadosaik”.

S így eltűnik a nagy ellentét a klasszikus geometriai és modern analitikus módszer között. A fluens-fluxió definíciója biztosítja, hogy akár a fluxiók módszerrel, akár a geometriai módszerekkel nyert eredmények — legalábbis elvben — mindig kiszámíthatók, úgynevezett „mechanikus” problémák esetében is. Legfeljebb a kiszámítás nem lesz egészen pontos. Meg kell elégedni bizonyos pontossági határral, mint a végtelen tizedestörtre vezető számítások esetében.

„Ellentét” a *Principia* elején bevezetett fluens-fluxió definíciók és a későbbiekben alkalmazott „elavult klasszikus geometriai” módszerek között? Ezt az „ellentétet” a XIX. század érzi, nem a XVII. NEWTON nyugodtan alkalmazza a korabeli Anglia számára megszokott és így egyszerűbb módszereket, annál is inkább, mert a *Principiá*-ban elsősorban kúpszeletekről van szó, ahol ezek a módszerek egyébként is helyénvalóak. S a *Principia* bevezetésében nemcsak az új fluxiók módszerének a körvonalait fejt ki, hanem röviden utal arra is, miként alkalmazhatók az új módszer lényegét jelentő határátmenet-eljárások a klasszikus geometria formuláiban is. Így a *Principia* klasszikus geometriai megfogalmazásai át vannak itatva az új infinitézimális számítás fogalmaival, s mi sem lesz könnyebb, mint a következő században átírni őket a kalkulus megfelelő analitikus formanyelvére. A *Principia* nem az infinitézimális módszereket kerüli, hanem a cartesianus algebrai jelölési módot. Ez annál feltűnőbb, mert NEWTON a fluxiók módszer kialakításakor, mint láttuk, teljesen szabadon bánt az algebrai jelölésmóddal. Miért nem alkalmazta hát a *Principiá*-ban?

A kérdés ilyen formában feltéve semmivel sem lesz könnyebben megválaszolható, mint a megszokott alakjában. Ha választ akarunk kapni a kérdésre, először is pontosan meg kell vizsgálnunk a *Levezetés* alapján a *Principia* keletkezési körülményeit. Ezt kísérli meg egy következő dolgozatunk.