VÉGES DIRICHLET-INTEGRÁLLAL RENDELKEZŐ FÜGGVÉNYEKRŐL, (I)*

Írta: LUCIANO DE VITO

Bevezetés

A jelen dolgozat célja olyan feltételek kidolgozása, amelyeket az S_n n-dimenziós euklideszi tér valamely A tartományának Σ határán értelmezett f függvénynek ki kell elégítenie ahhoz, hogy A-ban értelmezett, és ott négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltakkal, azaz véges

$$\int_A |\mathrm{grad}\, u|^2\, dx \qquad (dx \equiv dx_1 \ldots dx_n).$$

DIRICHLET-integrállal rendelkező u függvény nyoma** legyen.

Egy A-ban értelmezett, $A+\Sigma$-ban nem folytonos, de A-ban alkalmas differenciálhatósági feltételeknek eleget tevő függvény Σ-n értelmezett nyomát különböző módokon lehet definiálni; ezek a definíciók egymással ekvivalensek, amint azt ezen dolgozat első paragrafusában meg fogjuk mutatni. Például lehetséges az u Σ-n értelmezett nyomát definiáló $\gamma(u)$ nyom-operációt a véges DIRICHLET-integrállal rendelkező függvények terében ($A+\Sigma$-ban folytonos függvényekre már előzőleg) definiált ilyen operáció funkcionál-folytatásaként megadni. Ezt a szemléleti módot fogadták el DENY és LIONS az 1955-ben megjelent [6] memoárjukban, majd ezt követte PRODI is (lásd [40]).

Mindazonáltal a jelen dolgozatban inkább azt a nyom-fogalmat fogadtuk el, melyet FICHERA használt 1949-től kezdődően (lásd [11] 44. oldal és [12] 208. oldal), s amelyet azután más szerzők is elfogadtak (lásd [45], [43] a 217. oldaltól, [44] a 236. oldaltól, [22] és [39]). Ezen értelmezés szerint azt mondjuk, hogy az $u(x) \equiv \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ függvény nyommal rendelkezik Σ-n (mely elég reguláris hiperfelületdarabokból áll), ha minden, Σ-n definiált, A belseje felé mutató és a következőkben részletezendő alkalmas regularitási feltételeknek eleget tevő $\lambda(\xi)$ irányra, továbbá Σ csaknem minden ξ pontjára

$$\lim_{x \to \xi\ \lambda(\xi)\ \text{mentén}} u(x) = f(\xi),$$

ahol az $f(\xi)$ függvény nem függ $\lambda(\xi)$ speciális választásától. Ebben az értelemben minden, A-ban integrálható elsőrendű deriváltakkal bíró függvénynek van nyoma. A nyom-fogalomnak ez a kiterjesztése mutatkozik a legtermészetesebbnek, főként az alkalmazási problémák tekintetében. Valóban, ez az az értelmezés, mely szerint a csupán integrálható sűrűségből, ill. momentumból származó egyszerű ill. kettősréteg-potenciálokról azt lehet mondani, hogy nyommal rendelkeznek Σ-n (lásd [31] II. fej. 14. és 15. §).

* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa; Serie III. Vol. XII. Fasc. I—II (1958), 55—127. A fordítás itt közölt része az eredeti cikk 1—2. §-át, és a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza.

** A fordításban átvesszük az igen szemléletes, de a magyar szakirodalomban ebben az értelemben eddig még nem használt „nyom" kifejezést. Ezen egy függvény peremértékeit értjük. (*A fordító.*)

Az u parciális deriváltjait a FRIEDRICHS- és SZOBOLJEV-féle *gyenge-derivált* értelemben is felfoghatnók, azonban ez az általánosítás minden további nélkül elkerülhető egy olyan tétel értelmében, mely szerint a Σ-n adott f függvény akkor és csakis akkor nyoma valamely, a fenti feltételeknek eleget tevő függvénynek, ha nyoma egy A-ban harmonikus és ott a szóban forgó feltételt kielégítő függvénynek.

Azért, hogy a jelen dolgozatot, amennyire lehet, teljessé és más cikkektől függetlenné tegyük, e jól ismert tételnek az 1. paragrafusban egy új és egyszerű bizonyítását fogjuk adni.

Így, anélkül, hogy a probléma általánosságát megszorítanók, a jelen dolgozatban olyan feltételek kutatására szorítkozunk csupán, amelyeknek valamely, a Σ-n definiált f függvénynek eleget kell tennie ahhoz, hogy A-ban folytonos és ott folytonos és négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltakkal rendelkező függvény nyoma legyen.

Legyen $\mathfrak{T}(\Sigma)$ a Σ-n definiált azon valós f függvények összessége, melyek az imént említett tulajdonságokkal rendelkező valós u függvények nyomai, és legyen $\mathfrak{H}(A)$ ezen u függvények osztálya.

Egy szükséges és elégséges feltétel arra, hogy valamely, Σ-n definiált f függvény $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzon, lényegében FICHERA munkáiban található. Ez a feltétel a következőképpen fogalmazható meg:

Legyen $\{\omega_k\}$ az 1-nél nem alacsonyabb fokú valós harmonikus polinomok azon sorozata, mely a homogén harmonikus polinomok sorozatából áll elő a következő ortonormalizálással:

$$\int_A \operatorname{grad} \omega_h \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx = \delta_h^k.$$

Az $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ osztálybeli[1] *f függvény akkor és csak akkor tartozik $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ sor, ahol $c_k = \int_\Sigma f \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma$* [2], *konvergens* (lásd [17]).[3]

[1] $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ az (eléggé regulárisnak feltételezett) Σ-n definiált és ott négyzetesen integrálható valós függvények osztályát jelöli. Szem előtt kell tartani, hogy $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ tartalmazza a $\mathfrak{T}(\Sigma)$ osztályt (lásd a jelen dolgozat 1. paragrafusát).

[2] $\partial/\partial\nu$ a Σ belső normálisa szerinti deriváltat jelenti Σ valamely pontjában.

[3] Legyen Σ egy HÖLDER-folytonos érintő-hipersíkkal bíró zárt hiperfelület; a feltétel szükségessége azonnal következik az alábbi relációból:

$$c_k = \int_\Sigma f \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma = -\int_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx.$$

($d\sigma$ = elemi hiperfelület-darab mértéke Σ-n).

Ahhoz, hogy az elégségességet bebizonyítsuk, elég tekinteni a következő feltételeknek eleget tevő, véges DIRICHLET-integrállal rendelkező, harmonikus u függvényt:

$$(*) \qquad \int_A \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} \omega_k \, dx = -c_k, \quad \int_\Sigma \gamma(u) \, d\sigma = \int_\Sigma f \, d\sigma.$$

A $(*)$ összefüggésből következik, hogy

$$\int_\Sigma (f - \gamma(u)) \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

Egy, a $\left\{\frac{\partial \omega_k}{\partial \nu}\right\}$ rendszerre vonatkozó teljességi tételből (lásd [13], 27. old., XIX. tétel) következik, hogy $\gamma(u) = f$.

Könnyű belátni, hogy abban az esetben, midőn a tér dimenziószáma 2 és Σ egy egységsugarú kör $\mathcal{C}$ kerülete, a_m-mel és b_m-mel jelölve f FOURIER-együtthatóit, érvényes a következő: $\sum_m c_m^2 = \sum_m m(a_m^2+b_m^2)$, és ily módon ismét a $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ függvényeinek HADAMARDtól származó jellemzését (lásd [23]) kapjuk:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty.$$

A Σ-n definiált és $\mathfrak{F}(\Sigma)$-hoz tartozó f függvények jellemzésének problémáját újabban PRODI kezdte el ismét vizsgálni (lásd [40]). Mindenekelőtt megmutatta, hogy ez a probléma lokális jellegű; pontosabban, kimutatta, hogy ha $\{U_k\}$ Σ egy lefedése (ahol U_k Σ egy pontjának környezete S_n-ben), és ha a Σ-n adott f függvény minden $\Sigma \cap U_k$ metszetben egy $\mathfrak{H}(U_k)$-beli függvény nyoma, akkor $f \in \mathfrak{F}(\Sigma)$ (lásd [40], 41. old. 7. tétel).

Felhasználva ezt az észrevételt, PRODI arra az esetre szorítkozik, midőn a hiperfelület, melyen a nyom adva van, egy X hipersík, melynek egyenlete, az általánosság megszorítása nélkül, legyen $x_n = 0$; jelölje továbbá ξ ezen X hipersík pontjait, E_+ pedig az $x_n > 0$ félteret. Ezen feltételek mellett bebizonyítja, hogy *annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy, az X halmazon értelmezett és e halmaz legfeljebb korlátos részhalmazán 0-tól különböző $f \in \mathfrak{L}^{(2)}(X)$ függvény valamely, az E_+ féltérben definiált és minden E_+-ban levő korlátos és nyílt A halmaz esetén $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozó függvény nyoma legyen, az, hogy $f * |\xi|^{-n+3/2}$ * elsőrendű parciális deriváltjai X-en négyzetesen integrálhatók legyenek.* PRODI ugyanebben a munkájában egy másik jellemzést is adott a $\mathfrak{F}(\Sigma)$ halmaz függvényeire, felhasználva a RIEMANN—LIOUVILLE-féle törtrendű derivált fogalmát.

A jelen dolgozat első része a PRODI által adott első, fent idézett feltétel típusába tartozó, legáltalánosabb feltétel előállításával foglalkozik. Pontosabban, felhasználva $\Sigma \cap U_k$-nak egy Ω hipergömb-felületre való leképezését (hipersíkra való leképezés helyett), azt a célt tűzzük ki, hogy meghatározzuk annak szükséges és elegendő feltételeit, hogy a K függvény olyan legyen, hogy f-nek $\mathfrak{F}(\Sigma)$-hoz való tartozása ekvivalens legyen az $f * K$ függvény Σ-ban négyzetesen integrálható elsőrendű deriváltjainak létezésével.

Az imént említett, K-ra vonatkozó s a későbbiek során kimondandó tétel alkalmazása gyanánt ezen szerző fentemlített tételével analóg tételeket fogunk levezetni, és nyilvánvaló, hogy a kutatás ilyen alapon történő megindítása után annyi további, ilyen típusú tételt lehet kapni, amennyi csak tetszik.

Analóg szempontból lehet megindítani a $\mathfrak{F}(\Sigma)$ PRODI adta második jellemzésének típusába tartozó feltételek kutatását. Ennek ellenére a jelen dolgozatban ezzel nem foglalkozunk.

Ezután igyekeztünk az f-re vonatkozóan olyan szükséges és elegendő feltételeket kapni, melyek — a fentemlített típusúakhoz hasonlóan — az f alkalmas integrál-

* A $*$ a függvények „kompozíció-szorzatát" jelöli, és itt a következő jelentése van:

$$f * |\xi|^{-n+\frac{3}{2}} = \int_X f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \left[\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - \xi_k)^2\right]^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} dx_1, \ldots, dx_n \equiv \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}).$$

(*A fordító.*)

transzformáltjának első deriváltjaira vonatkoznak, de amelyek amazokkal ellentétben, lehetővé teszik ezen deriváltak kiszámítását az integráljel alatti differenciálással. E célból a 3. paragrafusban bebizonyítottunk egy LJAPUNOV-típusú tételt a $\mathfrak{T}(\Sigma)$ függvényeinek jellemzésére, mely szerint annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy Σ-n integrálható függvény $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy a Σ hiperfelületre vonatkozó f-momentumú kettősréteg-potenciál $\mathfrak{H}(A)$-ba tartozzék.

Legyen szabad megjegyeznünk, hogy a FICHERA és PRODI által levezetett szükséges és elegendő feltételek lényegében csak szigorúan elméleti szempontból bírnak jelentőséggel, mivel gyakorlatilag elég nehéz megállapítani, adott f függvényre vonatkozóan, hogy az ezen szerzők adta feltételek teljesülnek-e.

Hasonló kritikát lehet mondani az ebben a dolgozatban bizonyított LJAPUNOV-típusú feltételről is, még akkor is, ha — mint mondottuk — gyakorlatilag lehetséges az első deriváltak kiszámítása, melyeknek négyzetes integrálhatóságára szükség van.

Minthogy a probléma, melynek a jelen dolgozatot szenteltük, mint jól ismeretes, a differenciálegyenletek variációszámítási elméletére való alkalmazásai tekintetében is jelentőséggel bír, igyekeztünk az f függvényre olyan feltételeket felkutatni, melyeknek — bár legyenek csupán elegendő feltételek — az előbbiekkel szemben megvan az az előnyük, hogy teljesülésük vagy nem teljesülésük gyakorlatilag is igazolható.

Amennyire ezt meg tudtam állapítani, az egyetlen ilyen értelmű eredmény MIRANDA-nak köszönhető (lásd [32]). Ő bebizonyította, hogy egy Σ-n definiált f függvény $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozásának elegendő feltétele az, hogy egyenletesen eleget tegyen egy α-kitevőjű Hölder-feltételnek, ahol $\frac{1}{2}<\alpha\leqq 1$.

Ilyen értelmű feltételt szolgáltat a jelen dolgozat 6. §-ának II. tétele, mely szerint annak elegendő feltétele, hogy a Σ-n értelmezett f függvény $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy tetszés szerinti kitevőjű HÖLDER-feltételnek tegyen eleget egyenletesen és hogy — a továbbiakban részletezendő értelemben — korlátos variációjú legyen; sőt, a HÖLDER-feltétel egyenletes DINI-feltétellel is helyettesíthető.

Azt a megszorítást, hogy f korlátos variációjú legyen, abban az esetben, midőn f $\alpha>\frac{1}{2}$ kitevőjű HÖLDER-feltételnek tesz eleget, MIRANDA eredménye alapján el lehet hagyni, azonban általában nem hagyható el akkor, midőn $\alpha\leqq\frac{1}{2}$, amint azt egy példán láthatjuk. Másrészről egy további példa azt mutatja, hogy az a feltétel, hogy f korlátos variációjú, egymagában nem elegendő annak biztosítására, hogy f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék.

MIRANDA feltétele levezethető SZLOBODECKIJ és BABICS [41] egy újkeletű szükséges és elegendő feltételéből,[4] melyet GAGLIARDO [21] terjesztett ki azon függvények osztályára, melyek A-ban p-edik hatványon integrálható elsőrendű deriváltakkal

[4] A kör esetén ($n=2$ esetén lényegében erre szorítkoznak az idézett szerzők) a feltétel a következő:

$$\int_0^1 dt \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}\, dx < +\infty.$$

Ennek bebizonyításához elég arra emlékeztetni, hogy ha f 2π szerint periodikus és $(0, 2\pi)$-ben négyzetesen integrálható, akkor, a_m-mel és b_m-mel jelölve FOURIER-együtthatóit, érvényes a következő reláció:

$$f(x+t)-f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{b_m\cos\left[m\left(x+\frac{t}{2}\right)\right]-a_m\sin\left[m\left(x+\frac{t}{2}\right)\right]\right\}\sin m\frac{t}{2}$$

rendelkező függvények Σ-ra vonatkozó nyomai; mindazonáltal meg kell jegyezni, hogy ha f nem tesz eleget a MIRANDA-féle feltételnek, akkor a SZLOBODECKIJ és BABICS-féle feltétel verifikálása nehezen hajtható végre, ezért azt lehet mondani, hogy ez a feltétel is főként elméleti szempontból érdekes.

A célból, hogy megmutassuk a jelen dolgozat 6. paragrafusában elért eredmények érdekességét az alkalmazásokat illetően, rá akartunk világítani — egy, körben harmonikus függvényre vonatkozó általánosított NEUMANN-probléma kapcsán — egy DE GIORGI által észrevett, félkörben harmonikus függvényekre vonatkozó vegyes problémával kapcsolatos jelenség analogonjára [7], mely szerint a DIRICHLET-integrál végessége egymagában nem biztosítja a probléma megoldásának unicitását. Az itt felhozott példa használható a félkörre vonatkozó vegyes probléma esetében is.

Az imént említett NEUMANN-probléma egy sajátmegoldásának konstrukciója a 6. § II. tételének felhasználásával és egy egyváltozós, adott intervallumban nem csökkenő, majdnem mindenütt eltűnő deriválttal rendelkező, 1-nél kisebb, egyébként tetszés szerint előre megadott α-kitevőjű HÖLDER-feltételnek eleget tevő függvény megszerkesztésével vált lehetségessé.

1. §. A nyom fogalmáról

Ebben a paragrafusban mindenekelőtt megemlítjük a *nyom* néhány definícióját és összehasonlítjuk azokat egymással; ezután megmutatjuk olyan, valamely A tartományban (tartományon nyílt halmazt értünk*) harmonikus függvény létezését,

(melyet másodrendű középkonvergencia értelemben kell érteni). Ebből következik, ε-nal jelölve egy tetszés szerinti, 1-nél kisebb pozitív számot, hogy

$$\int_{\varepsilon}^{1} dt \int_{0}^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}\, dx = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2+b_m^2) \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin mt}{t}\right)^2 dt.$$

Érvényes a következő:

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin mt}{t}\right)^2 dt = m \int_{m\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)^2 d\tau;$$

ennélfogva létezik két olyan pozitív A és B szám, hogy $m \leqq r$ $(r \geqq 2)$ esetén

$$Am \leqq \int_{\frac{1}{2r}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin mt}{t}\right)^2 dt \leqq Bm.$$

Teljesül a következő:

$$2A \sum_{m=1}^{r} m(a_m^2+b_m^2) \leqq \int_{\frac{1}{r}}^{1} dt \int_{0}^{2\pi} \frac{|f(x+t)-f(x)|^2}{t^2}\, dx \leqq 2B \sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2+b_m^2)$$

és innen, a HADAMARD-féle jellemzés révén (lásd a 2. paragrafus I. tételét), következik az állítás.

* Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a dolgozatban, a szokástól eltérően, nem követeljük meg a tartomány összefüggő voltát. *(A ford.)*

mely véges DIRICHLET-integrállal és az A tartomány Σ határán előre megadott nyommal rendelkezik.

Valamennyi, ezen paragrafusban szereplő eredmény lényegében ismert; némi érdekessége néhány különösen egyszerűnek tűnő bizonyításnak azért talán lesz.

Előrebocsátunk néhány definíciót és megállapodást.

Ha A-val jelöljük az S_n n-dimenziós euklideszi tér egy tartományát és Σ-val az A határát, akkor $\mathfrak{L}^{(p)}(A)$-val az A-ban mérhető, és p-edik hatványon integrálható abszolút értékű valós függvények osztályát[5], $\mathcal{H}(A)$-val az A-ban mérhető és a FRIEDRICHS—SZOBOLJEV-értelemben elsőrendű gyenge deriválttal bíró, A-ban négyzetesen integrálható valós függvények osztályát fogjuk jelölni, és végül $\mathscr{A}(A)$-val azon valós függvények osztályát jelöljük majd, melyek minden egyes változójuk szerint abszolút folytonosak a többi $(n-1)$ változó majdnem minden rögzített értéke mellett, és amelyek azonkívül olyanok, hogy elsőrendű deriváltjaik, amelyek A-ban majdnem mindenütt léteznek és ott mérhetők, A-ban négyzetesen integrálhatók.

Azt fogjuk mondani, hogy valamely függvény egy nyílt vagy zárt tartományban (zárt tartományon a határával kiegészített nyílt halmazt értünk) a C_m osztályhoz tartozik, ha ott folytonos valamennyi deriváltjával együtt az m-edrendűekig bezárólag; viszont azt fogjuk mondani, hogy a C_m^α osztályhoz tartozik, ha eleme a C_m osztálynak és ha az m-edrendű deriváltjai α-kitevőjű $(0<\alpha\leqq 1)$ HÖLDER-feltételnek tesznek eleget egyenletesen.[6]

Ezen kívül azt fogjuk mondani, hogy az S_n tér összefüggő és korlátos A tartománya *m-osztálybeli,* ha Σ határa véges számú folytonos és zárt hiperfelületből áll, s továbbá, ha tetszés szerint kiválasztva a Σ egy x pontját, ebben az x pontban létezik a Σ érintő-hipersíkja és létezik az x pont olyan környezete a Σ hiperfelületen[7], mely *m-osztálybeli reguláris előállítással* adható meg ezen hipersíkra vonatkozóan; ezen azt értjük, hogy felvéve egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ derékszögű koordinátarendszert, melynek origója az x pontban van és amelynek ξ_n tengelye a Σ x-pontbeli belső normálisával esik egybe, létezik az x pont egy olyan környezete a Σ-n, amely a következő módon állítható elő:

$$\xi_n = \chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),$$

ahol $\chi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ a Σ x-pontbeli érintőhipersíkjának egy nyílt H halmazán értelmezett függvény (a H halmazt az x szóban forgó, Σ-n levő környezete *bázis-halmazának* fogjuk nevezni), mely a $\bar{H}$ halmazon egy C_m-osztálybeli függvénnyel azonos. Ennélfogva minden m-osztálybeli tartomány olyan, hogy Σ határa véges számú $\{U_k\}$ környezettel lefedhető, mely környezetek mindegyike m-osztálybeli reguláris előállítással adható meg, ezen környezetnek egy alkalmasan választott pontjához tartozó érintősíkjára vonatkozóan.

[5] Valamely függvény mérhető és integrálható voltát mindvégig LEBESGUE-értelemben értjük, kivéve azt az esetet, midőn erre külön felhívjuk a figyelmet. Ugyanígy a „majdnem mindenütt", „majdnem minden pontra" kifejezéseket is mindig LEBESGUE-értelemben fogjuk használni.

[6] Egy D halmazon definiált $f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy D-ben α kitevőjű HÖLDER-feltételnek tesz eleget egyenletesen, ha az $|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha$ hányados (ahol az $|x-y|$ jel az x és az y pontok távolságát jelenti) felső határa véges, midőn az x, y pontpárt tetszés szerint változtatjuk D-ben. Ezt a felső határt f *Hölder-együtthatójának* nevezzük.

[7] Egy x pont valamely D halmazon levő környezetén a D-nek és S_n egy x-et tartalmazó összefüggő tartományának metszetét értjük.

Könnyű belátni, hogy ha A m-osztálybeli ($m \geqq 1$) tartomány, Σ minden x-pontjához hozzá lehet rendelni olyan $\lambda(x)$ egységvektort, mely x-ből indul ki, A belseje felé mutat, s amely ezenkívül a következő feltételeknek tesz eleget:

1°. $\lambda(x)$ komponensei az x pontnak C_1-osztálybeli függvényei az $\{U_k\}$ halmazok mindegyikében,[8]

2°. létezik olyan pozitív ϱ_0 szám, hogy az $y = x + \varrho\lambda(x)$ pont, ahol $0 < \varrho \leqq \varrho_0$ és az x Σ-n változik, A-ban van és Σ-val kölcsönösen egy-egyértelmű megfeleltetésben áll.

A_ϱ-val fogjuk jelölni azt a tartományt, mely az A tartományból az $y = x + r\lambda(x)$ ($x \in \Sigma, 0 < r \leqq \varrho$) pontok elhagyásával keletkezik; az A_ϱ tartomány nyilvánvalóan 1-osztálybeli tartomány. Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$-val a Σ-n mérhető és ott p-edik hatványon integrálható abszolút értékű függvények osztályát fogjuk jelölni.

Ezek után azt fogjuk mondani, hogy az 1-osztálybeli A tartományban értelmezett $u(x)$ függvény Σ-n vett (vagy Σ-ra vonatkozó) nyoma a Σ-n definiált $f(x)$ függvény, ha választván egy tetszés szerinti, a fentemlített feltételeknek eleget tevő $\lambda(x)$ egységvektort, Σ majdnem minden ξ pontjára fennáll:

$$\lim_{x \to \xi \; \lambda(\xi) \text{ mentén}} u(x) = f(\xi)\,^{9}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha f és φ Σ-n definiált függvények, melyek egy A-ban definiált u függvény nyomai, akkor ezek a függvények Σ-n majdnem mindenütt egybeesnek.

Evvel kapcsolatban érvényesek a következő tételek:

I. *Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor minden, $\mathscr{A}(A)$-hoz tartozó $u(x)$ függvénynek létezik a Σ-n vett nyoma, és ez $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-hoz tartozó függvény* (lásd [43], 217. oldal).

II. *Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor minden, $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó $u(x)$ függvénynek (esetleg nullmértékű halmazon megváltoztatva az értelmezését) létezik a Σ-n vett nyoma, és ez $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-hoz tartozó függvény.*

Ez a tétel az előzőből következik egy olyan tétel értelmében, mely szerint $\mathcal{H}(A)$ minden u függvényéhez létezik az $\mathscr{A}(A)$ egy olyan v függvénye, mely A-ban majdnem mindenütt azonos u-val (lásd [33], 195. oldal).

Most idézzük DENY és LIONS definícióját, mely a $\mathcal{H}(A)$ függvényeinek egy 1-osztálybeli A tartomány Σ határára vonatkozó nyomát határozza meg[10].

[8] Azon, hogy $f(x)$ az $\{U_k\}$ sorozat U_k halmazán változó x pontnak C_l-osztálybeli ($0 \leqq l \leqq m$) függvénye, azt értjük, hogy $x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$-vel ($i = 1, \dots, n$) jelölve az U_k reguláris előállítását szolgáltató egyenleteket, az $f[x_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \dots, x_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})]$ függvény C_l-osztálybeli az U_k-hoz tartozó bázis-halmazon. Továbbá, ha ez utóbbi függvény mérhető (integrálható) ezen a bázis-halmazon, akkor azt fogjuk mondani, hogy $f(x)$ mérhető (integrálható) U_k-n; végezetül azt fogjuk mondani, hogy $f(x)$ C_l-osztálybeli, mérhető, illetve integrálható Σ-n, ha C_l osztálybeli, mérhető, illetve integrálható az $\{U_k\}$ halmazok mindegyikén.

[9] A nyomnak ezt a definícióját FICHERA adta meg (lásd [11], 44. oldal és [12], 208. oldal) az A tartományra itt kirótt feltételeknél általánosabb feltételek mellett.

[10] Lásd a bevezetésben már említett [45], [43], [44], [22], és [39] műveket. Ezt a definíciót DENY és LIONS az A tartományra általunk kirótt feltételeknél általánosabb feltételek mellett adták meg.

Tekintsük $\mathcal{H}(A)$-t HILBERT-térnek, az ezen osztályhoz tartozó u és v függvények[11] skaláris szorzatát a következő módon definiálva:

$$(u, v) = \int_A [\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v]\, dx + \int_A uv\, dx.\ ^{12*}$$

Tekintsük továbbá $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-t HILBERT-térnek, a következő skaláris szorzattal (lásd [23]):

$$(u, v) = \int_\Sigma uv\, d\sigma.$$

Jelöljük V-vel az összes, $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli függvények sokaságát. Ez a sokaság a $\mathcal{H}(A)$ HILBERT-tér egy bázisa[13].

Jelöljük $\gamma(u)$-val azt a lineáris transzformációt, mely a V sokaság minden egyes függvényéhez azt a Σ-n értelmezett függvényt rendeli hozzá, melyet az u Σ-n felvett értékei definiálnak[14].

A $\mathcal{H}(A)$ V sokaságán ily módon definiált $\gamma(u)$ transzformáció, melynek értékkészletét $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ tartalmazza, folytonos, tekintettel arra, hogy az A tartományra kirótt jelen feltételeink mellett V minden u függvényére teljesül az

$$\int_\Sigma u^2\, d\sigma \leqq L \left[\int_A u^2\, dx + \left(\int_A u^2\, dx \cdot \int_A |\operatorname{grad} u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

egyenlőtlenség (lásd [6], 334. oldal). Ekkor, mint ismeretes, létezik egy és csak egy olyan lineáris és folytonos, $\mathcal{H}(A)$-ban definiált transzformáció, melynek értékkészlete $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-ba esik, s amely V-ben $\gamma(u)$-val azonos. Az így kapott transzformáció, melyet továbbra is γ-val fogunk jelölni, alkotja a $\mathcal{H}(A)$ függvényeire vonatkozó nyomoperációt Σ-n.

Nyilvánvaló, hogy ha az $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ f és φ függvényei ugyanazon $\mathcal{H}(A)$-beli u függvény nyomai a most részletezett értelemben, akkor azok az $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$ HILBERT-tér

[11] Itt természetesen a tér egyetlen elemének tekintjük mindazokat a $\mathcal{H}(A)$-osztálybeli függvényeket, melyek egymástól nullmértékű halmazon különböznek. Mindazonáltal, az egyszerűség kedvéért, ezen tér elemeit továbbra is a függvény névvel fogjuk jelölni.

[12] Emlékeztetünk rá, hogy $\mathcal{H}(A)$ valamennyi függvénye $\mathfrak{L}^{(2)}(A)$-hoz tartozik.

* A „$\times$" szorzókereszt itt és a következőkben a vektorok skaláris szorzatának jelölésére szolgál. *(A fordító.)*

[13] Lásd [19]. Mint ismeretes, egy topologikus tér bázisának nevezzük a tér minden olyan sokaságát, melynek lezártja egybeesik magával a térrel.

[14] Azon, hogy $\gamma(u)$ lineáris, azt értjük, hogy minden valós a, b számpárra és minden u, v elempárra $\gamma(au+bv) = a\gamma(u)+b\gamma(v)$. $\gamma(u)$ folytonosságán azt értjük, hogy minden olyan $\{u_m\}$ sorozatra, melyre

$$\lim_{m\to\infty} \int_A \left(|\operatorname{grad}(u-u_m)|^2 + |u-u_m|^2 \right) dx = 0,$$

teljesül a következő reláció:

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Sigma |u-u_m|^2\, d\sigma = 0.$$

Azt a halmazt, melyet $\gamma(u)$ ír le, midőn u befutja a V sokaságot, a γ transzformáció értékkészletének nevezzük.

ugyanazon elemét definiálják, s ennélfogva csak nullmértékű halmaz pontjaiban különböznek egymástól.

Végezetül még egy nyom-fogalmat szeretnénk megemlíteni. Legyen A 2-osztálybeli tartomány, Σ a határa, $u(x)$ egy $\mathfrak{L}^{(2)}(A)$-hoz tartozó függvény, $f(x)$ egy $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-beli függvény; azt mondjuk, hogy $u(x)$-nek a nyoma a Σ-n az $f(x)$, vagy azt, hogy $u(x)$ *másodrendű középben az* $f(x)$ értékeit veszi fel Σ-n, ha

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} [u(x+\varrho\nu(x))-f(x)]^2\, d\sigma = 0,$$

ahol $\nu(x)$ a Σ x-pontbeli belső normálisának egységvektora és A_ϱ-nak az előzőekben elmondott jelentése van a $\nu(x)$ egységvektorra vonatkozóan, továbbá $\mathcal{F}A_\varrho$ az A_ϱ tartomány határát jelöli.

Ezen különböző nyom-definíciók közötti viszonyt illetően a következő tételek állnak fenn:

III. *A most idézett első két nyom-definíció ekvivalens, azaz, megtartva a már bevezetett jelöléseket, ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ annak határa, akkor $\mathcal{H}(A)$ minden rögzített u függvényére, esetleg nullmértékű halmazon megváltoztatva ennek értékeit, és Σ csaknem minden x pontjára teljesül a következő:*

$$\lim_{\varrho\to 0} [u(x)+\varrho\lambda(x)] = \gamma[u(x)].\,[15]$$

IV. *Ha A 2-osztálybeli tartomány, Σ a határa, $u(x)$ az $\mathcal{A}(A)$ egy függvénye és $f(x)$ az u nyoma Σ-n*[16]*, akkor u Σ-n 2-odrendű középben felveszi az $f(x)$ értékeit.*

Megtartva ϱ, ϱ_0, A_ϱ, $\lambda(x)$ előzőleg részletezett jelentését, láthatjuk, hogy az x Σ-n és a ϱ $(0, \varrho_0)$-ban történő változtatásával keletkező $u[x+\varrho\lambda(x)]$ függvény, Σ-nak majdnem valamennyi rögzített x pontjára, ϱ-nak abszolút folytonos függvénye $(0, \varrho_0)$-ban (lásd [33], 195. oldal, 6.3 tétel). Ebből következik $|u[x+\varrho\lambda(x)]|^2$ ϱ-ra vonatkozó egyenletes integrálhatósága az A_ϱ tartomány $\mathcal{F}A_\varrho$ határán[17]. Innen következik, hogy

$$\lim_{\varrho\to 0} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |u[x+\varrho\lambda(x)]-f(x)|^2\, d\sigma = 0.$$

Minthogy A 2-osztálybeli, $\lambda(x)$ gyanánt felvehetjük $\nu(x)$-t, s innen következik az állítás.

A IV. tételből nyilvánvaló módon következik az alábbi tétel:

V. *Ha A 2-osztálybeli tartomány, Σ a határa, $u(x)$ egy $\mathcal{H}(A)$-beli függvény, $f(x)$ az u nyoma Σ-n (u értékeit ismét legfeljebb nullmértékű halmaz pontjaiban változtatva meg), akkor $u(x)$ az $f(x)$ értékeit Σ-n másodrendű középben felveszi.*

[15] Nyilvánvaló, hogy ezt az egyenlőséget abban az értelemben kell tekinteni, hogy annak bal oldala a $\gamma(u)$ elemet definiáló függvények egyike. Ezen tétel bizonyítását illetően lásd: [33], 201. oldal, 7.3 tétel.

[16] Mostantól fogva, ha nyomról beszélünk, azt azon két definíció bármelyike szerint értjük, melyeknek ekvivalenciájáról most volt szó.

[17] A szóban forgó egyenletes integrálhatóság bizonyítása megtalálható FICHERA-nál (lásd [12], 212. oldal) abban az esetben, mikor u, azonkívül, hogy eleget tesz az itt kirótt feltételeknek, A-ban C_1-osztálybeli függvény; ez a bizonyítás csaknem változatlanul érvényes marad a jelenlegi feltételek mellett is.

Evvel szemben általában nem igaz, hogy ha egy 2-osztálybeli A tartományban definiált u függvény az A határán másodrendű középben felveszi egy $f(x)$ függvény értékeit, akkor annak $f(x)$ nyoma kell hogy legyen Σ-n.

Ez utóbbi körülmény csak néhány esetben áll fenn; például abban az esetben, amikor u harmonikus A-ban. Sőt, általánosabban az igaz, hogy ha φ egy Σ-n definiált és ott mérhető függvény, s abszolút értékének p-edik hatványa $(p>1)$ integrálható Σ-n, továbbá, ha u egy A-ban harmonikus függvény, mely Σ-n p-edrendű középben felveszi φ értékeit, akkor φ az u nyoma Σ-n (lásd [30]).

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

VI. *Ha A 1-osztálybeli tartomány és Σ a határa, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy $\mathfrak{L}^{(2)}(\Sigma)$-hoz tartozó f függvény egy $\mathcal{H}(A)$-beli u függvény nyoma legyen Σ-n, az, hogy létezzék egy $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó, A-ban harmonikus függvény, melynek az f függvény nyoma a Σ-n.*

Nyilvánvalóan elegendő bebizonyítani a szükségességet. Jelöljük $\mathcal{H}$-val azt a HILBERT-teret, melynek minden egyes eleme olyan halmaz, mely $\mathcal{H}(A)$ egy függvényéből és az összes, ezen függvény értékeinek nullmértékű halmazon történő megváltoztatásával és A-ban konstans függvény hozzáadásával keletkező függvényből áll, s amelyben a skaláris szorzat a következő módon van definiálva:

$$(u, v) = \int_A [\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v]\, dx.$$

Jelöljük U-val a $\mathcal{H}$ azon sokaságát, melynek minden egyes elemét egy, az $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnő függvény definiálja. Jelöljük továbbá $\overline{U}$-val ezen sokaság lezártját[18]. Megmutatjuk, hogy $\overline{U}$ teljes sokaság[19], és hogy $\overline{U}$ valamennyi elemét $\mathcal{H}(A)$ egy olyan függvényével lehet megadni, melynek nyoma a Σ-n azonosan eltűnő függvény.

Egyszerűség kedvéért most ugyanavval a jellel fogjuk jelölni az U valamely elemét és az őt definiáló függvények közül azt, amely $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnik. Legyen $\{u_m\}$ az U elemeinek egy, a CAUCHY-féle konvergencia-feltételt kielégítő sorozata, azaz olyan, hogy minden pozitív ε számhoz létezik olyan m_ε index, hogy $r, m > m_\varepsilon$ esetén

$$\int_A |\operatorname{grad}(u_r - u_m)|^2\, dx < \varepsilon.$$

Mivel, mint ismeretes, minden $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnő u függvényre

$$\int_A u^2\, dx \leqq c \int_A |\operatorname{grad} u|^2\, dx,$$

(ahol c az u választásától független, csak A-tól függő állandó), $r, m > m_\varepsilon$ esetén következik, hogy

$$\int_A |\operatorname{grad}(u_r - u_m)|^2\, dx + \int_A |u_r - u_m|^2\, dx < (1+c)\varepsilon.$$

[18] Egy halmaz *lezártján* az attól zérus távolságra levő pontok összességét értjük.

[19] Egy metrikus tér ($\mathcal{H}$ ilyen) valamely sokaságát *teljesnek* mondjuk, ha minden, ezen sokaság elemeiből álló és a CAUCHY-féle konvergencia-feltételt kielégítő sorozatnak van magához a sokasághoz tartozó határ-eleme.

Innen következik egy olyan $\mathcal{H}(A)$-hoz tartozó u függvény létezése, melyre (lásd [19])

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\int_A |u-u_m|^2\,dx+\int_A |\operatorname{grad}(u-u_m)|^2\,dx\Big]=0,$$

vagy

$$\lim_{m\to\infty}\int_A |\operatorname{grad}(u-u_m)|^2\,dx=0.$$

Ezenkívül fennáll a következő:

$$\int_\Sigma [\gamma(u)]^2\,d\sigma=\int_\Sigma [\gamma(u)-u_m]^2\,d\sigma\leqq L\Big[\int_A |u-u_m|^2\,dx+$$
$$+\Big(\int_A |u-u_m|^2\,dx\cdot\int_A |\operatorname{grad}(u-u_m)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Ebből következik, hogy

$$\int_\Sigma [\gamma(u)]^2\,d\sigma=0,$$

s innen következik az állítás.

Legyen v a $\mathcal{H}$ egy eleme; jelöljük v_0-lal v-nek az $\overline{U}$ sokaságra vonatkozó vetület-elemét[20]. A szokásos megállapodás szerint v-vel fogjuk jelölni a v elemet meghatározó függvények bármelyikét is, és v_0-lal jelöljük a v_0 elemet meghatározó függvények közül azt is, mely Σ-n eltűnik.

Legyen $v_1=v-v_0$. Akkor $\gamma(v_1)=\gamma(v)$.

Most már csak azt kell bebizonyítani, hogy v_1 harmonikus A-ban. Ezért emlékeztetünk arra, hogy

$$\int_A [\operatorname{grad} v_1\times\operatorname{grad} u]\,dx=0,$$

minden $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli és Σ-n eltűnő u függvényre. Legyen mármost C egy A-ban levő hipergömb és w egy $A+\Sigma$-ban C_1-osztálybeli, $A-C$-ben eltűnő, A-ban szakaszonként folytonos[21] másodrendű deriváltakkal rendelkező függvény. Ekkor a GREEN-tétel értelmében

$$\int_A [\operatorname{grad} v_1\times\operatorname{grad} w]\,dx=-\int_A v_1\Delta_2 w\,dx,$$

s ennek folytán

(1) $$\int_A v_1\Delta_2 w\,dx=0.$$

[20] Mint ismeretes, egy u elem valamely V sokaságra vonatkozó vetületének a V azon v elemét nevezzük, melynek u-tól való távolsága minimális. Ha a V sokaság teljes, ez a vetület-elem létezik és egyértelműen meg van határozva. Emlékeztetünk ezenkívül arra, hogy $(v-u, w)=0$, ha $w\subset V$.

[21] Egy v függvényt valamely A tartományban *szakaszonként folytonosnak* mondunk, ha $A+\mathcal{F}A$ (ahol $\mathcal{F}A$ az A tartomány határa) véges számú, páronként közös belső pontokkal nem bíró $A_1,\dots,A_m$ zárt tartományra bontható fel oly módon, hogy A_i belsejében a v függvény egy $A_i+\mathcal{F}A_i$-ben folytonos függvénnyel azonos.

φ-vel jelölve egy $A+\Sigma$-ban egyenletes HÖLDER-feltételnek eleget tevő függvényt, tekintsük a következő peremérték-problémát:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta_4 w = \varphi & C\text{-ben}, \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \mathscr{F}C\text{-n } (\mathscr{F}C = C \text{ határa}). \end{cases}$$

Mint ismeretes, ezen probléma megoldása létezik és $C+\mathscr{F}C$-ben C_1-osztálybeli. Tekintsük $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-t HILBERT-térnek, a skaláris szorzatot a következő módon értelmezve:

$$(u, v) = \int_C uv\, dx,$$

és jelöljük $P(u)$-val az $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$ u elemének az $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-hez tartozó és C-ben harmonikus függvények sokaságára vonatkozó vetületét. Ha most $s(x, y)$-nal jelöljük a $\Delta_2 v = 0$ egyenletre vonatkozó fundamentális megoldást, és minden $\varphi \in \mathfrak{L}^{(2)}(C)$ függvényre bevezetjük a $T(\varphi) = \int_C \varphi(y) s(x, y)\, dy$[22] jelölést, akkor a (2) probléma w megoldása a következő (lásd [14]):

$$(3)\qquad w = T^2(\varphi) - TPT(\varphi).$$

Az $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-ben definiált és $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-beli értékkészlettel rendelkező $T(u)$ és $P(u)$ transzformációk önadjungáltak; ekkor, ha w-vel jelöljük a C-ben a (3) által adottal azonos és $A-C$-ben eltűnő függvényt, az (1)-ből következik:

$$\int_A v_1 \Delta_2 w\, dx = \int_C v_1 [T(\varphi) - PT(\varphi)]\, dx = \int_C \varphi [T(v_1) - TP(v_1)]\, dx = 0.$$

Mivel φ tetszés szerint választható, az adódik, hogy $T(v_1) = TP(v_1)$, s innen $v_1 = P(v_1)$. Innen következik, hogy v_1 harmonikus minden A-ban elhelyezkedő gömbben.

Így a tételt teljesen bebizonyítottuk.

2. §. A K függvényre vonatkozó szükséges és elegendő feltételek

Idézünk néhány, numerikus sorokra vonatkozó fogalmat.

Azt fogjuk mondani, hogy két, valós és nem-negatív tagokból álló sor *c-ekvivalens*, ha egyikük konvergenciájából következik a másik konvergenciája. Ha $\{\alpha_m\}$ és $\{\beta_m\}$ valós számokból álló sorozatok, akkor azt fogjuk mondani, hogy α_m aszimptotikus β_m-mel, ha

$$0 < \liminf_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right| \leq \limsup_{m\to\infty} \left|\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right| < +\infty.$$

A következőkben az alábbi lemmát fogjuk felhasználni:

[22] A $T(\varphi)$ függvény, mint ismeretes, $\mathfrak{L}^{(2)}(C)$-hez tartozik.

1. LEMMA. *Legyen* $\{\beta_m\}$ *valós, nem-negatív számokból álló sorozat. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy tetszés szerinti, valós és nem-negatív számokból álló* $\{\gamma_m\}$ *sorozatot megadva, melyre* $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty$, *a* $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ *és a* $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\gamma_m$ *sorok c-ekvivalensek legyenek, az, hogy* β_m *m-mel aszimptotikus legyen, vagyis létezzék két olyan pozitív* A_0 *és* B_0 *szám,* $A_0 < B_0$, *hogy elég nagy m-re teljesüljön az* $mA_0 \leqq \beta_m \leqq mB_0$ *egyenlőtlenség.*

Tegyük fel először, hogy nem létezik olyan pozitív A_0 szám, melyre $A_0 \leqq \beta_m/m$ elég nagy m esetén; ebből $\liminf_{m\to\infty} \beta_m/m = 0$ következik. Ekkor létezik olyan, természetes számokból álló és növekvő $\{m_k\}$ sorozat, melyre $\beta_{m_k} < m_k/k$.

Legyen

$$\gamma_m = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad m \neq m_k, \\ \dfrac{1}{m_k k} & \text{ha} \quad m = m_k. \end{cases}$$

Ekkor azonnal látható, hogy a $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\gamma_m$ sorok konvergensek, míg a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sor divergens; azonban ebben az esetben a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\gamma_m$ sor konvergenciájából nem következik a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sor konvergenciája.

Most tegyük fel, hogy nem létezik olyan pozitív B_0 szám, hogy $\beta_m/m \leqq B_0$ elég nagy m esetén; ebből következik, hogy $\limsup_{m\to\infty} \beta_m/m = +\infty$. Akkor létezik olyan, természetes számokból álló növekvő $\{m_h\}$ sorozat, melyre $\beta_{m_h} > hm_h$.

Legyen

$$\gamma_m = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad m \neq m_h, \\ \dfrac{1}{h^2 m_h} & \text{ha} \quad m = m_h. \end{cases}$$

Ekkor könnyen látható, hogy a $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sorok konvergensek, míg a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\gamma_m$ sor divergens; ezért, ebben az esetben, a $\sum_{m=1}^{\infty} m\gamma_m$ sor konvergenciájából nem következik a $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m\gamma_m$ sor konvergenciája. Ily módon bebizonyítottuk a feltétel szükségességét. Az elégségesség teljesen nyilvánvaló.

Így a lemmát teljesen bebizonyítottuk.

Tekintsük most, bevezetésképpen, az S_2 kétdimenziós euklideszi teret; S_2 általános pontját z-vel fogjuk jelölni; z-nek az origótól mért távolságát ϱ-val, argumentumát pedig ϑ-val jelöljük.

Mindenekelőtt idézzük a HADAMARD-feltételt, arra az esetre vonatkozóan, midőn Σ egy kör határa.

I. *Legyen* Σ *egy z síkbeli, origó középpontú, R sugarú kör kerülete, s a* Σ *ívhosszparamétere és* $f(s)$ *egy* Σ*-n integrálható függvény. Annak szükséges és elegendő fel-*

tétele, hogy $f(s)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy — bevezetve a $\tau = s/R$ jelölést, továbbá a_m-mel és b_m-mel jelölve az $f(R\tau)$ függvénynek a $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó Fourier-koordinátáit[23]. *— fennálljon az*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty. \tag{1}$$

feltétel.

Jelölje D azt a körlemezt, melynek határa Σ. Az $u(z)$ függvényre, mely D-ben harmonikus és a $\mathfrak{H}(D)$ osztályhoz tartozik, továbbá melynek Σ-n vett nyoma az f függvény, fennáll a következő, D-ben egyenletesen konvergens sorfejtés:

$$u(z) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} (\varrho/R)^m (a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta)$$ [24]

Innen, ha f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozik, következik, hogy $\sum_{m=1}^{k} m(a_m^2 + b_m^2) \leqq \int_D |\text{grad}\, u^2|\, dx$, bármekkora legyen is k, és így a feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

Ellenben, ha $\sum_{m=1}^{\infty} m(a_m^2 + b_m^2) < +\infty$, akkor, u_n-nel jelölve az előbb leírt sor n-edik részletösszegét, a következő áll fenn:

$$\int_D |\text{grad}\,(u_{n+p} - u_n)|^2\, dx = \sum_{m=n+1}^{n+p} m(a_m^2 + b_m^2),$$

és innen könnyen következik a feltétel elegendő volta.

Legyen Σ egy 1-osztálybeli korlátos tartomány határa, s a Σ ívhosszparamétere, L pedig Σ hossza; azt fogjuk mondani, hogy a Σ-n definiált és ott integrálható $w(s)$ függvény Σ-n *négyzetesen integrálható gyenge deriválttal* rendelkezik, ha létezik olyan, Σ-n négyzetesen integrálható $\varphi(s)$ függvény, hogy minden, Σ-n C_2-osztálybeli $v(s)$ függvényre teljesül a következő:

$$\int_\Sigma w(s) \frac{dv(s)}{ds}\, ds = -\int_\Sigma \varphi(s) v(s)\, ds.$$

[23] Az integrálható $\varphi(\tau)$ függvény $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó *Fourier-koordinátáin* a következő számokat értjük:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos m\tau\, d\tau, \qquad b_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin m\tau\, d\tau \qquad (m > 0).$$

[24] Ahhoz, hogy igazoljuk ezt a sorfejtést, elég arra emlékeztetni, hogy

$$\lim_{\varrho \to R} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \vartheta) e^{im\vartheta}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} f(R\tau) e^{im\tau}\, d\tau.$$

A Σ-n definiált azon $w(s)$ függvények osztályát, melyek Σ-n integrálhatóak és amelyek Σ-n négyzetesen integrálható gyenge deriválttal rendelkeznek, $\mathfrak{B}(\Sigma)$-val fogjuk jelölni.

Mármost bebizonyíthatjuk a következő tételt:

II. *Legyen R egy pozitív szám és $K(t)$ egy $2\pi R$ periódusú, a $(0, 2\pi R)$ intervallumban integrálható periódikus függvény. Legyen $\vartheta = t/R$, s jelöljük a_m-mel és b_m-mel $(m=0, 1, \ldots)$ a $K(R\vartheta)$ függvény $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ intervallumra vonatkozó Fourier-koordinátáit. Ha C egy R sugarú kör kerülete, s a C ívhosszparamétere, $f(s)$ egy C-n definiált és ott integrálható függvény, akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(s)$ $\mathfrak{T}(C)$ osztályhoz való tartozása ekvivalens legyen a*

$$\Phi(t) = f * K = \int_C f(s) K(t-s)\, ds \text{ [25]}$$

függvény $\mathfrak{B}(C)$ osztályhoz való tartozásával, az, hogy $a_m^2 + b_m^2$ $1/m$-mel legyen aszimptotikus.

A $\Phi(t)$ függvény $\mathfrak{B}(C)$ osztályhoz való tartozása, mint az előbb mondottuk, azt jelenti, hogy létezik olyan, C-n definiált és ott négyzetesen integrálható $\varphi(t)$ függvény, melyre

$$\int_C \Phi(t) \frac{dv(t)}{dt} dt = -\int_C \varphi(t) v(t)\, dt \tag{2}$$

valamennyi, C-n C_2-osztálybeli $v(t)$ függvényre.

Azonnal látható, hogy a (2) rendszer a következővel azonos:

$$\frac{im}{R} \int_C \Phi(t) e^{im\frac{t}{R}} dt = -\int_C \varphi(t) e^{im\frac{t}{R}} dt \qquad (m=0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Legyen

$$\frac{1}{R} \int_C K(t) e^{im\frac{t}{R}} dt = c_m, \quad \frac{1}{R} \int_C f(s) e^{im\frac{s}{R}} ds = \tau_m.$$

Az integrálás sorrendjének felcserélésével a következőt kapjuk:

$$\int_C e^{im\frac{t}{R}} dt \int_C f(s) K(t-s)\, ds = R^2 c_m \tau_m,$$

és így

$$\left| \frac{im}{R} \int_C e^{im\frac{t}{R}} dt \int_C f(s) K(t-s)\, ds \right|^2 = R^2 m^2 |c_m|^2 |\tau_m|^2 =$$

$$= \pi m^2 R^2 |\tau_m|^2 (a_m^2 + b_m^2). \text{ [26]}$$

[25] Azonnal látható, hogy $f(s)K(t-s)$, mint s függvénye, a $(0, 2\pi R)$ intervallumban integrálható majdnem minden, ezen intervallumban rögzített t-re, és hogy $\int_C f(s)K(t-s)ds$ t-nek a $(0, 2\pi R)$ intervallumban integrálható függvénye.

[26] Valóban, $m \geqq 1$ esetén $|c_m|^2 = \pi(a_m^2 + b_m^2)$.

Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a (3) rendszer egy $\varphi(t)$ megoldása létezzék, az, hogy $\sum_{m=1}^{\infty} m^2|\tau_m|^2(a_m^2+b_m^2)<+\infty$ legyen. Másrészről az I. tételből következik, hogy az f függvény $\mathfrak{T}(C)$ osztályhoz való tartozásának szükséges és elegendő feltétele a következő: $\sum_{m=1}^{\infty} m|\tau_m|^2<+\infty$. Ezen két feltétel összehasonlításából azt kapjuk, hogy ha $a_m^2+b_m^2$ aszimptotikus $1/m$-mel, akkor az egyik sor konvergenciája maga után vonja a másik sor konvergenciáját, és viszont. Ily módon bebizonyítottuk a feltétel elegendő voltát.

Ha másrészről a $\sum_{m=1}^{\infty} m^2|\tau_m|^2(a_m^2+b_m^2)$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} m|\tau_m|^2$ sorok c-ekvivalensek minden, C-n integrálható f függvényre vonatkozóan, akkor speciálisan ilyenek lesznek minden, C-n négyzetesen integrálható függvényre vonatkozóan, vagyis minden olyan $\{|\tau_m|^2\}$ sorozatra vonatkozóan is, melyre $\sum_{m=1}^{\infty}|\tau_m|^2<+\infty$, és akkor az 1. lemma alapján azt kapjuk, hogy $a_m^2+b_m^2$ $1/m$-mel aszimptotikus. Ily módon bebizonyítottuk a feltétel szükségességét.

E tétel tetszés szerinti, nem köralakú sík-tartományra való kiterjesztését a következő tétel szolgáltatja:

III. *Legyen A az (x, y) sík egy 1-osztálybeli tartománya, L az A határát képező Σ görbe hossza, s a Σ ívhosszparamétere, f egy Σ-n integrálható függvény, $K(t)$ egy L periódusú, a $(0, L)$ intervallumban integrálható periodikus függvény.*

Bevezetve a $\vartheta=\frac{2\pi t}{L}$ jelölést, jelöljük a_m-mel és b_m-mel a $K\left(\frac{L\vartheta}{2\pi}\right)$ függvény Fourier-koordinátáit a $(0, L)$ intervallumra vonatkozóan. Akkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(s)$ $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozása $\Phi(t)=f*K=\int_{\Sigma} f(s)K(t-s)\,ds$ $\mathfrak{B}(\Sigma)$-hoz való tartozásával legyen ekvivalens, az, hogy $a_m^2+b_m^2$ $1/m$-mel legyen aszimptotikus.

Minthogy A 1-osztálybeli tartomány, létezik olyan $\lambda(\zeta)$ egységvektor, melynek kezdőpontja a Σ ζ pontja, mely A belseje felé mutat, és amelynek komponensei Σ-n C_1-osztálybeli függvények, továbbá létezik olyan pozitív ϱ_0 szám, hogy a $\zeta+\varrho\lambda(\zeta)$ ponthalmaz, minden $(0, \varrho_0)$-ban rögzített ϱ-ra, midőn ζ befutja a Σ-t, A-ban helyezkedik el és Σ-val kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben van. Feltesszük, hogy $\varrho_0<L/4\pi$. Jelölje $\zeta(s)$ a Σ azon pontját, melynek ívhosszparamétere s, és legyen A' a $\zeta(s)+\varrho\lambda[\zeta(s)]$ pont által leírt halmaz, midőn s a $0\leqq s<L$ intervallumban és ϱ a $0\leqq\varrho<\varrho_0$ intervallumban változik.

Ezenkívül jelöljük C-vel az origóval mint középponttal rendelkező $L/2\pi$ sugarú kör kerületét, s-sel a C ívhosszparaméterét, $z(s)$-sel a C s paraméterű pontját, $\nu(z)$-vel a C z-beli belső normálisának egységvektorát, D-vel azt a körlemezt, melynek C a határa és D'-vel azt a halmazt, melyet a $z(s)+\varrho\nu[z(s)]$ pont ír le, midőn s a $0\leqq s<L$ intervallumban és ϱ a $0\leqq\varrho<\varrho_0$ intervallumban változik. Legyenek $x(\varrho, s), y(\varrho, s)$ a $z(s)+\varrho\nu[z(s)]$ pont, és $\zeta(\varrho, s), \eta(\varrho, s)$ a $\zeta(s)+\varrho\lambda[\zeta(s)]$ pont koordinátái.

Az $x=x(\varrho, s)$, $y=y(\varrho, s)$ egyenletek kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek a D' pontjai és a $0 \leqq \varrho < \varrho_0$, $0 \leqq s < L$ feltételekkel definiált téglalap pontjai között.

Jelöljük $s=s(x, y)$-nal és $\varrho=\varrho(x, y)$-nal az inverz megfeleltetés egyenleteit; ekkor nyilvánvaló, hogy $\zeta=\zeta[\varrho(x, y), s(x, y)]$, $\eta=\eta[\varrho(x, y), s(x, y)]$ egy A' és D' között fennálló 1-osztálybeli homeomorfizmus egyenletei[27]. Ezen egyenleteket röviden a következő módon fogjuk írni: $\xi=\xi(x, y)$, $\eta=\eta(x, y)$, míg az inverz transzformáció egyenletei a következők lesznek: $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$.

Ezek előrebocsátása után áttérünk a tétel bizonyítására.

Tegyük fel, hogy az $f(s)$ függvény, a C körvonalon definiált függvényként tekintve, a $\mathfrak{F}(C)$ osztályhoz tartozik. Jelöljük $u(z)$-vel azt a D körben definiált függvényt, mely $\mathfrak{H}(D)$-hez tartozik, D-ben harmonikus és C-re vonatkozó nyoma az $f(s)$ függvény. Az $(A'-\Sigma)$-ban definiált $v(\zeta)=u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ függvény $\mathfrak{H}(A'-\Sigma)$-hoz tartozik, és Σ-n vett nyoma az $f(s)$ függvény. Legyen $w(\zeta)$ egy A-ban C_1-osztálybeli függvény, mely $(A'-\Sigma)$-ban $v(\zeta)$-val azonos (ilyen függvény egzisztenciáját könnyű igazolni). A $w(\zeta)$ függvény nyilvánvalóan $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozik és Σ-n vett nyoma az f függvény.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f(s)$ $\mathfrak{F}(\Sigma)$-hoz tartozik, és jelöljük $w(\zeta)$-val azt az A-ban harmonikus függvényt, mely $\mathfrak{H}(A)$-hoz tartozik és amelynek Σ-n vett nyoma az f függvény. Ekkor a $(D'-C)$-ben definiált $\omega(\zeta)=w[\xi(x, y), \eta(x, y)]$ függvény $\mathfrak{H}(D'-C)$-hez tartozik és C-n vett nyoma az $f(s)$ függvény. Legyen $u(z)$ egy D-ben C_1-osztálybeli függvény, mely $(D'-C)$-ben $\omega(z)$-vel azonos. Ez a függvény $\mathfrak{H}(D)$-hez tartozik és C-n vett nyoma az $f(s)$ függvény.

Ily módon bebizonyítottuk, hogy $f(s)$ $\mathfrak{F}(\Sigma)$-hoz való tartozása ekvivalens ezen függvény $\mathfrak{F}(C)$-hez való tartozásával. Így, az előző tétel értelmében, az állítást igazoltuk.

Most példaként megadunk néhány olyan $K(t)$ függvényt, mely eleget tesz az előző tételben kirótt feltételnek.

Az első példát az a függvény szolgáltatja, mely a $(-L/2, L/2)$ intervallumban az $|t|^{-\frac{1}{2}}$ függvénnyel azonos, s amelyet ezen intervallumon kívül úgy definiálunk, hogy periodikus legyen.

Mivel $|t|^{-\frac{1}{2}}$ páros függvény, fennáll a következő: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-\frac{1}{2}} \sin m\vartheta\, d\vartheta = 0$;

továbbá

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta = 2\int_{0}^{\pi} \left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta = 2\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/2} \int_{0}^{\pi} \vartheta^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta.$$

Legyen $m\vartheta=\sigma^2$, akkor

$$\int_{0}^{\pi} \vartheta^{-1/2} \cos m\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{\sqrt{m}} \int_{0}^{\sqrt{m\pi}} \cos \sigma^2\, d\sigma.$$

[27] Azon, hogy $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ a (ξ, η) sík A halmaza és az (x, y) sík D halmaza közötti 1-osztálybeli homeomorfizmus egyenletei, azt értjük, hogy ezen egyenletek kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hoznak létre az A és a B pontjai között, továbbá, hogy az $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ függvények A-ban C_1-osztálybeliek, és ezen függvények JACOBI-determinánsa sehol sem tűnik el.

Figyelembe véve a

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\sqrt{m\pi}}\cos\sigma^2\,d\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

határérték-relációt, azt kapjuk, hogy a $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ korlátozásnak eleget tevő rögzített ε-hoz létezik olyan m_ε természetes szám, hogy $m>m_\varepsilon$ esetén

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\varepsilon\leqq\int_0^{\sqrt{m\pi}}\cos\sigma^2\,d\sigma\leqq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\varepsilon,$$

és így, ha $m>m_\varepsilon$, akkor

$$\frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-2\varepsilon\right)\leqq\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{L\vartheta}{2\pi}\right|^{-1/2}\cos m\vartheta\,d\vartheta\leqq\frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+2\varepsilon\right).$$

Evvel igazoltuk az állítást.

Második példaként tekintsük a $K(t)=\left(1-\cos\frac{2\pi t}{L}\right)^{-\frac{1}{4}}$ függvényt. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy ez a függvény eleget tesz az előző tételben kirótt feltételeknek, elegendő megjegyezni, hogy a

$$\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left(1-\cos\frac{2\pi t}{L}\right)^{-1/4}-2^{1/4}|t|^{-1/2}=\sqrt{\frac{2\pi}{L}}\left[(1-\cos\vartheta)^{-1/4}-2^{1/4}|\vartheta|^{-1/2}\right]$$

különbség első deriváltjával együtt folytonos a $(-\pi,\pi)$ intervallumban.

Ebből következik olyan pozitív $B>0$ szám létezése (lásd [37], 263. oldal), melyre

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[(1-\cos\vartheta)^{-1/4}-2^{1/4}|\vartheta|^{-1/2}\right]\cos m\vartheta\,d\vartheta\right|\leqq B\frac{1}{m}.$$

Másrészről, mint előbb láttuk, létezik két olyan pozitív A' és A'' szám, melyekre

$$A'\frac{1}{\sqrt{m}}\leqq 2^{1/4}\int_{-\pi}^{\pi}|\vartheta|^{-1/2}\cos m\vartheta\,d\vartheta\leqq A''\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Innen következik két olyan pozitív B' és B'' szám létezése, hogy

$$B'\frac{1}{\sqrt{m}}\leqq\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\vartheta)^{-1/4}\cos m\vartheta\,d\vartheta\leqq B''\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Ezenkívül szem előtt tartva, hogy $\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos\vartheta)^{-\frac{1}{4}}\sin m\vartheta\,d\vartheta=0$, kapjuk az állítást.

Bebizonyítjuk a következő tételt is:

IV. *Legyen A a z sík egy 2-osztálybeli tartománya, L az A határát képező Σ görbe hossza, s a Σ ívhosszparamétere, $z=z(s)$ a Σ paraméteres egyenlete az s változóra vonatkozóan, és végül legyen $f(s)$ egy $\mathfrak{L}^{(3)}(\Sigma)$ osztályhoz tartozó függvény. Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz tartozzék, az, hogy a $\Phi^*(t)=$ $=\int\limits_{\Sigma} f(s)|z(s)-z(t)|^{-\frac{1}{2}} ds$ függvény Σ-n négyzetesen integrálható gyenge deriválttal rendelkezzék*[28].

Figyelembe véve, hogy a $K_0(t)$ függvény, melyet úgy definiálunk, hogy $(-L/2, L/2)$-ben a $|t|^{-\frac{1}{2}}$ függvénnyel azonos és egyébként pedig periodikus legyen, eleget tesz a III. tétel feltételének, állításunk bebizonyításához nyilvánvalóan elegendő megmutatni, hogy $\Phi^*(t)$ $\mathfrak{B}(\Sigma)$ osztályhoz való tartozása ekvivalens a $\Phi(t)=$ $=\int\limits_{\Sigma} f(s)\cdot K_0(s-t)\,ds$ függvény ugyanezen osztályhoz való tartozásával. Ezért elegendő igazolni, hogy a $\Phi^*(t)-\Phi(t)$ függvény a $\mathfrak{B}(\Sigma)$ osztályhoz tartozik, minthogy ez az osztály lineáris, ami azonnal látható.

Felhasználva azt a feltételt, hogy Σ 2-osztálybeli, könnyű bebizonyítani két olyan pozitív A_0 és B_0 szám létezését, hogy bevezetve a $|z(s)-z(t)|^{-\frac{1}{2}}-K_0(s-t)=$ $=H(s,t)$ jelölést, $|s-t|\neq kL/2$ esetén

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} H(s,t)\right| \leqq A_0 K_0(s-t)+B_0$$

teljesüljön; ezenkívül könnyű belátni, hogy minden rögzített s-re teljesül a következő: $\lim\limits_{t\to s} H(s,t)=0$.

Ezen relációk felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $v(t)$ tetszésszerinti, C_2-osztálybeli függvény Σ-n, akkor

$$\int\limits_{\Sigma} f(s)\,ds \int\limits_{\Sigma} H(s,t)\frac{dv(t)}{dt}\,dt=-\int\limits_{\Sigma} f(s)\,ds\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,v(t)\,dt.$$

A kettős integrálokra vonatkozó FUBINI-tétel (lásd [18], 375., 377. oldal) értelmében a következő teljesül:

$$\int\limits_{\Sigma\times\Sigma} f(s)H(s,t)\frac{dv}{dt}\,ds\,dt=-\int\limits_{\Sigma\times\Sigma} f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,v(t)\,ds\,dt,$$

és így

$$\int\limits_{\Sigma}\frac{dv}{dt}\,dt\int\limits_{\Sigma} f(s)H(s,t)\,ds=-\int\limits_{\Sigma} v(t)\,dt\int\limits_{\Sigma} f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds,$$

vagyis

$$\int\limits_{\Sigma}[\Phi^*(t)-\Phi(t)]\frac{dv}{dt}\,dt=-\int\limits_{\Sigma} v(t)\,dt\int\limits_{\Sigma} f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds.$$

[28] Az a feltétel, hogy f $\mathfrak{L}^{(3)}(\Sigma)$-hoz tartozzék, szükséges f $\mathfrak{T}(\Sigma)$-hoz való tartozásához; sőt, az is igaz, hogy ha $f\in\mathfrak{T}(\Sigma)$, akkor tetszés szerinti p-re f $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$-hoz tartozik, mint az S. L. SZOBOLJEV egy eredményéből következik (lásd [42]).

Tekintettel arra, hogy $f(s)$ $\mathfrak{L}^{(3)}(\Sigma)$-hoz és $K_0(s-t)$ $\mathfrak{L}^{(3/2)}(\Sigma)$-hoz tartozik, a SCHWARZ—HÖLDER egyenlőtlenség felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\left|\int_\Sigma f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}\,ds\right| \leqq A_0\int_\Sigma |f(s)K_0(s-t)|\,ds+B_0\int_\Sigma |f(s)|\,ds \leqq$$

$$\leqq A_0\Big(\int_\Sigma |f(s)|^3\,ds\Big)^{1/3}\Big(\int_\Sigma |K_0(s-t)|^{3/2}\,ds\Big)^{2/3}+B_0\int_\Sigma |f(s)|\,ds.$$

Innen következik, hogy $\int_\Sigma f(s)\frac{\partial H(s,t)}{\partial t}ds$ t-nek korlátos függvénye Σ-n és így négyzetesen integrálható. Ez mutatja, hogy $\Phi^*(t)-\Phi(t)$ $\mathfrak{B}(\Sigma)$-hoz tartozik.

Mielőtt eredményeinket kiterjesztenők az S_n n-dimenziós euklideszi tér esetére, idéznünk kell a hiperszférikus függvények néhány tulajdonságát.

Vezessük be az S_n térben a $(\varrho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \vartheta)$ polárkoordinátákat, a következő helyettesítéssel[29]:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \varrho\cos\varphi_1 & \\ x_2 = \varrho\sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \varrho\geqq 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_{n-2} = \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\cos\varphi_{n-2} & 0\leqq\varphi_i\leqq\pi \\ x_{n-1} = \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\vartheta & 0\leqq\vartheta<2\pi \\ x_n = \varrho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\vartheta & \end{array}$$

Jelöljünk $Q_m(x_1, \dots, x_n)$-nel egy m-edfokú homogén harmonikus polinomot; m-edrendű hiperszférikus függvényeknek nevezzük mindazokat az $Y_m(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \vartheta)$ függvényeket, melyeket az Ω egység-hipergömbfelületen a

$$Q_m(x_1, \dots, x_n)=\varrho^m Y_m(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \vartheta) \qquad (\varrho>0,\ m=0, 1, \dots)$$

reláció definiál (lásd [2], 204. oldal).

Ezek a függvények az $n=3$ esetben azonosak a gömb-, vagy másnéven LAPLACE-függvényekkel (lásd [37], 180. oldal); $n>3$ esetén pedig hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a LAPLACE-függvények. Az Y_m függvények a

$$m(m+n-2)Y_m+\frac{1}{\sin^2\varphi_1\dots\sin^2\varphi_{n-2}}\frac{\partial^2 Y_m}{\partial\vartheta^2}+ \tag{4}$$

$$+\sum_{h=1}^{n-2}\frac{1}{\sin^2\varphi_1\dots\sin^2\varphi_{h-1}}\frac{1}{\sin^{(n-1-h)}\varphi_h}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_h}\left(\sin^{(n-1-h)}\varphi_h\frac{\partial Y_m}{\partial\varphi_h}\right)=0 \quad (m=0, 1, \dots)$$

parciális differenciálegyenlet megoldásai.

[29] Ebben a görbe vonalú koordinátarendszerben az Ω egység-hipergömbfelület hiperfelületi mértékeleme a következő: $d\sigma=\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_1\dots d\varphi_{n-2}d\vartheta$. Ezért, R-rel jelölve a $0\leqq\varphi_k\leqq\pi$ $(k=1, \dots, n-2)$, $0\leqq\vartheta<2\pi$ egyenlőtlenségekkel definiált halmazt, azon, hogy f integrálható (négyzetesen integrálható, stb.) Ω-n, azt értjük, hogy az

$$f[\cos\varphi_1, \sin\varphi_1\cos\varphi_2, \dots, \sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\vartheta]$$

függvény integrálható (négyzetesen integrálható, stb.) R-en arra a mértékre vonatkozóan, melyet az R-ben elhelyezkedő B BOREL-halmazokon az $\int_B \sin^{n-2}\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_1\dots d\varphi_{n-2}d\vartheta$ LEBESGUE-integrál definiál.

A hiperszférikus függvények további tulajdonságai, melyeket fel fogunk használni, az alábbiak:

1°. az m-edrendű hiperszférikus függvények halmaza lineáris és véges dimenziójú, s ezen dimenziót μ_m-mel fogjuk jelölni; vagyis a nem-negatív m egész számra vonatkozóan csak μ_m darab lineárisan független m-edrendű hiperszférikus függvényt lehet megadni, valamennyi többi ezek lineáris kombinációja;

2°. két különböző rendű hiperszférikus függvény ortogonális Ω-n, vagyis

$$\int_{\Omega} Y_m Y_r \, d\sigma = 0 \qquad (m \neq r); \tag{5}$$

3°. minden, Ω-n definiált s ott négyzetesen integrálható $f(x)$ függvény előállítható az $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(x)$ alakban, ahol a jobb oldalon álló sor Ω-n az $\mathfrak{L}^{(2)}$ tér metrikájában konvergál, és egyenletesen konvergál Ω-n, ha f C_1-osztálybeli;

4°. ha P_m^s-mel $(m=0, 1, \ldots; s=1, 2, \ldots)$ jelöljük az

$$(1-2at+a^2)^{-s/2} = \sum_{m=0}^{\infty} a^m P_m^s(t)$$

relációval (ahol $|2at|+|a|^2<1$) definiált GEGENBAUER-polinomokat, és ha Ω minden (x, y) pontpárjára bevezetjük a $C(x,y) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{|x|\,|y|}$ [30] jelölést, akkor minden, Ω-n definiált és ott folytonos $f(x)$ függvény esetén $\int_{\Omega} f(x) P_m^{n-2}[C(x,y)] \, d_x\sigma$, mint y függvénye, m-edrendű hiperszférikus függvény;

5°. ha f az Ω-n definiált és ott integrálható függvény, akkor az az egységhipergömb belsejében harmonikus függvény, melynek Ω-n vett nyoma az f, a következőképp fejezhető ki:

$$u = \alpha_n \sum_{m=0}^{\infty} (2m+n-2) \varrho^m \int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)] \, d_y\sigma,$$

ahol

$$\alpha_n = \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Big/ 4\pi^{n/2}.$$ [31]

Innen, figyelembe véve, hogy

$$\int_{D} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx = -\int_{\mathscr{F}D} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma,$$

ahol ν az $\mathscr{F}D$ belső normálisát jelöli, f $\mathfrak{T}(\Omega)$-hoz való tartozására a következő

[30] $|x|$ x-nek az origótól való távolságát jelenti.

[31] A $\Gamma(z)$ jel az EULER-féle Γ-függvényt jelöli (lásd [38], 706. oldal).

szükséges és elegendő feltételt kapjuk[32]:

$$(6)\qquad \sum_{m=1}^{\infty} m(2m+n-2)^2 \int_{\Omega} d_x\sigma \left[\int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma\right]^2 < +\infty.$$

A 3° tulajdonságból speciálisan következik, hogy ha $f(t)$ a $(-1, 1)$ intervallumban definiált függvény, mely négyzetesen integrálható a τ_s mértékre vonatkozóan, melyet a $(-1, 1)$ intervallumban elhelyezkedő B BOREL-halmazokon a

$$\tau_s(B) = \int_B (1-t^2)^{\frac{s-1}{2}}\, dt$$

reláció definiál, akkor, bevezetve a

$$c_m^{(s)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(2m+s)(s-1)!\, m!}{(s+m-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \int_{(-1,1)} f(t) P_m^s(t)\, d\tau_s$$

jelölést, $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(s)} P_m^s(t)$, ahol a jobb oldalon álló sor a τ_s mértékre vonatkozóan másodrendű középben konvergál f-hez, és a konvergencia egyenletes, ha f C_1-osztálybeli[33].

Ha f a $(-1, 1)$ intervallumban a τ_s-re vonatkozóan integrálható függvény, akkor az f függvénnyel kapcsolatban definiált $c_m^{(s)}$ számokat az *f függvény $\{P_m^s\}$* $(m=0, 1, \ldots; s=1, 2, \ldots)$ *rendszerre vonatkozó koordinátáinak* nevezzük.

Azonnal látható, hogy $s=1$ esetén a P_m^s polinomok a LEGENDRE-polinomokkal és a $c_m^{(s)}$ számok az f függvény $\frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t) P_m^1(t)\, dt$ LEGENDRE-koordinátáival azonosak (lásd [37], 356. oldal).

Ha $g(x)$ az Ω egység-hipergömbfelületen értelmezett, ott C_1-osztálybeli függvény, akkor *g Ω-n vett gradiense* gyanánt a következő $(n-1)$-komponensű vektort vesszük:

$$\operatorname{grad} g \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} \frac{1}{\sin \varphi_1},\right.$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \varphi_3} \frac{1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \varphi_{n-2}} \frac{1}{\sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-3}}, \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-2}}\right).[34]$$

Ezenkívül azt fogjuk mondani, hogy az Ω-n definiált és ott integrálható $g(x)$ függvény Ω-n *négyzetesen integrálható gyenge gradienssel* bír, ha létezik olyan, Ω-n

[32] Ezen eredmény bizonyítása analóg a jelen paragrafus I. tételének bizonyításával.

[33] A hiperszférikus függvényekre és a P_m^s polinomokra vonatkozó fentebb idézett eredményeket illetően lásd: [2] 204. és az azt követő oldalakat.

[34] Az Ω tartomány φ_k=állandó, ϑ=állandó koordinátavonalai mentén képezett parciális deriváltakra vonatkozó ezen kifejezések azonnal megkaphatók, ha figyelembe vesszük hogy

$$(ds)^2 = (d\varrho)^2 + \varrho^2 (d\varphi_1)^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi_1 (d\varphi_2)^2 + \ldots + \varrho^2 \sin^2 \varphi_1 \ldots \sin^2 \varphi_{n-2} (d\vartheta)^2.$$

négyzetesen integrálható $(n-1)$-komponensű $\Psi(x)$ vektor, hogy minden, Ω-n C_2-osztálybeli $(n-1)$ komponensű (a komponensek: $v_1, \ldots, v_{n-1}$) $V(x)$ vektorra

$$\int_\Omega gE(V)\,d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\,d\sigma,$$

ahol

$$E[V(x)] = \sum_{h=1}^{n-2} \frac{1}{\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{h-1}} \frac{1}{\sin^{(n-1-h)}\varphi_h} \frac{\partial}{\partial\varphi_h}[(\sin\varphi_h)^{n-1-h} v_h] +$$

$$+\frac{1}{\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2}} \frac{\partial v_{n-1}}{\partial\vartheta}.$$

Parciális integrálással azonnal belátható, hogy ha g Ω-n C_1-osztálybeli, akkor a $\Psi = \operatorname{grad} g$ vektor eleget tesz ennek az egyenletrendszernek.

Jelölje $\mathfrak{B}(\Omega)$ az Ω-n értelmezett, ott integrálható és négyzetesen integrálható gyenge gradienssel rendelkező függvények osztályát.

Bevezetve ezt a jelölést, bebizonyíthatjuk a következő tételt:

V. *Legyen $K(t)$ a $(-1, 1)$ intervallumban értelmezett, és ott a τ_{n-2}-re vonatkozóan integrálható függvény; legyenek a c_m számok a $K(t)$-nek a $\{P_m^{n-2}\}$ polinomrendszerre vonatkozó koordinátái.*

Akkor, ha $f(y)$ az Ω-n definiált és ott integrálható függvény, annak szükséges és elegendő feltétele, hogy $f(y)$ $\mathfrak{F}(\Omega)$-hoz való tartozása a

$$\Phi(x) = \int_\Omega f(y) K[C(x, y)]\,d_y\sigma \text{ [35]}$$

függvény $\mathfrak{B}(\Omega)$-hoz való tartozásával ekvivalens legyen, az, hogy c_m $\sqrt{m}$-mel aszimptotikus legyen.

Mint előbb mondottuk, $\Phi(x)$ $\mathfrak{B}(\Omega)$-hoz való tartozása azt jelenti, hogy létezik olyan, Ω-n négyzetesen integrálható $(n-1)$-komponensű Ψ vektor, hogy minden, Ω-n C_2-osztálybeli $(n-1)$ komponensű V vektorra teljesül a következő:

$$\int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\,d\sigma. \tag{7}$$

Jelöljünk Y_m^k-val $(k=1, \ldots, \mu_m)$ olyan, μ_m darab m-edrendű $(m>0)$ hiperszférikus függvényből álló rendszert, melyre

$$\int_\Omega Y_m^k Y_m^h\,d\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{m(m+n-2)}, & k=h \\ 0, & k\neq h. \end{cases} \tag{8}$$

Legyen $U_m^k = \operatorname{grad} Y_m^k$.

[35] Azonnal látható, hogy $f(y)K[C(x,y)]$ az Ω-n y-ra vonatkozóan integrálható, az x pontot majdnem bárhol rögzítve Ω-n, és hogy $\Phi(x)$ integrálható Ω-n.

(4) és (8) felhasználásával könnyű belátni, hogy az $\{U_m^k\}$ rendszer ortonormált azon $(n-1)$ komponensű vektorok S HILBERT-terében, mely vektorok minden egyes komponense Ω-n négyzetesen integrálható függvény[36].

Megmutatjuk, hogy annak szükséges és elegendő feltétele, hogy adott Φ esetén létezzék a (7) rendszer egy Ψ megoldása, az, hogy létezzék az

$$(9) \qquad m(m+n-2)\int_\Omega \Phi Y_m^k\,d\sigma = \int_\Omega \Psi^* \times U_m^k\,d\sigma \qquad (k=1,\ldots,\mu_m;\ m=1,2,\ldots)$$

rendszer egy S-hez tartozó Ψ^* megoldása; a (9) rendszert úgy kaptuk, hogy a (7) rendszerben V vektorok gyanánt az $\{U_m^k\}$ rendszer vektorait vettük fel.

Elegendő bebizonyítani a feltétel elegendő voltát. Avval a megjegyzéssel kezdjük, hogy a

$$\{\sqrt{m(m+n-2)}\,Y_m^k\} \qquad (k=1,\ldots,\mu_m;\ m=1,2,\ldots)$$

függvényrendszer, melyhez hozzávesszük az azonosan 1 függvényt, a fent idézett 3° tulajdonság és az (5) és (8) integrál-relációk értelmében, az Ω-n négyzetesen integrálható függvények S' HILBERT-terében ortonormált és teljes[37]. Legyen V egy Ω-n C_2-osztálybeli vektor és legyenek az $a_m^{(k)}$ számok az $E(V)$ függvény $\{\sqrt{m(m+n-2)}\,Y_m^k\}$ rendszerre vonatkozó FOURIER-koordinátái; S'-ben fennáll a következő: $E(V)=\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m(m+n-2)}\sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)}Y_m^k$. Minthogy $\int_\Omega Y_m^k E(V)\,d\sigma = -\int_\Omega U_m^k\times V\,d\sigma$, ezért a V vektor $\{U_m^k\}$ rendszerre vonatkozó FOURIER-koordinátáira a következőt kapjuk:

$$\int_\Omega V\times U_m^k\,d\sigma = -a_m^{(k)}/\sqrt{m(m+n-2)}.$$

Ekkor létezik a S következő W vektora:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} 1/\sqrt{m(m+n-2)}\sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)}U_m^k.$$

Most tegyük fel, hogy valamely Φ függvényhez, mely Ω-n integrálható, létezik az S-nek egy Ψ^* vektora, mely megoldása (9)-nek.

[36] Azon $(n-1)$-komponensű vektorok lineáris halmaza, mely vektorok minden egyes komponense Ω-n négyzetesen integrálható függvény, HILBERT-térnek tekinthető a következő skaláris szorzat bevezetésével: $(U, V)=\int_\Omega U\times V\,d\sigma$. Ennek megfelelően a $\{V_k\}$ vektorok rendszerét ortonormálisnak mondjuk, ha $\int_\Omega V_h\times V_k\,d\sigma=\delta_h^k$.

[37] Az $\{u_k\}$ ortonormált vektorrendszert valamely HILBERT-térben *teljesnek* nevezzük, ha ezen tér valamennyi u vektora az $u=\sum_k a_k u_k$ alakban állítható elő; ebben az esetben az a_k számokat az u $\{u_k\}$-ra vonatkozó FOURIER-koordinátáinak nevezzük, és ezek az $a_k=(u, u_k)$ alakban fejezhetők ki; ezenkívül $\sum_k |a_k|^2=(u, u)$. Ha $\{v_k\}$ ortonormált rendszer, a $\sum_k (u, v_k)v_k$ sor egy v vektorhoz konvergál, és fennáll a következő BESSEL-egyenlőtlenség: $(v, v)\leq(u, u)$ (lásd [18], V. fejezet).

Megszorozva $a_m^{(k)}/\sqrt{m(m+n-2)}$-vel a (9) mindkét oldalát, összegezve az m és a k indexekre vonatkozóan és a határátmenetet az integráljel alatt végezve el, a következőt kapjuk:

$$\int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma = -\int_\Omega \Psi^* \times W\,d\sigma.$$ [38]

A CAUCHY—SCHWARZ-egyenlőtlenség (lásd [18] 462. oldal) és a BESSEL-egyenlőtlenség[39] alapján következik, hogy

$$\left|\int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma\right| \leqq \left(\int_\Omega |\Psi^*|^2\,d\sigma\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |V|^2\,d\sigma\right)^{1/2}.$$

Ebből az következik, hogy az Ω-n C_2-osztálybeli függvények alkotta sokaságban $\int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma$ V-nek lineáris és folytonos funkcionálja[40]. Ekkor, a funkcionálanalízis két ismert tétele, nevezetesen a HAHN—BANACH-féle kiterjesztési tétel (lásd [18], 135. oldal) és a HILBERT-térbeli lineáris és folytonos funkcionálok előállítási tétele (lásd [18], 205. oldal) értelmében létezik az S egy olyan Ψ vektora, hogy

$$\int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma = -\int_\Omega \Psi \times V\,d\sigma.$$

Ily módon bebizonyítottuk, hogy ha a (9) rendszer megoldható, akkor a (7) rendszer is az.

Tehát bizonyításunkat annak igazolására vezettük vissza, hogy f $\mathfrak{F}(\Omega)$-hoz való tartozásának szükséges és elegendő feltétele az, hogy létezzék az S-nek olyan Ψ vektora, mely megoldása a (9) rendszernek a

$$\Phi(x) = \int_\Omega f(y) K[C(x, y)]\,d_y\sigma$$

függvényre vonatkozóan. Mivel $K(t)$ feltétel szerint integrálható $(-1, 1)$-ben a τ_{n-2} mértékre vonatkozóan, lehetséges olyan, $(-1, 1)$-ben C_1-osztálybeli függvényekből álló $\{K_r(t)\}$ sorozatot megadni, mely a τ_{n-2} függvényre vonatkozóan 1-rendű középben a $K(t)$ függvényhez tart.

[38] A

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \int_\Omega \Phi Y_m^k\,d\sigma = \int_\Omega \Phi E(V)\,d\sigma$$

határátmenetet szabad az integráljel alatt elvégezni, mivel $E(V)$ C_1-osztálybeli függvény, és ennélfogva a $\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m(m+n-2)} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} Y_m^k$ sor Ω-n egyenletesen konvergál, ami a hiperszférikus függvények 3° alatt idézett tulajdonságából következik. Az integráljel alatti

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+n-2)}} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)} \int_\Omega \Psi^* \times U_m^k\,d\sigma = \int_\Omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+n-2)}} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_m^{(k)}\, U_m^k \times \Psi^*\,d\sigma$$

határátmenet megengedett, mert Ψ^* S-hez tartozik.

[39] Lásd a 37. lábjegyzetet.

[40] Mint ismeretes, egy HILBERT térben valamely $F(u)$ lineáris funkcionál akkor és csak akkor folytonos, ha létezik olyan pozitív M szám, melyre $|F(u)|^2 \leqq M(u, u)$.

Ekkor, ha $v(t)$ $(-1, 1)$-ben folytonos függvény, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{r\to\infty} \int_{(-1,1)} K_r(t)v(t)\,d\tau_{n-2} = \int_{(-1,1)} K(t)v(t)\,d\tau_{n-2}. \tag{10}$$

Ezenkívül, bevezetve a $\Phi_r(x) = \int_\Omega f(y)K_r[C(x,y)]\,d_y\sigma$ jelölést,

$$\lim_{r\to\infty} \int_\Omega \Phi_r(x)v(x)\,d\sigma = \int_\Omega \Phi(x)v(x)\,d\sigma; \tag{11}$$

valóban, a kettős integrálokra vonatkozó FUBINI-tétel felhasználásával, az $M = \max_{x\in\Omega}|v(x)|$ jelöléssel, a következőt kapjuk:

$$\left|\int_\Omega [\Phi_r(x) - \Phi(x)]v(x)\,d\sigma\right| \leqq M\int_\Omega |f(y)|\,d\sigma \int_\Omega |K_r[C(x,y)] - K[C(x,y)]|\,d_x\sigma,$$

s ebből az egyenlőtlenségből következik az állítás, mivel, mint az nyilvánvaló, y-ra vonatkozóan egyenletesen teljesül a következő:

$$\lim_{r\to\infty} \int_\Omega |K_r[C(x,y)] - K[C(x,y)]|\,d_x\sigma = 0.$$

$c_{r,m}$-mel jelölve a $K_r(t)$-nek a $\{P_m^{n-2}(t)\}$ polinomokra vonatkozó koordinátáit, $(-1, 1)$-ben egyenletesen fennáll a következő: $K_r(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}P_m^{n-2}(t)$, minthogy ebben az intervallumban $K_r(t)$ C_1-osztálybeli. Ekkor Ω-n egyenletesen fennáll a következő: $\Phi_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{r,m}\int_\Omega f(y)P_m^{n-2}[C(x,y)]\,d_y\sigma$. A hiperszférikus függvények fentebb említett 1° és 4° tulajdonságából, figyelembevéve, hogy minden rögzített $m>0$ számra az $\{Y_m^k\}$ $(k=1, \ldots, \mu_m)$ függvények ortogonális rendszert alkotnak s így egymástól lineárisan függetlenek, látható, hogy minden $m>0$ számhoz léteznek és egyértelműen meg vannak határozva olyan μ_m és $\alpha_{m,k}$ állandók, melyekre

$$\int_\Omega f(y)P_m^{n-2}[C(x,y)]\,d_y\sigma = \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}Y_m^k(x).$$

Ily módon

$$\Phi_r(x) = c_{r,0}\int_\Omega f(y)\,d\sigma + \sum_{m=1}^{\infty} c_{r,m}\sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}Y_m^k(x).$$

A jobb oldalon álló sor egyenletes konvergenciájából következik, figyelembe véve (8)-at, hogy

$$\int_\Omega \Phi_r Y_m^k\,d\sigma = c_{r,m}\alpha_{m,k}\frac{1}{m(m+n-2)}.$$

Innen, a (10) és a (11) alapján a következőt kapjuk:

$$\int_{\Omega} \Phi Y_m^k \, d\sigma = c_m \alpha_{m,k} \frac{1}{m(m+n-2)}.$$

Ekkor a RIESZ—FISCHER-tétel értelmében a következő szükséges és elegendő feltételt kapjuk arra, hogy (9)-nek legyen megoldása S-ben:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty. \tag{12}$$

Másrészről, mivel

$$\int_{\Omega} f(y) P_m^{n-2}[C(x,y)]\, d_y\sigma = \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k} Y_m^k(x) \qquad (m>0),$$

figyelembe véve (8)-at, f $\mathfrak{T}(\Omega)$-hoz való tartozásának (6) által kifejezett szükséges és elégséges feltétele a következőképp módosul: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+n-2)^2}{m+n-2} \sum_{k=1}^{\mu_m} a_{m,k}^2 < +\infty$. Rögtön látható, hogy ez a feltétel a következővel ekvivalens:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty.$$

Ennek a feltételnek a (12) feltétellel való összehasonlításából nyilvánvalóan adódik, hogy ha c_m^2 aszimptotikus m-mel, a $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sor konvergenciája maga után vonja a $\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sor konvergenciáját, és fordítva. Ily módon a feltétel elegendő volta be van bizonyítva.

Másrészről, ha a $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ és a $\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2$ sorok c-ekvivalensek minden olyan f függvényre, mely Ω-n integrálható, akkor speciálisan ilyenek lesznek minden, Ω-n négyzetesen integrálható függvényre, vagyis minden olyan $\{\alpha_{m,k}\}$ sorozatra is, melyre $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu_m} \alpha_{m,k}^2 < +\infty$, és akkor, az 1. lemma értelmében, c^2 aszimptotikus m-mel.

Ily módon a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Példa az V. tétel állításában kimondott feltételeknek eleget tevő $K(t)$ magra a következő: $K(t) = (2-2t)^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}$ [41]. Először is ez a függvény $(-1, 1)$-ben integrálható a τ_{n-2} mértékre vonatkozóan.

Megmutatjuk, hogy a $K(t)$-nek a $P_m^{n-2}(t)$ polinomokra vonatkozó c_m koordinátája $\sqrt{m}$-mel aszimptotikus.

[41] Vegyük észre, hogy Ω minden x, y pontpárjára:

$$[2-2C(x,y)]^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}} = |x-y|^{-n+\frac{3}{2}}.$$

Tegyük fel, hogy $n>3$. Legyen $n-2=s$. Felhasználva a $P_m^s(t)$ polinomok MEHLER—DIRICHLET-féle integrál-előállítását, a következőt kapjuk:

$$P_m^s(\cos\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{s(s+1)\dots(s+m-1)}{m!}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\frac{2}{\sin^{s-1}\varphi}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\varphi\cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right][2(\cos t-\cos\varphi)]^{\frac{s}{2}-1}\,dt\qquad(0<\varphi<\pi).\text{[42]}$$

Érvényes az alábbi:

$$c_m^{(s)}=\frac{2m+s}{2^{5/4}\pi}\int_0^\pi\cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right]dt\int_t^\pi\frac{(\cos t-\cos\varphi)^{s/2-1}}{(1-\cos\varphi)^{s/2+1/4}}\sin\varphi\,d\varphi,$$

ahonnan

$$(13)\qquad c_m^{(s)}=\frac{2m+s}{2^{5/4}\pi}\int_0^\pi[a(1-\cos t)^{-1/4}+\alpha(t)]\cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right]dt,$$

ahol

$$a=\sum_{k=0}^\infty\binom{\frac{s}{2}-1}{k}\frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{4}}\quad\text{és}\quad\alpha(t)=2^{1/4}\sum_{k=0}^\infty\binom{\frac{s}{2}-1}{k}\frac{1}{k+\frac{1}{4}}\left(\frac{\cos t-1}{2}\right)^k.$$

Mivel az $s\geqq 2$ feltétel folytán $\sum_{k=0}^\infty\left|\binom{s/2-1}{k}\right|<\infty$, az $\alpha(t)$ függvény C_1-osztálybeli $(0,\pi)$-ben; ekkor létezik olyan $A_0>0$ szám, hogy

$$\left|\int_0^\pi\alpha(t)\cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right]dt\right|\leqq\frac{A_0}{m}.$$

Másrészről már előbb bebizonyítottuk két olyan A' és A'' $(0<A'<A'')$ szám létezését, melyekre

$$\frac{A'}{\sqrt{m}}\leqq\left|\int_0^\pi a(1-\cos t)^{-1/4}\cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right]dt\right|\leqq\frac{A''}{\sqrt{m}}.$$

Innen következik két olyan pozitív B' és B'' $(0<B'<B'')$ szám létezése, hogy

$$(14)\qquad\frac{B'}{\sqrt{m}}\leqq\left|\int_0^\pi[a(1-\cos t)^{-1/4}+\alpha(t)]\cos\left[\left(m+\frac{s}{2}\right)t\right]dt\right|\leqq\frac{B''}{\sqrt{m}}.$$

(13)-ból és (14)-ből következik, hogy $c_m^{(s)}$ $\sqrt{m}$-mel aszimptotikus.

[42] Ez az előállítás a LAPLACE-féle előállításból (lásd [2], 391. oldal) vezethető le, ugyanavval az eljárással, mely a LEGENDRE-polinomok esetében használatos (lásd [46], 219. oldal).

Az $n=3$ azaz $s=1$ esetben a bizonyítás csaknem analóg módon történik. Ebben az esetben

$$c_m^{(1)} = (2m+1)\int_0^\pi (2-2\cos\varphi)^{-3/4} P_m^{(1)}(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi;$$

felhasználva a

$$P_m^1(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\varphi^\pi \frac{\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]}{(\cos\varphi-\cos t)^{1/2}}\,dt\text{[43]}$$

integrál-előállítást, következik, hogy

$$c_m^{(1)} = (2m+1)\frac{1}{2^{1/4}\pi}\int_0^\pi \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]dt\int_0^t \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(1-\cos\varphi)^{3/4}(\cos\varphi-\cos t)^{1/2}},$$

ahonnan

$$c_m^{(1)} = (2m+1)\frac{1}{2^{1/4}\pi}\, b\int_0^\pi (1-\cos t)^{-1/4}\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right]dt,$$

ahol

$$b = \sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{4}}.$$

Innen következik az állítás.

IRODALOM

[1] L. AMERIO: „Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u - ku = 0$", *Ricerche di Matematica* **5** (1956) 58–95.

[2] P. APPEL–J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*, Párizs, Gautier-Villars, 1926.

[3] N. ARONSZAJN: *Boundary values of functions with finite Dirichlet integrals*, Conference on Partial Differential Equations. Studies in eigenvalue problems. No. 14, University of Kansas, 1955.

[4] G. BOULIGAND–G. GIRAUD: „Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel", *Actualités scientifiques et industrielles*, 219. sz.

[5] G. CIMMINO: „Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione del problema generalizzato di Dirichlet", *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **61** (1937) 177–221.

[6] J. DENY–J. L. LIONS: „Les espaces du type de Beppo Levi", *Annales de l'Institut Fourier*, **5** (1955) 305–370.

[7] E. DE GIORGI: „Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno del tipo misto", *Ricerche di Matematica* 1953.

[8] E. DE GIORGI: „Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni". *Annali di Matematica Pura e Applicata*, IV. **36** (1954) 195.

[43] Ez az integrál-előállítás a MEHLER–DIRICHLET-féle előállításból vezethető le (lásd [46], 220. oldal).

[9] J. Dieudonné: „Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts", *Compt. Rendus, Acad. Sci. Paris*, **205** (1937) 563.

[10] G. C. Evans—E. R. Miles: „Potential of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems", *Amer. Journ. of Math.* **53** (1931) 493—516.

[11] G. Fichera: „Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico", *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, III. **4** (1950) 35—100. és *Pubblicazioni dell' I. N. A. C.* (1949), 248. sz.

[12] G. Fichera: *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari*, Atti del Convegno di Trieste sulle equazioni alle derivate parziale. Ed. Cremonese, 1955.

[13] G. Fichera: „Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni", *Ann. Mat. Pura e Appl.* IV. **27** (1948) 1—28.

[14] G. Fichera: „Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche", *Rendiconti del Seminario Matematico di Padova*, **24** (1955) 533. és köv. old.

[15] G. Fichera: „Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme", *Rend. Acc. Naz. Lincei* **10** (1951).

[16] G. Fichera: „Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u=f$", *Giornale di Matematiche di Battaglini*, (1948).

[17] G. Fichera: „Teorema d'esistenza per il problema biiperarmonico", *Rend. Acc. Naz. Lincei*, **5** (1948) 319—324.

[18] G. Fichera: *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I., Istituto Mat. Univ. Trieste, 1954.

[19] K. O. Friedrichs: „The identity of weak and strong extensions of differential operators", *Transactions of the American Mathematical Society*, **55** (1944) 132—151.

[20] K. O. Friedrichs: „A Theorem of Lichtenstein", *Duke Math. Journal*, **14** (1947) 67—82.

[21] E. Gagliardo: „Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili", *Rend. Seminaro Matem. Padova*, **27** (1957) 284—305.

[22] D. Greco: „Un'osservazione sul problema di Dirichlet", *Rend. dell'Acc. di Sc. Fisiche e Matematiche della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti in Napoli*, IV, **23** (1956).

[23] M. Hadamard: „Sur le principe de Dirichlet", *Bull. Soc. Math. France*, **34** (1906) 135—138.

[24] G. H. Hardy—J. E. Littlewood: „Some problems of Diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **2** (1916) 583—586.

[25] W. V. D. Hodge: „A Dirichlet Problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties", *Proc. London Math. Soc.*. **36** (1933) 257—303.

[26] O. D. Kellogg: *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.

[27] A. Kolmogorov: „Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier—Lebesgue", *Bull. Internaz. de l'Acad. Polonaise, Cl. de Sc. Math. et Nat.*, Krakkó, 1923, 83—86.

[28] A. Ljapunov: „Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet", *Journal de Math.*, **4** (1898) 241—311.

[29] L. Lichtenstein: „Über das Poissonsche Integral etc.", *Journal für die reine und angewandte Mathem.*, **141** (1912) 12—42.

[30] E. Magenes: „Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale", *Rend. Sem. Matem. Padova*, **24** (1955) 220—229.

[31] C. Miranda: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer Verlag, 1955.

[32] C. Miranda: „Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana", *Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem. di Napoli*, IV. **18** (1948) 96—98.

[33] C. B. Morrey: „Functions of several variables and absolute continuity, II." *Duke Math. Journal*, **6** (1940) 187—215.

[34] C. Pauc: „Considérations sur les gradients généralisés de G. Fichera et E. de Giorgi", *Annali di Mat. Pura ed Applicata*, IV. **40** (1955) 183—192.

[35] С. М. Никольский: „К задаче Дирихле для круга и полупространства", Мат. Сборник, **35** (77) (1954) 247—266.

[36] С. М. Никольский: „Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками, I. Мат. Сборник, **40** (82) (1956) 303—318.

[37] M. Picone: *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli, 1940.

[38] M. Picone—G. Fichera: *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, Tumminelli, Roma, 1956.

[39] M. L. Princivalli: „Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche", *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, (1955).

[40] G. Prodi: „Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi," *Rend. Sem. Mat. Padova*, **26** (1956) 36—60.

[41] Л. Н. Слободецкий—В. М. Бабич: „Об ограниченности интеграла Дирихле", Докл. Акад. наук СССР, **106** (1956) 604—606.
[42] С. Л. Соболев: „Об одной теореме функционального анализа", Мат. Сборник, **4** (46) (1938) 461—497.
[43] G. Stampacchia: „Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse", *Ann. di Matem. Pura e Applicata*, IV. **33** (1952).
[44] G. Stampacchia: „Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione", *Giornale di Matematiche di Battaglini*, IV. **80** (1950—51).
[45] T. Viola: „Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli connessi con i problemi al contorno per le funzioni armoniche", *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, III, **6** (1952) 121. és köv. old.
[46] E. S. Whittaker: *Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1902.
[47] W. H. Young: „On the Fourier series of bounded functions", *Proc. London Math. Soc.*, **12** (1913) 41—70.
[48] A. Zygmund: „Sur la convergence absolue des séries de Fourier", *Proc. London Math. Soc.* **3** (1928) 194—196.

Fordította: Adler György
a matematikai tudományok kandidátusa