A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ÚJABB EREDMÉNYEK A GALOIS-GEOMETRIÁKBAN*

Írta: G. TALLINI (Róma)

Bevezetés

Ismeretes, hogyan teremt az analitikus geometria a koordináták használatával szoros kapcsolatot a geometria és az algebra között, geometriai alakzatoknak és tulajdonságoknak algebrai fogalmakat feleltetve meg. A használt koordináták előbb valós, majd a nagyobb általánosság és egyszerűség végett, komplex számok.

A modern geometriában további lépés történt előre: egy absztrakt tér pontjainak a koordinátái a valós és komplex számrendszereknél általánosabb (például axiomatikusan bevezetett) számrendszerekben változhatnak. A számrendszer algebrai tulajdonságai tükröződnek természetesen a rajta felépített tér geometriai tulajdonságaiban, és így van ez megfordítva is. Szorosabb kapcsolat létesül így az algebra és a geometria között, amely, többek között, lehetővé teszi a geometriában maguknak az alapoknak a mélyebb vizsgálatát is.

A geometria ilyen irányú nagyfokú általánosítása azt a tévhitet kelthetné, hogy ez a tudományág egyre jobban távolodik az alkalmazásoktól. De ez nem így van. A különféle terek közül az utóbbi időben különös jelentőségre tettek szert például a GALOIS-féle terek, vagyis a véges, vagy GALOIS-testeken értelmezett terek, mégpedig egyrészt a különböző területeken (a statisztikától az információ elméletig) való jelentős alkalmazhatóságuk, másrészt elméleti hasznosságuk miatt. Jelen előadásomban éppen a Galois-geometria néhány újabb eredményét szeretném kifejteni.

1. §. Galois-terek és algebrai varietásaik

Ismeretes, mit értünk a p (p egész) *modulusra vonatkozó maradékok osztályán*, s az is, hogy e p számú $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{p-1\}$-gyel jelölt osztályok között nyilvánvaló módon lehet értelmezni az összeadás és szorzás műveleteit. Igaz az is, hogy ezek az osztályok a rajtuk értelmezett műveletekre vonatkozóan akkor és csak akkor képeznek Γ_p *testet* (vagyis olyan algebrai struktúrát, amelyen az összeadás és a szorzás rendelkezik azokkal a szokásos tulajdonságokkal, mint pl. a valós számok esetében), ha p prímszám ([30], § 2, [48], 2. fejezet).

Ha az n-edfokú $g(x)$ polinom ($n>1$), amelynek együtthatói Γ_p-hez tartoznak, Γ_p fölött irreducibilis (azaz nem bontható fel olyan valódi tényezők szorzatára, ahol az együtthatók Γ_p-hez tartoznak), akkor vizsgálható Γ_p-nek $g(x)$-re vonatkozó algebrai bővítése: ez elemi úton elérhető, bevezetve az i szimbólumot (GALOIS-féle imaginárius szám) a $g(i)=0$ feltétellel, és a Γ_p és i között racionális műveleteket

* A Bolyai János Matematikai Társulatban 1963. szeptember 10-én tartott előadás.

végezve. Ez az eljárás pontosan olyan, mint ahogy valós számokról komplex számokra szokás áttérni, feltéve, hogy $g(x) \equiv x^2+1$.

A bővített test változó eleme $a_1 i^{h-1} + \ldots + a_h$ típusú, $a_l \in \gamma_p$ $(l=1, \ldots, h)$, s az ebben az alakban csak egyféleképpen írható. Az így keletkezett testet, amelynek rendje (elemeinek száma) $q=p^h$, Γ_p-vel jelöljük. A testet GALOIS-testnek, p-t a test *karakterisztikájának* nevezzük. A karakterisztika a legkisebb olyan pozitív egész, amelyre $pa=0$ $(a \in \gamma_p)$.

Bebizonyítható, hogy minden véges test — izomorfizmus erejéig — GALOIS-test, ahol, szélesebb szóhasználattal, ugyanúgy nevezik a p modulusra vonatkozó maradékok testeit is (amiket a $p=1$ esetben kapunk), — továbbá, rögzítve egy $q=p^h$ egészet, létezik és — izomorfizmus erejéig — egyértelmű a megfelelő rendű GALOIS-test. ([30], § 12; [48], 12. fej.)

Ezek után vizsgálhatunk egy $r \geqq 2$ dimenziós, a Γ_p GALOIS-testen értelmezett projektív teret, amelyet $S_{r,q}$-val jelölünk és GALOIS-*térnek* nevezünk (jegyezzük meg, hogy r és q magát a teret határozzák meg). ([30], § 17, [48], 17 fej.). A megfelelő geometriát GALOIS-*geometriának* nevezzük.

Ilyen térben egy egyenesnek $q+1$ pontja van, vagyis annyi, ahány elemből az a halmaz áll, amelyet akkor kapunk, ha a test q számú elemének ∞ értéket adunk. Következésképpen egy sík pontjainak száma q^2+q+1, S_k-nak $q^k+q^{k-1}+\ldots+q+1$ számú pontja van ([30], n. 157. [48], n. 165).

A dualitás miatt adódik, hogy $S_{r,q}$-nak egy S_k-ra vonatkozó hipersíkjainak (annyi van, ahány pontja S_{r-k-1}-nek) a száma $q^{r-k+1}+\ldots+q+1$, s ez a formula $k=-1$-re is érvényes. Analóg formulák határozhatók meg adott S_p-t metsző S_k-kra.

Az így felépített $S_{r,q}$-ban minden algebrai varietás véges sok pontból áll, mivel véges az egész tér pontjainak a száma is. Fordítva is: $S_{r,q}$ minden véges sok elemből álló halmaza algebrai varietás (ismeretes, hogy egyetlen pont — algebrai varietás, s így véges sok is az). Ebből következik, hogy a GALOIS-geometriákban felvetődő problémák lényegében algebrai természetűek.

Egyik elsőként megvizsgálandó kérdés pl. a következő: meghatározandó $S_{r,q}$ valamely irreducibilis algebrai varietása pontjainak a száma. Ez a probléma elsőrendű varietások esetén könnyen megoldható: így a legegyszerűbb esetre, amikor $S_{r,q}$ altereiről van szó, már az előzőek választ adnak. $S_{r,q}$ kvadratikus hiperfelületei esetében is az általuk tartalmazott pontok száma könnyen meghatározható ([24], [50], [41], $n \cdot 1$), lényegében a sztereografikus vetítést használva fel. Bebizonyítható pl., hogy $S_{2,q}$ nem degenerált kúpszeletei mindig $q+1$ pontból állnak, amelyek közül 3—3 nem esik egy egyenesbe; $S_{3,q}$ elliptikus kvadratikus alakzatai q^2+1, míg a hiperbolikusok q^2+2q+1 számú pontból állnak. Analóg formulák érvényesek magasabb dimenziójú terek kvadratikus alakzataira is. Pontosan: be lehet bizonyítani, hogy $S_{r,q}$-ban páros r esetén csak egyetlen nem elfajuló (az együtthatók determinánsa nem 0) kvadratikus alakzat létezik és az $q^{r-1}+\ldots+q+1$ számú pontból áll; ha viszont r páratlan, a nem elfajuló kvadratikus alakzatok két típusa létezik: az elliptikus ($S_{3,q}$ elliptikus kvadratikus alakzatainak általánosítása) kvadratikus alakzatok pontjainak száma $\sum_{i=0}^{r-1} q^i - q^{\frac{r-1}{2}}$, a hiperbolikusok — ($S_{r,q}$ hiperbolikus kvadratikus alakzatainak általánosításai) pontjainak száma pedig $\sum_{i=0}^{r-1} q^i + q^{\frac{r-1}{2}}$.

A speciális kvadratikus alakzatok — kúpok — az előzőekből vetítéssel kaphatók, és innen pontjaik száma könnyen meghatározható.

Emlékezetünkbe idézve, hogy $S_{3,q}$ egyenesei kölcsönösen egyértelműen állíthatók elő $S_{3,q}$ egy hiperbolikus kvadratikus alakzata segítségével (KLEIN-féle kvadratikus alakzat), azt kapjuk, hogy $S_{3,q}$ egyeneseinek száma $q^4+q^3+2q^2+q+1$. Ugyanezekhez az eredményekhez eljuthatunk közvetlenül az $S_{3,q}$ egyeneseire vonatkozó megfontolásokkal: elég $S_{3,q}$ különböző pontpárjainak a számát — $\binom{q^3+q^2+q+1}{2}$ — elosztani egy egyenes különböző pontpárjainak a számával — $\binom{q+1}{2}$ —. Ez utóbbihoz hasonló gondolatmenettel meg lehet határozni egy $S_{r,q}$-hoz tartozó S_k-k, vagyis $S_{r,q}$ S_k-hoz tartozó GRASSMAN-féle varietása pontjainak a számát ([30] n. 159, [48] n. 167). $S_{r,q}$ tetszőleges algebrai varietása pontjai számának a meghatározása azonban lényegesen nehezebb. Ezzel kapcsolatban érvényes a következő fontos becslés $S_{r,q}$ egy irreducibilis, nem szinguláris algebrai görbéje pontjainak N számára vonatkozóan: $|q+1-N| \leqq 2g\sqrt{q}$, ahol g a görbe fajszáma ([61], [62]). Ezt a relációt aztán általánosítani lehet a varietásra, s ekkor olyan egyenlőtlenséget kapunk, amelyben szerepelnek az irreducibilisnek feltételezett varietás invariáns jellemzői ([61], [62]).

Az előbbivel kapcsolatos annak a vizsgálata, hogy léteznek-e olyan hiperfelületek, vagy általánosabban: varietások, amelyek $S_{r,q}$ minden pontját tartalmazzák. Reducibilisek nyilván vannak, ebből a célból elég egy olyan hiperfelületre gondolni, mely egy hipersíksor elemeire, $q+1$ hipersíkra hasad szét. Megvizsgáljuk, hogy amennyiben léteznek a fenti tulajdonsággal rendelkező irreducibilis hiperfelületek is, melyek közülük a minimális rendűek, és tanulmányozzuk őket. Ezek a hiperfelületek, márcsak azért is, mivel $S_{r,q}$ valamennyi pontját tartalmazzák, érdekes geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyeket érdemes megvilágítani. Így, be lehet bizonyítani ([57], [58]), hogy $S_{r,q}(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ tetszőleges F^n hiperfelületének, amely $S_{r,q}$ minden pontját tartalmazza, $n \geqq q+1$-edrendűnek kell lennie, egyenlete pedig az alábbi:

$$\sum_{i<j}^{0,\ldots,r} A_{ij}(x_i^q x_j - x_i x_j^q) = 0, \tag{1}$$

ahol az A_{ij}-k $n-q-1$-edfokú formák.

Az a probléma, hogy az (1) hiperfelületek között vannak-e irreducibilisek, más az $r=2$ esetben (síkbeli eset), mint akkor, ha $r>2$. Bebizonyítható ui., hogy $r=2$ esetén minden F^{q+1} szétesik egy sugársor $q+1$ egyenesére, de az F^{q+2}-k között vannak irreducibilisek is; ez utóbbiak részére teljes projektív klasszifikáció adható, amely bizonyos tulajdonságaikra támaszkodik. Az $r \geqq 3$ esetben kimutatható, hogy léteznek F^{q+1} irreducibilis hiperfelületek, ezek projektív szempontból ekvivalensek és érdekes geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek ([57], [58], [60]).

2. §. Ívek és süvegek

Ahogy a matematikában gyakran előfordul, a GALOIS-geometriák iránti érdeklődés is az alkalmazott matematika problémáiból fakad. 1940 körül az indiai R. C. BOSE és iskolája rájött arra, hogy a statisztika számos problémája előnyösen tanulmányozható a GALOIS-terek felhasználásával. ([5], [6], [7]). Éppen ezek a kutatások irányították BOSE érdeklődését az $S_{r,q}$ ponthalmaz bizonyos halmazai felé, amelyeket *s-fajtájú k-süvegeknek* nevezünk, $k^s_{r,q}$-val jelölünk ($2 \leqq s \leqq r$); e halmazok $S_{r,q}$ olyan k számú pontjából állanak, *amelyek közül bármely $s+1$ pont független, de van közöttük olyan $s+2$ számú pont, amelyek összefüggnek.* Ugyanezeknek a halmazoknak a tanulmányozásához jutott 1950 körül két finn csillagász, JÄRNEFELT és KUSTAANHEIMO, amikor olyan modellt akartak konstruálni, amely megfelelőbben reprezentálná a mikrokozmoszt ([11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [25]). E halmazok mélyebb tanulmányozása B. SEGRE-hez és iskolájához fűződik. ([1], [2], [4], [10], [20], [21], [22], [28], [29], [32], [33], [35], [41], [42], [53], [56].) Előadom a megfelelő eredményeket.

$S_{r,q}$ r fajtájú süvegét *ívnek* is nevezik. *$S_{r,q}$ k íve tehát $S_{r,q}$ k számú olyan pontját tartalmazza, amelyek közül bármely $r+1$ független.* Az $r=2$ esetben a sík k-íveit kapjuk, vagyis $S_{r,q}$ k pontból álló olyan halmazait, amelyek közül 3—3 nem esik egy egyenesbe. Térjünk rá ez utóbbiak vizsgálatára.

Egy síkbeli k-ívre vonatkozólag a sík egyenesei szelőkre, érintőkre és külső egyenesekre oszlanak, aszerint, hogy a k-ívvel két vagy egy közös pontjuk van, illetőleg nincs közös pontjuk. Ezzel kapcsolatban tüstént felvetődik a következő probléma: meghatározandó az a maximális k, amelyre létezhetnek k-ívek. Azonnal megmutatható, hogy páratlan q esetén $k = q+1$, páros q-ra pedig $k = q+2$. Valóban, egy k-ív minden pontján $k-1$ szelő halad át, az érintők száma innen $q+1-k+1$, amiből $k \leqq q+2$. A $k = q+2$ eset páratlan q-ra nem állhat fenn (különben az ilyen halmaz nem tartalmazna érintőket, holott páratlan q esetén külső pontból legalább egy mindig húzható). $(q+1)$-ívre példaként (q akár páros, akár páratlan) egy kúpszelet pontjai szolgálhatnak. Páros q esetén $(q+2)$-ívre példaként szintén kúpszeletek szolgálhatnak, hozzávéve a magpontjukat (páros q esetén igazolható, hogy a kúpszelet minden érintője átmegy ugyanazon a — magpontnak nevezett — ponton) ([34], 100. o.).

Bebizonyítható továbbá, hogy — *páratlan q esetén — minden $(q+1)$-ív valamely kúpszelet pontjaiból áll* ([32], [48] n. 174). Ehhez jutunk, ha bebizonyítjuk, hogy amennyiben A, B, C a $(q+1)$-ív három tetszőleges pontja, akkor az ABC háromszög és az ezekben a pontokban az ívhez húzott érintők által alkotott háromszög perspektív háromszögpár; ez utóbbi annak a ténynek a felhasználásával adódik, hogy GALOIS-test összes nem nulla elemeinek szorzata (-1)-gyel egyenlő. Páros q esetén az előbbi állítás nem érvényes, amennyiben egy kúpszelet q pontja és a magpont $(q+1)$-ívet alkotnak, amely — ha $q \geqq 5$ — nem kúpszelet. Ekkor az a kérdés, hogy vajon minden $(q+2)$-ív kúpszeletből nyerhető-e, hozzávéve a magpontot. A válasz negatív: megadhatók olyan $(q+2)$-ívek, amelyek a fenti módon nem származtathatók ([35]). Páros q esetén nyílt probléma egy $S_{2,q}$ $(q+2)$-íveinek az osztályozása.

Valamely k-ívet *teljesnek* nevezünk, ha nem létezik olyan $(k+1)$-ív, amely tartalmazza. Bebizonyítható ([41], n. 13, 14), hogy minden $(q-t+2)$-ívet ($t \geqq 1$, ha q páros; $t \geqq 2$, ha q páratlan) q-hoz viszonyítva kicsiny t mellett (pontosan: $q \geqq t^2 - t - \frac{t-1}{2}$, ha q páros; $q \geqq 16t^2 + t - 37$, ha q páratlan) páros q esetén egy $(q+2)$-ív, páratlan q esetén pedig egy kúpszelet tartalmazza, a k-ív tehát nem teljes. Vannak azonban példák — ahol a k értékek q-hoz viszonyítva kicsik — teljes, páros q esetén $(q+2)$-ívhez, páratlan q esetén pedig kúpszelethez nem tartozó k-ívekre.

([41] n. 15, [20], [21], [22], [28]). E k-ívek tanulmányozása felvet több ezideig meg nem oldott problémát.

Valamely $S_{r,q}(r \geqq 3)$ k-íveinek a tanulmányozása könnyen visszavezethető (S_{r-3} k-ívének, amely összeköti az ív $r-2$ pontját, S_{r-3}-hoz kitérő síkra való vetítésével) síkbeli ívek vizsgálatára ([33], [41] n. 18). Az előző eredmények alapján érvényes pl. az alábbi állítás: *Ha q páratlan és r-hez viszonyítva elég nagy, akkor $(q+1)$-gyel egyenlő azoknak a k értékeknek a maximuma, amelyekre $S_{r,q}$ k-ívei léteznek, s ezt a maximumot csupán a síkbeli normál görbék érik el* ([33], [41] n. 18).

A $K^s_{r,q}$ $(2 \leqq s \leqq r)$ süvegeket illetően, ahogy az előzőekben már jeleztük, elsősorban az alkalmazások szempontjából érdekes annak a problémának a megvizsgálása, hogy k mely maximális értékére létezhetnek az előbbi tulajdonságú halmazok. Ezt a maximumot $[M]^s_{r,q}$-val jelölve, az előzőekből következik, hogy

(2) $$[M]^2_{2,q} = q+1, \text{ ha } q \text{ páratlan}; \quad [M]^2_{2,q} = q+2, \text{ ha } q \text{ páros}.$$

Igazolható továbbá ([5], [51] 124. o.; [25], § 2.), hogy

(3) $$[M]^2_{r,q} \leqq q^{r-1}+1, \quad r \geqq 3 \text{ és } q>2,$$

az egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $r=3$, ezen túlmenően az is igaz ([5], [51] 124. o.), hogy

(4) $$[M]^2_{r,2} = 2^r.$$

Az előző relációkból az alábbi egyenlőtlenségek adódnak:

(5) $$[M]^r_{r,q} \leqq q+r-1, \text{ ha } q \text{ páratlan}; \quad [M]^r_{r,q} \leqq q+r, \text{ ha } q \text{ páros}.$$

(6) $$[M]^s_{r,q} \leqq q^{r-s+1}+s-1, \quad q>2, \quad s \leqq r-1.$$

(7) $$[M]^s_{r,2} \leqq 2^{r-s+2}+s-2.$$

Valóban, ha egy $k^s_{r,q}$-t vetítünk egy $s-2$ pontját összekötő S_{s-3}-ból az S_{s-3}-hoz kitérő S_{r-s+2}-re, könnyen belátható módon S_{r-s+2} másodfajú $(k-s+2)$ süvegét kapjuk, ha a fenti $s-2$ számú pont $k^s_{r,q}$ egy független pontokból álló $(s+2)$-széhez tartozik. Tehát, ha $s=2$, (2)-ből páratlan q-ra $k-r+2 \leqq q+1$ adódik, páros q esetére pedig $k-r+2 \leqq q+2$, s innen az (5) formulák azonnal következnek. Ha $s<r$, $q>2$, (3) szerint $k-s+2 \leqq q^{r-s+1}+1$, s ebből (6) már következik. A $q=2$ esetben (4)-ből $k-s+2 \leqq 2^{r-s+2}$ adódik, ebből pedig (7) azonnal kapható.

$[M]^s_{r,q}$-t pontosan meg lehet határozni, ha s q-hoz képest nagy. Pontosan, igazolni lehet ([59] n. 9), hogy

(8) $$[M]^r_{r,q} = r+2, \quad q-1 \leqq r,$$

és általánosabban ([59] n. 9):

(9) $$[M]^s_{r,q} = r+2, \quad [q(r+1)-1]/(q+1) \leqq s \leqq r.$$

$[M]^2_{r,q}$-ra ismeretesek (3)-nál jobb becslések is. ([41], § IV), s azokból $[M]^s_{r,q}$-ra más becslések is levezethetők (az előbbi gondolat menettel); az $[M]^s_{r,q}$ függvények tanulmányozása azonban általában nem egyszerű; komoly nehézségek merülnek fel s a kérdés még nincs lezárva.

Egy másik $k^s_{r,q}$-ra vonatkozó probléma annak a megvizsgálása, hogy vajon minden $k^s_{r,q}$ része-e egy másodfajú süvegnek, s ha ez így lenne, hogyan lehetne visszavezetni a $k^s_{r,q}$-k tanulmányozását másodfajú süvegek vizsgálatára. E kérdésre (hacsak nem teszünk r-re és q-ra bizonyos kikötéseket) a válasz negatív, mivel kimutatható, hogy r és q speciális értékeire léteznek másodfajú süveghez nem tartozó $k^3_{r,q}$-k, sőt ez utóbbiak olyan nevezetes aritmetikai-geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyek érdekessé teszik tanulmányozásukat. Mindazonáltal igazolható, hogy minden $k^s_{r,q}$-t ($s \geqq 3$) tartalmaz vagy egy másodfajú, vagy egy harmadfajú süveg. Igazolható továbbá az is, hogy *ha q r-hez viszonyítva elég nagy*, nem léteznek a fent említett típusú $k^3_{r,q}$-k, *s innen minden $k^s_{r,q}$ része valamely másodfajú süvegnek;* részletesebben, az $s \geqq 4$ esetben a $k^s_{r,q}$ süvegek bizonyos számú másodfajú süveg teljes metszetei ([56]).

3. §. Algebrai varietások grafikus jellemzése

Az előzőekben már szóltunk arról, hogy $S_{r,q}$ bármely k pontból álló halmaza algebrai varietás: felvetődik tehát az a kérdés, hogy milyen grafikus természetű feltételek esetén esik egybe ez a halmaz $S_{r,q}$ egyes legegyszerűbb algebrai varietásai ponthalmazával. Ez egyértelmű azzal, hogy az algebrai varietásokat — esetleg k-ra vonatkozó algebrai tulajdonságaikon túl — csupán grafikus tulajdonságaikkal jellemezzük.

A 2. §. eredményei, — amelyek kimondják, hogy

I. Állítás: *$S_{2,q}$ minden $(q+1)$-íve páratlan q esetén kúpszelet;*

és

II. Állítás: *$S_{r,q}$ minden $(q+1)$ íve, ha q páratlan és r-hez viszonyítva elég nagy, racionális normál görbe* — választ adnak a fent jelzett problémára, amennyiben grafikusan jellemzik a kúpszeleteket és a racionális görbéket. Egyéb eredmények is születtek ebben az irányban, amelyeket most röviden összefoglalunk.

A kúpszeletek és a racionális normál görbék után nehézségi sorrendben $S_{r,q}$ ($r \geqq 3$) kvadratikus alakzatai következnek. A legegyszerűbb grafikus tulajdonságuk nyilvánvalóan az, hogy minden olyan egyenest tartalmaznak, amellyel legalább két közös pontjuk van. Igazolható, hogy minden q (>2, páros vagy páratlan) esetén ez az egyetlen tulajdonság alkalmas a jellemzésükre. Erre vonatkoznak az alábbi állítások, amelyek közül az első megoldja a problémát az elliptikuson kívül a kvadratikus alakzatok összes típusaira nézve, akár alfajuló, akár nem, míg a második az elliptikus típusra vonatkozik.

III. Állítás: *Legyen az $S_{r,q}$ ($r \geqq 3, q > 2$) ponttérnek egy k számú pontból álló olyan részhalmazáról szó, amely tartalmaz minden olyan egyenest, amelynek vele kettőnél több közös pontja van és nem tartalmaz mint részt egy hipersíkot sem. Ebben az esetben a halmaz a $k \geqq \sum_{i=0}^{r-1} q^i$ pótlólagos feltétel mellett szükségképpen az alábbi típusú algebrai varietások egyike:*

ha q páratlan, vagy egy páros dimenziójú tér nem elfajuló kvadratikus alakzata, vagy egy a csúcsteréből egy fenti típusú kvadratikus alakzatot vetítő kúp, vagy egy nem elfajuló hiperbolikus típusú kvadratikus alakzat, vagy egy hiperbolikus típusú kvadratikus kúp;

ha q páros, vagy egy előbbi típusú kvadratikus alakzat, vagy egy fenti kvadratikus alakzat és egy alkalmas lineráis tér összege, vagy egy $(q+1)$*-ívet, avagy egy* $(q+2)$*-ívet az ív síkjához képest kitérő* S_{r-3}*-ból vetítő kúp* ([50], [51]).

IV. Állítás: *Egy* $S_{3,q}$*-ban (q páratlan) minden* (q^2+1)*-süveg elliptikus kvadratikus alakzat. Valamely* $S_{r,q}$*-ban* ($r \geqq 4$; $q \geqq 4$, *páros vagy páratlan) egy* $\left(\sum_{i=0}^{r-1} q^i - q^{d+1}\right)$*-halmaz, amelynek az* S_d*-k a maximális terei (a priori csupán a* $0 \leqq < d \leqq r-2$ *relációt tesszük fel), és amely tartalmaz minden vele több mint két közös ponttal rendelkező egyenest, szükségképpen olyan, hogy d kielégíti az* $(r-3)/2 \leqq d \leqq r-2$ *becslést. Továbbá, ha* $d=(r-3)/2$ *(r innen páratlan), a halmaz egy nem elfajuló elliptikus típusú kvadratikus alakzat pontjaiból áll ha* $(r-3)/2 < d \leqq r-4$ *(innen* $r > 5$*), a halmaz egy* S_{2d-r+2}*-beli csúcspontú elliptikus kvadratikus kúp; ha* $d=r-3$*, akkor páratlan q esetén* S_{r-4}*-beli csúcspontú elliptikus kvadratikus kúpot kapunk, vagy, ha q páros, egy* S_3 *tér egy* (q^2+1)*-süvegét* S_3*-hoz képest kitérő* S_{r-4}*-ből vetítő kúpot; végül, ha* $d=r-2$*, akkor a halmaz egyenlő* S_{r-2}*-vel* ([1], [23], [52]).

Megkísérelhető $S_{r,q}$ harmadrendű hiperfelületeinek ahhoz hasonló jellemzése, amelyet megadtunk a legegyszerűbb $r=3$, q (>3) páratlan esetben, s amelyet most kifejtünk. Szükségesnek tűnik mindenekelőtt a figyelmet egy $S_{3,q}$-nak k pontból álló olyan halmazaira irányítani, amelyek *tartalmaznak minden, velük kettőnél több közös ponttal rendelkező egyenest;* továbbá a banális esetek kizárása végett hasznos olyan halmazokra szorítkozni, amelyek *részként nem tartalmaznak síkokat, kvadratikus alakzatokat* (akár elfajulókról van szó, akár nem), és amelyek *nem redukálódnak kúpokká* (vagyis nem egy ponton átmenő egyenesekből állnak). Egy ilyen k-halmaz *„kettős pont"-jának nevezzük a halmaz minden olyan pontját, amelyre igaz, hogy minden rajta átmenő és a halmazhoz nem tartozó egyenesnek a halmazzal legfeljebb egy további közös pontja lehet;* végül tegyük fel még pótlólag, hogy a k-halmaz bármelyik két „kettős pont"-ját összekötő egyenest tartalmazza. $S_{3,q}$ olyan k-halmazát, amely eleget tesz a fenti feltételeknek, $F(k)$-val jelöljük. $F(k)$ vizsgálata mindjárt elvezet az általános harmadrendű vonalfelülethez és a három vagy négy független kettős pontot tartalmazó harmadrendű vonalfelületek grafikus jellemzéséhez az alábbi eredményekkel ([55]):

V. Állítás: *Olyan* $S_{3,q}$*-hoz (*$q>3$ *és páratlan) tartozó* $F(k)$*, amelyre* $k \geqq q^2+2q+1$ *és amelynek három egy egyenesbe eső „kettős pont"-ja van, csak akkor létezhet, ha* $k=q^2+2q+1$*, ekkor* $F(k)$ *egy harmadrendű általános vonalfelület (vagyis különböző egyenes vonalú direktrixei vannak).*

VI. Állítás: *Olyan* $S_{3,q}$*-hoz (*$q>3$ *és páratlan) tartozó* $F(k)$*, amelyre* $k \geqq q^2+3q+1$ *és amely négy független „kettős pont"-ot tartalmaz, csak akkor létezhet, ha* $k=q^2+3q+1$*; ebben az esetben* $F(k)$ *négy kettős ponttal rendelkező harmadrendű felület.*

VII. Állítás: *Olyan* $S_{3,q}$*-hoz (*$q>3$ *és páratlan) tartozó* $F(k)$*, amelyre* $k \geqq q^2+4q+1$ *és amelynek három független „kettős pont"-ja van, csak akkor létezhet, ha* $k=q^2+4q+1$*; ebben az esetben* $F(k)$ *három kettősponttal rendelkező harmadrendű felület.*

Elképzelhető, hogy az $F(k)$-k vizsgálata tovább folytatható, s így el lehet jutni $S_{3,q}$ harmadrendű felületeinek pontos jellemzéséhez.

A kezdetben megjelölt problémával kapcsolatban hátra van még $S_{5,q}$ VERONESE-felületével kapcsolatos kérdés. Az $X_{ij}=X_{ji}$ $(i,j=0,1,2)$ homogén koordinátájú

$S_{5,q}$-ban az $X_{ij}=x_i x_j$ parametrikus egyenletek az (x_0, x_1, x_2) koordinátájú $S_{2,q}$ kúpszeleteiből származtatott Veronese-felületet definiálják. Ez a felület — amely negyedrendű és ezért F_2^4-gyel jelöljük — kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető $S_{2,q}$-nak, s így q^2+q+1 pontból áll; továbbá $S_{2,q}$ q^2+q+1 egyenesének ugyanannyi kúpszelet felel meg, ezek különböző síkokban helyezkednek el és közülük bármely kettő F_2^4 egy és csak egy pontjában találkozik. F_2^4 egy P' pontján a felület $q+1$ kúpszelete halad keresztül (P'-nek az $S_{2,q}$-ban megfelelő ponton keresztülmenő $q+1$ egyenesből adódóan); e kúpszeletek $q+1$ érintője mind ugyanabban, F_2^4 P'-beli érintősíkjával egybeeső síkban helyezkedik el.

Ha q páratlan, a VERONESE-felület — így definiált — q^2+q+1 érintősíkja olyan, hogy *páronként egy pontban találkoznak, és közülük kettőnél több soha nem illeszkedik ugyanarra a pontra.* Az érintő síkok ily módon képzett összességének jellemzésére önként kínálkozik egy $S_{r,q}$*-hoz* ($r \geqq 5$, *q páratlan) tartozó k síkok olyan halmazainak a vizsgálata, ahol a síkok páronként metszik egymást és kettőnél több közülük soha nem illeszkedik ugyanarra a pontra.* Igazolták ([54]) — a kívánt jellemzésnek megfelelően —, hogy *mihelyt teljesül a* $k \geqq q^2+q+1$ *feltétel, a fenti halmaz előállítja egy* VERONESE*-felület összes érintő síkját*, és így szükségképpen fennállnak rá az $r=5$ és a $k=q^2+q+1$ összefüggések.

A fenti állítás DEL PEZZO egy ismert tételének analógián alapuló kiterjesztését adja véges terekre. E tétel a következőket állítja: Valamely komplex $S_{r,5}$ ($r \geqq 5$) egyetlen olyan irreducibilis — nem kúpszelet — felülete, amelynek érintősíkjai páronként metszik egymást, S_5 VERONESE-felülete. Ez utóbbiban két feltétel szerepel: az egyik grafikus (érintősíkok metszése, a másik differenciál-topológiai természetű) (olyan felület létezése, amelynek a fenti síkok érintő síkjai, többek közt azt is magában foglalja, hogy a síkok összessége folytonos rendszert alkosson). Véges terekre térve át, a második feltétel — a probléma természetének megfelelően — egy numerikus egyenlőtlenség ($k \geqq q^2+q+1$) helyettesíti.

Végül megjegyezzük, hogy páros q esetén a VERONESE-felület érintő síkjainak a rendszere duálisan átmegy ugyane felületet kúpszeletekben metsző síkok rendszerébe; továbbá bármelyik rendszer síkjai — miként az köztudomású — leírnak egy harmadrendű M_4^3 hiperfelületet. Az előző állításból a dualitás miatt egy újabb adódik, amely a VERONESE-felületet egy kúpszelet mentén metsző síkok összességére vonatkozik; így tehát M_4^3-at kétféle módon lehet — mint síkok mértani helyét — pusztán grafikus tulajdonságokkal jellemezni.

Fordította: Kósa András,
a matematikai tudományok kandidátusa

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. BARLOTTI, Un'estensione del teorema di Segre—Kustaanheimo, *Boll. U. M. I.*, (3) **10** (1955) 4, 498—506.
[2] A. BARLOTTI, Un'osservazione sulle k-calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre, *Boll. U. M. I.*, (3) **11** (1956), 248—252.
[3] A. BARLOTTI, Sui $\{k, n\}$-archi di un piano lineare finito, *Boll. U. M. I.* (3) **11** (1956), 553—556.
[4] A. BARLOTTI, Una limitazione superiore per il numero di punti appartenent i a una k-calotta $C(k, 0)$ di uno spazio lineare finito, *Boll. U. M. I.* (3) **12** (1957), 67—70.
[5] R. C. BOSE, Mathematical theory of the symmetrical factorial factorial desing, *Sankhya*, VIII, **11**, (1947), 107—166.

[6] R. C. BOSE—K. KISHEN, On the problem of confouding in the general symmetrical factorial desing, *Sankhya*, V (1940), 21—36.
[7] R. C. BOSE—D. K. RAY—CHANDHURI, *On a class of error correcting binary group codes*, Institut of Statistics of North Carolina, Mimeograph. Series No. 240, Sept. 1959.
[8] M. CICCHESE, Sulle cubiche di un piano di Galois, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **32** (1962), 38—42.
[9] A. COSSU, Su alcune proprieta dei k, n-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito, *Rend. di Mat.*, (3—4) **20** (1961), 263—269.
[10] C. DI COMITE, Su k-archi deducibili da cubiche piane, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **33** (1962), 429—435.
[11] G. JÄRNEFELT, A plane geometry with a finite number of elements, *Veröf. des Finnischen Geodätischen Inst.*, **36** (1949).
[12] G. JÄRNEFELT—P. KUSTAANHEIMO, An observation on finite geometries, *Acta XI. Congr. Mat. Scand.* (Trondheim 1949), 166—182.
[13] G. JÄRNEFELT, Reflection on a finite approximation to Euclidean geometry, Physical and Astronomical prospects, *Ann. Acc. Sci. Fennicae, Ser. A.*, I, n. 96.
[14] P. KUSTAANHEIMO, A note on a finite approximation of the Euclidean plane geometry, *Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. Mat.*, XV, **19** (1950).
[15] P. KUSTAANHEIMO, On the fundamental prime of a finite world, *Ann. Acc. Sc. Fenn. Ser. A*, I, n. **129** (1952).
[16] P. KUSTAANHEIMO—B. QVIST, On a differentiation in Galois fields, *Ann. Acc. Sc. Fenn., Ser. A*, I, n. **137** (1952).
[17] P. KUSTAANHEIMO, On the relation of congruence in finite geometries, *Rend. Mat. Roma*, (5) **16** (1957), 286—291.
[18] P. KUSTAANHEIMO, On the relation of order in finite geometries, *Rend. Mat. Roma*, (5) 3—4 (1957), 292—296.
[19] A. LEE, Über einige Extremalaufgaben bezüglich endlicher Körper, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **13** (1962), 237—243.
[20] L. LOMBARDO—RADICE, Sul problema dei k-archi completi di $S_{2,q}$, *Boll. U. M. I.*, (3) **11** (1956), 178—181.
[21] L. LUNELLI—M. SCE, Sulla ricerca dei k-archi completi mediante calcolatrice elettronica, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo*, (1957), 81—86.
[22] L. LUNELLI—M. SCE, k-archi completi nei piani proiettivi desarguesiani di rango 8 e 16, *Politecnico di Milano, Centro di calcoli numerici*, (1958), 1—11.
[23] G. PANELLA, Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito, *Boll. U. M. I.*, (3) **10** (1955), 507—512.
[24] E. J. F. PRIMROSE, Quadrics in finite geometries, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **47** (1951), 299—304.
[25] B. QVIST, Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane, *Ann. Ac. Sc. Fennicae, Ser.* A. I. n. 134 (1954).
[26] L. A. ROSATI, Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito, *Boll. U. M. I.* (3) **11** (1956) 3, 412—418.
[27] L. A. ROSATI, L'equazione delle 27 rette della superficie cubica generale in un corpo finito, *Boll. U. M. I.*, Note I, II, (3) **12** (1957) 4, 612—625; (3) **13** (1958) 1, 84—99.
[28] M. SCAFATI, Sui 6-archi completi di un piano lineare $S_{2,8}$, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo* (1957), 128—132.
[29] M. SCE, Sui k_h-archi di indice h, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo* (1957), 133—135.
[30] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, 1948).
[31] B. SEGRE, Sulle ovali dei piani lineari finiti, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **17** (1954), 141—142.
[32] B. SEGRE, Ovals in a finite projective plane, *Canadian Journ. of Math.* **7** (1955), 414—416.
[33] B. SEGRE, Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti, *Ann. di Mat.* (4) **39** (1955), 357—379.
[34] B. SEGRE, Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica 2, *Revue Fac. S. Univ. Istanbul*, (A) **21** (1956), 97—123.
[35] B. SEGRE, Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica 2, *Revue de Math. Pures et appl.* **2** (1957), 289—300.
[36] B. SEGRE, Sulle geometrie proitteive finite, *Rend. Convegno Reticoli, Palermo* (1957), 46—61.
[37] B. SEGRE, Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica $p \neq 0$, con particolare riguardo al caso $p=2$. *Corso C. I. M. E.* (*Roma Istit. Mat. Univ.* 1957).
[38] B. SEGRE, Sulla geometria sopra un campo a caratteristica, *Archimede*, **10** (1958), 53—60.
[39] B. SEGRE, On Galois geometries, *Proc. Internat. Congress of Math.*, (1958) 3; 488—499.

[40] B. SEGRE, Intorno alla geometrie di certi spazi aventi un numero finito di punti, *Archimede*, **11** (1959), 1–15.
[41] B. SEGRE, Le geometrie di Galois, *Ann. di Mat.* (6) **48** (1959), 1–96.
[42] B. SEGRE, On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two, *Acta Arithmetica*, **5** (1959), 303–311; 313–330.
[43] B. SEGRE, Le geometrie di Galois- Archi ed ovaloidi-Calotte ed ovaloidi, *Conf. Sem. Mat. Bari* 43–44 (1959), 1–29.
[44] B. SEGRE, Sulla teoria delle equazioni e delle congruenze algebriche, Note I, II. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **27** (1959), 155–161; 303–311.
[45] B. SEGRE, Sul numero delle soluzioni di un qualsiasi sistema di equazioni algebriche sopra un campo finito, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **28** (1960), 271–277.
[46] B. SEGRE, Sistemi di equazioni nei campi di Galois, *Atti Convegno Firenze sulla teoria dei gruppi* (1960), 66–80.
[47] B. SEGRE, Gli spazi grafici, *Rend. Sem. Mat. Milano*, **30** (1960).
[48] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, (Roma, 1961).
[49] E. SEIDEM, A theorem in finite projective geometry and an application to statistics, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 282.
[50] G. TALLINI, Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti, Note I, II, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **20** (1956), 311–317; 442–446.
[51] G. TALLINI, Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito, *Ann. di Mat.* (4) **42** (1956), 119–164.
[52] G. TALLINI, Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti, *Rend. Mat. Univ. Roma*, (5) **16** (1957) 3–4, 328–351.
[53] G. TALLINI, Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $p=2$, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **23** (1957), 242–245.
[54] G. TALLINI, Una proprieta grafica caratteristica della superficie di Veronese, negli spazi finiti, Note I, II, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, (8) **24** (1958), 19–23; 133–138.
[55] G. TALLINI, Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di $S_{3,q}$, *Rend. Acc. Naz. Lincei*, Note I, II, (8) **26** (1959), 484–489; 644–648.
[56] G. TALLINI, On caps of kind s in a Galois r-dimensional space, *Acta Arithmetica*, **7** (1961), 19–28.
[57] G. TALLINI, Le ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **30** (1961), 706–712.
[58] G. TALLINI, Sulle ipersuperficie irriducibili d'ordine minimo che contengono tutti i punti di uno spazio di Galois $S_{r,q}$. *Rend. Mat. Univ. Roma*, **20** (1961), 431–479.
[59] G. TALLINI, Le geometrie di Galois e le loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione, *Rend. Mat. Univ. Roma*, **19** (1960), 380–400.
[60] G. TALLINI, Intorno alle forme di uno spazio di Galois ed agli sapzi subordinati giacenti su esse, *Rend. Acc. Naz. Lincei* (8) **33** (1962), 421–428.
[61] A. WEIL, Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 497–508.
[62] A. WEIL–S. LANG, Number of points of varieties in finite fields, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 818–827.