

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

AZ AUTOMATÁK ABSZTRAKT ELMÉLETE (II)*

Írta: V. M. GLUSKOV

3. §. Az események előállítása a véges automatákban.

Az eseményeken értelmezett műveletek

Az előző paragrafusban az eseményeknek a kimenő jelekkel való előállítását vizsgáltuk. A Moore-féle automaták esetében (amelyeknél a kimenő jel egybeesik az állapotnak a jelével) azonban sokkal kényelmesebbnek mutatkozik néhány más eljárás az események előállítására, elsősorban az eseményeknek az automaták állapothalmazaival történő előállítása.

Legyen A tetszőleges automata, és p tetszőleges nem üres szó A bemenő ábécéjéből. A továbbiakban azt mondjuk, hogy az A automata a p bemenő szó hatására valamilyen a állapotból a b állapotba kerül át, ha b annak az állapot szónak utolsó betűje, amelyet az a állapot rendel hozzá a p bemenő szóhoz (lásd 1. §). Azt az állapotot, amelybe az automata az a állapotból a p bemenő jel hatására átkerül, ap -vel fogjuk jelölni. Ha $p = x_1 x_2 \dots x_k$, akkor az $a_k = ap$ állapotot az $a_1 = \delta(a, x_1)$, $a_2 = \delta(a_1, x_2)$, ..., $a_k = \delta(a_{k-1}, x_k)$ állapotok segítségével lehet definiálni, ahol $\delta(a, x)$ az A automata átmeneti függvénye. Az e üres szó esetén természetesen az automata tetszőleges a állapotból ugyanabba az a állapotba kerül.

Ebben és a következő paragrafusban kizárólag csak iniciális automatákat tekintünk, azaz rögzített kezdő állapottal rendelkező automatákat. Megállapodás-szerűen azt mondjuk, hogy az iniciális automata a p bemenő szó hatására az $a_0 p$ állapotba kerül át, ahol a_0 a tekintett automata kezdő állapotát jelöli.

12. DEFINÍCIÓ: Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S esemény az A iniciális automatában elő van állítva állapotainak M halmaza által, ha az A automata bemenő ábécéje azonos $\mathfrak{X}$ -szel, az S esemény pedig azokból és csak azokból a szavakból áll, amelyek az automatát a kezdő állapotból azokba az állapotokba viszik át, amelyek az M halmazhoz tartoznak.

Ez a definíció egybeesik az események előállításának JU. T. MEDVEGYEV [17] dolgozatában levő definíciójával. A Moore-féle automaták esetére ez a definíció ténylegesen az események előállításának ugyanahhoz a fogalmához vezet, mint a 11. definíció.

Legyen ugyanis az S esemény valamilyen A Moore-féle iniciális automatában az y kimenő jel által előállítva. Jelöljük M -mel az A automata összes olyan állapotának a halmazát, amelyek az y jellel vannak megjelölve. Ha $p = x_1 x_2 \dots x_k$ tetszőleges szó az automata bemenő ábécéjében, $a_1 a_2 \dots a_k$ állapot-szó és $y_1 y_2 \dots y_k$ olyan kimenő szó, amelyet az A automata a p szó révén a kezdő állapothoz rendel hozzá, akkor

* Абстрактная теория автоматов, Успехи Математических Наук, 16 (1961) 1–62. A fordítás első része, mely a cikk 1–2. §-át és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza, a III. Oszt. Közl. XIII. kötet 3. számában (287–309. old.) jelent meg.

az automata $\mu(a)$ jel-függvénye definíciója szerint nyilván $\mu(a_k) = y_k$ érvényes. Következésképpen egy p nem üres bemenő szó akkor és csak akkor tartozik az S eseményhez, ha az automatát a kezdő állapotból az M halmazban levő állapotok egyikébe viszi át. Ha az M halmaz tartalmazza az automatának a kezdő állapotát, akkor az általa előállított S' eseményben benne van az üres szó is, amely nyilván nem lehet benne az S eseményben. Ilyen módon az S és S' események, eltekintve az üres szótól, egybeesnek.

Fordítva, az S esemény legyen előállítva az A kezdő automatában az állapotok M halmaza segítségével. Az A automata jel-függvényét az M halmaz összes állapotain y_1 -nek, az összes többi állapoton pedig y_2 -nek véve, tekintsük az A automatában az y_1 kimenő jel által előállított S' eseményt. Miként korábban is, azt kapjuk, hogy a p nem üres bemenő szó akkor és csak akkor tartozik az S' eseményhez, ha az S eseményhez is hozzátartozik. Ha az M halmazban benne van a kezdő állapot, akkor az S esemény tartalmazza az üres szót, amely nem lehet benne, magától értetődően, az S' eseményben. Ilyen módon az S és S' események, eltekintve az üres szótól, egybeesnek.

Ezzel bebizonyítottuk a következő

13. TÉTEL: *Ha az S esemény az A Moore-féle iniciális automatában az y kimenő jel által elő van állítva, akkor ez az esemény, (esetleg az üres szóval kiegészítve) előállítható ugyanabban az automatában az összes olyan állapotnak a halmazával, amelyek az y kimenő jellel vannak megjelölve. Ha az S esemény az A iniciális automatában az állapotok M halmazával elő van állítva, és az A automata jel-függvényét úgy definiáljuk, hogy az az y értéket az M halmaz összes állapotain és csakis ezeken az állapotokon vegye fel, akkor olyan Moore-féle iniciális automatát kapunk, amelyben az S esemény az y kimenő jel által elő van állítva (eltekintve esetleg az üres szótól, ha az S -ben előfordul).*

A bebizonyított tétel lehetővé teszi azt, hogy az események előállítása vizsgálatánál csupán az állapotok halmazaira korlátozódjunk. Ekkor az automata kimeneti függvényei semmiféle szerepet nem játszanak. Ezzel kapcsolatban, ebben a paragrafusban „automata” elnevezésen kimenő jelek nélküli iniciális automatákat értünk, amelyek csak átmeneti függvényekkel vannak megadva.

A megelőző paragrafusban bebizonyítottuk, hogy a végtelen (speciálisan a szabad) automatákban tetszőleges események előállíthatók. A véges automaták esetére, amelyeket a jelen paragrafusban vizsgálunk, másképpen áll a dolog. Már egészen egyszerű halmazelméleti megfontolásokból is világos, hogy kell olyan eseményeknek létezniök, amelyek nem állíthatók elő véges automatákban.

Valóban, tetszőleges, rögzített, véges, nem üres $\mathfrak{X}$ ábécéhez a páronként nem izomorf és az állapotokra nézve véges $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéjű halmaza megszámlálható. Az ilyen automaták bármelyikében az eseményeknek csak véges halmaza állítható elő. Ezért az $\mathfrak{X}$ ábécéjű eseményeknek az a halmaza, amely véges automatákban előállítható, megszámlálható halmaz. Ugyanakkor az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes eseménynek a halmaza nyilvánvalóan kontinuum számosságú. Következésképpen léteznek olyan $\mathfrak{X}$ ábécéjű események, amelyek nem állíthatók elő véges automatákban, sőt kontinuum számosságú ilyen esemény létezik.

Elsőnek S. C. KLEENE [14] adott egy konstruktív példát olyan eseményre, amely semmiféle véges automatában sem állítható elő: tetszőleges nem üres ábécéjű

esemény, amely az összes olyan szóból áll, amelyeknek a hossza négyzetszám. Céljainkra hasznosabb más véges automatában elő nem állítható esemény példáját vizsgálni.

14. TÉTEL: Az $\mathcal{X} = (x, y)$ két betűből álló ábécében tekintsük azt az S eseményt, amely azokból a szavakból áll, amelyek egymással egyenlő számú x és y betűt tartalmaznak; ez semmiféle véges automatában sem állítható elő.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az a_0 kezdő állapotú A kezdő automatában az S esemény elő van állítva az M halmaz által. Tekintsük az $a_1 = a_0x$, $a_2 = a_1x$, ..., $a_n = a_{n-1}x$ eseményeket. Könnyű belátni, hogy tetszőleges $n = 1, 2, 3 \dots$ esetére ezek az állapotok különbözőek. Valóban, ellenkező esetben nyilván volna olyan p_n és $p_m \neq p_k$ szó, amelyeknek a hosszuk különböző (k , ill. m), nem tartalmazzák az y betűt, és olyanok, hogy az a_0p_k és a_0p_m állapotok egymással egybeesnek. Jelöljük q_k -val azt a k hosszúságú szót, amely csak az y betűből áll. Akkor az érvényben levő feltevésünk alapján az $a_0p_kq_k$ állapotnak benne kell lenni az M halmazban, az $a_0p_mq_k$ állapot pedig nem lehet ebben a halmazban. Másfelől az a_0p_k és a_0p_m állapotoknak az egybeesése alapján az $a_0p_kq_k$ és $a_0p_mq_k$ állapotoknak egymással egyenlőeknek kell lenniök. A kapott ellentmondás bizonyítja a tételt.

Az automaták absztrakt elméletében az egyik legfontosabb feladat nyelvek megadása olyan eseményeknek a leírása érdekében, amelyek előállíthatók ilyen vagy olyan speciális automaták osztályaiban. Az ilyen nyelvek első változatát a fentebb már idézett [14] dolgozatában S. C. KLEENE indítványozta. Ezt a nyelvet, amelyet mi a reguláris kifejezések nyelvének fogunk nevezni, később COPY, ELGOT és WRIGHT [15], valamint a jelen dolgozat szerzője tökéletesítették (lásd [9]).

Az olyan eseményeknek a leírására, amelyek véges automatákban előállíthatók, másik nyelvet JU. T. MEDVEGYEV [17] indítványozott. Az automaták bemenő ábécéinek a „kódolása”-val kapcsolatos speciális rendszereknek a felhasználásánál megadható a nyelvek egy harmadik lehetséges változata is, amely az úgynevezett speciális vagy korlátozott ítéletekre (a természetes számoknak a véges halmazaira) vonatkozó másodfokú ítélet-kalkulus nyelvének a felhasználásán alapul. Ezt a változatot egymástól valamennyire különböző módosításokban B. A. TRACHTENBROT [28] és J. R. BÜCHI [5] fejlesztette tovább.

Ebben a dolgozatban a reguláris kifejezések nyelvét fogjuk használni, amely algebraibb és ezzel egyidejűleg az alkalmazások céljaira megfelelőbb is. Ennek a nyelvnek az alapján a szerző [9] és [12] dolgozataiban fejtette ki az automaták szintézisének a gyakorlati módszereit. Mármost célunk a kérdést elméleti szempontból tekinteni.

A reguláris kifejezések nyelve három, az eseményeken végzett műveletet használ fel, amelyeket *diszjunkciónak*, *szorzásnak* és *iterációnak* nevezünk. E műveletek közül az első kettő kétváltozós művelet, a harmadik pedig egyváltozós.

Az összes bevezetett műveleteket egy és ugyanazon ábécéjű eseményeken értelmezzük. Szükség esetén azonban az ábécé kibővítése is szóba jöhet, minthogy kisebb ábécéjű eseményt nyilvánvalóan mindig beágyazhatunk tetszőleges nagyobb ábécébe.

13. DEFINÍCIÓ: Az S_1 és S_2 események $S_1 \cup S_2$ *diszjunkciójának* nevezzük ezeknek az eseményeknek a halmazelméleti egyesítését. Az S_1 és S_2 események $S_1 \cdot S_2$ *szorzatának* nevezzük azt az eseményt, amely az összes $p_1 \cdot p_2$ alakú szóból

áll, ahol $p_1 \in S_1, p_2 \in S_2$. Az S esemény $\{S\}$ iteráltjának nevezzük azt az eseményt, amely az üres szóból és az összes $p_1 p_2 \dots p_k$ alakú szóból áll, ahol $p_1, p_2, \dots, p_k$ az S esemény szavai, és $k = 1, 2, 3, \dots$

14. DEFINÍCIÓ: $\mathcal{X}$ ábécéjű események algebrájának nevezzük az $\mathcal{X}$ ábécéjű összes eseménynek a halmazát, amelyet a diszjunkció, szorzás és iteráció műveleteivel együtt tekintünk. Azt az eseményt, amely az $\mathcal{X}$ ábécéjű összes szóból áll (beleértve az üres szót is), *általános (vagy bizonyos) eseménynek* nevezzük; azt az eseményt pedig, amely a szavak üres halmazából áll, *lehetetlen eseménynek*. Végül azokat az eseményeket, amelyek közül bármelyik egyetlen $x \in \mathcal{X}$ egybetűs szóból áll, és a csak az e üres szóból álló eseményt is, $\mathcal{X}$ ábécéjű *elemi eseményeknek* nevezzük.

Végül bevezetjük a reguláris eseménynek a fogalmát, amely a véges automaták elmélete számára központi jelentőségű fogalom. Miként fentebb már megjegyeztük, ez a fogalom benne van abban a fogalomban, amelyet S. C. KLEENE [14] dolgozatában bevezetett, bár tőle formailag erősen különbözik.

15. DEFINÍCIÓ: *Reguláris eseménynek* nevezzük egy véges ábécéjű tetszőleges olyan eseményt, amelyet ilyen ábécéjű elemi eseményekből véges számú diszjunkció, szorzás és iteráció segítségével lehet kapni. A lehetetlen esemény ugyancsak reguláris esemény. Reguláris eseménynek az $\mathcal{X}$ ábécéjű eseményalgebra műveletei segítségével, az elemi eseményekből kiinduló tetszőleges előállítását eme esemény *reguláris kifejezésének* nevezzük. A lehetetlen eseménynek a jelölésére bevezetjük a $\emptyset$ speciális jelet, amely ennek az eseménynek a szimbolikus jele.

Egy és ugyanazon reguláris eseménynek sok különböző reguláris kifejezése lehet annak következtében, hogy az eseményalgebrában létezik egy sor olyan reláció, amelyek a reguláris események azonos átalakítását teszik lehetővé. Ezek olyan átalakítások, amelyek nem változtatják meg az ezekkel a kifejezésekkel előállított eseményeket.

Az eseményalgebrában érvényes azonos összefüggések rendszeréhez olyan összefüggések tartoznak, amelyek megállapítják a diszjunkció asszociativitását és kommutativitását, valamint a szorzás asszociativitását. Ugyancsak nem nehéz belátni, hogy érvényes a szorzás disztributivitása a diszjunkcióval kapcsolatban.

Az események algebrájában a különböző kifejezéseknek a leírásánál és speciálisan a reguláris kifejezésekénél meg kell állapodnunk az eseményalgebrai műveletek végrehajtásának természetes sorrendjében. Az eseményalgebra kifejezéseiben, egyébként hasonló feltételek mellett, elsőnek az iteráció művelete, aztán a szorzás és végül a diszjunkció művelete végzendő el. Minden eltérést ettől a természetes sorrendtől szokás szerint (gömbölyű) zárójelekkel fejezünk ki, amelyeket közönségeseknek fogunk nevezni, eltérőleg a hullámos (kapcsos) zárójelektől, amelyeket csak az iterációknak a jelölésére alkalmazunk, és amelyeket ezért iterációs zárójeleknek nevezzük.

Ugyancsak megjegyezzük, hogy a diszjunkciónak és a szorzásnak az asszociativitása következtében zárójelek igénybe vétele nélkül felírható tetszőleges véges sok eseménynek a diszjunkciója és szorzata. Az elemi (egyelemű) eseményeket meg egyezésszerűen azonosítjuk a bennük levő elemekkel. Mindig a $\emptyset$ jelet használjuk az üres szó jelölésére.

Felhasználva a bevezetett jelöléseket és rövidítéseket felírunk néhány összefüggést, amelyek az eseményalgebrában tetszőleges R és S eseményekre, valamint a $\emptyset$ lehetetlen eseményre vonatkozólag érvényesek:

- (1) $\{\{S\}\} = \{S\}$
- (2) $\{S\} = e \cup S \cdot \{S\}$
- (3) $S \cdot \{S\} = \{S\} \cdot S$
- (4) $\{\{S\}\{R\}\} = \{S \cup R\}$
- (5) $\{e\} = e$
- (6) $S \cdot e = e \cdot S = S$
- (7) $S \cdot \emptyset = \emptyset \cdot S = \emptyset$
- (8) $S \cup \emptyset = S$
- (9) $\{\emptyset\} = e$

Ezekhez az összefüggésekhez még a fentebb említett asszociativitási, kommutativitási és disztributivitási összefüggéseket hozzá kell venni. Érdekes az a probléma, hogy megtaláljuk az eseményalgebrában az összefüggéseknek egy olyan teljes rendszerét, amelynek az ábécéje egynél több betűből áll, azaz olyan rendszert, amely lehetővé teszi az eseményalgebrájában két tetszőleges kifejezés azonos egybeesésének a megállapítását. Később megmutatjuk, hogy algoritmikusan meg van oldva a reguláris kifejezések azonossága megállapításának a problémája.

Mindenekelőtt azt mutatjuk meg, hogy reguláris az összes olyan esemény, amely előállítható véges automatában, és megszerkesztjük azt az algoritmust, amely lehetővé teszi megtalálni a reguláris kifejezést az olyan esemény részére, amely tetszőleges véges iniciális automatában az automata állapotainak tetszőleges halmazával előállítható. A véges automatákban előállított eseményeknek a regularitásáról szóló állítást elsőnek S. C. KLEENE [14] bizonyította be, bár az általa használt módszerek gyakorlati szempontból nem hatékonyak. Gyakorlatilag alkalmas algoritmust az olyan események reguláris kifejezéseinek a megtalálására, amelyek véges automatákban előállíthatók (ezt a véges automaták analízise algoritmusának nevezzük), a jelen cikk szerzője indítványozott (lásd [10] és [12]). Most azonban nem ezt az algoritmust fogalmazzuk meg, hanem azt, amelyet McNAUGHTON és H. YAMADA [16] ajánlott. Bár ez az utóbbi algoritmus gyakorlati vonatkozásban kevésbé alkalmazható, a megalapozása sokkal egyszerűbben végezhető el, mint annak az algoritmusnak a megalapozása, amelyet a szerző javasolt. Megjegyezzük, hogy a [16] dolgozattól eltérőleg, amely csak két betűből álló bemenő ábécét használt fel, mi tetszőleges véges ábécé esetére szóló algoritmust fogunk szerkeszteni.

15. TÉTEL: *A véges automatákban előállított összes esemény reguláris. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi azt, hogy szerkesszünk az olyan esemény részére reguláris kifejezést, amely tetszőleges véges kezdő automatában az állapotainak tetszőleges halmaza által előállítható. (Itt az automata átmenetek és kimenetek táblázataival van megállapodásszerűen megadva.)*

BIZONYÍTÁS: Nyilván elegendő olyan algoritmust szerkeszteni, amely lehetővé teszi, hogy olyan eseménynek találjuk meg egy reguláris kifejezését, amely elő van

állítva tetszőleges véges kezdő automatában állapotoknak egy tetszőleges halmaza által. Ugyanis egy véges automata állapotainak halmaza által előállított esemény egybeesik azoknak az eseményeknek a diszjunkciójával, amelyek az ezt a halmazt alkotó különböző állapotokkal vannak előállítva. Tekintsünk most egy olyan A tetszőleges véges automatát, amelynek az állapotait az $1, 2, \dots, n$ egymásra következő természetes számokkal jelöltük meg. Legyen most i és j két tetszőleges állapot az előzőekből, továbbá $p = x_1 x_2 \dots x_k$ olyan bemenő szó, amely átviszi az A automatát az i állapotból a j állapotba. Azt mondjuk, hogy a p szó átviszi az automatát az i állapotból a $j = ip$ állapotba a közbeeső $ix_1, ix_1 x_2, \dots, ix_1 x_2 \dots x_{k-1}$ állapotokon keresztül.

Jelöljük S_{ij}^0 -val ($i, j = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots, n$) azt az eseményt, amely azokból és csak azokból a nem üres szavakból áll, amelyek az automatát az i állapotból átviszik a j állapotba, és amelyek az $1, 2, \dots, k$ állapotokon kívül nem használnak fel közbeeső események gyanánt semmiféle más állapotot. Speciálisan S_{ij}^0 -vel jelöljük azt az eseményt, amely közvetlenül átviszi az A automatát az i állapotból (mellőzve bármiféle közbeeső állapotokat) a j állapotba.

Az automata értelmezésének alapján az S_{ij}^0 események közül mindegyik tulajdonképpen vagy a lehetetlen esemény, vagy a bemenő ábécének egy betűje, vagy pedig ezeknek a betűknek (az A automata végessége miatt véges alakú) diszjunkciója. Ilyen módon bármelyik S_{ij}^0 esemény reguláris, és ugyanakkor az összes ilyen eseményhez tartozó reguláris kifejezések közvetlenül megtalálhatók az A automatának az átmeneti függvényei révén.

Tegyük fel, hogy már az összes $S_{ij}^0, S_{ij}^1, \dots, S_{ij}^{k-1}$ eseménynek a regularitását, valamint az őket előállító reguláris kifejezések megszerkesztésére szolgáló algoritmusnak a létezését is bebizonyítottuk. Könnyű látni azt, hogy tetszőleges i és j állapotokra nézve érvényes a következő rekurzív formula:

$$(10) \quad S_{ij}^k = S_{ij}^{k-1} \cup S_{ik}^{k-1} \cdot \{S_{kk}^{k-1}\} \cdot S_{kj}^{k-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Valóban a (10) formula alapján közvetlenül azt következtethetjük, hogy az az R esemény, amely a jobboldalból áll, csak azokat a nem üres szavakat tartalmazza, amelyek az automatát átviszik az i állapotból a j állapotba, miközben közbeeső állapot gyanánt csak az $1, 2, \dots, k$ állapotokat használják fel. Ilyen módon $R \subseteq S_{ij}^k$. Fordítva, legyen p tetszőleges olyan nem üres bemenő szó, amely az A automatát átviszi az i állapotból a j állapotba, és amely közbeeső állapotok gyanánt csak az $1, 2, \dots, k$ állapotokat használja fel, más szóval, tetszőleges szó az S_{ij}^k eseményből. Hogyha hiányzik a közbeeső állapotok közül a k állapot, akkor a p szó nyilván az S_{ij}^{k-1} eseményhez tartozik, következésképpen az R eseményhez is. Hogyha azonban a k állapot a közbeeső állapotok közt előfordul, akkor — nem nehéz belátni — a p szót elő lehet állítani $p = p_1 p_2 \dots p_m$ ($m \geq 2$) alakban, ahol a p_1 szó átviszi az A automatát az i állapotból a k állapotba, miközben közbeeső állapotok gyanánt csupán az $1, 2, \dots, k-1$ állapotokat használja fel, továbbá a $p_2, \dots, p_{m-1}$ szavak közül bármelyik átviszi az automatát a k állapotból a k állapotba, közbeeső állapotok gyanánt csak az $1, 2, \dots, k-1$ állapotokat felhasználva, végül a p_m szó átviszi az automatát a k állapotból a j állapotba, ugyancsak csupán az $1, 2, \dots, k-1$ állapotokat használva fel közbeeső állapotok gyanánt. Más szavakkal megfogalmazva: $p_1 \in S_{ik}^{k-1}, p_2 \in S_{kk}^{k-1}, \dots, p_{m-1} \in S_{kk}^{k-1}, p_m \in S_{kj}^{k-1}$. Az iteráció értelmezése alapján a $p \in S_{ik}^{k-1} \cdot \{S_{kk}^{k-1}\} \cdot S_{kj}^{k-1} \subseteq R$ relációt kapjuk. (Az $m = 2$ esetben az iterációs zárójel értékeképpen e választandó.)

Minthogy p tetszőleges szó S_{ij}^k -ből, azt kapjuk, hogy $S_{ij}^k \subseteq R$. Az ellentett relációval együtt, amelyet korábban igazoltunk, ez azt jelenti, hogy $S_{ij}^k = R$, amellyel bebizonyítottuk a (10) rekurziós formulát. Bebizonyítottuk, k szerint végzett indukciót alkalmazva azt, hogy az összes S_{ij}^k ($i, j = 1, 2, \dots, n$) esemény reguláris, miközben ezek reguláris kifejezéseit egységes konstruktív módszerrel kaptuk meg (éspedig a (10) formulának az egymásutáni felhasználásával). Megjegyezzük, hogy ha a (10) formula jobboldalán levő események valamelyike a lehetetlen esemény, akkor a keresett reguláris kifejezésekre a (7)–(9) formulákat kell alkalmazni.

Az S_{ij}^n esemény az összes olyan szóból áll, amely az A automatát átviszi az i állapotból a j állapotba. Hogyha $j \neq i$, akkor olyan eseményről van szó, amely elő van állítva az A automatában a j állapot által az i kezdő állapot mellett. Ha pedig $j = i$, akkor ez az esemény nyilván az $S_{ii}^n \cup e$ esemény lesz. Ennek a ténynek a megállapításával a 15. tételnek a bizonyítása befejeződik.

Megjegyzés. A 15. tétel bizonyításával (az üres szó bevezetésének a jóvoltából) igazoltuk — a 13. tétel alapján — mindazoknak az eseményeknek a regularitását is, amelyek előállíthatók tetszőleges véges Moore-féle automatában kimenő jellel, és amelyek a 4. tétel következtében tetszőleges véges Mealy-féle automatában is előállíthatók.

Megállapítva a véges automaták *analízise olyan algoritmusának* a létezését, amely lehetővé teszi, hogy megtaláljuk az ezekben az automatákban előállított események reguláris kifejezéseit, áttérhetünk annak a megfordított algoritmusnak a megszerkesztésére, amelyet természetes módon nevezhetünk a véges automaták *szintézise algoritmusának*.

Itt most leírjuk a szintézis olyan általános algoritmusát, amelyet a jelen cikknek a szerzője a [9] dolgozatban indítványozott. Ez az algoritmus egyesíti a nagyfokú általánosságot a gyakorlati alkalmazási lehetőségekkel. Más javasolt módszerektől (lásd [14] — [17], [23], [28]) eltérőleg a leírandó módszer nem egy eseménnyel operál, hanem (reguláris) eseményeknek a tetszőleges véges rendszerével, nem használja fel a bemenő ábécé betűi „kódolás”-ának speciális szisztémáit, és lehetőséget ad arra, hogy a kapott automaták állapotai számára vonatkozólag viszonylag nem magas értéket kapjunk. Bizonyos kiegészítő tökéletesítések mellett ez a módszer a gyakorlatban olyan automaták megszerkesztéséhez vezet, amelyek hűek és minimálisak. Itt azonban nem fogjuk leírni ezeket a tökéletesítéseket, de a velük megismerkedni kívánóknak javasoljuk a szerző [12] dolgozatát.

16. TÉTEL: *Tetszőleges reguláris esemény előállítható véges iniciális automatában az állapotoknak valamilyen halmaza által. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi, hogy a reguláris kifejezésekkel megadott, $\mathfrak{X}$ ábécéjű reguláris eseményeknek a tetszőleges véges M rendszerére vonatkozólag szerkesszünk olyan véges iniciális automatát, amely az M rendszerből mindegyik eseményt előállítja állapotainak valamilyen halmaza által. Ebben az automatában az állapotoknak a száma nem haladja meg a $(2^n + 1)$ -et, ahol n az $\mathfrak{X}$ ábécé különböző bemenő betűinek a száma az M halmaz kifejezéseiben.*

BIZONYÍTÁS: Nyilván elegendő bebizonyítani a tételnek csupán a második részét, amennyiben az első része nyilvánvaló következménye a másodiknak. Tekintjük az olyan reguláris kifejezéseknek a K együttesét, amelyek az adott M rendszernek az eseményeit előállítják, és számozzuk meg az $\mathfrak{X}$ ábécének az ezekben a kifeje-

zésekben előforduló összes betűjét (amelyek különböznek az üres szó e szimbólumától). Itt egy és ugyanazon betűnek minden előfordulása saját külön számot kap. A számozás sorrendje közömbös. Például a betűknek a következő számozása lehetséges a reguláris $R = x\{y\}x$ és $S = xx \cup \{y\} \cdot x \cdot \{y\}$ kifejezésből álló K_1 együttesben: $R = x_1 \cdot \{y_2\} \cdot x_3$; $S = x_4 \cdot x_5 \cup \{y_6\} \cdot x_7 \cdot \{y_8\}$.

Az események algebrájában érvényes, fentebb definiált rendezés feltételezi a szóban forgó ilyen vagy olyan reguláris kifejezésnek a szétbontásánál a *betűk meghatározott felvonulási rendjét*. Például a fentebb felírt R kifejezésben az x_1 betű mögött következhetik akár az y_2 betű, akár az x_3 betű, az y_2 betű mögött pedig vagy az x_3 betű, vagy újra az y_2 betű. Természetes módon lehet definiálni a *kezdő* betűket is, azaz olyan betűket, amelyekkel el lehet kezdeni a szóban forgó reguláris kifejezéseknek a felbontását. A fentebb felírt R és S kifejezésekben a kezdő betűk nyilván az x_1, x_4, y_6 és x_7 betűk.

Még értelmezzük a reguláris kifejezéseknek a *végző* betűit, azaz olyan betűket, amelyeknek a felírása a reguláris kifejezésnek a felbontásánál (kezdő betűkkel kezdve) befejezi az ezzel a kifejezéssel előállított eseményt. Az R reguláris kifejezésre nézve nyilván csak az x_3 betű lesz végző, az S kifejezésre nézve pedig az x_5, x_7 és y_8 betűk lesznek végzők.

Meg fogjuk szerkeszteni azt az A iniciális automatát, amelynek az összes állapota az a_0 kezdő szónak a kizárása után olyan számozott betűknek valamilyen halmaza lesz (általánosságban beszélve ezekhez hozzátartozik az üres halmaz is), amelyek a K adott együttesnek a reguláris kifejezéseiben benne vannak. Ennek az automatának a $\delta(a, x) = ax$ átmeneti függvényét a következő módon definiáljuk: az $\mathfrak{X}$ alapul vett ábécének tetszőleges x szavára nézve a_0x állapot gyanánt vesszük az összes olyan x számozott betűnek a halmazát, amelyek a K együttesnek kezdő betűi.

A K együttes számozott betűinek tetszőleges olyan M halmazára nézve, amely az A automatának az állapotául lett vége, az Mx állapotot egyenlőnek vesszük az összes olyan (számozott) x betűnek a halmazával, amelyek (a fentebb megállapított értelemben) az M halmaz betűi közül legalább az egyik után következnek. Ennél a betűknek csupán azok a halmazai kerülnek felírásra, amelyek ténylegesen adódnak a leírt szabálynak az egymásutáni alkalmazása során, kiindulva az a_0x alakú halmazokból.

A reguláris kifejezéseknek a definíciójából és az A automata átmeneti függvénye megszerkesztésének a módjából közvetlenül következik, hogy egy $\mathfrak{X}$ ábécéjű nem üres p szó akkor és csak akkor tartozik az olyan Q' eseményhez, amely a K együttesnek valamilyen Q reguláris kifejezésével elő van állítva, ha az a_0p halmaz a Q kifejezésének legalább egy végző betűjét tartalmazza. Az elvégzett szerkesztésnek az alapján csupán akkor van érvényben az $a_0p = a_0$ egyenlőség, amikor p üres szó. Ilyen módon a Q' esemény előállíthatónak bizonyul a megszerkesztett automatában az összes olyan állapotnak a halmaza által, amelyek állományukban a Q kifejezésnek legalább egy végző betűjét tartalmazzák; abban az esetben, amikor a Q' esemény tartalmazza az e üres szót, Q' előállítható az a_0 kezdő állapot által is. Nyilvánvaló, hogy a megszerkesztett automata állapotainak a száma véges.

Ezzel a keresett algoritmust megszerkesztettük, és a 16. tételt teljesen bebizonyítottuk. A tétel állításában szereplő korlát az állapotok számára vonatkozólag könnyen adódik abból, ha felidézzük, hogy az összes olyan különböző halmaznak a száma, amelyeket n (számozott) betűből lehet szerkeszteni, egyenlő 2^n -nel.

Annak érdekében, hogy jobban megvilágítsuk a leírt algoritmusnak a lényegét, minimális olyan automatát szerkesztünk, amely egy olyan K_1 együttesnek az eseményeit állítja elő, amilyent a 16. tételnek a bizonyításánál említettünk. A tekintett esetben az alapul vett $\mathcal{X}$ ábécé az x és y betűkből áll. A 16. tétel bizonyításában leírt eljárásokat alkalmazva és megjelölve az A automatának a kezdő állapotát, eljutunk a következő összefüggésekhez: $a_0x = a_1$, $a_0y = a_2$, ahol a_1 az a halmaz, amely az x_1, x_4, x_7 betűkből áll, a_2 pedig az a halmaz, amely az y_6 egyetlen betűből áll. Továbbá érvényes $a_1x = a_3$, $a_1y = a_4$, $a_2x = a_5$, $a_2y = a_2$, ahol $a_3 = (x_3, x_5)$, $a_4 = (y_2, y_8)$, $a_5 = (x_7)$; $a_3x = a_5$, $a_3y = a_6$, $a_4x = a_7$, $a_4y = a_4$, $a_5x = a_6$, $a_5y = a_8$, ahol a_6 a betűk üres halmaza, és $a_7 = (x_3)$, $a_8 = (y_8)$; $a_6x = a_6$, $a_6y = a_6$, $a_7y = a_6$, $a_7x = a_6$, $a_8x = a_6$, $a_8y = a_8$.

A keresett A automatának az átmeneti függvényét az említett összefüggések teljesen meghatározzák. Az A automatának kilenc állapota van, és az A automata az R eseményt az a_3 és a_7 állapotoknak a halmazával, az S eseményt pedig az a_1, a_3, a_4, a_5 és a_8 állapotoknak a halmazával állítja elő. A szemléletesség kedvéért a 3. ábrán fel van tüntetve a megszerkesztett automatának a rajza.

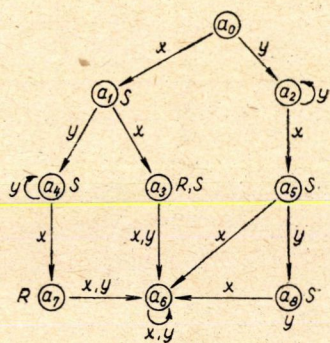
A köröskék mellett, amelyek az olyan állapotokat jelölik, amelyek előállítanak egyet vagy kettőt az R és S események közül, a megfelelő eseményeknek a szimbólumai is fel lettek tüntetve.

Megjegyezzük, hogy a tekintett példában természetes módon olyan jel-függvényt lehet bevezetni, amely az a_0, a_2, a_6 állapotokat megjelöli egy kimenő jellel, az a_3 állapotot egy másikkal, az a_7 állapotot egy harmadikkal, az a_1, a_4, a_5 és a_8 állapotokat pedig egy negyedik kimenő jellel. Ezután a tekintett automata átváltozik olyan (kezdő) Moore-féle automatává, amely az R eseményt a második és harmadik, az S eseményt pedig a harmadik és negyedik kimenő jellel állítja elő. Az említett Moore-féle automata lévén Moore-féle módon ekvivalens az adott automatával, el tudjuk végezni az automata állapotai számának a minimalizálását, miközben az események vizsgált együttesének előállíthatósági tulajdonsága megőrződik. Magától értetődően ezek a megfontolások szerfelett általános jellegűek, és nem korlátozódnak a vizsgált példára; ami pedig a vizsgált példára vonatkozik, alkalmazva itt a minimalizálásnak a fentebb leírt eljárását, le tudjuk csökkenteni kilencről nyolcra az állapotainak a számát.

A 16. tétel lehetővé teszi, hogy megállapítsunk egy sor olyan új állítást, amelyeknek lényeges jelentőségük van a véges automaták és az eseményalgebra elméletében.

17. TÉTEL: *Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi a reguláris kifejezéseknek tetszőleges párjára nézve annak a megállapítását, hogy az ezekkel a kifejezésekkel előállított események egybeesnek-e, vagy sem.*

BIZONYÍTÁS: A keresett algoritmus ténylegesen egybeesik a szintézisnek az algoritmusával, amelyet a 16. tételnek a bizonyításában írtunk le. Megszerkesztve ugyanis egy olyan véges iniciális automatát, amely azokat az R és S eseményeket, amelyek megfelelnek a megadott kifejezéseknek, előállítja állapotoknak az M és N halmazai által, visszavezetjük az R és S eseményeknek az egybeeséséről vagy nem



1. ábra

egybeeséséről szóló kérdést a véges M és N halmazoknak az egybeeséséről vagy különbözőségéről szóló kérdésre.

Bevezetjük most az eseményeken vett új műveleteknek egy sorát. Mindenekelőtt, természetesen, az eseményeknek a metszetét tekintjük, amely elnevezésen a közönséges, halmazelméleti metszetet értjük. Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S esemény $\bar{S}$ *komplementumának* nevezzük az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes olyan szónak a halmazát (nem kizárva az üres szót sem), amelyek nincsenek benne az S eseményben. Az S esemény *kiegészítésének* fogjuk nevezni az S esemény összes szava összes kezdő szakaszának a halmazát, amelyhez ezek a szavak maguk is és az e üres szó is hozzátartoznak.

Az automaták szintézise ama algoritmusának az alkalmazásánál, amelyet a 16. tételnek a bizonyításában írtunk le, az összes olyan eseménnyel együtt, amelyek a reguláris eseményeknek az eredeti K együttesét alkotják, automatikusan előállíthatónak bizonyulnak ezeknek az eseményeknek az összes egyesítései (diszjunkciói) és összes metszetei, továbbá közülük akármelyiknek a komplementuma és kiegészítése is.

Valóban, az előállító halmazoknak az egyesítése és metszete nyilván előállítja a megfelelő eseményeknek az egyesítését és metszetét. Az állapotok egy olyan halmazának a komplementuma (az automata összes állapotának a halmazában), amely a K együttesnek egy tetszőleges eseményét állítja elő, egyszersmind előállítja ennek az eseménynek a komplementumát. Valamivel bonyolultabban áll a dolog az események kiegészítésével. Elemezve azt az algoritmust, amelyet a 16. tételnek a bizonyításában írtunk le, nem nehéz eljutni ahhoz az előíráshoz, hogy olyan eseménynek a kiegészítése, amely a K eredeti együttesnek egy tetszőleges S reguláris kifejezésével van megadva, azzal a halmazzal állítható elő, amely a kezdő állapotból és az összes olyan állapotból (számozott betűk halmazából) áll, amelyek legalább egy olyan (számozott) betűt tartalmaznak, amely az S kifejezéshez tartozik.

Egybekapcsolva a 15. tételben megállapított eredménnyel a most kapott eredményeket, a következő állításhoz jutunk.

18. TÉTEL: *Tetszőleges reguláris eseménynek a komplementuma és kiegészítése, továbbá reguláris események tetszőleges véges halmazának a metszete is reguláris esemény. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi azt, hogy reguláris kifejezéssel megadott tetszőleges eseményhez találjunk reguláris kifejezéseket ennek az eseménynek a komplementumára és kiegészítésére vonatkozólag. Létezik olyan algoritmus is, amely tetszőleges véges sok számú eseményre nézve lehetővé teszi azt, hogy találjunk az összes ilyen eseménynek a metszetére vonatkozólag reguláris kifejezést.*

Az események komplementumának és kiegészítésének a műveleteit dolgozatoknak egész sorában vizsgálták (lásd például [9], [14], [16], [17]). Az eseményeken még két érdekes művelet került bevezetésre S. C. KLEENE [14] és JU. T. MEDVEGYEV [17] dolgozatában.

Az első művelet, amelyet mi az *esemény bővítésének* nevezünk, azt jelenti, hogy az $\mathfrak{X}$ ábécéjű S eseményt, amely legalább egy nem üres szót tartalmaz, átalakítjuk az $S' \cdot F \cup e$ eseménnyé, ahol F az $\mathfrak{X}$ ábécéjű általános (= bizonyos) esemény, S' pedig az S esemény az e üres szó nélkül. Az olyan eseménynek a bővítése, amely egyetlen, üres szóból áll, egyenlőnek veendő ezzel az eseménnyel. Mivel a bizonyos esemény tartalmazza az üres szót, tetszőleges eseménynek a bővítése magában foglalja ezt az eseményt. JU. T. MEDVEGYEV [17] megmutatta, hogy olyan eseménynek a bővítése, amely előállítható véges automatában, ugyancsak előállítható véges

automatában. Ennek az eredménynek, amelyet MEDVEGYEV állapított meg, nem fogjuk elvégezni a bizonyítását, csupán azt jegyezzük meg, hogy 16. tételünknek a jóvoltából ez nyilvánvaló következménye a könnyen bebizonyítható következő állításnak:

19. TÉTEL: *A véges ábécéjű általános (= bizonyos) esemény, valamint tetszőleges reguláris eseménynek a bővítése mindig reguláris esemény. Létezik olyan egyszerű algoritmus, amely lehetővé teszi az eseménynek a reguláris felírása révén azt, hogy megtaláljuk az esemény bővítésének a reguláris felírását.*

Ha ugyanis az $\mathfrak{X}$ ábécé a véges számú $x_1, x_2, \dots, x_n$ betűből áll, akkor az $\mathfrak{X}$ ábécéjű általános (= bizonyos) esemény a reguláris $\{x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n\}$ kifejezés által állítható elő. Hogyha az S esemény reguláris, akkor ennek az eseménynek az ábécéje véges, és következésképpen az S eseménynek az $S' \cdot F \cup e$ bővítése lehetővé teszi a felírást reguláris kifejezésnek a segítségével. (A 18. tételből következik, hogy reguláris eseményből az üres szónak a kizárása reguláris eseményhez vezet.)

A második művelet, amelyet mi az *esemény egyszerűsítésének* fogunk nevezni, a megszokott értelemben duálisa az esemény bővítése műveletének. Az S eseménynek a bővítésében benne van az összes olyan szó, amely az S eseménynek a szavait kezdő szakasz gyanánt tartalmazza. Az S esemény egyszerűsítése azokból és csak azokból a nem üres szavakból áll, amelyek maguk is S -hez tartoznak és ugyanakkor amelyeknek az összes nem üres kezdő szakasza szintén benne van az S eseményben.

$C(S)$ -sel jelölve egy tetszőleges S esemény egyszerűsítését és $R(S)$ -sel jelölve a bővítését, könnyű belátni a következő formulának az érvényességét (lásd [17]):

$$(11) \quad C(S) = \overline{R(\bar{S})}.$$

Felülvonással jelöljük, miként fentebb is, az eseménynek a komplementumát (az adott esetben az S eseménynek az ábécéjében).

Könnyű látni, hogy a (11) formula lényegében nem egyéb, mint a szűkebb értelemben vett ítélet kalkulának valamennyire szokatlan formában való egyik ismert olyan összefüggése, amely összekapcsolja az „összes”-ségnek és a létezésnek a kvantorait. A különbség csupán abban áll, hogy szükségképpen különös szerepe van az üres szónak.

A (11) formula, összekapcsolva a 18. és 19. tételekkel, a következő eredményhez vezet.

20. TÉTEL: *Tetszőleges reguláris eseménynek a rövidítése ugyancsak reguláris esemény. Létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi azt, hogy reguláris kifejezéssel megadott tetszőleges reguláris eseményre vonatkozólag találjunk reguláris kifejezést ennek az eseménynek az egyszerűsítéséhez.*

JU. T. MEDVEGYEV [17] vizsgált még egy műveletet az eseményeken (a behelyettesítésnek a műveletét). Mi azonban nemcsak magát ezt a műveletet vizsgáljuk, hanem egy általánosabb műveletet, amelyet V. G. BODNÁRCSUK, a szerző aspiránsa indítványozott, és amelyet természetes dolog az események *szuperpozíciójának* nevezni.

Tekintsünk egy véges $\mathfrak{Y}$ ábécéjű tetszőleges olyan $S = S(y_1, y_2, \dots, y_m)$ eseményt, amely az $y_1, y_2, \dots, y_n$ betűkből áll, továbbá m számú tetszőleges véges $\mathfrak{X}$ ábécéjű eseményt $R_1, R_2, \dots, R_m$ -et, amelyek az $x_1, x_2, \dots, x_n$ betűkből állnak. Az $R_1, R_2, \dots, R_m$ eseményeknek és az S eseménynek a *szuperpozíciója* $\mathfrak{X}$ ábécéjű

olyan esemény, amely az összes olyan szóból áll, amelyek annak a behelyettesítésnek az eredményeképpen nyerhetők, hogy az S eseménynek egy tetszőleges $y_{i_1}y_{i_2}\dots y_{i_n}$ szavában az y_{i_1} betűt az R_{i_1} eseménynek egy tetszőleges szavával, az y_{i_2} betűt az R_{i_2} eseménynek egy tetszőleges szavával helyettesítjük stb.

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő

21. TÉTEL: *A reguláris $R_1, R_2, \dots, R_m$ eseményeknek és az $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(y_1, y_2, \dots, y_m)$ ábécéjű reguláris S eseménynek a szuperpozíciója ugyancsak reguláris esemény. Ilyen szuperpozícióhoz reguláris kifejezést annak az eredményeképpen lehet nyerni, hogy az olyan reguláris kifejezésben, amely az S eseményt megadja, behelyettesítjük az $y_1, y_2, \dots, y_m$ betűknek a helyébe azokat a reguláris kifejezéseket, amelyek megadják az $R_1, R_2, \dots, R_m$ eseményeket: az R_i eseményhez tartozó reguláris kifejezés megjelöli az S eseményhez tartozó reguláris kifejezésben az y_i betűnek az összes előfordulását.*

V. G. BODNARCSUK olyan közvetlen módszert indítványozott, amely lehetővé teszi, hogy építsünk olyan véges iniciális automatát, amely közvetlenül előállítja az $R_1, R_2, \dots, R_m$ eseményeknek és az S eseménynek a szuperpozícióját azzal az automatával, amely ezeket az (eredeti) eseményeket előállítja. Könnyű látni, hogy ezen az alapon meg lehet szerkeszteni az automaták szintézisének egy olyan új algoritmusát, amely az adott reguláris eseményeket előállítja, kiindulva azokból az automatákból, amelyek az elemi eseményeket és a reguláris eseményeket előállítják.

JU. T. MEDVEGYEV a már idézett [17] dolgozatában olyan módszert dolgozott ki, amely olyan nyelven írja le a véges automatákban előállított eseményeket, amely különbözik a reguláris felírásoknak a nyelvétől.

A következőkben áttérve a fenti nyelvnek a kifejtésére, ez a módszer a következő alakban fogalmazható meg: Vizsgáljuk a tetszőleges, adott, véges $\mathcal{X} = \mathcal{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ábécéjű következő elemi eseményeket: $E_1 = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n$, $E_2 = x_1x_1 \cup x_1x_2 \cup \dots \cup x_ix_j \cup \dots \cup x_nx_n$, majd az $E_{x_i} = \{E_1\} \cdot x_i$ eseményeket és az $E_{x_i} = E_1 \cup \{E_1\} \cdot x_i \cdot E_1$ eseményeket ($i = 1, 2, \dots, n$).

Bebizonyítható, hogy véges automatákban azok és csak azok az események lesznek előállíthatók, amelyek vagy egybeesnek a felsorolt elemi eseményekkel, vagy pedig ezekből annak a segítségével kaphatók, hogy az ilyen módon kapott eseményekkel és az $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemi eseményekkel véges sokszor képezzük a diszjunkció, metszet, bővítés, egyszerűsítés és szuperpozíció műveletét. Az utóbbi műveletnek a neve behelyettesítés, és ennek értelme abban a (nem feltétlenül kölcsönösen egyértelmű) behelyettesítésben van, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_n$ betűknek a helyébe ugyanezeket a betűket (vagy pedig ezeknek egy részét) elhelyezzük valamilyen más sorrendben.

Egyébként ez az eredmény a fentebb kifejtett eredményeknek (18–21. tételek) közvetlen következménye.

Az események véges automatákban való előállításának kérdése érdekes módon közelíthető meg a BURKS és HAO WANG [3] dolgozatában bevezetett fogalom, a véges automata *közvetlen átmenetei mátrixainak* felhasználásával.

Egy véges A automata közvetlen átmeneteinek a mátrixa olyan négyzetes mátrix, amelynek az oszlopai és sorai az automatának a különböző állapotaival vannak megjelölve. Ilyen módon ennek a mátrixnak a rangja egyenlő az A automata állapotainak az n számával. Egyszerűség kedvéért egyezzünk meg abban, hogy az automatának az állapotait az $1, 2, \dots, n$ egymásután következő számokkal jelöljük.

A mátrixnak az az a_{ij} eleme, amelyik az i -edik sornak és a j -edik oszlopnak a találkozásában van, az összes olyan 1-hosszúságú szónak (azaz betűnek) a diszjunkciója, amely az automatát az i állapotból átviszi a j állapotba, vagy pedig a_{ij} a $\emptyset$ lehetetlen esemény, hogyha a megkövetelt tulajdonságú szavak hiányoznak.

Például az 1. ábrán (lásd 1. §.) feltüntetett rajzú automatára vonatkozólag, ahol megállapodásszerűen a az első, b pedig a második állapot, a közvetlen átmeneteknek a C mátrixaképpen ezt kapjuk:

$$C = \begin{pmatrix} \emptyset, xuy \\ \emptyset, xuy \end{pmatrix}.$$

Az eseményalgebrai szorzásnak és diszjunkciónak a műveletét felhasználva, definiálni lehet két olyan négyzetes $A = (\alpha_{ij})$ és $B = (\beta_{km})$ mátrixnak a D szorzatát, amelyeknek a rendje egy és ugyanazon n szám, és amelyeknek az elemei egy és ugyanazon ábécéjű események. A D szorzatot olyan n -edrendű négyzetes mátrixként definiáljuk, amelyben az i -edik sornak és a j -edik oszlopnak a találkozásánál a $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} \cup \alpha_{i2}\beta_{2j} \cup \dots \cup \alpha_{in}\beta_{nj}$ esemény áll.

Amennyiben az automata közvetlen átmenetei C mátrixának az elemei ennek az automatának a bemenő ábécéjéből való események, akkor nyilvánvaló módon lehet ennek a mátrixnak az egymásutáni hatványait definiálni:

$$C^1 = C, C^2 = C \cdot C, C^3 = C^2 \cdot C, \dots, C^k = C^{k-1} \cdot C.$$

Érvényes a következő

22. TÉTEL: *Tetszőleges k természetes szám mellett az A véges automata közvetlen átmenetei C mátrixának a k -adik hatványa olyan C^k mátrix, amelyben az i -edik sornak és a j -edik oszlopnak a találkozásánál az az esemény áll, amely egyenlő az összes olyan k -hosszúságú szónak a diszjunkciójával, amelyeknek ábécéje az A automatának a bemenő ábécéje, és amelyek az A automatát az i állapotból átviszi a j állapotba.*

Ennek a tételnek a bizonyítása közvetlenül elintézhető k szerinti teljes indukcióval és az események algebrájára vonatkozó (7) és (8) összefüggéseknek a felhasználásával.

Az egy és ugyanazon rendű C_1 és C_2 mátrixok diszjunkcióját úgy definiáljuk, hogy ez olyan mátrix, amelynek minden eleme a C_1 és C_2 mátrixok megfelelő elemeinek a diszjunkciója. Az egység mátrixot úgy definiáljuk, hogy ez olyan négyzetes mátrix, amelynek a főátlójában olyan események szerepelnek, amelyek csak az e üres szóból állanak, az összes többi helyen pedig a lehetetlen esemény szerepel. Természetes dolog abban megállapodni, hogy a közvetlen átmenetek C mátrixának a C^0 nulladik hatványa azzal az egység mátrixszal esik egybe, amelynek a rendje egyenlő a C mátrixnak a rendjével.

Egy A véges automata teljes átmenetei mátrixának nevezzük az A automata közvetlen átmenetei mátrixa összes nemnegatív egész kitevőjű hatványának a végtelen $C^0 \cup C^1 \cup C^2 \cup \dots \cup C^k \cup \dots$ diszjunkcióját. A 22. tételből mármost közvetlenül folyik a következő állításnak az érvényessége.

23. TÉTEL: *Az A véges automata teljes átmenetei mátrixa i -edik sorának és j -edik oszlopának a találkozásánál olyan esemény áll, amely az A automata bemenő*

ábécéjének az összes olyan és csakis olyan szavából áll, amelyek átviszik az automatát az i állapotból a j állapotba.

Magától értetődően, a 22. és 23. tételek érvényesek a végtelen automatákra nézve is, de a hatásos alkalmazásuk rendszeren csak a véges automatákra korlátozódik (az automatával előállított események tényleges leírásának a szempontjából).

Egyébként a 23. tételnek a hatékony alkalmazhatóságáról, sőt még a véges automatákra való alkalmazhatóságáról is csak szerfelett feltételesen lehet beszélni, amennyiben távolról sem mindig lehetséges a teljes átmenetek mátrixa elemeihez tartozó reguláris kifejezéseknek a közvetlen megtalálása.

A teljes átmenetek mátrixának az elemei olyan események, amelyek elő vannak állítva az automatának egyetlen állapotával. Az olyan eseményeket pedig, amelyek az állapotoknak halmazaival vannak előállítva, az előbbi elemek diszjunkciójának alakjában kell felírni.

Ezzel kapcsolatban felmerül az a természetes kérdés, hogy léteznek-e olyan események, amelyek nem állíthatók elő egyetlen állapot által, és az ilyen események belsőleg hogyan jellemezhetők.

Az erre a kérdésre adandó válaszképpen olyan eljárást alkalmazunk, amelyet V. G. BODNARCSUK indítványozott: hogyha valamilyen S eseményhez létezik olyan p és $r \neq e$ szó, hogy mind a p szó, mind pedig a pr szó hozzátartozik ehhez az eseményhez, akkor az r szót az S esemény *kötege*nek nevezzük. Az S esemény *ciklusának* nevezzük a q szót, hogyha az S eseményből vett *tetszőleges* l szóra nézve az lq szó ugyancsak hozzátartozik ehhez az eseményhez.

Érvényes a következő állítás, amely V. G. BODNARCSUK-tól származik.

24. TÉTEL: *Az az esemény, amely olyan köteggel rendelkezik, amely nem ciklus, semmiféle automatában sem állítható elő egyetlen állapot által.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel azt, hogy az S esemény elő van állítva valamilyen automatában egyetlen állapot által. Ennél az A automatát iniciálisnak lehet tekinteni, és kezdő állapot gyanánt azt az a_0 állapotot választjuk, amely az S eseménynek az összes szava által az a állapotba megy át. Legyen r az S eseménynek tetszőleges kötege. Található olyan $p \in S$ szó a kötegnek a definíciója szerint, hogy $pr \in S$. Ámde akkor $a_0p = a$, továbbá $a_0pr = a$. Más szóval $ar = a$. Hogyha q tetszőleges szó S -ből, akkor $a_0q = a$, továbbá $a_0qr = ar = a$, más szóval $qr \in S$, és következésképpen az r szó ciklus. Ezzel pedig nyilván bebizonyítottuk a tételt.

Felhasználva a 24. tételt, könnyű bebizonyítani például azt, hogy az $S = x \cup xy$ esemény semmiféle automatában sem állítható elő egyetlen állapot által. Az y szó ugyanis ennek az eseménynek nyilvánvalóan olyan kötege, amely egyidejűleg nem ciklus, amennyiben S nem tartalmazza az xyy szót.

Végezetül megemlítjük azt a feladatot, hogy meghatározzuk az összes olyan nem izomorf véges automatának a számát, amelyeknek a bemenő és kimenő ábécéjük adott és az állapotoknak a száma is adott. Ezt a feladatot F. D. MURRAY [18] dolgozatában megoldotta a kimenő jelek nélküli olyan automatákra nézve, amelyeknek a bemenő ábécéjük egyetlen betűből áll.

4. §. Az automaták és a félcsoporthok

Ebben a paragrafusban olyan összefüggéseket állapítunk meg, amelyek egyfelől az automatáknak az elmélete, másfelől pedig a félcsoporthoknak az elmélete közt állnak fenn. Speciálisan már állapítottunk meg ilyen összefüggést az előző paragrafusokban, ez az összefüggés azonban inkább tisztán csak terminológiai jellegű volt és csak a szabad félcsoporthokra korlátozódott. A szerzőnek a [11] dolgozata sokkal szorosabb kapcsolatnak vetette meg az alapját a félcsoporthok elmélete és az automaták elmélete közt. Ennek a paragrafusnak a tartalma az említett dolgozat alap gondolatainak további fejlődését mutatja be.

Tekintsünk egy $\mathfrak{A}$ bemenő ábécéjű tetszőleges A automatát. Az $\mathfrak{A}$ ábécének minden betűje (azaz az A automatának bármely bemenő jele) előidézi az A automata állapotainak egy (általánosságban nem feltétlenül kölcsönösen egyértelmű) transzformációját. Ez a transzformáció az A automatának a tetszőleges a állapotához hozzárendeli ugyanennek az automatának az $ax = \delta(a, x)$ állapotát (itt $\delta(a, x)$ az A automatának az átmeneti függvénye) és ezt az x bemenő jel által indukált transzformációnak nevezzük.

Az A automata összes különböző bemenő jele által indukált transzformációkkal generált félcsoporthot az *automata félcsoporthjának* nevezik, az automatát magát pedig az *adott félcsoporthoz tartozó automatának* nevezik. Az automaták félcsoporthjait általában mint absztrakt félcsoporthokat vizsgáljuk, nem pedig mint transzformációkból álló félcsoporthokat (hacsak nem beszélünk ennek az ellenkezőjéről).

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő

25. TÉTEL: *Izomorf automatáknak a félcsoporthjai is izomorfok.*

Legyen ugyanis A és B két, egymással izomorf automata. Jelöljük φ -vel azt az izomorfizmust, amely az A automatát leképezi a B automatára. Az A automatának tetszőleges a állapotára nézve és az $\mathfrak{A}$ bemenő ábécének tetszőleges x betűjére nézve $\varphi(a)$ -val, illetve $\varphi(x)$ -szel jelöljük a nekik a φ izomorfizmusnál megfelelő állapotot és a B automata $\mathfrak{B}_1$ bemenő ábécéjének a megfelelő betűjét. Hogyha $p = x_1 x_2 \dots x_k$ tetszőleges, $\mathfrak{A}$ ábécéjű szó, akkor megállapodás szerint az $\mathfrak{A}_1$ ábécéjű $\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_k)$ szót $\varphi(p)$ -vel jelöljük.

Az automatáknak az izomorfizmusa alapján $\varphi(ax) = \varphi(a) \cdot \varphi(x)$.

A szó hossz szerinti indukcióval innen azonnal adódik, hogy $\varphi(ap) = \varphi(a) \varphi(p)$.

A p bemenő szó az A automata állapotainak valamilyen $a \rightarrow ap$ transzformációját indukálja. Miként könnyen látható, ez a transzformáció egybeesik azoknak a transzformációknak a szorzatával, amelyeket az $x_1, x_2, \dots, x_k$ bemenő jelek (azaz a p szót alkotó betűk) indukálnak. Az A automata félcsoporthjának tetszőleges definiáló relációját fel lehet írni $ap = aq$ alakban, ahol p és q valamilyen, $\mathfrak{A}$ ábécéjű szavak, az a állapot pedig befutja az A automata összes állapotának az $\mathfrak{A}$ halmazát. A fentebb bebizonyítottak alapján ennek a relációnak megfelel a B automatában egy $\varphi(a) \varphi(p) = \varphi(a) \varphi(q)$ összefüggés. Felhasználva a φ leképezésen kívül a φ^{-1} inverz leképezést is, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést állapíthatunk meg az A és B automatákhoz tartozó félcsoporthok generátorelemei, illetve definiáló relációi közt, amely maga után vonja ezeknek a félcsoporthoknak az izomorfizmusát. Ezzel a 25. tételt bebizonyítottuk.

Tekintsük most az A automatának a B automatába való tetszőleges φ homomorfizmusát. Az A automatának minden egyes bemenő jele által indukált transzfor-

mációjához hozzárendelve a B automatának azt a transzformációját, amelyet a B automatának a $\varphi(x)$ bemenő jele indukál, továbbá hozzárendelve az előbbi alakú transzformációk szorzatához a nekik megfelelő, második alakú transzformációknak a szorzatát, meghatározzuk az A automata félcsoportjának a B automata félcsoportjába való valamilyen leképezését. Ezt a leképezést a φ homomorfizmus által indukált leképezésnek nevezzük.

Ugyanazokkal a módszerekkel, amelyeket a 25. tételnek a bizonyításánál felhasználtunk, könnyen bebizonyítható a következő állítás.

26. TÉTEL: Az A automatának a B automatába való φ homomorfizmusa által indukált ψ leképezés egyszersmind az A automata G félcsoportjának a B automata H félcsoportjába való egyik homomorfizmusa is. Ha a φ homomorfizmus az A automatát az egész B automatára képezi le, akkor a ψ homomorfizmus a G félcsoportnak az egész H félcsoportra történő homomorf leképezése. Ha pedig a φ homomorfizmus izomorfizmus, akkor a ψ homomorfizmus szintén izomorfizmus.

Az automata félcsoportjának a fogalmához más oldalról is lehet közeledni, mégpedig felhasználva a szabad félcsoportoknak bizonyos speciális felbontásait.

Miként szokásos, egy tetszőleges M halmaz felbontásának fogjuk nevezni a nem üres, egymást páronként nem metsző olyan részhalmazoknak bármely $\{M_\alpha\}$ családját, amelyeknek az egyesítése egybeesik az egész M halmazzal. Azt mondják, hogy az M halmaznak az $\{N_\beta\}$ felbontása *bele van írva* ugyanannak a halmaznak az $\{M_\alpha\}$ felbontásába, hogyha az első felbontás mindegyik N_β halmaza teljesen benne van a második felbontásnak valamilyen M_α halmazában. Ebben az esetben, bevett szokás szerint, azt is mondjuk, hogy az $\{N_\beta\}$ felbontás az $\{M_\alpha\}$ felbontásnak a részfelbontása.

Az M halmaz felbontásai *növekvő láncnak* nevezzük eme halmaz felbontásainak jól rendezett halmazát, ha a tekintett láncot alkotó felbontások közül bármelyik az utána következő felbontásoknak részfelbontása. Az M halmaz R_γ felbontásai *növekvő lánc egyesítésének* nevezzük ennek a halmaznak azt a felbontását, amelyet a következő szabály szerint szerkesztünk meg: két elem M -ből akkor és csak akkor tartozik az R felbontásnak egy és ugyanazon részhalmazához (osztályához), hogyha azok a tekintett láncot alkotó R_γ felbontások közül legalább az egyiknek egy és ugyanazon részhalmazában benne vannak.

A tetszőleges M halmaznak a felbontásaira nézve természetes dolog két műveletet definiálni, mégpedig a felbontások *metszetének* és *egyesítésének* a műveletét.

Hogyha $G = \{G_\alpha; \alpha \in A\}$, valamint $H = \{H_\beta; \beta \in B\}$ az M halmaznak két tetszőleges felbontása, akkor a G és H felbontások *metszetének* nevezzük azt a felbontást, amely az első és második felbontás részhalmazainak az összes nem üres $G_\alpha \cap H_\beta$ ($\alpha \in A, \beta \in B$) metszetéből áll.

Az M halmaz $G = \{G_\alpha; \alpha \in A\}$ valamint $H = \{H_\beta; \beta \in B\}$ felbontásai egyesítésének értelmezéséhez előzőleg bevezetjük a GH -láncnak a fogalmát. Az M halmaz p és q elemeit összekötő GH -láncnak nevezzük az M halmaz elemeinek egy olyan $p = m_0, m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m'_k = q$ tetszőleges, véges sorozatát, hogy az m_{i-1} és m_i elemek tetszőleges $i = 1, 2, \dots, k$ esetén vagy a G felbontásnak egy és ugyanazon (nyilván i -től függő) G_α részhalmazában, vagy pedig a H felbontásnak egy és ugyanazon H_β részhalmazában vannak benne.

Az M halmaznak az N részhalmazát GH -összefüggő részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges két elemét össze lehet kötni GH -láncsal, és maximális GH -összefüggő részhalmaznak nevezzük, ha ezenkívül teljesül még az is, hogy N nincs benne az M halmaznak semmiféle bővebb, GH -összefüggő részhalmazában.

Az M halmaznak tetszőleges m eleme benne van valamilyen maximális GH -összefüggő részhalmazban, mégpedig abban a részhalmazban, amely az összes olyan elemből áll, amelyeket az m elemmel GH -lánc által össze lehet kötni. Közvetlenül következik a GH -összefüggőségnek a definíciójából, hogy egy közös elemet tartalmazó, GH -összefüggő részhalmazoknak az egyesítése ugyancsak GH -összefüggő részhalmaz lesz. Ebből következik, hogy a maximális GH -összefüggő részhalmazok páronként idegenek.

Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy az M halmaz összes maximális GH -összefüggő részhalmazának összessége ennek a halmaznak valamilyen felbontását szolgáltatja. Ezt a felbontást a G és H felbontások egyesítésének nevezzük.

A felbontások egyesítésének a definíciójából közvetlenül következik, hogy a G és H felbontások mindegyike egyesítésüknek részfelbontása.

Bevezetjük most a következő definíciót.

16. DEFINÍCIÓ: Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoporthoz az $K = K_\alpha; \alpha \in A$ felbontását automata-felbontásnak nevezzük, hogyha az $\mathfrak{X}$ ábécének egy tetszőleges x betűjére nézve és a K felbontásnak egy tetszőleges K_α részhalmazára nézve a $K_\alpha \cdot x$ részhalmaz teljesen benne van ennek a felbontásnak valamelyik részhalmazában. A K felbontást félcsoporth-felbontásnak nevezzük, hogyha ez a felbontás az F félcsoporthhoz valamilyen kongruencia-relációja által van meghatározva, más szavakkal: hogyha a K felbontás tetszőleges két részhalmazának $K_\alpha \cdot K_\beta$ szorzata teljesen benne van ennek a felbontásnak valamelyik harmadik (α -tól és β -tól függő) részhalmazában.

Könnyű belátni, hogy egy szabad félcsoporthoz bármely félcsoporth-felbontása egyszerre automata-felbontás is, de a megfordított általánosságban nem érvényes. Az automata-felbontás bevezetett definíciójának analógiájára, amelyet természetes dolog automata-jobbfelbontásnak nevezni, szintén lehet vizsgálni az olyan $\{K_\alpha; \alpha \in A\}$ automata-balfelbontásokat is, amelyekre nézve az $x \cdot K_\alpha \subseteq K_\beta$ tartalmazás érvényes. Világos, hogy bármely félcsoporth-felbontás nemcsak automata-jobbfelbontás, hanem automata-balfelbontás is. A továbbiakban azonban csak automata-jobbfelbontásokat fogunk használni.

Megjegyezzük még, hogy ebben a paragrafusban a „szabad félcsoporth” elnevezésen értjük mind a közönséges szabad félcsoporthot (egységelem nélkül), mind pedig az egységelemes (üres szóval rendelkező) szabad félcsoporthot. Abban az esetben, amikor csupán az egyik típusú szabad félcsoporthokra érvényes valamely állítás, ezt mindannyiszor külön megmondjuk. Ha pedig ezt nem mondjuk meg, akkor az azt jelenti, hogy a megfelelő állítás, vagy definíció mindkét (azaz egységelemes és egységelem nélküli) típusra egyaránt meg van fogalmazva.

27. TÉTEL: Az F szabad félcsoporth G és H felbontásainak a metszete és az egyesítése automata-felbontás, hogyha mindkét G és H felbontás automata-felbontás; továbbá a metszet és az egyesítés félcsoporth-felbontás, hogyha mindkét G és H felbontás félcsoporth-felbontás.

BIZONYÍTÁS. A tétel állításának a helyessége a felbontások metszetének az esetére nyilvánvaló. Vizsgáljuk az egyesítésüknek az esetét, amelyet $Q = \{Q_\gamma; \gamma \in P\}$ által jelölünk. Feltesszük, hogy mindkét

$$G = \{G_\alpha; \alpha \in M\} \text{ és } H = \{H_\beta; \beta \in N\}$$

felbontás automata-felbontás. Legyen a és b két tetszőleges elem a Q felbontásnak egy tetszőleges Q_γ halmazából, $a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n = b$ pedig legyen egy őket összekötő GH -lánc, valamint x legyen az F félcsoporthoz az ábécéjéből tetszőleges betű (azaz ennek a félcsoporthoz tetszőleges generátor-eleme). Minthogy G és H automata-felbontások, közvetlenül következik, hogy $a_0x, a_1x, \dots, a_nx$ egy olyan GH -lánc, amely az $a_0x = ax$ és az $a_nx = bx$ elemeket összeköti. Minthogy pedig ax és bx a $Q_\gamma x$ halmaznak tetszőleges elemei, ezért ez a halmaz GH -összefüggő. Ámde ebben az esetben, miként könnyen belátható, ezt a halmazt tartalmazza valamilyen maximális GH -összefüggő részhalmaz, más szavakkal tartalmazza ezt az egyik részhalmaz a Q felbontásnak a halmazából. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a Q felbontás tényleg automata-felbontás.

Tegyük most fel azt, hogy a G és H felbontások félcsoporthoz-felbontások. Legyen most a, b tetszőleges elempár a Q felbontás két tetszőleges halmazának $Q_{\gamma_1} \cdot Q_{\gamma_2}$ szorzatából. Ekkor $a = cp$ és $b = dq$, ahol $c, d \in Q_{\gamma_1}$ és $p, q \in Q_{\gamma_2}$. Megszerkesztjük a $c_0 = c, c_1, c_2, \dots, c_n = d$ és $p_0 = p, p_1, p_2, \dots, p_n = q$ olyan GH -láncokat, amelyek összekötik a c és d elemeket, illetve a p és q elemeket. Ekkor $c_0p_0 = cp, c_1p_1, c_2p_2, \dots, c_np_n = dp, dp_1, dp_2, \dots, dp_n = dq$ olyan GH -lánc, amely összeköti a cp és dq elemeket.

Valóban, a c_{i-1} és c_i elemek tetszőleges $i = 1, 2, \dots, m$ mellett benne vannak egy és ugyanazon G_{α_i} vagy H_{β_i} halmazban. Minthogy azonban a G és H felbontások kongruencia-reláció által vannak meghatározva, ezért a $G_{\alpha_i}p$ halmaz teljesen benne van a G felbontás egyik halmazában, a $H_{\beta_i}p$ halmaz pedig a H felbontás valamelyik halmazában. Következésképpen a $c_{i-1}p, c_i p$ elemek egyidejűleg benne vannak a két utóbbi halmaznak az egyikében. Hasonló megfontolásokat elvégezve a tetszőleges dp_{j-1}, dp_j elempárra ($j = 1, 2, \dots, n$) bebizonyíthatjuk, hogy a fentebb megszerkesztett lánc GH -lánc.

Ezzel pedig be lett bizonyítva, hogy a $Q_{\gamma_1} \cdot Q_{\gamma_2}$ halmaz GH -összefüggő, és következképpen teljesen benne van a maximális GH -összefüggő halmazok egyikében. Minthogy pedig az összes ilyen halmaz benne van a Q felbontásban, ezért a tétel be lett bizonyítva.

Állapodjunk meg abban, hogy azt mondjuk, hogy az F szabad félcsoporthoz valamilyen K automata-felbontása (vagy félcsoporthoz-felbontása) az F félcsoporthoz R_x felbontásának adott halmazába beleírt maximális automata-felbontás (illetve maximális félcsoporthoz-felbontás), hogyha a K felbontás bele van írva az összes R_x felbontásba, és ha az semmiféle bővebb automata-felbontásnak (illetőleg félcsoporthoz-felbontásnak) nem részfelbontás. (A maximalitásnak a fogalma itt a felbontást alkotó halmazokra vonatkozik, nem magára a felbontásra.)

A 27. tételből könnyen levezethető a következő

28. TÉTEL: *Létezik az F szabad félcsoporthoz felbontásainak a tetszőleges halmazához egy és csakis egy olyan maximális automata-felbontás (illetve maximális félcsoporthoz-felbontás), amely bele van írva ennek a halmaznak az összes felbontásába.*

BIZONYÍTÁS: A F félcsoporthnak a felbontása különálló elemekre (szavakra) nyilvánvalóan olyan félcsoporth-felbontás, és következésképpen olyan automata-felbontás is, amely bele van írva ennek a félcsoporthnak tetszőleges felbontásába, és ezáltal persze az M halmazból az összes felbontásba is. Az pedig szintén nyilvánvaló, hogy automata-felbontások (ill. félcsoporth-felbontások) tetszőleges, növekvő láncának az egyesítése ugyancsak automata-felbontás (ill. félcsoporth-felbontás). Ezért szükségképpen létezik maximális olyan automata-felbontás (ill. félcsoporth-felbontás), amely bele van írva az M halmazból az összes felbontásba. Jelöljük ezt G -vel.

Ha a G -n kívül még léteznék egy másik olyan maximális felbontás, amely az M -ből az összes felbontásba bele van írva, akkor a 27. tétel alapján a Q egyesítésük szintén automata-felbontás vagy pedig félcsoporth-felbontás volna, annak megfelelően, hogy a G és H felbontások egyidejűleg vagy automata-felbontások, vagy pedig félcsoporth-felbontások. Könnyű belátni azt, hogy a Q felbontás bele van írva az M halmazból egy tetszőleges R felbontásba. Valóban, tetszőleges két olyan a és b elemet, amelyek olyan különböző R_α és R_β részhalmazokban vannak benne, amelyek az R felbontásba beletartoznak, nem lehet összekötni GH -láncsal, minthogy a G és H felbontásból egy tetszőleges részhalmaz vagy teljesen benne van, vagy pedig teljesen nincs benne az R_α halmazban (vagy ami egyre megy, az R_β halmazban). Ezért egy tetszőleges GH -összefüggő részhalmaz, és egyszersmind a Q felbontásnak tetszőleges részhalmaza is teljesen benne van az R felbontás egyik részhalmazában. Végül pedig azt sem nehéz megérteni, hogy a G és H felbontások a Q felbontásnak egyszersmind részfelbontásai, miközben a Q felbontás szigorúan nagyobb, mint a G és H felbontás abban az esetben, amikor az utóbbi felbontások különbözők. Minthogy pedig ez lehetetlen, ezért a G és H felbontás egy és ugyanaz, amelyet éppen bizonyítani kellett.

Egy szabad félcsoporthnak az automata-felbontásai igen kényelmes apparátust szolgáltatnak az úgynevezett összefüggő, iniciális automatáknak a tanulmányozásához.

17. DEFINÍCIÓ: Azt mondják, hogy az A automatának valamilyen a_2 állapotát *ugyanannak az automatának az a_1 állapota generálja*, hogyha található az A automata bemenő ábécéjében olyan p szó, amely átviszi az automatát az a_1 állapotból az a_2 állapotba. Egy iniciális automatát *összefüggőnek* nevezünk, hogyha összes állapotát generálja a kezdő állapot.

Ebben a paragrafusban olyan automatákat fogunk vizsgálni, amelyek csak az állapotoknak és a bemenő jeleknek az olyan halmazai által vannak megadva, amelyek az átmeneti függvények révén állanak egymással összefüggésben. Ennél az automaták kimenő jelei és a kimeneti függvényei figyelmen kívül maradnak. Az ilyen automatákat *kimenő jelek nélküli automatáknak* fogjuk nevezni. A kimenő jelek nélküli automatákat kívánság szerint lehet olyan *Moore-féle* automaták gyanánt is tekinteni, amelyeknél egy tetszőleges állapotnak a jelül szolgál maga ez az állapot, következésképpen a kimenő jeleknek a halmaza egybeesik az automata állapot-halmazával. Állapodjunk meg abban, hogy az ilyen automatákat *Medvegyev-féle automatáknak* nevezzük.

Tetszőleges olyan A összefüggő, iniciális automatának a megadása, amelynek $\mathfrak{X}$ a bemenő ábécéje, meghatározza az $\mathfrak{X}$ ábécéjű, egységelemes szabad F félcsoporthnak valamilyen K automata-felbontását, és pedig egy felbontást az olyan eseményeknek a halmazán, amelyek az A automatának a különböző állapotai által vannak

előállítva. Valóban, hogyha F_x a K felbontásnak tetszőleges olyan halmaza, amely az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes olyan szóból áll, amelyek az A automatát átviszik az a_0 kezdő állapotból valamelyik a_x állapotba, x pedig az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének tetszőleges betűje, akkor az $F_x \cdot x$ halmaz teljesen benne van a K felbontás halmazainak az egyikében (éspedig azoknak a szavaknak a halmazában, amelyek az automatát átviszik az a_0 állapotból az $a_x x$ állapotba). A leírt módon kapott K automata-felbontást az adott A automatának *megfelelő* felbontásnak nevezzük.

Megfordítva, lehet $\mathfrak{A}$ -izomorfizmus erejéig egyértelműen definiálni egy $\mathfrak{X}$ ábécéjű (egységelemes) F szabad félcsoporth bármely K automata-felbontásának az alapján olyan összefüggő A , iniciális (kimenő jelek nélküli) automatát, amelyre nézve éppen a K felbontás lesz a neki megfelelő felbontás. Valóban, vegyük az A automata állapotai gyanánt magukat az F_x halmazokat, amelyek a K felbontást alkotják. Az automatának az átmeneti függvénye egyértelműen definiálható a következő feltétel által: a bemenő ábécének tetszőleges x betűjére nézve és az A automatának tetszőleges F_x állapotára nézve $F_x x$ állapot gyanánt a K felbontásnak a halmazai közül éppen azt választjuk, amelyik tartalmazza az $F_x x$ halmazt.

Az automata kezdő állapota gyanánt választva azt az F_0 halmazt, amely tartalmazza az e üres szót, A -t mint kimenő jelek nélküli iniciális automatát definiáljuk. Hogyha p tetszőleges szó a K felbontás valamelyik F_x halmazából, akkor ez a szó a megszerkesztett A automatában átvizsi az automatát az F_0 állapotból az F_x állapotba. Valóban, minthogy $e \in F_0$, valamint $ep = p \in F_x$, ezért az automata-felbontásnak a definíciója szerint $F_0 p \subseteq F_x$. Ezzel pedig be lett bizonyítva, hogy az A automata összefüggő és az eredeti K felbontás a neki megfelelő felbontás gyanánt szolgál.

Legyen B tetszőleges, másik, összefüggő iniciális automata kimenő jelek nélkül, amelyre nézve a K felbontás éppen a neki megfelelő felbontás. Megfeleltetve a B automata mindegyik b állapotának az A automatának azt az a állapotát, amely ugyanazt az eseményt állítja elő, mint a b állapot, akkor a B automatának nyilván az A automatára való $\mathfrak{A}$ -izomorfizmusát kapjuk.

Ilyen módon bizonyítást nyert a következő

29. TÉTEL: *Létezik egyfelől az állapotra nézve páronként nem izomorf, tetszőlegesen adott $\mathfrak{X}$ bemenő ábécével rendelkező, összefüggő, kimenő jelek nélküli, összes iniciális automatának a halmaza, másfelől pedig az $\mathfrak{X}$ ábécéjű, egységelemes szabad félcsoporth összes automata-felbontásának a halmaza közt egy természetes módon meghatározott, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.*

Felhasználva a 25. tételt, azonosítani fogjuk a kimenő jelek nélküli, összefüggő, iniciális automatákat a szabad félcsoporthoknak a nekik megfelelő felbontásaival.

Az ilyen vagy olyan $\mathfrak{X}$ ábécéjű S eseménynek a megadása meghatározza az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoporthnak az S és $\bar{S}$ halmazra való felbontását. Az olyan iniciális automata szintézisének a feladatát, amely előállítja az $\{S_x; x \in M\}$ események adott halmazát saját állapotainak a halmazai által, meg lehet fogalmazni a felbontásoknak a nyelvén is, mint olyan feladatot, hogy írjuk bele az automata-felbontást azoknak a felbontásoknak a halmazába, amelyek az S_x ($x \in M$) események által meg vannak határozva.

Ezt a feladatot könnyű redukálni az automata-felbontás egy olyan R felbontásba való beleírásának a feladatára, amely az összes olyan $\bigcap_{x \in M} S_x$ alakú nem üres

metszetből áll, ahol $\bar{S}_\alpha$ vagy az S_α -nak vagy pedig $\bar{S}_\alpha$ -nak a jele. Ugyanez a beírás úgy is megvalósítható (lásd LETICSEVSKIJ [36]), hogy megszerkesztjük az $R = \{R_\beta; \beta \in N\}$ felbontás egymás után következő részfelbontásainak a sorozatát. Ebből a célból az R_β részhalmazok közül mindegyiket szétbontjuk páronként egymást nem metsző olyan R_{β_v} részhalmazokra, hogy az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécé tetszőleges x betűje mellett az $R_{\beta_v} \cdot x$ szorzat teljesen benne legyen az R_β ($\beta \in N$) halmazok közül valamelyikben. Az R_{β_v} halmazok maguk is ugyancsak alá vannak vetve egy pontosan ugyanilyen szabály szerint elvégzendő szétbontásnak. Ezt hasonló módon folytatva eljutunk a keresett automata-felbontáshoz.

A reguláris események véges rendszerének az esetében a leírt módszer elvezetne egy hatékony szintézis-algoritmushoz, hogyha volna eléggé egyszerű módszer a reguláris események metszete és komplementuma reguláris kifejezéseinek a megtalálására vonatkozólag.

Mindmáig azonban nem ismeretese, sajnos, olyan módszerek ennek a feladatnak a megoldására, amelyek lényegesen egyszerűbbek, mint az a módszer, amely az automatának az előzetes szintézisére alapul (lásd a 18. tételt).

Most pedig rátérünk a félcsoporthelbontásoknak a tanulmányozására.

Mindegyik $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automata meghatározza az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoporthelbontásnak valamilyen félcsoporthelbontását. Valóban, F -ből minden egyes p szó az A automata $\mathfrak{A}$ állapothalmazának önmagába való valamilyen $a \rightarrow ap$ ($a \in \mathfrak{A}$) leképezését indukálja. Minden egyes ilyen φ leképezésre nézve jelöljük S_φ -vel az $\mathfrak{X}$ ábécéjű összes olyan szóknak a halmazát, amelyek a φ leképezést létesítik.

Az összes nem üres S_φ halmaznak a rendszere nyilván megadja az F félcsoporthelbontásnak valamilyen R felbontását. Könnyen belátható az is, hogy $S_\varphi \cdot S_\psi \subseteq S_{\varphi \cdot \psi}$. Ilyen módon az R felbontás valóban félcsoporthelbontás lesz. Ezt az A automata által meghatározott félcsoporthelbontásnak nevezzük.

Az R felbontás az F szabad félcsoporthelbontás meghatározza valamilyen kongruencia-relációját, amelyet az adott A automata által indukált kongruencia-relációnak fogunk nevezni.

Az $S_\varphi \cdot S_\psi \subseteq S_{\varphi \cdot \psi}$ relációból és az R felbontás értelmezéséből közvetlenül adódik a következő

30. TÉTEL: *A tetszőleges A automata által indukált kongruencia-reláció olyan, hogy F -nek a szerinte vett faktor-félcsoporthelbontja izomorf az automatának a félcsoporthelbontjával.*

Tekintsünk egy A tetszőleges, összefüggő iniciális automatát, amelynek $\mathfrak{X}$ a bemenő ábécéje, és tekintsük az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoporthelbontnak az A automatának megfelelő felbontását, más szavakkal, olyan $\{R_\alpha\}$ eseményeknek a halmazát, amelyek az A különböző a_α állapotai által vannak előállítva. (Itten a_α befutja az A automata összes állapotának $\mathfrak{A}$ halmazát.) Jelöljük $P = \{P_\beta\}$ -val azt a félcsoporthelbontást, amelyet az A automata határoz meg, továbbá $Q = \{Q_\gamma\}$ -val pedig tetszőleges olyan félcsoporthelbontást, amely bele van írva az R automata-felbontásba.

Megmutatjuk, hogy a Q felbontás a P felbontásnak részfelbontása. Valóban, legyen Q_γ a Q felbontásnak tetszőleges részhalmaza. Válasszunk ki tetszőleges olyan q szót, amely benne van Q_γ -ban, és tekintsük a P felbontásnak azt a P_β részhalmazát, amely tartalmazza a q szót. Az R felbontásnak tetszőleges R_α részhalmazára nézve jelöljük $R_{\alpha(q)}$ -val ennek a felbontásnak a részhalmazait közül azt, amelyikbe az R_α részhalmaz átkerül a q szónak a hatása alatt, azaz: $R_\alpha \cdot q \subseteq R_{\alpha(q)}$. A P felbontásnak a definíciójából közvetlenül következik, hogy a P_β részhalmaz

az összes olyan p szóból áll, amelyekre $R_\alpha \cdot p \subseteq R_{\alpha(q)}$ teljesül, az R felbontásnak tetszőleges R_α részalmazára nézve.

Minthogy pedig a Q felbontás bele van írva az R felbontásba, ezért az R_α halmazok közül mindegyik a Q felbontás részalmazai valamilyen halmazának az egyesítése. Az ilyen $Q_{\gamma(\alpha)}$ részalmazok közül egy tetszőleges a p szó által átmegy az $R_{\alpha(q)}$ halmazba, azaz $Q_{\gamma(\alpha)} \cdot p \subseteq R_{\alpha(q)}$. Egyszersmind, minthogy a Q felbontás félcsoporthelbontás, a $Q_{\gamma(\alpha)} \cdot Q_\gamma$ szorzat teljesen benne van a Q felbontásnak a részalmazai közül az egyikben, ami azonban azt jelenti, hogy az R felbontásnak a részalmazai közül az egyikben is benne van. Minthogy $p \in Q_\gamma$ és $Q_{\gamma(\alpha)} p \subseteq R_{\alpha(q)}$, ezért $Q_{\gamma(\alpha)} \cdot Q_\gamma \subseteq R_{\alpha(q)}$. Ilyen tartalmazás érvényes tetszőleges olyan $Q_{\gamma(\alpha)}$ részalmazra nézve is, amely benne van R_α -ban. Következésképpen $R_\alpha \cdot Q_\gamma \subseteq R_{\alpha(q)}$.

Meg gondolva azt, hogy P_β az összes olyan p szóból áll, amelyekre nézve $R_\alpha \cdot p \subseteq R_{\alpha(q)}$ érvényes, azt kapjuk, hogy $Q_\gamma \subseteq P_\beta$. Ezzel pedig be lett bizonyítva a Q_γ részalmaznak Q -ból való tetszőleges megválasztása alapján az, hogy a Q felbontás bele van írva a P felbontásba. A kapott eredményt össze lehet foglalni a következő állításnak az alakjában:

31. TÉTEL: *Az a félcsoporthelbontás, amelyet egy tetszőleges A összefüggő, iniciális automata határoz meg, egybeesik egy olyan maximális félcsoporthelbontással, amely abba az automata-felbontásba van beleírva, amelyet az összes olyan eseménynek a rendszere határoz meg, amelyek az A automatának a különböző állapotai által vannak előállítva.*

Tekintsük az egy és ugyanazon $\mathfrak{X}$ ábécéjű $\{S_\alpha\}$ eseményeknek egy tetszőleges M rendszerét, valamint az $\mathfrak{X}$ ábécéjű egységelemes F szabad félcsoporthelbontásainak a neki megfelelő K rendszerét. Azt a maximális automata-felbontást, amely a 28. tétel alapján egyértelműen meg van határozva, és amely bele van írva a K rendszernek az összes felbontásába, az M eseményrendszer által meghatározott automata-felbontásnak nevezzük. Hasonló módon, azt az (egyértelmű) P maximális félcsoporthelbontást, amely a K rendszernek az összes felbontásába bele van írva, az eseményeknek az M rendszere által meghatározott félcsoporthelbontásnak nevezzük.

A P félcsoporthelbontást meghatározza az F szabad félcsoporthelbontás valamilyen kongruencia-relációja, amelyet az adott M eseményrendszer által meghatározott kongruencia-relációnak nevezünk. Végül pedig, az F félcsoporthelbontás eme kongruencia-relációja szerint vett, és absztrakt félcsoporthelként tekintett faktorfélcsoportheljét az adott M eseményrendszer által meghatározott félcsoporthelnek nevezzük, magát az M rendszert pedig az ehhez a félcsoporthelhez tartozó eseményrendszernek nevezzük.

Legyen M tetszőleges olyan eseményrendszer, amelynek az ábécéje $\mathfrak{X}$. Az F egységelemes szabad félcsoporthelbontás az ezzel a rendszerrel meghatározott $R = \{R_\alpha\}$ automata-felbontása egyértelműen megad (a 29. tétel alapján) valamilyen összefüggő, iniciális automatát, amelynek az állapotai gyanánt lehet venni az R felbontásnak az R_α halmazait, az átmeneteit pedig az $x \in \mathfrak{X}$ betűnek a hatása alatt olyan módon lehet definiálni, hogy az $R_\alpha \cdot x$ állapot gyanánt azt kell az R felbontásnak a halmazai közül választani, amelyik tartalmazza az $R_\alpha \cdot x$ halmazt. Továbbá kezdő állapot gyanánt az R halmazok közül azt kell választani, amelyik tartalmazza az e üres szót.

Könnyű belátni, hogy az ilyen módon megszerkesztett összefüggő, iniciális, kimenő jelek nélküli A automatában az M rendszer összes eseménye előállítható az

állapotoknak bizonyos halmazai által. Ezt az automatát az *eredeti M eseményrendszer által meghatározott automatának* nevezzük.

Legyen B tetszőleges másik, összefüggő, kimenő jelek nélküli, $\mathfrak{X}$ ábécéjű olyan iniciális automata, amely előállítja az M rendszer összes eseményét a saját állapotainak a halmazai által. Miként az A automatának az esetében is, úgy a B automatának az állapotait is lehet azonosítani azokkal a Q_y eseményekkel, amelyek a különböző eseményei által elő vannak állítva. Az összes Q_y részhalmaznak a halmaza olyan automata-felbontást alkot, amely bele van írva az összes olyan $\{S_\alpha, \bar{S}_\alpha\}$ felbontásba, amelyek az M rendszernek az S_α eseményei által vannak meghatározva. Az R felbontásnak a maximalitása alapján azt kapjuk, hogy a Q felbontás bele van írva az R felbontásba.

Mármost könnyű belátni azt is, hogy hozzárendelve minden egyes Q_y halmazhoz egy olyan R_x halmazt, amely Q_y -t tartalmazza, a B automatáknak egy, állapotok szerint való homomorfizmusát ($\mathfrak{A}$ -homomorfizmusát) kapjuk az A automatára. Ilyen módon be lett bizonyítva a következő

32. TÉTEL: *Tetszőleges, összefüggő (kimenő jelek nélküli) olyan iniciális automata, amely az események egy adott rendszerének az eseményeit előállítja a saját állapotai által, $\mathfrak{A}$ -homomorf módon leképezhető egy olyan automatára, amelyet ez az eseményrendszer határoz meg.*

A 32. tétel azt mutatja, hogy olyan automatának a megszerkesztésére, amelyet az eseményeknek egy adott M rendszere határoz meg, elegendő megszerkeszteni egy olyan, tetszőleges, iniciális, összefüggő, kimenő jelek nélküli A automatát, amely előállítja az M rendszernek az összes eseményét állapotainak a halmazai által, és úgy tekintve az A automatát, mint Medvegyev-féle automatát, azaz mint a Moore-féle automatának olyan speciális esetét, amelynél az állapotoknak a jelei gyanánt maguk ezek az állapotok szolgálnak, elegendő ezt az automatát minimalizálni a 6. tétellel összefüggésben.

Ez az előírás megadja annak a lehetőségét, hogy találjunk olyan konstruktív módszert, amely azt eredményezi, hogy ténylegesen megkeressük (legalábbis a reguláris események véges rendszereinek az esetében) azokat az automatákat és félcsoportokat, amelyek az események adott rendszere által vannak meghatározva. Ebből a célból elegendő venni az automaták szintézisének és minimalizációjának azokat a módszereit, amelyeket az előző paragrafusban fejtettünk ki.

Azt, hogy ilyen módon mármost olyan automatát kapunk, amelyet az eseményeknek az adott rendszere határoz meg, a 32. tétel biztosítja. Ami pedig azt a félcsoportot illeti, amelyet ez a rendszer határoz meg, az megadható a következő állításnak a segítségével.

33. TÉTEL: *Bármely adott eseményrendszer által meghatározott félcsoport izomorf ugyanazon rendszer által meghatározott automata félcsoportjával.*

A megfogalmazott tétel a 30. és 31. tételeknek a közvetlen következménye, minthogy az olyan maximális félcsoport-felbontás, amely bele van írva az események tetszőleges rendszerének egy automata-felbontásába, nyilvánvalóan egybeesik az eme rendszer által meghatározott félcsoport-felbontással.

A kapott eredmények természetes feladatként vetik fel az olyan események rendszerének a tanulmányozását, amelyek a félcsoportok ilyen vagy olyan speciális (véges, kommutatív, nilpotens stb.) fajtáihoz tartoznak.

Az előző paragrafus eredményeiből kapható a következő

34. TÉTEL: *A reguláris eseményeknek a véges rendszerei és csakis ezek olyan eseményrendszerek, amelyek véges félcsoporthoz tartoznak.*

18. DEFINÍCIÓ: Valamilyen eseményt *kommutatívnak* nevezünk, hogyha tetszőlegesen adott p szóval együtt ez az esemény tartalmazza az összes olyan szót is, amelyek annak az eredményeképpen kaphatók a p szóból, hogy permutáljuk tetszőleges módon a betűit.

Érvényes a következő

35. TÉTEL: *Kommutatív eseményeknek a tetszőleges rendszerei és csakis ezek olyan eseményrendszerek, amelyek kommutatív félcsoporthoz tartoznak.*

BIZONYÍTÁS: Legyen M az $\mathfrak{X}$ ábécéjű kommutatív $\{S_x\}$ eseményeknek egy tetszőleges rendszere.

Az $\mathfrak{X}$ ábécéjű és egységelemes F szabad félcsoporthoz az olyan halmazokra való R felbontása, amelyeket úgy lehet kapni, hogy adott tetszőleges szóhoz hozzávesszük a szó betűinek az összes permutációját, nyilván olyan félcsoporthoz felbontás lesz, amely bele van írva az összes $\{S_x, S_x\}$ felbontásba. Az ennek a felbontásnak megfelelő kongruencia-reláció pedig (amelyet az $xy = yx$ azonosan teljesülő definiáló reláció által adunk meg), egy G faktorfélcsoporthoz határoz meg, amely szabad kommutatív félcsoporthoz.

Világos, hogy az R felbontás bele van írva abba a P félcsoporthoz felbontásba, amelyet az események M rendszere határoz meg. Az a kongruencia-reláció, amely megfelel a P felbontásnak, egy olyan H faktorfélcsoporthoz határoz meg, amely az ismert homomorfia-tétel alapján izomorf a G félcsoporthoz valamilyen faktorfélcsoporthoz. Minthogy pedig ez az utóbbi félcsoporthoz kommutatív, ezért kommutatív a H félcsoporthoz is, amely egyik irányban bebizonyítja a tételt.

Megfordítva, hogyha az események M rendszere kommutatív félcsoporthoz tartozik, akkor ennek a félcsoporthoz a szabad félcsoporthoz kongruencia-relációja szerint vett alakban való megadásánál azok az ekvivalencia-osztályok, amelyek ezzel a kongruencia-relációval vannak meghatározva, kommutatív eseményeket alkotnak. Minthogy pedig kommutatív eseményeknek a tetszőleges egyesítései ugyancsak kommutatívok, ezért az M halmaznak az összes eseménye is kommutatív lesz. Ezzel a 35. tételt teljesen bebizonyítottuk.

A 34. és 35. tételek elegendő megvilágítást adnak annak a kérdéscsoportnak a lényegéről, amely az események és a félcsoporthoz tanulmányozásához való leírt közeledésnél vetődik fel. Ennél a legnagyobb jelentőségű azoknak az ekvivalencia-osztályoknak a megszerkesztése, amelyek egy szabad félcsoporthoz tetszőleges kongruencia-relációjának felelnek meg, és amelyek meghatározzák azokat a faktorfélcsoporthoz, amelyek az adott (absztrakt) G félcsoporthoz izomorfok.

Világos például az, hogy egy olyan ekvivalencia-osztálynak a jelenléte, amely nem reguláris esemény, elegendő ahhoz, hogy bebizonyítottunk vegyük a G félcsoporthoz a végtelenségét. Könnyű azt is belátni, hogy hasonló megfontolások lényeges szerepet játszanak az olyan problémáknak a megoldásánál, amelyek olyan típusúak, mint az ismert *Burnside-féle* (nagy) probléma.

Eme paragrafus eredményeinek a felhasználása elvezet az eseményekre vonatkozó reguláris felírások nyelve kibővítésének a lehetőségéhez, és lehetővé teszi,

hogy megvalósítsuk az olyan események nagyobb osztályának eléggé tényleges leírását, amelyek nem állíthatók elő véges automatákban. Egy ilyen bővítés a reguláris kifejezéseknek a felhasználásán kívül még a szabad félcsoportban levő ilyen vagy olyan definiáló relációknak a felhasználásán alapul, amelyek lehetnek mind közönsek, mind pedig identikus relációk.

19. DEFINÍCIÓ: Legyen S egy $\mathfrak{X}$ ábécéjű tetszőleges esemény, M az $\mathfrak{X}$ ábécéjű F szabad félcsoportban definiáló relációknak tetszőleges rendszere. Az S eseménynek a definiáló relációk M rendszere szerint vett *lezárásának* nevezzük azt az eseményt, amely az S eseménynek az összes szavából és még az összes olyan szóból áll, amelyek az M rendszer definiáló relációinak az alapján ekvivalensek az S eseménynek a szavaival. Valamilyen esemény *kommutatív lezárásának* nevezzük az eseménynek a lezárását a definiáló relációknak olyan rendszere szerint, amely az $xy = yx$ egyetlen, identikus definiáló relációból áll.

A kommutatív lezárás segítségével tetszőleges esemény átalakítható kommutatív eseménnyé, ha azt kiegészítjük olyan szavakkal, amelyet a hozzátartozó szavakból úgy kapunk, hogy az öt alkotó betűknek az összes lehetséges permutációját vesszük.

Könnyű belátni, hogy valamilyen reguláris eseménynek a kommutatív lezárása nem feltétlenül reguláris. Valóban, az $R = \{xy\}$ reguláris eseményre alkalmazva a kommutatív lezárásnak a műveletét, nyilván olyan S eseményhez jutunk, amely az (x, y) ábécéjű összes olyan szóból áll, amelynek egyenlő számú x és y betűt tartalmaznak. Amde a 14. tétel alapján az S esemény nem állítható elő véges automatában, és következésképpen nem is reguláris (lásd a 16. tételt).

Ilyen módon már a kommutatív lezárás művelete is kilép a reguláris események osztályának a határain. Felhasználva az olyan események lezárásának a műveletét egy véges definiáló reláció-rendszer szerint véve, amelyek reguláris kifejezésekkel vannak megadva, az események olyan osztályának a leírására kapunk nyelvet, amely magába zárja valódi részosztály gyanánt a reguláris eseményeknek az osztályát.

Ennek a paragrafusnak a befejezésképpen megemlítjük, hogy JU. J. SZORKIN-nak az előzőleg már említett [38] dolgozatában az a kérdés van vizsgálva, hogy (a kimenő jelek nélküli) automaták hogyan adhatók meg generátorelemeknek és definiáló relációknak a segítségével. Egy tetszőleges, kimenő jelek nélküli $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ automatában ebből a célból kitüntetjük az állapotoknak a $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ halmazát, úgy, hogy az A automatának egy tetszőleges a állapotát generálja legalább egy $b \in \mathfrak{B}$ állapot. Más szóval, létezik olyan p bemenő szó, hogy $bp = a$.

A $\mathfrak{B}$ halmazt természetes dolog az A automata generáló állapotai halmazának nevezni. Ha kizárjuk a szabad automatáknak azt az esetét, amelyet a fentiekben vizsgáltunk (lásd a 9. definíciót), akkor az A automatában szükségképpen lehet találni legalább egy olyan a állapotot, amelyet a generáló állapotokból egymástól különböző módokon lehet kapni, pl. $a = b_1 \cdot p_1$ és $a = b_2 p_2$. Hogy ezt a körülményt természetes módon megjelöljük, bevezetjük a $b_1 p_1 = b_2 p_2$ definiáló relációt.

Az ilyen módon kapott definiáló relációból leszarmaztatott definiáló relációkat lehet kapni, például ennek a relációnak mindkét oldalán jobbról szorozva a tetszőleges q bemenő szóval; ez adódik $b_1 p_1 q = b_2 p_2 q$. Felhasználva ezt a körülményt, az A automatának a megadásánál nem kell felírni az összes definiáló relációt, csupán a definiáló relációknak egy olyan R halmazát, hogy az A automatának egy tetszőleges definiáló relációja vagy maga is R -be beletartozik, vagy pedig ez az R -ből valamilyen definiáló relációnak a leszarmaztatott relációja.

Minden ilyen R halmazt az A automata *definiáló relációi rendszerének* nevezünk (a generáló állapotoknak a $\mathfrak{B}$ rendszerére vonatkozólag). Az algebraiban jól ismert módszerek segítségével végezhető el egy tetszőleges automatának a generáló elemek és definiáló relációk útján történő megadása.

Könnyű belátni azt is, hogy a kimenő jelek nélküli tetszőleges $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ automatát meg lehet adni a generátoroknak a rendszere és az $ax = \delta(a, x)$ alakú definiáló relációknak a rendszere által, ahol a befutja az automata összes állapotának a halmazát, x pedig az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécének egy eleme. Az $ax = b$ alakú definiáló relációt, ahol x a bemenő ábécének egy (tetszőleges) betűje, *kanonikus* relációknak nevezzük.

Hogyha az A automata a generátoroknak tetszőleges $\mathfrak{B}$ rendszerével és a definiáló relációknak az R rendszerével van megadva, akkor — követve JU. J. SZORKIN-t — nem nehéz megadni ezt az automatát csupán egyes kanonikus definiáló relációknak a segítségével, miközben új generáló állapotokat vezetünk be. Így például, ha az $ap = bq$ relációval van dolgunk, ahol $p = p_1x$, be lehet vezetni az $a_1 = ap$ és $b_1 = bq$ új állapotokat és át lehet alakítani ezt a relációt a kanonikus $a_1x = b_1$ relációvá. Felhasználva ezt a fogást, JU. J. SZORKIN megoldja az olyan automatákra vonatkozólag a szavak azonosságának és az izomorfizmusnak a problémáját, amelyek a definiáló relációknak véges rendszerei által vannak megadva. Az olyan algoritmusok megszerkesztésének az alapötlete, amelyek megoldják ezeket a problémákat, abban áll, hogy a definiáló relációknak a rendszereit átalakítják kanonikus alakba, továbbá, hogy figyelmen kívül hagyják az állapotoknak azokat a halmazait, amelyek szabad részautomatákhoz tartoznak, és hogy az ezek után megmaradó véges részleges automatákat tanulmányozzák. A megfelelő eljárásoknak a részleteibe nem megyünk bele.

5. §. Az automaták összetétele

Az automaták elméletének szisztematikus felépítésében nagy szerepet játszanak az automaták *összetételének* különféle módjai, amelyek lehetővé teszik, hogy az egyszerűbb automatákból bonyolultabb automatákat szerkesszünk. Mindenekelőtt az automatáknak az úgynevezett *direkt összegét* vizsgáljuk.

20. DEFINÍCIÓ: A közös bemenő és közös kimenő ábécéjű $A_\alpha(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta_\alpha, \lambda_\alpha$ automaták halmaza *direkt összegének* azt a $B(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \delta, \lambda$ automatát nevezzük, amelynek állapothalmaza egybeesik az összes A_α ($\alpha \in M$) automata állapothalmazainak az egyesítésével, a $\delta(a, x)$ átmeneti függvénynek és a $\lambda(a, x)$ kimeneti függvénynek pedig az értékei egybeesnek az olyan A_α automata $\delta_\alpha(a, x)$ átmeneti függvényének és $\lambda_\alpha(a, x)$ kimeneti függvényének az értékeivel, amelynek az állapothalmaza tartalmazza az a állapotot. (Megjegyezzük, hogy megállapodunk az egyértelműség kedvéért abban, hogy ha $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$ nem üres, és ha a ennek a metszetnek egy eleme, akkor legyen $\delta_\alpha(a, x) = \delta_\beta(a, x)$ és $\lambda_\alpha(a, x) = \lambda_\beta(a, x)$. Egyébként „indexezés”-sel mindig elérhető, hogy $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_\beta$ üres legyen, ha α különbözik β -től.)

A bevezetett definíciót természetes módon meg lehet világítani arra az esetre nézve, amikor egy *adott* automata felbomlik a saját $\mathfrak{A}$ -részautomatáinak direkt összegére. Ilyen felbontás lényeges szerepet játszik az olyan automaták egy fontos osztályának a tanulmányozásánál, amelyeket *féligegyszerű automatáknak* nevezünk.

A féligeyszerű automaták definiálásának az érdekében bevezetjük az automata *magvának* a fogalmát. Legyen $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ tetszőleges automata. Tekintsük az A automata összes olyan állapotának $\mathfrak{A}_1$ halmazát, amelyek ezen automata átmeneti függvényének az értékei. Továbbá $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X}$ -szel jelölve az összes $a \cdot x$ ($a \in \mathfrak{A}, x \in \mathfrak{X}$) szorzatnak a halmazát, nyilvánvalóan azt kapjuk, hogy $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{A}_1$. Most megszerkesztjük az A automatának az $A_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ alakú $\mathfrak{A}$ -részautomatáját, amelynek állapothalmazául tehát az $\mathfrak{A}_1$ halmaz szolgál, az átmeneti függvény és kimeneti függvény pedig egybeesik az A automata átmeneti függvényével, illetve a kimeneti függvényével az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{X}$ halmazon. Az A_1 automatát az A automata *magvának*, vagy pontosabban az *első magvának* nevezzük.

21. DEFINÍCIÓ: Az olyan automatát, amelyik egybeesik a saját magvával, *féligeyszerű automatának* nevezzük. Az automatát akkor hívják egyszerűnek, hogyha (a nem feltétlenül különböző) állapotainak tetszőleges (a, b) párjához található olyan nem üres bemenő szó, amely átviszi az automatát az a állapotból a b állapotba.

Az egyszerű automaták, az „erősen összefüggő automaták” elnevezés mellett először MOORE [20] dolgozatában voltak definiálva. Az eme automatákra vonatkozó „erősen összefüggő” elnevezés feltételezi a rokonságot azokkal az összefüggő automatákkal, amelyeket az előző paragrafusban vizsgáltunk: egy összefüggő (iniciális) automatában az összes állapot generálható egy bizonyos (rögzített) állapot által, míg az erősen összefüggő automatában tetszőleges állapot generálja az automatának az összes állapotát.

Nyilvánvaló, hogy az erősen összefüggő automatákat lehet olyan automaták gyanánt is jellemezni, amelyeknek nincsen valódi $\mathfrak{A}$ -részautomatájuk.

A 21. definícióból közvetlenül kapható a következő

36. TÉTEL: *Mind valamilyen tetszőleges egyszerű (erősen összefüggő) automata, mind pedig egyszerű automaták tetszőleges halmazának a direkt összege féligeyszerű automata.*

A féligeyszerű automatáknak speciális esetei az úgynevezett inverz automaták, amelyeket S. HUZINO a [30] dolgozatában vizsgált. Állapodjunk meg abban, hogy az A automatát *inverz automatának* nevezzük, hogyha tetszőleges a állapotához és tetszőleges p bemenő szavához található olyan q bemenő szó, amely átviszi az automatát az ap állapotból az a állapotba. Feltétel szerint itt a q szó függ mind a p szótól, mind pedig az a állapottól. A mi utóbbi definíciónk valamennyire különbözik HUZINO definíciójától, amely azt tételezte fel, hogy a q szó csak a p szótól függ, de nem függ az a állapottól. Nyilvánvaló az, hogy minden egyes olyan automata, amely Huzino-féle értelemben inverz automata, egyszersmind inverz automata lesz a mi definíciónk szerint is. A megfordított azonban, magától értetődően, nem érvényes: ugyanis könnyű szerkeszteni példákat olyan automatára, amelynek két állapota van, és amely inverz automata a mi definíciónk szerint, de Huzino-féle értelemben nem az.

Könnyű belátni, hogy ha az automatának a félcsoportja csoport, akkor az automata Huzino-féle értelemben is inverz automata lesz. Ezzel kapcsolatban megállapodunk abban, hogy ezeket az automatákat *csoport-automatáknak* nevezzük, megkülönböztetve ezektől az inverz automatákat, amelyeket fentebb vezettünk be, és amelyek az automatáknak szélesebb osztályát alkotják.

Érvényes a következő állítás, amely általánosítja azt az eredményt, amelyet HUZINO a [30] dolgozatában kapott.

37. TÉTEL: *Bármely inverz automata felbontható egyszerű (erősen összefüggő) automatáknak a direkt összegére.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $A = A(\mathfrak{M}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ tetszőleges inverz automata. Tekintsük ennek valamilyen a_1 állapotát és az összes olyan állapotnak az $\mathfrak{M}_1$ halmazát, amelyek generálhatók az a_1 állapot által. Jelöljük δ_1 -gyel és λ_1 -gyel a δ , illetve λ függvényeknek az $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{X}$ halmazra való megszorítását, és vegyük az A automatának az $A_1 = A_1(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ alakú $\mathfrak{M}$ -részautomatáját. Ez a részautomata erősen összefüggő. Valóban, tetszőleges két állapotát elő lehet állítani $a_1 p$ és $a_1 q$ alakban, ahol p és q az A automatának valamilyen bemenő szavai. Minthogy A inverz automata, található olyan r bemenő szó, hogy $a_1 p r = a_1$. Ámde ekkor az $r q$ szó átviszi az automatát az $a_1 p$ állapotból az $a_1 q$ állapotba. Hogyha az a_1 állapotból legalább az egyik különbözik az $a_1 p$ és $a_1 q$ állapotok közül, akkor az $r \cdot q$ szó szükségképpen nem üres. Hogyha pedig $a_1 p = a_1 q = a_1$, akkor tetszőleges $x \in \mathfrak{X}$ betűre nézve vagy $a_1 x = a_1$, vagy pedig $a_1 x l = a_1$ érvényes valamilyen l nem üres szóval (ti. ha $a_1 x \neq a_1$). Ezért az összes esetben át lehet jutni egy nem üres szónak a hatására az $a_1 p$ állapotból az $a_1 q$ állapotba. Következésképpen az A_1 automata erősen összefüggő.

Ha $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, akkor persze $A = A_1$, és ekkor a tétel be van bizonyítva. Hogyha pedig $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$, akkor választunk egy olyan tetszőleges a_2 állapotot, amely nincs benne az $\mathfrak{M}_1$ halmazban, és megszerkesztjük az $A_2(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_2, \lambda_2)$ részautomatát, amelynek az állapothalmaza gyanánt szolgál az összes olyan állapotnak a halmaza, amelyek generálhatók (az A automatában) az a_2 állapot által. A fentiekhez hasonlóan bebizonyíthatjuk, hogy az A_2 automata erősen összefüggő. Hogyha az $\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}_2$ halmazok egymást metszenék, akkor a metszetükből tetszőleges b elem rendelkezne $b = a_1 p$ és $b = a_2 p$ alakú előállításokkal, ahonnan könnyen levezethető volna az, minthogy A inverz automata, hogy valamilyen r_1 bemenő szó mellett $a_2 = a_1 p_1 r_1$ teljesülne. Ez azonban azt jelentené, hogy $a_2 \in \mathfrak{M}_1$, amely ellentmond az a_2 állapot megválasztásának. Következésképpen az $\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{M}_2$ állapotok idegenek.

Hasonló módon folytatva az eljárást, megszerkesztjük az erősen összefüggő olyan A_α részautomatáknak a rendszerét, amelyek állapotainak a halmazai páronként idegenek, és összegük az egész $\mathfrak{M}$ halmaz. A definíció értelmében az A automata felbomlik az A_α automaták direkt összegére, amelyet éppen bizonyítani kellett.

Nem nehéz megmutatni egy példán azt, hogy a 37. tételnek tetszőleges félig-egyszerű automatára vonatkozó általánosítása nem lehetséges.

Megjegyezzük továbbá, hogy az automata magvának imént bevezetett fogalmát felhasználva, az automaták elméletét a gyűrűk elméletének az analógiájára fel lehet építeni. Ebből a célból tetszőleges A automatára nézve meg lehet szerkeszteni az A_α magvagnak a csökkenő sörát, ahol α befutja a rendszámoknak valamilyen halmazát, kezdve az $\alpha = 0$ értékkel. Ennek a sornak az első tagjául vesszük magát az A automatát, és tetszőleges α rendszámra nézve $A_{\alpha+1}$ -et úgy definiáljuk, hogy ez legyen az A_α automatának a magva. Valamilyen β limesz rendszámra vonatkozólag pedig az A_β automatát úgy definiáljuk, hogy ez legyen az A automatának olyan részautomatája, amely állapotainak a halmaza egybeesik az összes $\alpha < \beta$ rendszámra az A_α részautomaták állapotai halmazainak a metszetével. Ez a sor befejeződik egy legkisebb olyan γ rendszámnál, amelyre $A_{\gamma+1} = A_\gamma$ teljesül.

Az A_γ automata, amelyet az A automata alsó magvának nevezünk, nyilván féligegyszerű. Ez az ismert értelemben a gyűrűelméleti radikálnak felel meg, azonban,

eltérőleg az automatáktól, a gyűrűknek az elméletében nem maga a radikál félig-egyszerű, hanem a gyűrűnek a radikál szerint vett faktorgyűrűje.

Most pedig áttérünk az automaták összetétele olyan másik típusának a tanulmányozására, amelyet természetes dolog az *automaták szorzatának* nevezni. Ténylegesen nem is egy összetétellel lesz ennek során dolgunk, hanem összetételeknek egész osztályával. Egyszerűség kedvéért csak véges számú automatának a szorzatára korlátozzuk magunkat, ámbár a bevezetett fogalmakat könnyen lehet általánosítani az automaták tetszőleges halmazának az esetére is.

22. DEFINÍCIÓ: Az $A_i = A_i(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \delta_i, \lambda_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) automaták *direkt szorzatának* nevezzük azt az $A = A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automatát, amely állapotainak a halmaza, valamint a bemenő és kimenő jeleinek a halmaza éppen az A_i automaták megfelelő halmazainak a szorzata, azaz: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$; $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \dots \times \mathfrak{X}_k$; $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \times \dots \times \mathfrak{Y}_k$. Az A automatának az $a' = \delta(a, x)$ átmeneti függvényét, valamint az $y = \lambda(a, x)$ kimeneti függvényét ezekkel az összefüggésekkel adjuk meg: $a'_i = \delta(a_i, x_i)$ és $y_i = \lambda_i(a_i, x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), ahol $a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$.

Az automaták elméletének gyakorlati alkalmazásainál a direkt szorzat műveletének egyszerűen az automaták adott halmazának együttes vizsgálata felel meg, a köztük levő bármiféle összefüggések nélkül. A gyakorlatban azonban sokkal gyakoribban valósulnak meg az automatáknak az egyesítései az úgynevezett logikai vagy kombinatív vázlatoknak a segítségével. Az absztrakt vizsgálatnál az automaták szorzatának egy általánosabb fogalma felel meg az ilyen egyesítésnek.

23. DEFINÍCIÓ: Az $A_i = A_i(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \delta_i, \lambda_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) automatáknak a *szorzata* az az $A = A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta, \lambda)$ automata, amely az $\mathfrak{X}$ és $\mathfrak{Y}$ két halmaznak és két leképezésnek a megadása által van meghatározva. Ez a két leképezés: az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k \times \mathfrak{X}$ halmaznak az $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \dots \times \mathfrak{X}_k$ halmazba való φ leképezése, és az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k \times \mathfrak{Y}$ halmaznak az $\mathfrak{Y}$ halmazba való ψ leképezése. Az A automata állapotainak $\mathfrak{A}$ halmaza egybeesik az A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) automaták állapotai $\mathfrak{A}_i$ halmazainak $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$ szorzatával. Hogyha $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ az A automatának tetszőleges állapota, $x \in \mathfrak{X}$ pedig tetszőleges bemenő jele, az A automata átmeneti és kimeneti függvényeinek az értékeit a következő összefüggések segítségével definiáljuk az (a, x) páron: $\delta(a, x) = (a_1 x_1, \dots, a_k x_k)$ és $\lambda(a, x) = a$, ahol $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ az $(a_1, a_2, \dots, a_k, x)$ elemnek a képe a φ leképezésnél, y pedig ugyanannak az elemnek a képe a ψ leképezésnél. Hogyha az összes A_i kezdő automata, akkor az A automatát is kezdő automatának vesszük és kezdő állapota gyanánt az $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_k^0)$ állapotot választjuk, ahol a_i az A_i automatának a kezdő állapota.

Megjegyezzük, hogy a 23. definícióban a φ leképezés tulajdonképpen az inverz összefüggés szkémájának absztrakt kifejezése, a ψ leképezés pedig az olyan kimenő szkémáknak az absztrakt kifejezése, amelyeket az automaták összetétele gyakorlati megvalósításánál szerkesztenek meg.

Az automaták elméletével kapcsolatos gyakorlati alkalmazások számára fontos jelentősége van a véges automata rendszerek *teljességi feltételeinek*. Az automaták rendszerének a teljességi problémáját a két legfontosabb esetre vonatkozólag fogalmazzuk meg, ezeket az automaták izomorf és homomorf előállítása eseteinek nevezzük.

24. DEFINÍCIÓ: Véges automatáknak valamely M rendszerét *izomorf módon teljesnek* nevezzük, hogyha bármely előre megadott A véges automatához létezik

az M rendszerhez tartozó automatákkal izomorf automatáknak egy véges szorzata, úgy, hogy ez a szorzat tartalmaz egy az A automatával izomorf $\mathfrak{A}$ -részautomatát. Az M rendszert *homomorf módon teljesnek* nevezzük, hogyha bármilyen A véges automatahoz létezik az M rendszerhez tartozó automatákkal izomorf automatáknak egy véges szorzata, s ez a szorzat tartalmaz egy olyan $\mathfrak{A}$ -részautomatát, amely $\mathfrak{A}$ -homomorf módon leképezhető az A automatára.

Állapodjunk meg abban, hogy a Q esemény rendszert az A automatában előállíthatónak nevezzük, hogyha lehetséges az automata kezdő állapotának olyan megválasztása, amelynél a Q rendszer valamennyi eseménye az A automatában előállítható az állapotainak valamilyen halmaza segítségével. Könnyű belátni, hogy az eseményeknek olyan rendszere, amely elő van állítva az A automatában, elő lesz állítva egy tetszőleges olyan B automatában is, amelyiket homomorf módon le lehet képezni az A automatára. Ennek a ténynek a megállapítása érdekében elegendő a B automatának a kezdő állapota gyanánt egy olyan állapotot megválasztani, amely a B -nek az A -ra történő valamilyen φ homomorfizmusánál az A automatának a kezdő állapotára képeződik le, és a B automatában az állapotok halmazának a reprezentánsai gyanánt pedig elegendő választani az A automata állapothalmazára reprezentánsainak a φ homomorfizmusra vonatkozó teljes inverz képeit.

Az elvégzett megfontolásokból következik az alábbi eredmény, amely A. A. LETICSEVSZKIJ [37] dolgozatából a 2. tétel átfoglalmazása.

38. TÉTEL: *Véges automatáknak egy M rendszere akkor és csak akkor izomorf módon teljes, hogyha a reguláris eseményeknek tetszőleges véges rendszerei elő vannak állítva az olyan automatáknak a véges szorzataiban, amelyek izomorfok az M rendszernek az automatáival.*

Mármost nem nehéz belátni, hogy a véges automaták M rendszerének a homomorf módon (vagy még inkább az izomorf módon) való teljessége megadja annak a lehetőségét (ama feltétel mellett, hogy felhasználjuk az automatáknak az egyesítésére a tetszőleges kombinatív szkémákat), hogy olyan automatákat szerkesszünk meg az automatáknak egy adott rendszeréből, amelyek tetszőleges olyan automataleképezések indukálnak, amelyeket általánosságban véges automatákkal is lehet indukálni. (Ennek során feltesszük azt, hogy az M rendszerből minden egyes automata korlátlan számú példányban fordul elő.)

A. A. LETICSEVSZKIJ [37] megtalálta annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a véges automatáknak egy rendszere homomorf módon teljes legyen. Ez a feltétel abban áll, hogy a rendszer tartalmaz legalább egy olyan automatát, amelynél létezik olyan a állapot, valamint léteznek olyan x_1 és x_2 bemenő jelek, hogy az $a_1 = ax_1$ és $a_2 = ax_2$ állapotok különbözőek, és léteznek olyan p_1 és p_2 bemenő szavak, amelyek átviszik ezeket az állapotokat az a állapotba.

LETICSEVSZKIJ eme állítására vonatkozólag a bizonyítást nem fogjuk elvégezni, hanem megmutatjuk a vele rokon, de a bizonyítására nézve egyszerűbb következő állításnak az érvényességét.

39. TÉTEL: *Ahhoz, hogy a véges automatáknak az M rendszere izomorf módon teljes legyen, szükséges és elegendő az, hogy a rendszernek az állományában létezzék legalább egy olyan A automata, amelynél van két olyan a és b állapot, továbbá vannak olyan x_1, x_2, x_3 és x_4 egymástól nem feltétlenül különböző bemenő jelek, amelyekre $ax_1 = a, ax_2 = b, bx_3 = a$ és $bx_4 = b$ teljesülnek.*

BIZONYÍTÁS: A feltétel szükségességének a bizonyítására az M rendszer $A_1, A_2, \dots, A_k$ automatái véges szorzatának a részautomatája gyanánt vesszük a B automatát az a és b két állapottal, valamint az x és y két bemenő jellel. Az átmeneti függvényt az $ax=b, bx=a, ay=a$ és $by=b$ összefüggésekkel adjuk meg. A 23. definíció értelmében az a és b állapotok az A_i automaták a_i és b_i állapotainak a véges szorzatai: $a=(a_1, a_2, \dots, a_k)$ és $b=(b_1, b_2, \dots, b_k)$. Ugyanannak a definíciónak az értelmében az $ax=b, bx=a, ay=a, by=b$ összefüggések azt jelentik, hogy létezik az A_i automaták bemenő jeleinek négy olyan sorozata: $(x_1, x_2, \dots, x_k); (x'_1, x'_2, \dots, x'_k); (y_1, y_2, \dots, y_k)$ és $(y'_1, y'_2, \dots, y'_k)$, hogy tetszőleges $i=1, 2, \dots, k$ esetén érvényesek az $a_i x_i = b_i, b_i x'_i = a_i, a_i y_i = a_i$ és $b_i y'_i = b_i$ összefüggések. Amennyiben $a \neq b$, létezik olyan i , hogy $a_i \neq b_i$. De ekkor az M rendszerből az A_i automatának az a_i és b_i állapotai eleget tesznek a tételben megfogalmazott feltételnek. Ezzel be lett bizonyítva eme feltételnek a szükségessége.

Az elegendőségnek a bizonyítására tekintsünk egy A automatát n állapottal, továbbá k számú példányt olyan $A_1, A_2, \dots, A_k$ automatákból, amelyek közül mindegyiknek az a_i és b_i két különböző állapota és olyan x_i, y_i, z_i, u_i négy bemenő jele van, hogy

$$(12) \quad a_i x_i = a_i, a_i y_i = b_i, b_i z_i = a_i, b_i u_i = b_i$$

($i=1, 2, \dots, k$). Hogyha $2^k > n$, akkor azonosítani lehet az A automatának minden egyes a állapotát az A_i ($i=1, 2, \dots, k$) automaták a_i vagy b_i állapotainak a véges sorozataival, minthogy különböző állapotoknak különböző sorozatok felelnek meg. Ezeket a sorozatokat az állapotok *kódjainak* nevezzük. Minthogy a (12) összefüggések biztosítják az a_i és b_i állapotok közt a tetszőleges átmeneteket, a 23. definícióban levő φ leképezést lehet úgy megválasztani, hogy az A automata kódjainak a halmazán tetszőleges átmeneti függvényt valósítsunk meg. Alkalmas módon megszerkesztve a φ leképezést, ezen a halmazon a kimeneti függvényt is meg lehet valósítani.

Az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automatáknak a szorzata, amelyet a leképezéseknek a megválasztásával definiálunk, nyilván tartalmaz egy olyan részautomatát, amely $\mathfrak{A}$ -izomorf az A automatával (és amely állapotainak a halmaza éppen az A automatához tartozó állapotok kódjainak a halmaza). Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Az automaták szorzatának az általános fogalmával együtt célszerű az automaták szorzatainak még néhány speciális fajtáját vizsgálni. Egyszerűség kedvéért csupán a kimenő jelek nélküli és közös bemenő ábécékkel rendelkező automatákra korlátozódunk.

Hogyha $A_i(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{X}, \delta_i)$ ($i=1, 2, \dots, k$) ilyen automatáknak tetszőleges véges halmaza, akkor természetes dolog az $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ automatát kimenő jelek nélkül tekinteni, amelynek az állapothalmaza egybeesik az $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_k$ halmazzal, az átmeneti függvényét pedig az $(a_1, a_2, \dots, a_k)x = (a_1 x, a_2 x, \dots, a_k x)$ összefüggés által adjuk meg. Az ilyen módon megszerkesztett A automatát az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automaták $\mathfrak{A}$ -*direkt szorzatának* nevezzük. Hogyha az összes A_i automata kezdő automata, akkor az A automatát szintén vehetjük kezdő automatának, kezdő állapota gyanánt pedig az A_i ($i=1, 2, \dots, k$) automaták kezdő állapotainak a sorozatát vesszük.

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő

40. TÉTEL: A kimenő jelek nélküli $A_1, A_2, \dots, A_k$ kezdő automaták $\mathfrak{A}$ -direkt szorzatában (az állapotoknak a halmazai által) elő lehet állítani az összes olyan eseményt, amelyeket azokból az eseményekből lehet kapni az egyesítés, a közös rész és komplementumképzés műveleteinek a segítségével, amelyek előállíthatók az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automatákban.

A direkt szorzatnak a fogalmával együtt, egyes esetekben célszerűnek mutatkozik az automatáknak a féligdirekt szorzatát és a keresztszorzatát tanulmányozni. Ezeket a fogalmakat olyan kimenő jelek nélküli két $A(\mathfrak{A}, \mathfrak{X}, \delta)$ és $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \delta_1)$ automatának az esetére definiáljuk, amelyeknek közös az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéjük. Az A és B automaták féligdirekt szorzatának természetes dolog azt a $C(\mathfrak{C}, \mathfrak{X}, \delta_2)$ automatát nevezni, amelynek az állapothalmaza az A és B automaták állapotai összes rendezett $c = (a, b)$ párjának a halmaza ($a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}$), míg a bemenő ábécé egybeesik az A és B automatáknak a bemenő ábécéivel. A C automata átmeneti függvényét az

$$(13) \quad (a, b)x = (a\varphi(b, x), bx)$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol x tetszőleges elem $\mathfrak{X}$ -ből, továbbá $\varphi(b, x)$ olyan függvényt jelent a $\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$ halmazon, amelynek értéke az $\mathfrak{A}$ halmazból való. Hogyha a (13) összefüggést kicseréljük az

$$(14) \quad (a, b)x = (a\varphi(b, x), b\psi(a, x))$$

összefüggéssel, akkor eljutunk az A és B automaták keresztszorzatának általánosabb fogalmához. Miként fentebb is, itt $\varphi(b, x)$ és $\psi(a, x)$ a $\mathfrak{B} \times \mathfrak{X}$, illetve az $\mathfrak{A} \times \mathfrak{X}$ halmazokon értelmezett és az $\mathfrak{A}$ halmazból vett értékű függvények.

Könnyű belátni, hogy a $\varphi(b, x)$ és a $\psi(a, x)$ függvényeket úgy lehet tekinteni, mint bizonyos olyan automaták átmeneti függvényeit, amelyeknek állapothalmaza éppen az $\mathfrak{X}$ halmaz, míg a bemenő ábécék egybeesnek a $\mathfrak{B}$, illetve az $\mathfrak{A}$ halmazzal. Ilyen módon, az A és B automatáknak a keresztszorzatát két olyan automatával lehet definiálni, amelyek duálisak az A és B automatákkal abban az értelemben, hogy az állapotok halmazainak szerepét az A és B automaták bemenő ábécéje játssza, a kimenő ábécéknek a szerepét pedig eme automatáknak az állapothalmazai játsszák.

Az automatáknak mind a féligdirekt szorzata, mind pedig a keresztszorzata teljesen meghatározott módszernek felel meg a tényleges automatáknak az összetételénél, amelyek a gyakorlatban használatosak. Ezzel kapcsolatban (véges automaták esetére nézve) nem érdektelen az olyan eseményeknek a tanulmányozása, amelyek ilyen szorzatokban előállíthatók.

HUZINO [32] dolgozatában az automatáknak olyan szorzatát vizsgálta, amely az ebben a paragrafusban vizsgált összes szorzattól különbözik. Ezt a műveletet két olyan A és B automatára lehet alkalmazni, amelyeknél egybeesnek egymással mind az állapotoknak a halmazai, mind pedig a bemenő ábécék. Ennek az összetételnek az eredménye az ugyanazon $\mathfrak{A}$ állapothalmazzal és ugyanazon $\mathfrak{X}$ bemenő ábécével rendelkező C automata, mint amilyenekkel az A és B automaták rendelkeznek. Hogyha $\delta_1(a, x)$ és $\delta_2(a, x)$ az A és B automaták átmeneti függvényei, akkor a C automata $\delta(a, x)$ átmeneti függvényét a $\delta(a, x) = \delta_2(\delta_1(a, x), x)$ összefüggésnek a segítségével definiáljuk. Az így bevezetett összetételnek a segítségével

megoldható a teljességnek a problémája, amely analóg a teljességnek a közönséges szorzatra vonatkozó, fentebb vizsgált problémájával.

A következőkben azt említjük meg, hogy a szorzatnak az általunk bevezetett fogalmától eltérőleg az automatáknak a Huzino-féle értelemben vett szorzata nem egy absztrakt kifejezése a tényleges automaták összetételei olyan módszereinek, amelyek előfordulnak a gyakorlatban.

S. HUZINO a [31] és [33] dolgozataiban az automatákkal kapcsolatban néhány még speciálisabb műveletet is vizsgált.

Az automaták összetételének a gyakorlati felhasználások szempontjából kíváncsatos módszerei közül fontos jelentőséggel rendelkezik az automaták ún. *szuperpozíciói*. Gyakorlati szempontból az automatáknak a szuperpozíciója azt jelenti, hogy az egyik automatának a kimenő jeleit a másik automatának a bemenő jelei gyanánt használjuk fel. Ennek az eljárásnak az absztrakt kifejezésénél eljutunk a következő definícióhoz.

25. DEFINÍCIÓ: Legyen adva két olyan $A_1(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \delta_1, \lambda_1)$ és $A_2(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \delta_2, \lambda_2)$ automata, hogy eme automaták közül a másodiknak a bemenő ábécéje egybeesik az elsőnek a kimenő ábécéjével. Az A_1 és A_2 automaták $A_2(A_1)$ *szuperpozíciójának* azt a $B(\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Z}, \delta, \lambda)$ automatát nevezzük, amelynek az állapothalmaza egybeesik az A_1 és A_2 automaták állapothalmazainak $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ szorzatával. A B automatának tetszőleges $b = (a_1, a_2)$ állapotára nézve és tetszőleges bemenő jelre nézve a B automata átmeneti és kimeneti függvényének értékeit az alábbi összefüggésekkel határozzuk meg:

$$\delta(b, x) = (\delta_2(a_2, \lambda_1(a, x)), \delta_1(a_1, x))$$

$$\lambda(b, x) = \lambda_2(a, \lambda_1(a_2, x)).$$

Könnyű belátni, hogy az automaták szuperpozíciója a 23. definíció értelmében az automaták szorzatának egyik speciális esete. Továbbá, ha kimenő jelek nélküli automatákat tekintünk, akkor az automaták szuperpozíciója az automaták féligdirekt szorzatának egy speciális esetébe megy át. Ezzel még egyszer ki lett hangsúlyozva az automaták féligdirekt szorzatai tanulmányozásának a fontossága.

Az automaták szuperpozíciójának a fogalma természetes általánosításokat tesz lehetővé. Megtörténhetik nevezetesen az, hogy az A automatának az $\mathfrak{X}$ bemenő ábécéje egybeesik az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automaták kimenő ábécéinek az $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \times \dots \times \mathfrak{Y}_k$ szorzatával. Ebben az esetben a 25. definíció analógiájára nem nehéz definiálni az $A_1, A_2, \dots, A_k$ automatáknak és az A automatának a szuperpozícióját. Felhasználva többszörösen a hasonló, *általánosított szuperpozíciót*, meg lehet szerkeszteni az *automaták hálózatait*.

Az ilyen hálózatoknak a megyszerkesztésénél rendszerint az ún. *elemi automatáknak* egy teljesen meghatározott rendszeréből indulnak ki, miközben az elemi automaták hálózatainak a segítségével bonyolultabb automatákat készítenek. A hálózatoknak az általános elmélete a közönséges és általánosított szuperpozícióval együtt megadja a megfordított összefüggés zárt láncainak azt a lehetőséget, hogy a hálózatnak a kimenő jelei közül némelyeket fel lehet használni bemenő jelek gyanánt azokban az elemi automatákban, amelyek ezeknek a kimenő jeleknek a megalkotásában részt vesznek.

Az elemi automaták hálózatainak az elmélete az automaták általános elméletének olyan részét alkotja, amelyet természetes dolog az *automaták struktúra-elméleté-*

nek nevezni. Ez az elmélet, amely főleg alkalmazási szempontból fejlődött ki, jelenleg már olyan kiterjedt irodalommal rendelkezik, amelyben sok száz cikk található. Ezeknek a többsége az ún. *kombinatív hálózatoknak* van szentelve, amelyek olyan automatákból állanak, amelyek közül bármelyiknek (amely azonban azt jelenti, hogy az egész hálózatnak is) csupán egyetlen állapota van.

Az utóbbi időben kialakult az a tendencia, hogy absztrakt algebrai módszerekkel tanulmányozzák az automatáknak a hálózatait, és pedig mindenekelőtt az ún. *ideg-hálózatokat*. A leginkább befejezett formában L. A. SZKORNYAKOV [26] és [27] dolgozataiban mutatkozott meg ez a törekvés. Ennek a törekvésnek csírái megtalálhatók azonban korábbi dolgozatoknak egész sorában, mindenekelőtt S. C. KLEENE [14] dolgozatában (lásd [15]-öt is). A jelen cikknek a korlátozott terjedelme nem engedi meg, hogy megadjuk ennek az irányzatnak a részletes jellemzését, annál is inkább, mert ez az irányzat formailag igen absztrakt lenne, és a mi terminológiánk szerint ez az irányzat az automatáknak nem az absztrakt elméletéhez, hanem a struktúra-elméletéhez tartozik.

6. §. Kísérletek az automatákkal

Az 1. §-ban definiálva lett az $a_1 \cdot a_2 \dots a_k$ állapot-szó, és a $q = y_1 \cdot y_2 \dots y_k$ kimenő szó, amelyek megfelelnek a $p = x_1 \cdot x_2 \dots x_k$ bemenő szónak az A automata tetszőleges a állapotában. A szavak ilyen módon kapott (p, q) párját célszerű *az A automatával az a állapotban végzett k hosszúságú kísérletnek* nevezni. A p szót a kísérlet bemenő szavának, a q szót pedig a kísérlet kimenő szavának, vagy a kísérlet eredményének nevezzük.

A Moore-féle automatákra vonatkozólag szokásos a kísérletnek valamennyire más definícióját venni, amelyet *Moore-féle kísérletnek* fogunk nevezni (lásd [20]). Miként a közönséges kísérletet, úgy a Moore-féle automatával valamilyen a állapotban való Moore-féle kísérletet is olyan (p, q) párral adunk meg, amely a $p = x_1 \cdot x_2 \dots x_k$ bemenő szóból és a neki megfelelő q kimenő szóból áll. Eltérőleg azonban a közönséges kísérlettől, a Moore-féle kísérletben a q kimenő szó nem esik egybe azzal az $r = y_1 \cdot y_2 \dots y_k$ kimenő szóval, amely az a állapotban megfelel a p szónak, hanem az $y_0, y_1 \dots y_{k-1}$ szóval egyenlő, ahol y_0 az a állapotnak a jele. Az ilyen módon kapott q szót *elmozdított kimenő szónak* nevezzük, amely az a állapotban megfelel a p bemenő szónak.

Az automatákkal való kísérleteknek a tanulmányozása az automaták absztrakt elméletének sajátos fejezetét alkotja, amelynek a különböző szerzők a dolgozatoknak egész sorát szentelték (lásd [4], [6], [7], [13], [20], [30]). Ennek az irányzatnak alapvető dolgozata E. MOORE [20] cikke, amelyben a kísérletek elméletének sok fontos problémája lett elsőnek megfogalmazva és megoldva. Ezeknek a feladatoknak az értelme abban áll, hogy a kísérletnek az eredményeképpen ilyen vagy olyan tájékoztatást kapunk az automatának a belső szerkezetére vonatkozólag, más szóval az automatának az átmeneti és kimeneti függvényeire vonatkozólag.

Ebben a paragrafusban a kísérletek elméletének csupán a legfontosabb néhány olyan eredményét összegezzük, amelyek ennek a cikknek az anyagával tartalmilag összefüggenek. Ennek során eltérünk a kialakult hagyományoktól, és nem fogjuk magunkat csak a Moore-féle kísérletekre korlátozni.

Két egymásközt ekvivalens (ill. *Moore*-féle módon ekvivalens) állapot nyilván nem különböztethető meg egymástól semmiféle kísérletnél (ill. semmiféle *Moore*-féle kísérletnél) sem. Más szóval, ez a két állapot tetszőleges bemenő szóhoz a kísérletnek (*Moore*-féle kísérletnek) egy és ugyanazon eredményét rendeli hozzá. Magától értetődően érvényes a megfordított állítás is: az egymástól (a mondott értelemben) nem megkülönböztethető állapotok mindenképpen ekvivalenseknek (illetőleg *Moore*-féle módon ekvivalenseknek) mutatkoznak.

Az automaták megkülönböztethetlenségének az esetére valamennyire más lesz a helyzet. Követve MOORE [20] dolgozatát, mindenekelőtt megadjuk a megfelelő fogalmaknak a pontos definícióját.

26. DEFINÍCIÓ: Az A automatát a B automatától *megkülönböztethetetlennek* (illetve *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlennek) nevezzük akkor, hogyha létezik az első automatának a tetszőleges a állapotához és tetszőleges p bemenő szóhoz a második automatának olyan b állapota, hogy a p bemenő szóval végzett kísérletek (ill. *Moore*-féle kísérletek) az a és b állapotokban egy és ugyanazon eredményt adják.

Világos, hogy az ekvivalens (*Moore*-féle módon ekvivalens) automaták egyszerűsrimd megkülönböztethetetlenek (ill. *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlenek) is lesznek. A megfordított állítás azonban nem érvényes. Megemlítjük azt az ellenpéldát, amelyet E. MOORE [20] készített. Ebből a célból vizsgáljuk az A és B két *Moore*-féle automatát, amelyeknek (x, y) a bemenő ábécéjük és (u, v) a kimenő ábécéjük, és amelyek az átmeneteknek a következő megjelölt táblázataival vannak megadva:

	u	v	u	u
	1	2	3	4
x	2	1	1	2
y	3	3	2	2

	u	v	u
	1	2	3
x	2	1	1
y	3	3	2

Könnyű belátni azt, hogy az első automata (az A automata) *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlen a második automatától (a B automatától). Valóban, $i=1, 2, 3$ esetén az A automatának az i állapota *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlen a B automatának az i állapotától. Ami pedig az A automatának a „4-es” állapotát illeti, nem nehéz igazolni azt, hogy ebben az állapotban a p bemenő szóval való tetszőleges *Moore*-féle kísérlet ugyanazt az eredményt adja, mint az „1” állapotban ez a *Moore*-féle kísérlet ugyanezzel a bemenő szóval (ha a p szó x betűvel kezdődik), vagy pedig mint a kísérlet a „3” állapotban ugyanazzal a bemenő szóval (hogyha a p szó y betűvel kezdődik). Ennek következtében az A és B automaták egymással nem ekvivalensek.

Az automatáknak a megkülönböztethetlensége (ill. *Moore*-féle módon való megkülönböztethetlensége) ilyen módon gyengébb feltétel, mint az ekvivalenciájuk (ill. *Moore*-féle ekvivalenciájuk). Ezért természetesen nevezhetjük azokat az automatákat, amelyek egymástól megkülönböztethetetlenek (ill. *Moore*-féle módon megkülönböztethetetlenek) *gyengén ekvivalenseknek* (ill. *Moore*-féle módon *gyengén ekvivalenseknek*). A gyenge ekvivalencia maga után vonja az erősen összefüggő, véges automatáknak az esetében a közönséges ekvivalenciát. Ez a tény folyik a következő állításból, amelyet (a *Moore*-féle megkülönböztethetlenségnek az esetére vonatkozólag) E. MOORE bizonyított be a [20] dolgozatában.

41. TÉTEL: *Hogyha az erősen összefüggő A véges automata a B véges automatától megkülönböztethetetlen (ill. Moore-féle módon megkülönböztethetetlen), akkor az A automatának minden egyes a állapotához létezik a B automatának egy vele ekvivalens (ill. Moore-féle módon ekvivalens) b állapota.*

BIZONYÍTÁS: Elegendő a bizonyítást csupán a közönséges megkülönböztethetlenségnek az esetére elvégezni, minthogy a bizonyítás pontosan ugyanúgy végezhető el a Moore-féle módon való megkülönböztethetlenségnek az esetére vonatkozólag is. Tekintsük az A automatának egy tetszőleges a állapotát, és egy tetszőleges p bemenő szót. A tételben levő feltétel alapján találhatók a B automatának olyan állapotai, amelyekre nézve a p szóval való kísérlet ugyanazt az eredményt adja, mint az a állapotra vonatkozólag. Legyen $b_1, b_2, \dots, b_k$ az összes ilyen állapot. Jelöljük $M = M(a, p)$ -vel az összes $b_1p, b_2p, \dots, b_kp$ állapotok halmazát. Az a és p tetszőleges megválasztásánál az $M(a, p)$ halmaz nem üres. Könnyű belátni azt, hogy az $M(a, p)$ halmaz elemeinek a száma nem növekszik, ha a p szóhoz (jobbról) új betűket írunk mellé. Ennek a halmaznak a végeessége alapján meg lehet úgy is választani a p szót, hogy tetszőleges r szó mellett az $M(a, pr)$ halmaz elemeinek a száma éppen egyenlő az $M(a, p)$ halmaz elemeinek a számával.

Minthogy az A automata erősen összefüggő, az r szót meg lehet úgy választani, hogy $apr = a$ legyen. Mármint könnyű belátni, hogy az $M(a, pr)$ halmazból egy tetszőleges b állapot az a állapottól megkülönböztethetetlen. Valóban, ellenkező esetben léteznék olyan q bemenő szó, amelyre nézve a kísérleteknek az eredményei az a és b állapotokban egymástól különbözőek volnának. Ámde akkor a kísérlet eredményei különbözőek volnának a prq szóra vonatkozólag elvégezve az a állapotban és az összes olyan b_i ($i = 1, 2, \dots, k$) állapotokban, amelyekre nézve $b_i pr = b$ teljesül. Ez viszont nyilvánvalóan azt jelentené, hogy az $M(a, prq)$ halmaz elemeinek a száma kevesebb volna, mint az $M(a, pr)$ és $M(a, p)$ halmazok elemeinek a száma, ellentmondásban a p szónak a megválasztásával.

Ilyen módon a b állapot megkülönböztethetetlen, következésképpen ekvivalens az a állapottal. Minthogy pedig az a állapotot tetszőlegesen választottuk, ezért a tétel be lett bizonyítva.

A bebizonyított tételnek közvetlen következménye az alábbi

42. TÉTEL: *Ha két véges, erősen összefüggő automata egymással gyengén ekvivalens (Moore-féle módon gyengén ekvivalens), akkor azok ekvivalensek (Moore-féle módon ekvivalensek) is egymással.*

Most vizsgáljuk a kérdést a kísérlet maximális hosszára vonatkozólag, amely szükséges ahhoz, hogy a véges automatában két tetszőleges megkülönböztethető állapotot egymástól megkülönböztessünk. Nem nehéz belátni azt, hogy az automatának az 1. §-ban tekintett i -osztályai rendelkeznek a következő tulajdonsággal: két állapot akkor és csakis akkor tartozik egy és ugyanazon i -osztályhoz, hogyha azok egymástól semmiféle i -hosszúságú kísérlet által sem különböztethetők meg. Ezenkívül közvetlenül következik az 1. §-ban elvégzett vizsgálatokból még az is, hogy ha áttérünk i -ről $(i+1)$ -re, akkor az i -osztályoknak a száma legalább eggyel növekszik mindaddig, amíg az $(i+1)$ -osztályok egybe nem esnek az i -osztályokkal valamilyen i mellett, amely után a további felbontásnak az i -osztályait nem vizsgáljuk, és ezek az osztályok fogják magukba foglalni az egymással ekvivalens (megkülönböztethetetlen) összes állapotot.

Az ugyancsak nyilvánvaló, hogy ha létezik két, egymástól megkülönböztethető állapot, akkor a különböző 1-osztályok számának legalább kettőnek kell lenni. Egyszersmind az n állapottal rendelkező automatában a különböző i -osztályoknak a száma nem lehet az i semmilyen értékére sem nagyobb, mint n .

Egybefoglalva az elmondottakat, azt találjuk, hogy az $(n-1)$ -osztályokba egyesítve vannak az egymástól megkülönböztethetetlen állapotok, és az automata két megkülönböztethető állapotának a megkülönböztetésére elegendők $n-1$ hosszúságú kísérletek.

A Moore-féle kísérleteknek az esetében, az összes olyan állapot, amelyek i hosszúságú kísérletekkel egymástól megkülönböztethetetlenek, $(i-1)$ -osztályokba vannak összefoglalva. Könnyű belátni azt, hogy ha léteznek Moore-féle módon megkülönböztethető (ill. Moore-féle módon nem ekvivalens) állapotok, akkor a Moore-féle 0-osztályoknak a száma nem lehet kevesebb, mint kettő. Ezért a 0-osztályok nem engedhetnek meg több mint $n-2$ felbontást, minthogy az $(n-2)$ -osztályokba csak az egymástól megkülönböztethetetlen állapotok vannak összefoglalva. Ilyen módon ez esetben is elegendő $n-1$ hosszúságú kísérlet ahhoz, hogy a megkülönböztethető állapotokat egymástól megkülönböztessük.

Végül eljutunk a következő állításhoz, amely a [20] dolgozatból a 6. tételnek kisebb mértékben való élesítése.

43. TÉTEL: Az n állapottal rendelkező automatában két, egymástól megkülönböztethető (ill. Moore-féle módon megkülönböztethető) állapot $n-1$ hosszúságú kísérlettel (ill. Moore-féle kísérlettel) megkülönböztethető.

E. MOORE [20] megmutatta azt is, hogy a 43. tételben megfogalmazott $n-1$ határt nem lehet leszállítani. Ennek a ténynek a megállapítására elegendő tekinteni egy olyan Moore-féle, n állapottal rendelkező automatát, amely az átmeneteknek a következő táblázatával van megadva:

	V	U	U	$\dots$	U	$\dots$	U	U
	1	2	3	$\dots$	i	$\dots$	$n-1$	n
x	2	3	4	$\dots$	$i+1$	$\dots$	n	n
y	2	1	2	$\dots$	$i-1$	$\dots$	$n-2$	$n-1$

Ebben az automatában tetszőleges két állapot megkülönböztethető Moore-féle módon, de a legrövidebb olyan Moore-féle kísérletnek, amely az n és $n-1$ állapotoknak a Moore-féle módon való megkülönböztethetőségét megállapítja, éppen $n-1$ a hosszúsága.

Felhasználva az automaták direkt összegének a fogalmát és a 43. tételt, nem nehéz bizonyítani azt, hogy két, egymástól megkülönböztethető (Moore-féle módon megkülönböztethető) állapotnak m és n állapottal rendelkező két automatában való megkülönböztetésére elegendők $m+n-1$ hosszúságú kísérletek.

Miként E. MOORE [20] megmutatta (az $m=n$ esetben), ez a határ nem csökkenthető.

E. MOORE bebizonyította azt is, hogy tetszőleges, Moore-féle módon redukált olyan A automatának, amelynek n állapota, m bemenő jele és p kimenő jele van, az összes többi, páronként nem izomorf, Moore-féle módon redukált olyan auto-

matától való megkülönböztetésére, amelyeknek ugyanaz a bemenő és a kimenő ábécéjük, mint az A automatának, és amelyek szintén n állapottal rendelkeznek, elegendőek $\frac{n^{nm+2} \cdot p^n}{n!}$ hosszúságú Moore-féle kísérletek. Más megfontolásokból, és valamennyire általánosabb esetben S. GINSBURG [6] is hasonló becslést kapott.

Az állapotoknak a megkülönböztethetőségével együtt az automaták tanulmányozásánál hasznosnak bizonyul az, hogy a bemenő szavak megkülönböztethetőségének a fogalmát bevezessük (lásd S. GRINSBURG [7]). Két bemenő p és q szót az A automatában *megkülönböztethetetlennek* nevezünk, hogyha tetszőleges a állapotra nézve és tetszőleges r bemenő szóra nézve az a állapotban a pr és qr bemenő szavakkal végzett kísérletek ugyanazt az eredményt adják. Abban az esetben pedig, amikor a kísérletnek az eredményei nem ugyanazok, a megfelelő szavakat az A automatában *megkülönböztethetőnek* nevezzük. Az automatát *a bemenetre vonatkozólag megkülönböztethetőnek* nevezzük, hogyha bármely két különböző bemenő szava ebben az automatában egymástól megkülönböztethető.

S. GINSBURG [7] dolgozatában megállapítást nyert a következő

44. TÉTEL: *Legyen A olyan véges automata, r állapottal, amelynél bármely két különböző állapot nem ekvivalens. Jelöljük n_i -vel azoknak az állapotoknak a számát, amelyek az A automatának i számú állapota által vannak generálva. Mármint, ha az A automatában bármely két, $(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)^2$ hosszúságú bemenő szó megkülönböztethető egymástól, akkor az A automata a bemenetre vonatkozólag megkülönböztethető.*

Az esetek egész sorában célszerű végtelen kísérleteket is vizsgálni, amelynél véges bemenő szó helyett a bemenő jeleknek végtelen sorozatát használjuk (bemenő sorozatot használunk). Magától értetődően az ilyen végtelen kísérletnek az eredménye nemcsak egy véges szó lehet, hanem a kimenő jeleknek végtelen sorozata (kimenő sorozat) is.

Állapodjunk meg abban, hogy az olyan sorozatot, amelyik bizonyos helytől kezdve ismétlődő, a szokásnak megfelelően *majdnem periodikusnak* nevezzük. S. GINSBURG [7] nyomán az automatának az állapotát *raciónalisnak* nevezzük, hogyha ebben az állapotban tetszőleges, majdnem periodikus bemenő sorozathoz a végtelen kísérlet majdnem periodikus kimenő sorozatot rendel hozzá.

Könnyű belátni, hogy érvényes a következő állítás (lásd [7]).

45. TÉTEL: *Ha az A automatában tetszőleges állapot az állapotoknak véges halmazát generálja, akkor az A automatának az összes állapota racionális.*

Azokat az automatákat, amelyeket a 45. tételben tekintettünk, természetes dolog *periodikus automatáknak* nevezni. Ezekhez tartozik, magától értetődően, az összes véges automata is.

Befejezés

Az ebben a dolgozatban kifejtett elmélet az automatának olyan felfogásán alapul, amelyben majdnem teljesen ismeretlenek az automata belső szerkezetének a részletei, az állapotok számának és az egyik állapot másikba való átmenete törvényének a kivételével. Hasonló közeledés az automatának a fogalmához a mi szempon-

tunkból pontosan meg is különbözteti az automatáknak az *absztrakt* elméletét az automaták *általános* elméletének egyéb ágazataitól, így speciálisan az automatáknak a *struktúra*-elméletétől, amely annak a módszereit tanulmányozza, hogy az *elemi* automatáknak valamilyen rögzített rendszeréből bonyolultabb automatákat szerkesszünk meg.

Az automaták absztrakt elmélete tárgyának ilyen értelmezésénél figyelembe lehet venni azt, hogy ebben a cikkben ilyen vagy olyan mértékben felöleltük eme elmélet fejlődése modern korszakának (1961) az összes legfontosabb irányzatát. Hátra van még az a feladat, hogy megemlékezzünk néhány, a legutóbbi időben megnyilvánult fejlődési tendenciáról.

Az első ilyen tendencia az absztrakt automata fogalmának további általánosításában áll. Ez a törekvés nyilvánul meg S. GINSBURG [7] dolgozatában, amelyben bevezetésre került az általánosított automatának, vagy *kvázimasinának* a fogalma. Kvázimasinán GINSBURG öt objektumnak az együttesét érti, éspedig ezek: a kvázimasina állapotainak nem üres $\mathfrak{A}$ halmaza, a $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ két tetszőleges, absztrakt félcsoporthoz tartozó, amelyeket természetes dolog a kvázimasina bemenő és kimenő félcsoporthoz nevezni, továbbá a $\delta(a, b)$ és $\lambda(a, b)$ függvény, amelyeket az adott A kvázimasina átmeneti függvényének, illetve kimeneti függvényének neveznek.

A δ és λ függvények egyértelmű leképezést létesítenek az $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ halmazról az $\mathfrak{A}$, ill. a $\mathfrak{C}$ halmazba. Ennek során tetszőleges $a \in \mathfrak{A}$ állapotra és $\mathfrak{B}$ -ből tetszőleges két b_1 és b_2 elemre nézve érvényesek a következő összefüggések: $\delta(a, b_1 \cdot b_2) = \delta(\delta(a, b_1), b_2)$, valamint $\lambda(a, b_1 \cdot b_2) = \lambda(a, b_1) \cdot \lambda(\delta(a, b), b_2)$.

Könnyű belátni, hogy a közönséges automaták átmeneti, ill. kimeneti függvényének a *természetes kiterjesztésénél* (lásd az 1. §-t) ezek az automaták átváltoznak olyan kvázimasinákká, amelyeknél mind a bemenő félcsoporthoz, mind pedig a kimenő félcsoporthoz szabad félcsoporthoz tartozó. Ilyen módon az automata fogalma GINSBURG által indítványozott általánosításának az értelme abban áll, hogy a *szabad* bemenő és kimenő félcsoporthoz tartozó tetszőleges félcsoporthoz tartozókkal.

Annak érdekében, hogy a kvázimasinákra vonatkozólag megkapjuk a legegyszerűbb, de tartalmas eredményeket, GINSBURG ennek a fogalomnak a szűkítéséhez folyamodik, éspedig olyan kvázimasinákra szorítkozik, amelyeknél a kimenő félcsoporthoz olyan félcsoporthoz tartozó, amelyben érvényes a baloldali egyszerűsítési szabály. A hasonló korlátozású kvázimasinákra (az ún. *masinákra*) természetes módon át lehet vinni az állapotok megkülönböztethetőségének, valamint a masinák ekvivalenciájának és homomorfizmusának, ill. a redukált masinának a fogalmát stb. Könnyen bebizonyítható, hogy az egymás között ekvivalens összes masinának az osztályában (izomorfizmus pontosságáig) pontosan egy redukált masina létezik. Ez az eredmény nem egyéb, mint a 3. tételünknek (pontosabban csak egyik részének) az általánosítása.

A másik tendencia pedig, amely feltűnik az automatáknak az absztrakt elméletében, abban áll, hogy topológiát, elrendezést és egyéb olyan strukturákat vezetnek be az automata állapotainak a halmazába, továbbá a bemenő és kimenő félcsoporthoz tartozó, amelyek lehetővé teszik azt, hogy speciális típusú (folytonos, differenciálható stb.) átmeneti és kimeneti függvényeket vizsgáljunk. Ilyen törekvés mutatkozott meg például M. P. SCHÜTZENBERGER [35] dolgozatában, amelyben az automatának az állapothalmaza gyanánt vizsgáljuk egy véges halmaznak és az egész számok gyűrűjének a szorzatát. Az állapotoknak a halmazában az algebrai strukturának

a jelenléte lehetővé teszi azt is, hogy az automatáknak az átmeneti függvényeit úgy tekintsük, mint sajátos „algebrai” függvényeket.

Végezetül megemlítünk még egy olyan törekvést, amelynek lényege felhasználni az automaták absztrakt elméletét a nyelvek absztrakt elméletének a megalkotására. Ennek során a nyelvet úgy tekintjük, mint többértékű átmeneti függvénnyel rendelkező automatát.

Fordította: Szász Ferenc