A KVÁZIIDEÁLOKRÓL

Írta: STEINFELD OTTÓ

Bevezetés

[19] illetve [21] dolgozatomban szerepel először a gyűrűk illetve félcsoportok kváziideáljainak fogalma. Azóta számos olyan cikk jelent meg, amely részben vagy egészben kváziideálokkal kapcsolatos eredményeket tárgyal. Jelen dolgozatnak az a célja, hogy összefoglalót és rendszerezést adjon az eddigi eredményekről, és felhívja a figyelmet néhány megoldásra váró problémára. Az eredmények bizonyítás nélkül szerepelnek irodalmi utalásokkal. Az a néhány eredmény, melyre vonatkozóan irodalmi adat nem szerepel, a szerző tudomása szerint új.

A 2. §-ban a kváziideálokra és általánosabban az (m, n)-kváziideálokra vonatkozó általános eredmények ismertetése szerepel, melyek nagy része közvetlenül a definíciókból adódik. Míg egy félcsoport kváziideáljai egy-egy jobbideál és balideál metszeteként írhatók fel, addig gyűrű és félgyűrű esetén az analóg eredmény problémaként merül fel. 1961-ben J. CALAIS [2] nemleges irányban oldotta meg azt a problémát, hogy egy félcsoport két kváziideáljának szorzata általában kváziideál-e.

A 3. illetve 4. §-ban a minimális illetve 0-minimális kváziideálokra vonatkozó eredményeket tárgyaljuk 0-elemmentes illetve 0-elemes esetekben. 0-elemmentes esetben érvényes, hogy egy minimális balideál és egy minimális jobbideál metszete egy minimális kváziideál és megfordítva a minimális kváziideálok felírhatók egy-egy minimális bal- és jobbideál metszeteként, sőt egy 0-elemmentes félcsoport minimális kváziideáljai megegyeznek a SZUSKEVICS-mag maximális részcsoportjaival, s így izomorfak, és egyesítésük a SZUSKEVICS-mag. 0-elem létezése mellett általában csak az érvényes, hogy egy 0-minimális balideálnak és egy 0-minimális jobbideálnak a metszete vagy 0 vagy egy 0-minimális kváziideál, a megfordítást csak speciális esetben sikerült kimutatni. Továbbá fennáll, hogy egy gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) 0-minimális kváziideálja vagy zérógyűrű (zérófélcsoport, zérófélgyűrű) vagy ferdetest (0-elemes csoport, 0-elemes divízió-félgyűrű). A 3. és 4. § eredményei ISÉKI [8] és a szerző [20], [21] és [23] dolgozataiban szerepelnek.

Az 5. § eredményei is főként a 0-minimális kváziideálokról szólnak abban az esetben, amikor a gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) nem tartalmaz 0-tól különböző nilpotens balideált, azaz klasszikus radikálmentes. Ebben a speciális esetben igaz, hogy 0-minimális kváziideálok egy-egy 0-minimális bal- és jobbideál metszetei. Az ilyen gyűrűben az is érvényes, hogy (a) létezik 0-minimális kváziideál, (b) létezik 0-minimális balideál (jobbideál) — feltételek ekvivalensek és bármely 0-minimális balideál (jobbideál) 0-minimális kváziideálok halmazelméleti egyesítése.

A 6. § eredményei a klasszikus radikálmentes illetve *Artin*-féle féligegyszerű struktúráknak 0-minimális bal-, jobb-, bi- és kváziideálokra való felbontásairól szólnak. KERTÉSZ—STEINFELD [10] dolgozatában szerepel:

Egy R gyűrűre vonatkozóan az alábbi feltételek ekvivalensek

(A) R jobbegységelemes és 0-minimális balideálok direkt összege,

(B) R olyan kváziideálok összege, amelyek teljes rendszert alkotnak,

(C) R klasszikus radikálmentes és véges sok 0-minimális kváziideál direkt összege,

(D) R *Artin*-féle féligegyszerű. (6.2. tétel).

WIEGANDT [27] kimutatta az (A) és (B) feltételek ekvivalenciáját 0-elemes félgyűrűkre is. A 6.2. tétel félcsoportelméleti analogonjának tekinthető a következő, tudomásunk szerint új eredmény:

Az F 0-elemes félcsoportra vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:

(1) F reguláris és 0-minimális balideálok egyesítése,

(2) F olyan kváziideálok egyesítése, amelyek végtelen teljes rendszert alkotnak,

(3) F radikálmentes és $\varepsilon F\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) alakú 0-minimális kváziideálok egyesítése,

(4) F olyan kétoldali ideálok egyesítése, melyek F komplett 0-egyszeri részfélcsoportjai (8.6 tétel).

Érdemes lenne a 0-minimális kváziideálokra vonatkozó vizsgálatokat kiterjeszteni arra az esetre is, amikor a struktúrának 0-tól különböző nilpotens balideálja van. — A 6. §-ban F. SZÁSZ [26], [27] bizonyos, kváziideálokkal kapcsolatos eredményei egy részét is közöljük.

A 7. §-ban a *Neumann*-reguláris röviden reguláris struktúrák kváziideáljaira vonatkozó vizsgálatokat tárgyaljuk. L. KOVÁCS [12], LAJOS S. [13], J. CALAIS [2], J. LUH [15] és STEINFELD [24] eredményeit foglalja össze a következő 7.1. tétel:

Az F félcsoport (félgyűrűre, gyűrűre) a következő feltételek ekvivalensek:

(i) F reguláris,

(ii) F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{l}$,

(iii) F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára, $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}^2=\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ az F kváziideálja,

(iv) F kváziideáljai egy reguláris, multiplikatív félcsoportot alkotnak.

Megjegyezzük még, hogy az F reguláris félcsoport (félgyűrű, gyűrű) bármelyik $\mathfrak{f}$ kváziideálja $F\mathfrak{f}$ balideálnak és $\mathfrak{f}F$ jobbideálnak a metszete.

L. KOVÁCS [12]-ben jellemzi azokat a (reguláris) gyűrűket, melyeknek mindegyik kváziideálja idempotens. Problémaként merül fel, hogy analóg jellemzés érvényes-e félcsoportokra és félgyűrűkre vonatkozóan.

Végül a 8. §-ban a *Clifford*-féle relatív inverzes és a *Rees*-féle komplett egyszerű félcsoportokra vonatkozó eredményeket tárgyaljuk. A. H. CLIFFORD [3]-ból és [21]-ből származik a következő 8.5 tétel. Az F 0-elemmentes félcsoport M nemüres halmazára a következő feltételek ekvivalensek:

(α) M az F összes minimális kváziideáljainak egyesítése,

(β) M az F-nek olyan ideálja, mely relatív inverzes és egyszerű félcsoport,

(γ) M az F-nek olyan ideálja, mely komplett egyszerű félcsoport.

1. §. Alapfogalmak

E §-ban csupán azon fogalmak definiálására szorítkozunk, amelyek a dolgozatban többször előfordulnak, de nem tekinthetők közismerteknek.

Félcsoport egy olyan (nem üres) halmaz, amelyben egy asszociatív, binér művelet (pl. szorzás vagy összeadás) van értelmezve.

Gyűrűn mindig asszociatív gyűrűt értünk.

Az F (nem üres) halmazt *félgyűrűnek* nevezzük, ha F-ben értelmezve van egy összeadás és egy szorzás, úgyhogy F mind a szorzásra, mind az összeadásra félcsoport és teljesül az

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{és} \quad (\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in F)$$

disztributív szabály.

0 az F félgyűrűnek *zéruseleme*, ha mindegyik $\xi(\in F)$ elemre

$$\xi+0=0+\xi=\xi \quad \text{és} \quad 0\cdot\xi=\xi\cdot 0=0$$

teljesül. Azt mondjuk, hogy az F félgyűrű *divízió-félgyűrű*, ha F összes 0-tól különböző elemei multiplikatív csoportot alkotnak.

Zérófélgyűrűről akkor beszélünk, ha az F 0-elemes félgyűrű két tetszőleges elemének szorzata 0.

F félgyűrűnek $\mathfrak{l}$ additív részfélcsoportját *balideálnak* nevezzük, ha az összes $\xi\in F$ és $\lambda\in\mathfrak{l}$ elemre $\xi\lambda\in\mathfrak{l}$ érvényes. Ennek megfelelően definiálható egy félgyűrű *jobb-* és *kétoldali ideálja.*

Az F félgyűrű M, N additív részfélcsoportjának MN szorzatán az összes $\sum_i \mu_i\nu_i$ $(\mu_i\in M;\ \nu_i\in N)$ véges összegek halmazát értjük. F félgyűrű H, K nemüres részhalmazainak HK szorzata a $\chi\varkappa(\chi\in H;\ \varkappa\in K)$ elemek összessége.

Az F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) *kváziideálja* F-nek olyan $\mathfrak{k}$ nemüres részhalmaza (részmodulusa, additív részfélcsoportja), amelyre

$$F\mathfrak{k}\cap\mathfrak{k}F\subseteqq\mathfrak{k} \tag{1.1}$$

teljesül.[1]

Az F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) $\mathfrak{b}$ biideálján F-nek olyan részfélcsoportjá (részgyűrűjét, részfélgyűrűjét) értjük, amelyre

$$\mathfrak{b}F\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{b} \tag{1.2}$$

teljesül. E fogalmat R. A. GOOD és D. R. HUGHES vezették be.

LAJOS SÁNDOR [13]-ban a következőképpen általánosítja a fenti fogalmakat.

Egy F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) $\mathfrak{k}$ részfélcsoportját (részgyűrűjét, részfélgyűrűjét) (m,n)-*kváziideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$\mathfrak{k}^mF\cap F\mathfrak{k}^n\subseteqq\mathfrak{k} \tag{1.3}$$

összefüggést, ahol m,n nemnegatív egészek. ($\mathfrak{k}^0$ legyen F-hez nem tartozó olyan elem, amely F-en egységelemként operál.)

Látjuk, hogy az (1,1)-kváziideál éppen az (1.1) által definiált kváziideál.

Az F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) $\mathfrak{a}$ részfélcsoportját (részgyűrűjét, részfélgyűrűjét) (m,n)-*ideálnak* nevezzük, ha kielégíti az

$$\mathfrak{a}^mF\mathfrak{a}^n\subseteqq\mathfrak{a} \tag{1.4}$$

[1] A kváziideál fogalma átvihető kétoldali operátormodulusokra is. Nem lenne érdektelen a kváziideálokra vonatkozó vizsgálatokat kiterjeszteni erre az esetre is.

összefüggést, ahol m, n nemnegatív egészek. ($\mathfrak{a}^0$ legyen az F-hez nem tartozó olyan elem, amely az F-en egységelemként operál.)

Speciálisan a (0,1)-ideál a balideál, az (1,0)-ideál a jobbideál és az (1,1)-ideál a biideál.

Érvényes az

1.1. LEMMA (LAJOS S. [13].) *F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) bármely (m, n)-kváziideálja F-nek (m, n)-ideálja. Speciálisan bármely kváziideál biideál.*

2. §. Kváziideálokról általában

A definíciókból könnyen adódnak a következő, félcsoportra, félgyűrűre és gyűrűre egyaránt érvényes eredmények.

2.1. LEMMA. *Félcsoport, (félgyűrű, gyűrű) kváziideáljai részfélcsoportok (részfélgyűrűk, részgyűrűk.)*

2.2. LEMMA. *Csoport (divízió-félgyűrű, ferdetest) nem tartalmaz valódi kváziideált.*

2.3. LEMMA. (LAJOS S. [13].) *F félcsoport (gyűrű, félgyűrű) egy $(m, 0)$-ideáljának és egy $(0, n)$-ideáljának metszete F-nek (m, n)-kváziideálja.*

Korollárium. *F félcsoport (félgyűrű, gyűrű) egy balideáljának és egy jobbideáljának metszete F kváziideálja.*

2.4. LEMMA. *Jelölje ε az F félcsoport (félgyűrű, gyűrű) egy (multiplikatív) idempotens elemét, $\mathfrak{l}$ egy balideálját, $\mathfrak{r}$ egy jobbideálját, akkor $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ az F kváziideáljai[2] és $\varepsilon\mathfrak{l} = \varepsilon F \cap \mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}\varepsilon = F\varepsilon \cap \mathfrak{r}$.*

Félcsoport esetén a 2.3 lemma megfordítása is érvényes.

2.5. LEMMA. (LAJOS S. [13].) *Az F félcsoportnak bármely $\mathfrak{k}$ (m, n)-kváziideálja $(\mathfrak{k} \cup F\mathfrak{k}^n)$ $(0, n)$-ideálnak és $(\mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}^m F)$ $(m, 0)$-ideálnak a metszete.*

Korollárium. *Az F félcsoport $\mathfrak{k}$ kváziideálja $\mathfrak{k} \cup F\mathfrak{k}$ balideálnak és $\mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}F$ jobbideálnak metszete, azaz $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cup F\mathfrak{k}) \cap (\mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}F)$.*

FUCHS LÁSZLÓ vetette fel azt a *problémát*, hogy létezik-e olyan gyűrű, amelynek valamelyik kváziideálja nem egy jobbideál és egy balideál metszete?

Ezzel kapcsolatban egyelőre csak a következőt sikerült kimutatni.

2.6. LEMMA. *Ha az R gyűrű $\mathfrak{k}$ kváziideáljára $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{k}R$ vagy $\mathfrak{k} \subseteq R\mathfrak{k}$ teljesül, akkor $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} + R\mathfrak{k}) \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{k}R)$.*

A 2.6. lemmából azonnal adódik a

2.7. korollárium. *Ha az R gyűrűnek van egyoldali egységeleme, akkor R mindegyik kváziideálja felírható egy-egy balideál és jobbideál metszeteként.*

A 2.5 illetve 2.6 lemma következménye a

[2] Számos szerző vizsgálataiban szerepet játszanak az $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ alakú speciális részgyűrűk. Különösen fontosak e téren az *Artin*-féle gyűrűkre vonatkozó vizsgálatok. Az ezzel kapcsolatos eredmények nagy része a kváziideál fogalmának definiálása előtt jelent meg, és így nem is használja fel azt a tényt, hogy $\varepsilon\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\varepsilon$ kváziideálok. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy az idevágó bizonyítások és eredmények hogyan módosulnak a kváziideálokra vonatkozó általános eredmények felhasználásakor.

2.8. korollárium. *Ha az F félcsoport (gyűrű) $\mathfrak{k}$ valódi kváziideálja nem egyoldali ideál, akkor $F\mathfrak{k}$ illetve $\mathfrak{k}F$ az F valódi bal- illetve jobbideálja.*

Problémaként merül fel az, hogy a 2.5 és 2.6 lemmával, valamint a 2.7 és 2.8 korolláriummal analóg eredmények érvényesek-e a félgyűrűkre?

Metszetekre a következő eredmények igazak.

2.9. LEMMA. *Gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) kváziideáljainak metszete ismét kváziideál.*

2.10. LEMMA. (LAJOS S. [13].) *Félcsoport (félgyűrű) (m, n)-kváziideáljainak metszete vagy az üres halmaz, vagy (m, n)-kváziideál.*

Korollárium. *Félcsoport (félgyűrű) kváziideáljainak metszete vagy az üres halmaz vagy kváziideál.*

A félcsoportok és gyűrűk kváziideáljaira vonatkozó fenti eredmények a szerző [20], [21], [22] és [23] dolgozataiban szerepelnek, a félgyűrűk esetére pedig ISÉKI [8] dolgozatában.

Egy ferdetest (divízió-félgyűrű) feletti teljes matrixgyűrű (matrixfélgyűrű) azt igazolja, hogy két kváziideál egyesítése, illetve összege általában nem kváziideál (lásd [21]).

J. CALAIS [2] kimutatta, hogy létezik olyan félcsoport, amelyben két kváziideál szorzata általában nem kváziideál és ezzel megoldotta a szerzőnek egy 1956-ban felvetett problémáját.

Ezzel kapcsolatban még megemlítjük LAJOS S. [13] eredményét.

2.11. LEMMA. *Félcsoport (félgyűrű, gyűrű) két kváziideáljának szorzata biideál.*

A kváziideálok szorzásával kapcsolatos kérdésekre a 7. §-ban még visszatérünk.

Az F félcsoportnak α eleme által generált főbalideálja $\alpha \cup F\alpha$ elemekből áll. KOLIBIAROVA dolgozatában [11] szerepel, hogy F félcsoport α eleme által generált $\langle\alpha\rangle$ főkváziideál az $\alpha \cup F\alpha$ főbalideálnak és $\alpha \cup \alpha F$ főjobbideálnak metszete. Ugyanott példa található olyan félcsoportra, amelyben két főkváziideál szorzata nem főkváziideál és két főkváziideál egyesítése nem kváziideál.

GREEN [7] a főbalideálok és főjobbideálok segítségével egy fontos osztályozást vezetett be félcsoportokban. KOLIBIAROVA [11] GREEN módszerét kiterjesztette főkváziideálok segítségével történő osztályozásra.

3. §. 0-elem nélküli struktúrák minimális kváziideáljairól

E §-ban félcsoporton (félgyűrűn) *0-elem nélküli* félcsoportot (félgyűrűt) értünk.

Az F félcsoport (félgyűrű) $\mathfrak{l}$ balideálja *minimális*, ha F nem tartalmaz olyan $\mathfrak{l}'$ balideált, amelyre $\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$. Analóg módon definiálhatók a minimális jobb-, kvázi-, bi- és (kétoldali) ideálok.

3.1. TÉTEL. *Az F félcsoport (félgyűrű) egy minimális balideáljának és egy minimális jobbideáljának metszete F minimális kváziideálja. Fordítva, F mindegyik $\mathfrak{k}$ minimális kváziideálja felírható*

$$\mathfrak{k} = F\varkappa \cap \varkappa F$$

alakban, ahol $\varkappa$ egy tetszőleges eleme $\mathfrak{k}$-nak és $F\varkappa$ illetve $\varkappa F$ az F-nek egy minimális balideálja illetve jobbideálja.

Itt említjük meg, hogy SCHÜTZENBERGER [17] bizonyos híradáselméleti vizsgálatokban szerepet játszó félcsoportok jellemzéséhez felhasználja a minimális kváziideálok fogalmát is. Az eredmények részletezésére itt nem térünk ki, mert ez sok fogalom bevezetését igényelné.

A minimális kváziideálokról közelebbi felvilágosítást ad a

3.2. TÉTEL. *Az F félcsoport (félgyűrű) mindegyik $\mathfrak{l}$ minimális kváziideálja olyan csoport (divízió-félgyűrű), mely*

$$\mathfrak{f} = \varepsilon F \varepsilon$$

alakban írható, ahol ε jelöli $\mathfrak{f}$ egységelemét.

Minthogy a 3.2 tétel megfordítása is érvényes, kimutatható a következő

3.3. korollárium. *Az F félcsoport (félgyűrű) $\mathfrak{f}$ kváziideálja akkor és csak akkor minimális, ha $\mathfrak{f}$ csoport (divízió-félgyűrű).*

Az F félcsoport legfeljebb egy minimális kétoldali ideált tartalmazhat és ezt az F *Szuskevics-magjának* szokták nevezni.

A. H. CLIFFORD [4] eredményeinek felhasználásával könnyen adódik a

3.4. korollárium. (Lásd CLIFFORD—PRESTON [5].) *F félcsoport (félgyűrű) minimális kváziideáljai megegyeznek a Szuskevics-mag maximális részcsoportjaival.*

A minimális kváziideálok izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározottak, pontosabban érvényes a

3.5. TÉTEL. *A F félcsoport (félgyűrű) minimális kváziideáljai izomorfok.*

A fenti eredmények részben a szerző [21] részben ISÉKI [8] dolgozatában szerepelnek.

Hasznos felvilágosítást adnak a minimális kváziideálok konstruálásáról a következő tételek:

3.6. TÉTEL. (Vö. SCHWARZ [18].) *Ha ε az F félcsoport (félgyűrű) $\mathfrak{l}$ minimális balideáljának illetve $\mathfrak{r}$ minimális jobbideáljának egy (multiplikatív) idempotens eleme, akkor $\varepsilon\mathfrak{l}$ illetve $\mathfrak{r}\varepsilon$ az F minimális kváziideáljai.*

3.7. TÉTEL. *Ha $\mathfrak{f}$ az F félcsoport (félgyűrű) minimális kváziideálja, akkor bármely $\varrho(\in F)$ elemre $\varrho\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{f}\varrho$ is minimális kváziideálok.*

A 3.1., 3.2. és 3.6. tételekből adódik a

3.8. korollárium. *Az F félcsoportra (félgyűrűre) vonatkozólag a következő feltételek ekvivalensek:*

(A) *F tartalmaz legalább egy minimális kváziideált,*

(B) *F tartalmaz legalább egy-egy minimális bal- és jobbideált,*

(C) *F tartalmaz legalább egy olyan minimális balideált, amelynek van (multiplikatív) idempotens eleme,*

(D) *F tartalmaz legalább egy olyan minimális jobbideált, amelynek van (multiplikatív) idempotens eleme.*

A minimális kváziideálok fontos szerepet játszanak a félcsoportok (félgyűrűk) minimális balideáljainak és jobbideáljainak felbontásában.

3.9. TÉTEL. *Ha az F félcsoportban (félgyűrűben) teljesül az* (A) *feltétel, akkor F-nek mindegyik minimális balideálja (jobbideálja) F bizonyos minimális kváziideáljainak egyesítése.*

A *Szuskevics*-mag szerkezetéről ad felvilágosítást a következő

3.10. TÉTEL. *Ha az F félcsoportban (félgyűrűben) teljesül az* (A) *feltétel, akkor F Szuskevics-magja felírható F összes minimális kváziideáljának egyesítéseként.*

Az utóbbi eredmények félcsoportokra vonatkozóan [21]-ben szerepelnek és bizonyításuk minden nehézség nélkül átvihető félgyűrűkre is.

Érdemes lenne megvizsgálni, hogy a fentiekhez hasonló eredmények érvényesek-e minimális (m, n)-ideálokra és (m, n)-kváziideálokra vonatkozóan.

4. §. A minimális kváziideálokról 0-elem létezése esetén

0-elem létezése esetén a 3. §-ban szereplő fogalmak és eredmények szükségszerűen módosulnak.

Az R gyűrű $\mathfrak{l}$ balideálját 0-*minimálisnak* nevezzük,[3] ha R-nek nincs olyan $\mathfrak{l}'$ balideálja, melyre $0 \subset \mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$ teljesül. Azonos módon definiálhatók a 0-minimális jobb-, kvázi-, bi- és (kétoldali) ideálok.

0-elemes félcsoportok és félgyűrűk esetén ugyanúgy definiálhatók a 0-minimális ideálok.

Érvényes a 2.3. lemma következő élesítése:

4.1. TÉTEL. *R gyűrű* (0-*elemes félcsoport,* 0-*elemes félgyűrű) egy* 0-*minimális balideáljának és egy* 0-*minimális jobbideáljának metszete vagy* 0 *vagy R* 0-*minimális kváziideálja.*[4]

E tétel megfordítását eddig csak speciális esetben sikerült kimutatnunk (lásd az 5.2. tételt).

Gyűrűk esetén érvényes a szorzatra vonatkozó analóg eredmény is.

4.2. TÉTEL. *R gyűrű $\mathfrak{r}$* 0-*minimális jobbideáljának és $\mathfrak{l}$* 0-*minimális balideáljának $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ szorzata vagy* 0 *vagy az R* 0-*minimális kváziideálja.*

Ezen eredmény helyessége kérdéses 0-elemes félcsoport és félgyűrű esetén.

A 0-minimális kváziideálokról közelebbi felvilágosítást ad a következő

4.3. TÉTEL. *R gyűrű* (0-*elemes félcsoport,* 0-*elemes félgyűrű)* 0-*minimális kváziideálja vagy zérógyűrű (zérófélcsoport, zérófélgyűrű) vagy ferdetest* (0-*elemes csoport*[5]*)* 0-*elemes divízió-félgyűrű). Az utóbbi esetben $\mathfrak{k} = \varepsilon R \varepsilon$ előállítás érvényes, ahol ε jelöli $\mathfrak{k}$ egységelemét.*

A 4.3. tétel részben megfordítható

4.4. TÉTEL. *Ha az R gyűrű* (0-*elemes félcsoport,* 0-*elemes félgyűrű) $\mathfrak{k}$ kváziideálja ferdetest* (0-*elemes csoport,* 0-*elemes divízió-félgyűrű) akkor $\mathfrak{k}$ az R* 0-*minimális kváziideálja.*

Könnyű ellenpéldát adni arra vonatkozólag, hogy a 4.3. tétel teljes egészében nem fordítható meg.

[3] Annak érdekében, hogy a 0-elemes illetve 0-elemmentes struktúrákra vonatkozó eredményeket jobban szétválaszthassuk itt eltérünk a szokásos terminológiától.

[4] Ezen eredményeknek bizonyos részben rendezett félcsoportokra vonatkozó általánosításai szerepelnek a [24] dolgozatban.

[5] 0-*elemes csoporton* olyan 0-elemes (multiplikatív) félcsoportot értünk, melynek 0-tól különböző elemei csoportot alkotnak.

A 3.6. tétellel analóg a következő

4.5. TÉTEL. *Jelölje* $\mathfrak{l}$ *illetve* $\mathfrak{r}$ *az* R *gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) egy 0-minimális bal- illetve jobbideálját és* ε *az* $\mathfrak{l}$ *illetve* $\mathfrak{r}$ *egy (multiplikatív) idempotens elemét, akkor* $\varepsilon\mathfrak{l}$ *és* $\mathfrak{r}\varepsilon$ *az* R *0-minimális kváziideáljai.*

A fenti eredmények lényegileg megtalálhatók a [22] és [23] dolgozatban.

A 3. § többi tételével analóg eredményeket 0 elem létezése esetén csak egyéb mellékfeltétel mellett sikerült kimutatni. E vizsgálatok a következő §-ban szerepelnek.

5. §. Klasszikus radikálmentes struktúrák minimális kváziideáljairól

Most is feltételezzük, hogy az e §-ban szereplő struktúrák tartalmaznak 0-elemet. R gyűrű $\mathfrak{l}$ balideálja *nilpotens,* ha valamely k pozitív egész számra $\mathfrak{l}^k=0$ teljesül. Hasonló módon definiálhatók a nilpotens jobb- és kétoldali ideálok is. Ezek a definíciók szószerint átvihetők a 0-elemes félcsoportok és 0-elemes félgyűrűk esetére is.

Az R gyűrűt (0-elemes félcsoportot, 0-elemes félgyűrűt) *klasszikus radiálmentesnek* vagy röviden *k-radikálmentesnek* nevezzük, ha R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens balideálja. Könnyen belátható, hogy k-radikálmentes esetben R nem tartalmazhat 0-tól különböző nilpotens jobbideált sem.

k-radikálmentes esetben kimutattuk az 4.1. tétel megfordítását. (Lásd [22] dolgozatot.)

5.1. TÉTEL. *Az* R *k-radikálmentes gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű)* $\mathfrak{k}$ *0-minimális kváziideálja egy 0-minimális balideálnak és egy 0-minimális jobbideálnak a metszete.*

Nem tudjuk, hogy a k-radikálmentesség szükséges feltétel-e a tételben szereplő metszetként való előállítás létezéséhez. SZÁSZ FERENCtől származik a következő probléma: Melyek azok az összes gyűrűk, amelyekben mindegyik minimális kváziideál, egy minimális balideál és egy minimális jobbideál metszete.

Ismeretes, hogy R k-radikálmentes gyűrűben mindegyik $\mathfrak{l}(\mathfrak{r})$ 0-minimális balideál (jobbideál) $\mathfrak{l}=R\varepsilon$ $(\mathfrak{r}=\varepsilon R)$ alakban írható, ahol ε egy alkalmas (multiplikatív) idempotens elem. Ennélfogva fennáll az

5.2. korollárium. *Az* R *k-radikálmentes gyűrű mindegyik* $\mathfrak{k}$ *0-minimális kváziideálja* $\mathfrak{k}=\varepsilon R\eta$ $(\varepsilon^2=\varepsilon,\ \eta^2=\eta)$ *alakban írható.*

ARTIN—NESBITT—THRALL [1] egyik eredményét egészíti ki és általánosítja a következő

5.3. TÉTEL. *Az* R *k-radikálmentes gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű)* $R\varepsilon(\varepsilon^2=\varepsilon)$ *balideálja akkor csak akkor 0-minimális, ha* $\varepsilon R\varepsilon$ *az* R *0-minimális kváziideálja.*

Megjegyezzük, hogy *tetszőleges* R gyűrű (félcsoport, félgyűrű) esetén $R\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ balideál 0-minimális volta implikálja $\varepsilon R\varepsilon$ kváziideál 0-minimalitását. $\varepsilon R\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ kváziideál 0-minimalitásából azonban általában nem következik $R\varepsilon$ balideál 0-minimalitása, amint ezt egy K ferdetest fölötti $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ háromszög matrixok gyűrűjének példája mutatja. (Lásd STEINFELD [22].)

JACOBSON ([9] II. 7. §) egyik eredményének felhasználásával könnyen kimutatható az

5.4. TÉTEL. *Ha az R gyűrűnek (félgyűrűnek) $R\varepsilon$, $R\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) balideáljai mint baloldali R-modulusok (R-félmodulusok) R-izomorfok, akkor εR és ηR mint jobboldali R-modulusok (R-félmodulusok) R-izomorfok, továbbá az $\varepsilon R\varepsilon$ és az $\eta R\eta$ kváziideálok, mint gyűrűk (félgyűrűk) izomorfok.*

Ez az eredmény általánosítása a [22] dolgozat 9. tételének.

Az előbb említett ferdetest fölötti háromszög matrixgyűrű alkalmas példa annak igazolására is, hogy az $\varepsilon R\varepsilon$ és $\eta R\eta$ ($\varepsilon^2=\varepsilon$, $\eta^2=\eta$) kváziideálok izomorfiájából nem következik $R\varepsilon$, $R\eta$ baloldali R-modulusok R-izomorfiája.

Érvényes a 3.8. korolláriummal analóg

5.5. korollárium. *R k-radikálmentes gyűrűben a következő feltételek ekvivalensek:*

(a) *R tartalmaz legalább egy 0-minimális balideált,*

(b) *R tartalmaz legalább egy 0-minimális jobbideált,*

(c) *R tartalmaz legalább egy 0-minimális kváziideált.*

Az 5.2. és 5.5. korolláriumok 0-elemes, k-radikálmentes félcsoportok és 0-elemes k-radikálmentes félgyűrűk esetén általában nem érvényesek, mert ezek 0-minimális balideáljai (jobbideáljai) nem tartalmaznak feltétlenül (multiplikatív) idempotens elemet. Nem nehéz kimutatni a 3.7., 3.9. és 3.10. tételekkel analóg eredményeket, melyek tudomásom szerint újak.

5.6. TÉTEL. *Ha $\mathfrak{f}$ az R k-radikálmentes gyűrű 0-minimális kváziideálja, akkor bármely $\varrho(\in R)$ elemre $\varrho\mathfrak{f}(\mathfrak{f}\varrho)$ vagy 0 vagy az R 0-minimális kváziideálja.*

5.7. TÉTEL. *Ha az R k-radikálmentes gyűrűre teljesül az* (a) *feltétel, akkor R mindegyik 0-minimális balideálja (jobbideálja) R bizonyos 0-minimális kváziideáljainak egyesítési halmaza.*

5.8. TÉTEL. *Ha az R k-radikálmentes gyűrű $\mathfrak{a}$ 0-minimális ideálja tartalmazza R valamelyik 0-minimális kváziideálját, akkor $\mathfrak{a}$ az általa tartalmazott 0-minimális kváziideálok egyesítése.*

Hasonló eredmények 0-elemes, k-radikálmentes félcsoportokra (félgyűrűkre) csak egyéb mellékfeltételek mellett érvényesek.

6. §. Felbontási tételek k-radikálmentes illetve Artin-féle féligegyszerű struktúrákra

Az R gyűrűt (0-elemes félcsoportot, 0-elemes félgyűrűt) *teljesen bal-reducibilisnek* nevezzük, ha R-et véges vagy végtelen sok $\mathfrak{l}_\alpha$ ($\alpha\in A$) 0-minimális balideálja generálja.

Hasonló módon definiálható a *teljesen reducibilis, jobb-reducibilis, kvázireducibilis és bi-reducibilis R* gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) aszerint, hogy R-et 0-minimális (kétoldali) ideálok, 0-minimális jobbideálok, kváziideálok vagy biideálok generálják.

Érvényes a következő

6.1. TÉTEL. *Az R k-radikálmentes gyűrűre (0-elemes félcsoportra, 0-elemes félgyűrűre) az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(α) R teljesen kvázi-reducibilis,

(β) R teljesen bal- és jobb-reducibilis,

(γ) R teljesen bi-reducibilis.[6]

Megjegyezzük, hogy k-radikálmentes gyűrű esetén *(β)* helyettesíthető a *(β') R teljesen bal- vagy jobb-reducibilis* feltétellel.

A továbbiakhoz szükségünk lesz néhány definícióra.

Az R gyűrűt *Artin-félének* nevezzük, ha R balideáljaira teljesül a minimumfeltétel.

Az R gyűrű *Artin-féle féligegyszerű*, ha *Artin*-féle és k-radikálmentes.

Azt mondjuk, hogy az R gyűrű (0-elemes félgyűrű) $\mathfrak{k}_{11}, \mathfrak{k}_{12}, \ldots, \mathfrak{k}_{mm}$ kváziideáljai *teljes rendszert* alkotnak, ha léteznek olyan $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ (zérótól különböző) ortogonális idempotens elemek, hogy $\mathfrak{k}_{ij}$ vagy 0 vagy $\mathfrak{k}_{ij} = \varepsilon_i R \varepsilon_j$ $(1 \leqq i, j \leqq m)$ 0-minimális kváziideál és ha $\mathfrak{k}_{ij}$, $\mathfrak{k}_{jk} \neq 0$, akkor $\mathfrak{k}_{ji}\mathfrak{k}_{ij}\mathfrak{k}_{jk} \neq 0$ teljesül.

Az R 0-elemes félgyűrű $R_1, \ldots, R_n$ 0-elemes részfélgyűrűinek *erős direkt összege*, ha R-nek mindegyik ϱ eleme $\varrho = \varrho_1 + \ldots + \varrho_n$ alakban írható, ahol $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ egymástól függetlenül befutják $R_1, \ldots, R_n$ összes elemeit; $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ komponensek ϱ által egyértelműen meghatározottak és additive felcserélhetők.

Az R 0-elemes félgyűrű $(\ldots, \mathfrak{k}_\alpha, \ldots)$ kváziideáljainak rendszere *felcserélhető*, ha $\varkappa_\alpha + \varkappa_\beta = \varkappa_\beta + \varkappa_\alpha$ $(\varkappa_\alpha \in \mathfrak{k}_\alpha;\ \varkappa_\beta \in \mathfrak{k}_\beta)$ egyenletek az összes α, β $(\alpha \neq \beta)$ indexre teljesülnek.

KERTÉSZ—STEINFELD [10]-ben bizonyított tételének egy része a

6.2. TÉTEL. *Egy R gyűrűre vonatkozóan az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(A) *R jobbegységelemes és 0-minimális balideálok direkt összege.*

(B) *R olyan kváziideálok összege, amelyek teljes rendszert alkotnak,*

(C) *R k-radikálmentes és véges sok 0-minimális kváziideál direkt összege,*

(D) *R Artin-féle féligegyszerű.*

0-elemes félgyűrűkre csak az (A), (B) feltételek ekvivalenciáját sikerült kimutatni.

6.3. TÉTEL. (Lásd WIEGANDT [27].) *Egy 0- és 1-elemes R félgyűrű akkor és csak akkor véges sok 0-minimális balideáljának erős direkt összege, ha R kváziideáljai egy felcserélhető, teljes rendszerének összege.*

Megemlítjük még a 6.2. tételnek egy önmagában érdekes speciális esetét és annak egy általánosítását. Ezek az eredmények KOVÁCS [12] dolgozatában szerepelnek:

6.4. TÉTEL. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor lesz véges sok ferdetest direkt összege, ha R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens kváziideálja és R kváziideáljaira teljesül a minimumfeltétel.*

6.5. TÉTEL. *Egy gyűrű akkor és csak akkor lesz ferdetestek diszkrét direkt összege, ha R kétoldali főideáljaira teljesül a minimumfeltétel és R kváziideáljai idempotensek.*

Probléma, hogy 0-elemes félgyűrűre érvényesek-e analóg eredmények.

[6] Ez a tétel STEINFELD [24] egyik eredményének speciális esete.

FUCHS LÁSZLÓ (illetve SZÁSZ FERENC) vetette fel az olyan gyűrűk vizsgálatának problémáját, melyekben a kváziideálokra (illetve főkváziideálokra) teljesül a minimumfeltétel.

1. megjegyzés: Bizonyos hasonlóság fedezhető fel a 6.4. tétel és WIEGANDT [27] nem feltétlenül k-radikálmentes gyűrűkre vonatkozó következő tétele között:

6.6. TÉTEL. *Az R gyűrűre vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:*

(a) *R két ferdetest direkt összege vagy primrendű zérógyűrű,*

(b) *R tartalmaz zérusosztót és mindegyik valódi kváziideálja (balideálja) zérusosztómentes,*

(c) *R nem ferdetest és mindegyik valódi kváziideálja (balideálja) ferdetest,*

(d) *0 nem primideál R-ben és primideál R mindegyik valódi kváziideáljában (balideáljában).*

Érdekes lenne a 6.4. és 6.6. tételeknek egy közös általánosítását kimutatni.

2. megjegyzés. Itt említjük meg SZÁSZ FERENC azon eredményeit, melyek egy R gyűrű bizonyos $\varepsilon R(\varepsilon^2=\varepsilon)$ főjobbideáljairól szólnak. Előkészületül néhány definícióra van szükségünk.

Legyen R egy gyűrű, és R_1 a *jobbtalpa*, azaz R_1 az R összes minimális jobbideáljainak összege. F. SZÁSZ [26] szerint az R_1-ben fekvő $\varepsilon R(\varepsilon^2=\varepsilon\neq 0)$ jobbideált *szabályosnak* nevezzük, ha R-nek $Q_\varepsilon=(1-\varepsilon)R\varepsilon R(1-\varepsilon)$ alakú kváziideálja nilpotens. (Itt 1 nem feltétlenül egységelem, hanem operátor.)

Érvényes a következő 6.7. tétel, mely F. SZÁSZ [26], [27] idevágó eredményeinek egy része.

6.7. TÉTEL. *Jelölje R_1 az R gyűrű jobbtalpát és $\varepsilon R(\varepsilon^2=\varepsilon)$ az R-nek R_1-ben fekvő szabályos főjobbideálját. Akkor εR egy $\varepsilon R=\varepsilon R\varepsilon$ alakú Artin-féle féligegyszerű gyűrű, és εR-nek mindegyik jobbideálja R-nek is jobbideálja. Továbbá, ha $\varepsilon R=\eta R\subseteq R_1$ $(\varepsilon^2=\varepsilon,\ \eta^2=\eta)$ és εR szabályos főjobbideál, akkor $\varepsilon=\eta$. Végül Q_ε nilpotenciájából $Q_\varepsilon=0$ folyik.*

7. §. Vizsgálatok Neumann-reguláris struktúrákban

Az F félcsoportot (félgyűrűt, gyűrűt) *Neumann-regulárisnak*, röviden *regulárisnak* nevezzük, ha bármely $\alpha(\in F)$ elemhez létezik olyan $\xi(\in F)$, hogy $\alpha=\alpha\xi\alpha$. A regularitás definiálható kváziideálok illetve bal- és jobbideálok segítségével is.

7.1. TÉTEL. *Az F félcsoportra (félgyűrűre, gyűrűre) a következő feltételek ekvivalensek:*

(i) *F reguláris,*

(ii) *F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}\mathfrak{l}=\mathfrak{r}\cap\mathfrak{l}$,*

(iii) *F mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}^2=\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}^2=\mathfrak{l}$ és $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ egy kváziideál F-ben,*

(iv) *F kváziideáljai egy reguláris, multiplikatív félcsoportot alkotnak."*

A regularitásnak (ii) feltétellel való jellemzése L. KOVÁCS [12] dolgozatában szerepel. Az (i) és (iii) feltételek ekvivalenciáját J. CALAIS [2] igazolta, (i) és (iv) ekvivalenciája pedig S. LAJOS [13], [14], J. LUH [15] és a szerző [24] dolgozataiból adódik.

Az (iii) feltételből látható, hogy a regularitásból következik a k-radikálmentesség, eszerint az előző két § eredményei reguláris esetben is érvényesek.

(iv) miatt F bármely $\mathfrak{f}$ kváziideáljára fennáll $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}F\mathfrak{f}$, amiből $\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{f}F\cap F\mathfrak{f}$ folyik. Eszerint fennáll a

7.2. LEMMA. *Az F reguláris félcsoport (félgyűrű, gyűrű) bármely $\mathfrak{f}$ kváziideálja $F\mathfrak{f}$ balideálnak és $\mathfrak{f}F$ jobbideálnak a metszete, azaz $\mathfrak{f} = F\mathfrak{f}\cap\mathfrak{f}F$.*

LAJOS S. [13] dolgozatában szerepelnek a következő eredmények

7.3. TÉTEL. *F reguláris félcsoportban (gyűrűben, félgyűrűben) az (m, n)-kváziideál és (m, n)-ideál fogalma megegyezik.*

Korollárium. *F reguláris félcsoportban (félgyűrűben, gyűrűben) a kváziideál és biideál fogalma megegyezik.*

LAJOS SÁNDOR hívta fel a figyelmet arra, hogy a korolláriumban szereplő tulajdonság nem jellemzi a reguláris struktúrákat.

Könnyen igazolható, hogy F reguláris félcsoport (félgyűrű, gyűrű) $\mathfrak{f}$ kváziideáljaira $\mathfrak{f}^3=\mathfrak{f}^2$ teljesül, viszont $\mathfrak{f}^2=\mathfrak{f}$ általában nem igaz. (Lásd például egy ferdetest fölötti teljes matrixgyűrű minimális kváziideáljait, melyek között zérógyűrűk is vannak.)

KOVÁCS LÁSZLÓ [12]-ben bebizonyítja a következő tételt:

7.4. TÉTEL. *Az R gyűrűre vonatkozólag a következő feltételek ekvivalensek:*

(I) *R reguláris és nem tartalmaz zérótól különböző nilpotens elemet,*

(II) *R mindegyik kváziideálja idempotens,*

(III) *R mindegyik $\mathfrak{r}$ jobbideáljára és $\mathfrak{l}$ balideáljára $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\cap\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}\mathfrak{r}$ teljesül,*

(IV) *R reguláris és ferdetestek szubdirekt összegével izomorf.*

Megjegyezzük, hogy a 6.5. tétel az előbbi eredmény speciális esetének is tekinthető.

A (II) és (III) feltételek ekvivalenciája általánosabban is igazolható. (Lásd STEINFELD [24].)

Problémaként merül fel, hogy a 7.4. tétellel analóg eredmények érvényesek-e 0-elemes félcsoportra és félgyűrűre. A 7.3. tétel miatt reguláris esetben a 6.1. tétel (α) és (γ) feltételei egybeesnek. A 6.1. és 7.4. tételek között teremt némi kapcsolatot a következő eredmény, amely bizonyos részben rendezett félcsoportokra is általánosítható [24].

7.5. TÉTEL. *Ha az R gyűrű (0-elemes félcsoport, 0-elemes félgyűrű) teljesen kvázi-reducibilis és R mindegyik kváziideálja idempotens, akkor R-nek nincs 0-tól különböző nilpotens részgyűrűje (részfélcsoportja, részfélgyűrűje) és R mindegyik a ideálja R 0-minimális, idempotens kváziideáljaival, vagyis ferdetestekkel (0-elemes csoportokkal, divízió-félgyűrűkkel) generálható.*

Könnyen belátható, hogy az F reguláris félcsoportok (félgyűrűk, gyűrűk) így is jellemezhetők: F akkor és csak akkor reguláris, ha mindegyik $\alpha(\in F)$ elemhez léteznek olyan $\varepsilon, \eta(\in F)$ és $\beta, \gamma(\in F)$ elemek, hogy

$$\varepsilon\alpha=\alpha\eta=\alpha, \quad \alpha\beta=\varepsilon \quad \text{és} \quad \gamma\alpha=\eta. \tag{7.1}$$

Könnyen belátható, hogy ε és η idempotens elemek. A 7.2. lemma és a CLIFFORD—PRESTON [5] 1.13. lemma alapján könnyen belátható a reguláris struktúrák következő, tudomásom szerint új jellemzése:

7.6. korollárium. *Az F félcsoport (félgyűrű, gyűrű), akkor és csak akkor reguláris, ha bármely $\alpha(\in F)$ elem által generált főkváziideál $\varepsilon F\eta$ $(\varepsilon^2=\varepsilon, \eta^2=\eta)$ alakú.*

8. §. A relatív inverzes és komplett egyszerű félcsoportokról

Az F félcsoportot CLIFFORD [3] szerint *relatív inverzesnek* nevezzük, ha F mindegyik α eleméhez léteznek olyan ε és $\beta(\in F)$ elemek, hogy

$$\varepsilon\alpha=\alpha\varepsilon=\alpha \quad \text{és} \quad \alpha\beta=\beta\alpha=\varepsilon \tag{8.1}$$

teljesül.

Eszerint a relatív inverzes félcsoportok speciális reguláris félcsoportoknak tekinthetők. Könnyen kimutatható, hogy ε idempotens elem és α által egyértelműen meghatározott. Az ε elemet az *α-hoz tartozó idempotensnek* szokták nevezni.

Érvényes a 7.6. korollárium következő élesítése

8.1. korollárium. *Az F félcsoport akkor és csak akkor relatív inverzes, ha bármely $\alpha(\in F)$ által generált főkváziideál $\varepsilon F\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ alakban írható.*

Problémaként vetem fel a 7.1. tételnek relatív inverzes félcsoportokra vonatkozó élesítését.

Nem nehéz kimutatni, hogy egy F relatív inverzes félcsoport azon α elemei, amelyekhez ugyanaz az ε idempotens elem tartozik, F-nek egy részcsoportját alkotják, amit F_ε-nal jelölünk.

A főkváziideálokról bővebb felvilágosítást ad a

8.2. TÉTEL. (Lásd STEINFELD [21].) *Az F relatív inverzes félcsoport mindegyik $\varepsilon F\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ főkváziideálja F relatív inverzes részfélcsoportja: mégpedig $\varepsilon F\varepsilon=\bigcup_i F_{\eta_i}$, ahol $\eta_i(\in F)$ olyan idempotens elemeket jelöl, amelyekre $\varepsilon\eta_i=\eta_i\varepsilon=\eta_i$.*

REES [16] dolgozatában szerepel a következő fogalom. Az F félcsoport $\varepsilon(\neq 0)$ idempotens elemét *primitívnek* nevezzük, ha $\eta\varepsilon=\varepsilon\eta=\eta$ $(\eta\neq 0, \eta^2=\eta)$ feltételből mindig $\eta=\varepsilon$ folyik.

A primitív idempotens elemek és a minimális kváziideálok kapcsolatát világítja meg a következő

8.3. TÉTEL. (Lásd STEINFELD [21].) *Az F 0-elemmentes, relatív inverzes félcsoport akkor és csak akkor tartalmaz minimális kváziideált, ha legalább egy idempotens eleme primitív mégpedig $\varepsilon F\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon)$ kváziideál akkor és csak akkor minimális, ha ε primitív. Ebben az esetben $\varepsilon F\varepsilon$ és F_ε csoport megegyezik.*

FUCHS [6] szerint az F relatív inverzes félcsoport $F\alpha(\alpha\in F)$ főbalideál *rangja* 1, ha $F\alpha$ minimális, és $n+1$, ha $F\beta\subset F\alpha$ $(\beta\in F)$ feltételből az folyik, hogy $F\beta$ rangja legfeljebb n és az $F\beta$-k rangjai között n előfordul. Hasonlóan definiálható a főjobbideálok és főkváziideálok rangja.

Érvényes a következő

8.4. TÉTEL. *Az F relatív inverzes félcsoport $\varepsilon F\varepsilon$ $(\varepsilon^2=\varepsilon, \varepsilon\neq 0)$ főkváziideáljának rangja akkor és csak akkor n, ha $F\varepsilon$ főbalideál n-edrangú.*

Az n-edrangú főkváziideálok szerkezetéről további felvilágosítás is adható. (Lásd STEINFELD [21].)

Az F 0-elemmentes félcsoportot *egyszerűnek* nevezzük, ha F-nek nincs *valódi* (F-től különböző) kétoldali ideálja.

Az F 0-elemes félcsoport 0-*egyszerű*, ha $F^2 \neq 0$ és F-nek nincs *valódi* (0-tól és F-től különböző) kétoldali ideálja.

REES [16] szerint az F egyszerű (0-egyszerű) félcsoportot *komplett egyszerűnek (komplett* 0-*egyszerűnek)* nevezzük, ha F tartalmaz primitív idempotens elemet. A relatív inverzes és komplett egyszerű félcsoportok közötti kapcsolatra mutat rá a következő eredmény, mely részben CLIFFORD [3]-ból származik.

8.5. TÉTEL. (Lásd STEINFELD [21].) *Az F 0-elemmentes félcsoport M nemüres halmazára a következő feltételek ekvivalensek:*

(I) *M az F összes minimális kváziideáljainak egyesítése,*

(II) *M az F-nek olyan ideálja, mely relatív inverzes és egyszerű félcsoport,*

(III) *M az F-nek olyan ideálja, mely komplett egyszerű félcsoport.*

Nem tudom, hogy a 8.5. tételnek 0-elemes félcsoportra vonatkozó analogonja érvényes-e.

A továbbiakhoz szükségünk van a következő fogalmakra. Az F 0-elemes félcsoport α elemét *jobbannullátornak* nevezzük, ha $F\alpha = 0$.

Az F 0-elemes félcsoport $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}(\lambda, \lambda' \in \Lambda)$ kváziideáljai *végtelen teljes rendszert* alkotnak, ha léteznek olyan $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\lambda'}$ idempotens elemek, hogy $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}$ vagy 0 vagy $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'} = \varepsilon_\lambda F \varepsilon_{\lambda'}$ minimális kváziideál és ha $\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}$ és $\mathfrak{k}_{\lambda'\lambda''} \neq 0$, akkor $\mathfrak{k}_{\lambda'\lambda}\mathfrak{k}_{\lambda\lambda'}\mathfrak{k}_{\lambda'\lambda''} = 0$.

(Ez a fogalom a 6. §-ban definiált teljes rendszer analogonjának tekinthető).

A 6.2. tételnek következő analogonja tudomásom szerint új eredmény:

8.6. TÉTEL. *Az F 0-elemes félcsoportra vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:*

(a) *F reguláris és 0-minimális balideálok egyesítése.*

(b) *F radikálmentes és $F\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) alakú 0-minimális balideálok egyesítése,*

(c) *F-nek nincs 0-tól különböző jobbannullátora és $F\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) alakú 0-minimális balideálok egyesítése,*

(d) *F olyan kétoldali ideálok egyesítése, melyek F komplett 0-egyszerű részfélcsoportjai,*

(e) *F reguláris és 0-minimális kváziideálok egyesítése,*

(f) *F radikálmentes és $\varepsilon F \eta$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon, \eta^2 = \eta$) alakú 0-minimális kváziideálok egyesítése,*

(g) *F olyan kváziideálok egyesítése, melyek végtelen teljes rendszert alkotnak.*

A tétel bizonyítására nézve lásd a szerző [25] dolgozatát.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] E. ARTIN—C. J. NESBITT—R. M. THRALL: *Rings with minimum condition*, Ann Arbor, Mich., 1948.

[2] J. CALAIS: Demi-groups quasi inversifs, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **252** (1961), 2357—2359.

[3] A. H. CLIFFORD: Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.* (II. s.) **42** (1941), 1037—1049.

[4] ——— : Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 521—526.

[5] ——— —G. B. PRESTON: *The algebraic theory of semigroups I.*, Amer. Math. Soc. 1961.

[6] L. FUCHS: On semigroups admitting relative inverses and having minimal ideals, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950), 227—231.

[7] J. A. GREEN: On the structure of semigroups, *Ann. of. Math.* **54** (1951) 163–172.
[8] K. ISÉKI: Quasiideals in semirings without zero, *Proc. Japan Acad.* **34** (1958), 79–81.
[9] N. JACOBSON: *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. 1956.
[10] KERTÉSZ A.–STEINFELD O.: A féligegyszerű gyűrűk jellemzéséről, *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 301–314.
[11] B. KOLIBIAROVA: O čiastočne komutativnych periodických pologrupach, *Mat. fiz. čas.* **9** (1959), 160–170.
[12] L. KOVÁCS: A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 465–468.
[13] LAJOS S.: A félcsoportok ideálelméletéhez, *M. T. A. III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 57–66.
[14] S. LAJOS: On quasiideals of regular ring, *Proc. Japan Acad.* **38** (1962) 210–211.
[15] J. LUH: A characterization of regular rings, *Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 741.
[16] D. REES: On semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **36** (1940) 387–400.
[17] M. P. SCHÜTZENBERGER: On a family of submonoids, *M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl.* **6** (1961), 381–393.
[18] ŠT. SCHWARZ: On the structure of simple semigroups without zero, *Czechoslovak Math. J.* **1(76)** (1951), 41–53.
[19] O. STEINFELD: On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 289–298.
[20] ——— : Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 479–484.
[21] ——— : Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 262–275.
[22] ——— : Über die Quasiideale von Ringen, *Acta Sci. Math.* **17** (1956), 170–180.
[23] ——— : Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern, *Acta Sci. Math.* **18** (1957), 235–242.
[24] ——— : Über Zerlegungssätze für teilweise geordnete Halbgruppen mit bedingten Distributivitätsregeln, *M. T. A. Mat. Kut. Int. Közl.* (megjelenés alatt).
[25] ——— : On semigroups which are unions of completely 0-simple semigroups. (Megjelenés alatt.)
[26] F. SZÁSZ: Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961), 417–439.
[27] ——— : Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte für Math.* **67** (1963), 359–362.
[28] R. WIEGANDT: Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Steinfeld, *Acta Sci. Math.* **23** (1962), 74–75.
[29] ——— : Über die Struktursätze der Halbringe, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis R. Eötvös*, **5** (1962), 51–68.

(Beérkezett: 1964. VI. 12.)