FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, III.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

Bevezetés

Az előző két részben, [1], [2] az időben folytonos és diszkrét egydimenziós stacionárius *Gauss—Markov* folyamat statisztikai vizsgálatáról volt szó, míg ebben a részben a hasonló típusú kétdimenziós (komplex) folyamattal kapcsolatos problémák tárgyalására kerül sor. Ilyen típusú folyamatok statisztikai vizsgálatának elvégzésének szükségessége a LOMONOSZOV EGYETEM VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TANSZÉKÉN vetődött fel egy geofizikai probléma vizsgálatának kapcsán. A problémát egy külön pontban ismertetem, ott mutatok rá a fizikai jelenség teljes vizsgálatával kapcsolatos további lehetőségekre is. Az elért eredmények megbeszélése a tanszéken rendszeres volt, jelen dolgozat ezen eredményeket ismerteti, kidolgozásukban a szerző is részt vett. Az eredményekről A. N. KOLMOGOROV, JA. G. SZINAJ és a szerző egy közös dolgozata [4], a számításokról és az ahhoz szükséges apparátusról RIKOVA, SZINAJ és a szerző [5] dolgozata számol be. Részletes bizonyítások a [4] cikkben nem szerepelnek, a jelen dolgozatban szereplő bizonyításokat a szerző dolgozta ki — a 3. § kivételével, mely a SZINAJ-jal közös s a [3] disszertációban szereplő eredményeket tartalmazza.

IDŐBEN FOLYTONOS, STACIONÁRIUS, NORMÁLIS, KOMPLEX ESET

1. § Az időben folytonos folyamat leírása

Tekintsük azt a kétdimenziós stacionárius sztochasztikus folyamatot, melynek $\xi(t)$, $\eta(t)$ komponensei eleget tesznek a

$$\begin{aligned} d\xi &= -\lambda\xi dt + \omega\eta dt + d\varepsilon_1 \\ d\eta &= \omega\xi dt - \lambda\eta dt + d\varepsilon_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

sztochasztikus differenciálegyenleteknek, ahol $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ két független *Wiener-folyamat*

$$M d\varepsilon_1 = M d\varepsilon_2 = 0, \quad M(d\varepsilon_1)^2 = M(d\varepsilon_2)^2 = a \cdot dt$$

paraméterekkel. Feltéve, hogy

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \chi(t) = \varepsilon_1(t) + i\varepsilon_2(t), \quad \gamma = \lambda - i\omega$$

az (1.1) rendszert egyetlen egyenlet alakjában írhatjuk fel,

$$d\zeta = -\gamma\zeta dt + d\chi. \tag{1.1'}$$

A $\zeta(t)$ folyamat komplex korrelációs függvénye (vö. [1] 1.2. tétel)

$$C(\tau) = A(\tau) + iB(\tau) = M[\zeta(t)\overline{\zeta(t+\tau)}] = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau| - i\omega\tau) \tag{1.2}$$

ahol $\sigma^2 = a/\lambda$ (az (1.1') egyenlet alapján). A $\zeta(t)$ folyamatnak a $[0, T)$ intervallumon való realizációja alapján értelmezhetjük a

$$c(\tau) = a(\tau) + ib(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\overline{\zeta(t+\tau)}\, dt \tag{1.3}$$

empirikus korrelációs függvényét, mely 0-ban jobbról differenciálható 1 valószínűséggel és

$$c'(0) = -a - \frac{1}{T}s_1^2 + \frac{1}{T}s_2^2 - ir, \tag{1.4}$$

ahol a a fenti $\varepsilon_1'(t)$ és $\varepsilon_2'(t)$ „fehér zaj" folyamatokat jellemző intenzitás paramétere, míg

$$s_1^2 = \frac{1}{2}[|\zeta(0)|^2 + |\zeta(T)|^2], \quad s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(t)|^2\, dt, \quad r = \frac{1}{T}\int_0^T |\zeta(t)|^2\, d\theta.$$

Az r integrál kifejezésében szereplő θ argumentum a

$$\zeta(t) = |\zeta(t)|\, e^{i\theta(t)}$$

összefüggés alapján van meghatározva.

Az (1.4) összefüggés igazolása a következőképpen történik. Könnyű megmutatni, hogy

$$\frac{c(\tau+h) - c(\tau)}{h} = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\, d\overline{\zeta(t)}' + \frac{1}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau} \zeta(t)\overline{\zeta(t+h)}\, dt - \tag{1.5}$$

$$-\frac{1}{T-\tau}\zeta(T-\tau)\overline{\zeta(T)} + o(1).$$

Másrészt a komplex folyamatra érvényes (vö. I. rész (1.10))

$$\sum_2^n |\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})|^2 \to 2aT,$$

(ahol a konvergencia 1 valószínűséggel és négyzetes középben is érvényes) összefüggés alapján könnyű belátni, hogy a

$$\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\zeta(t_i) - \zeta(t_{i-1})]$$

összeg határértékeként értelmezett

$$\int_0^T \zeta(t)\, d\zeta(t)$$

integrál értéke

$$-aT+\frac{|\zeta(T)|^2-|\zeta(0)|^2}{2}-i\int_0^T |\zeta(t)|^2\, d\theta. \tag{1.6}$$

Egyszerű számolással belátható ugyanis, hogy

$$\sum_2^n |\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})|^2=\sum_2^n [\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_i)}-\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}-\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}-\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_{i-1})}]=$$

$$=-2\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\overline{\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})}]+|\zeta(T)|^2-|\zeta(0)|^2+\sum_2^n [\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}-\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}]=$$

$$=-2\sum_2^n \zeta(t_{i-1})[\overline{\zeta(t_i)-\zeta(t_{i-1})}]+|\zeta(T)|^2-|\zeta(0)|^2+$$

$$+\sum_2^n |\zeta(t_i)|\,|\zeta(t_{i-1})|\,[e^{i(\theta(t_{i-1})-\theta(t_i))}-e^{i(\theta(t_i)-\theta(t_{i-1}))}].$$

(1.5) és (1.6) összevetéséből adódik (1.4).

2. § A paraméterek becslései s azok eloszlásai

Az előző pontban már szerepelt, hogy ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben az a diffúziós paraméter pontosan becsülhető egyetlen realizáció alapján, mivel

$$\sum_1^n |\xi(t_i)-\xi(t_{i-1})|^2\to aT, \quad \text{ha} \quad n\to\infty, \ \max|t_i-t_{i-1}|\to 0$$

és

$$\sum_1^n |\eta(t_i)-\eta(t_{i-1})|^2\to aT, \quad \text{ha} \quad n\to\infty, \ \max|t_i-t_{i-1}|\to 0.$$

Az ismeretlen paraméterek tehát λ és ω. Jelölje a $[0, T]$ intervallum realizációinak terén a $\zeta(t)$ folyamathoz tartozó mértéket P. Ugyanezen a téren vezessük be a

$$V=L\times W$$

standard mértéket, ahol L a közönséges *Lebesgue*-mérték a $\zeta(0)$ síkon, míg W a $\zeta(t)-\zeta(0)$ növekmények terén a kétdimenziós *Wiener*-mérték a $\chi(t)$ (vö. (1.1′))

folyamat paramétereivel. Ismeretes (l. [14], vö. az első rész (2.1) képletével), hogy

$$\frac{dP}{dV} = \frac{\lambda}{\pi \cdot a^2} \exp\left[-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2a} Ts_2^2 - \frac{\lambda}{a} s_1^2 + \lambda T + \frac{\omega}{a} Tr\right] \tag{2.1}$$ [1]

A (2.1) összefüggés szerint az s_1^2, s_2^2, r rendszer a feladat elégséges statisztika rendszere. ω és λ szerint differenciálva az

$$L = \log \frac{dP}{dV} = -\log \pi a^2 + \log \lambda - \frac{\lambda^2+\omega^2}{2a} Ts_2^2 - \frac{\lambda}{a} s_1^2 + \lambda T + \frac{\omega}{a} Tr$$

kifejezést a

$$\frac{\partial L}{\omega\omega} = -\frac{\omega}{a} Ts_2^2 + \frac{T}{a} r = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{a} Ts_2^2 - \frac{s_1^2}{a} + T = 0 \tag{2.3}$$

egyenleteket kapjuk az $\hat{\omega}$ és $\hat{\lambda}$ maximum likelihood becslések meghatározására. (2.2)-ből

$$\check{\omega} = \frac{r}{s_2^2} \tag{2.2'}$$

míg (2.3)-ból a $\lambda T = \varkappa$, $\hat{\lambda} \cdot T = \hat{\varkappa}$ jelöléssel $\hat{\varkappa}$-ra a

$$h_2 \hat{\varkappa}^2 + (h_1 - 1)\hat{\varkappa} - 1 = 0 \tag{2.3'}$$

egyenletet kapjuk, ahol $h_1 = s_1^2/aT$, $h_2 = s_2^2/aT$. (2.3′) egyetlen pozitív megoldásának eloszlására a 3. §-ban visszatérünk.

Legyen $\sigma^2(\hat{\omega}) = \frac{2a}{Ts_2^2}$. Bebizonyítjuk a következő tételt.

[1] Ugyanúgy, mint azt az első részben [1] láttuk, a *Radon—Nikodym* derivált levezethető heurisztikusan az $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ funkcionáljainak segítségével is. A komplex esetben ugyanis a *Radon—Nikodym* derivált

$$C(\lambda) \exp\left\{-\frac{|\zeta(0)|^2}{a}\lambda - \frac{1}{2a}\int_0^T \frac{(d\xi + \lambda\xi\, dt + \omega\eta\, dt)^2}{dt} - \frac{1}{2a}\int_0^T \frac{(d\eta - \omega\xi\, dt + \lambda\eta\, dt)^2}{dt}\right\} =$$

$$= C(\lambda) \exp\left\{-\frac{|\zeta(0)|^2}{a}\lambda - \frac{\lambda^2+\omega^2}{2a}\int_0^T |\zeta(t)|\, dt - \frac{\lambda}{a}\int_0^T (\xi d\xi + \eta d\eta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2a}\int_0^T \left[\frac{(d\xi)^2}{dt} + \frac{(d\eta)^2}{dt}\right] - \frac{\omega}{a}\int_0^T (\eta d\xi - \xi d\eta)\right\}.$$

alakú, melyből (2.1) formálisan könnyen megkapható, amint azt a fenti kifejezésben szereplő integrálokra vonatkozó összefüggések mutatni fogják.

2.1. TÉTEL. *Az $\hat{\omega}$ maximum likelihood becslés esetén a*

$$\frac{\hat{\omega}-\omega}{\sigma(\hat{\omega})}$$

változó (0,1) *paraméterű normális eloszlású.*

Megjegyzés. A tétel érdekessége éppen az, hogy nem aszimptotikus, hanem pontos eloszlást ad az $\hat{\omega}$ becslésre.

Bizonyítás: Egyszerű átalakításokkal belátható, hogy

$$\frac{\hat{\omega}-\omega}{\sigma(\hat{\omega})}=\sqrt{\frac{1}{2aT}}\,\frac{\int_0^T |\zeta(t)|^2(d\Theta-\omega\,dt)}{\left(\int_0^T |\zeta(t)|^2\,dt\right)^{1/2}}$$

és állításunk igazolására elegendő belátni, hogy (T helyett egy dt hosszúságú intervallumon integrálva) a

$$|\zeta(t)|(d\theta-\omega dt)\sqrt{2adt}$$

valószínűségi változó (0,1) normális eloszlású. Az (1.1′) egyenlet alapján

$$|\zeta|(d\theta-\omega dt)=d\varepsilon_2\cdot\cos\theta-d\varepsilon_1\cdot\sin\theta,$$

ahonnan állításunk azonnal következik, mivel $d\varepsilon_2$ és $d\varepsilon_1$ független normális eloszlású változók.

A fenti tétel rámutat a $\zeta(t)$ folyamat által leírt mozgás jellegére: egy ω átlag szögsebességgel mozgó pont, melynek origótól való távolsága $|\zeta|$.[2]

3. § Konfidencia intervallumok szerkesztése a λ paraméterre

Ebben a részben feltesszük, hogy a $\zeta(t)$ komplex stacionárius *Gauss—Markov* folyamat összes paraméterei ismertek λ kivételével. Az egyszerűség kedvéért legyen $M\xi(t)=M\eta(t)=0$ és $M\xi^2(t)=M\eta^2(t)=1/2\lambda$. Ilyen feltételek mellett kiszámítjuk az elégséges statisztika rendszer karakterisztikus függvényét és megmutatjuk a megfelelő konfidencia intervallumok szerkesztésének módját. Mint már említettem, az ismertetendő eredmények, valamint a számítások JA. G. SZINAJ, L. RIKOVA

[2] Az időben diszkrét esetre való áttérés szempontjából igen hasznos a

$$(*)\qquad \int_0^T |\zeta(t)|^2 d\theta=\int_0^T(\xi d\eta-\eta d\xi)$$

összefüggés is, mely egyszerűen igazolható a

$$\sum[\zeta(t_i)\overline{\zeta(t_{i-1})}-\zeta(t_{i-1})\overline{\zeta(t_i)}]=2i\sum[\eta(t_i)(\xi(t_i)-\xi(t_{i-1}))-\xi(t_i)(\eta(t_i)-\eta(t_{i-1}))]$$

azonosság alapján, melyből (*) éppen úgy megkapható, mint ahogyan azt (1.6) bizonyításánál tettük.

és a szerző nevéhez fűződnek [5]. Mint (2.1)-ből látható, elégséges statisztika rendszert a

$$\chi_1(T) = \frac{1}{2}\{\xi^2(0)+\eta^2(0)+\xi^2(T)+\eta^2(T)\}, \tag{3.1}$$

$$\chi_2(T) = \int_0^T (\xi^2(t)+\eta^2(t))\,dt$$

statisztikák alkotnak. Ezen mennyiségek karakterisztikus függvényének meghatározására a következő parciális differenciálegyenletet lehet felírni. (Különböző funkcionálokra vonatkozó differenciálegyenletek létezési és egyértelműségi kérdéseivel foglalkozik DINKIN [7] dolgozata.) Legyen

$$u(T, x, y) = M\{e^{i\alpha_1\chi_1(T)+i\alpha_2\chi_2(T)}\Big|_{\substack{\xi(0)=x\\ \eta(0)=y}}\}, \tag{3.2}$$

azaz a χ_1 és χ_2 változók feltételes karakterisztikus függvénye a $\xi(0)=x$, $\eta(0)=y$ feltétel mellett. Nyilván

$$u(T+\Delta T, x, y) = \frac{1}{2\pi\Delta T}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T+\omega y\Delta T)^2}{2\Delta T}-\frac{(y_1-y-\omega x\Delta T+\lambda y\Delta T)^2}{2\Delta T}}\cdot \tag{3.3}$$

$$\cdot u(T, x, y\Big\{[1+i\alpha_2\Delta T(x^2+y^2)]\Big[1-i\alpha_1\Big(\frac{(x_1-x)^2}{2}+\frac{(y_1-y)^2}{2}+$$

$$+x(x_1-x)+y(y_1-y)\Big)+\frac{\alpha_1^2}{2}(x^2(x_1-x)^2+y^2(y_1-y)^2+$$

$$+2y(x_1-x)(y_1-y)+\ldots)\Big]\Big\}dx_1\,dy_1$$

ahonnan a $\Delta T\to 0$ határátmenettel a következ őegyenletet kapjuk $u(T, x, y)$-ra:

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}(-i\alpha_1 x-\lambda x-\omega y)+\frac{\partial u}{\partial y}(-i\alpha_1 y+\omega x-\lambda y)+ \tag{3.4}$$

$$+u\left[-i\alpha_1+i\alpha_1\lambda(x^2+y^2)-\frac{\alpha_1^2}{2}(x^2+y^2)+i\alpha_2(x^2+y^2)\right].$$

Legyen

$$u(T, x, y)=u_1(T, x, y)e^{i\alpha_1\frac{x^2+y^2}{2}}$$

akkor (3.4) alapján

$$\frac{\partial u_1}{\partial T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x}(\lambda x+\omega y)+\frac{\partial u_1}{\partial y}(-\omega x+\lambda y)+u_1 i\alpha_2(x^2+y^2), \tag{3.5}$$

vagy polárkoordinátákban

$$\frac{\partial u_1}{\partial T} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial u_1}{\partial r}\left(\frac{1}{2r} + \lambda r\right) + u_1 i\alpha_2 r^2. \tag{3.5'}$$

Az $u_1(T, r) = v(T, r^2) = v(T, \varrho)$ leképezéssel $v(T, \varrho)$ a

$$\frac{\partial v}{\partial T} = 2\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + 2\frac{\partial v}{\partial \varrho}(1 - \lambda\varrho) + i\alpha_2\varrho v \tag{3.6}$$

differenciálegyenletnek tesz eleget, mégpedig a nyilvánvaló

$$v(0, \varrho) = e^{\frac{i\alpha_1}{2}\varrho} \tag{3.7}$$

kezdeti feltétellel. Jelölje v *Laplace*-transzformáltját w, azaz

$$w(T, \gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma\varrho} v(T, \varrho)\, d\varrho.$$

A (3.6) és (3.7) összefüggések alapján

$$\frac{\partial w}{\partial T} = \frac{\partial w}{\partial \gamma}(-2\gamma^2 + 2\lambda\gamma - id_2) + w(2\lambda - 2\gamma), \tag{3.8}$$

$$w(0, \gamma) = \frac{1}{\gamma - \frac{i\alpha_1}{2}}. \tag{3.9}$$

A (3.8) egyenlet megoldását ismert módszerek alapján egyszerűen (lásd pl. [13] 339 o.) egyszerűen megkaphatjuk. Legyenek γ_1, γ_2 az

$$\gamma^2 - \lambda\gamma + \frac{i\alpha_1}{2} = 0, \quad \gamma_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}{2} \tag{3.10}$$

egyenlet gyökei. A (3.8) egyenlet első integráljai

$$c_1 = T - \frac{1}{2(\gamma_1 - \gamma_2)}\log\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma - \gamma_2} \tag{3.11}$$

$$c_2 = \log w + \frac{1}{2}\log(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2) - \frac{\lambda}{2(\gamma_1 - \gamma_2)}\log\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma - \gamma_2}$$

lesznek. $T = 0$ esetén

$$\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma - \gamma_2} = e^{-2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1}, \tag{3.12}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 e^{-2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1}}{1 - e^{-2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1}},$$

és így

$$\log w + \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}(\gamma_1-\gamma_2)^2}{(1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1})^2} + \lambda c_1 = c_2, \tag{3.13}$$

$$w = \frac{(1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1})}{e^{-c_1(\gamma_1-\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2)}\, e^{c_2-\lambda c_1}.$$

(3.9) és (3.13) alapján

$$\frac{1-e^{-2c_1(\gamma_1-\gamma_2)}}{e^{-c_1(\gamma_1-\gamma_2)}(\gamma_1-\gamma_2)}\, e^{c_2-\lambda c_1} - \frac{1}{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2 e^{-2(\gamma_1-\gamma_1)c_1}}{1-e^{-2(\gamma_1-\gamma_2)c_1}} - \dfrac{i\alpha_1}{2}} = 0.$$

(3.11) behelyettesítésével a következő összefüggést kapjuk

$$\frac{1-\dfrac{\gamma-\gamma_2}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}{e^{-T(\gamma_1-\gamma_2)}\sqrt{\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}}(\gamma_1-\gamma_1)}\, e^{\log w + \frac{1}{2}\log(\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2) - \frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2} - \lambda T}\,.$$

$$\cdot e^{\frac{\lambda}{2(\gamma_1-\gamma_2)}\log\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}} = \frac{1}{\dfrac{\gamma_1-\gamma_2\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}{1-\dfrac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_2}e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}} - \dfrac{i\alpha_1}{2}},$$

ahonnan

$$w = \frac{(\gamma_1-\gamma_2)e^{\lambda T - T(\gamma_1-\gamma_2)}}{(\gamma-\gamma_2)\left(\gamma_1-\dfrac{i\alpha_1}{2}\right)+(\gamma-\gamma_1)\left(\dfrac{i\alpha_1}{2}-\gamma_2\right)e^{-2T(\gamma_1-\gamma_2)}}. \tag{3.14}$$

A $\chi_1(T)$, $\chi_2(T)$ valószínűségi változók karakterisztikus függvényét (feltétel nélküli!) (3.14)-ből a $\gamma = \lambda - \dfrac{i\alpha_1}{2}$, helyettesítéssel kapjuk meg (3.10) felhasználásával:

$$u_{\chi_1,\chi_2}(T) = M(e^{i\alpha_1\chi_1(T)+i\alpha_2\chi_2(T)}) = w\left(T, \lambda - \frac{i\alpha_1}{2}\right) = \tag{3.15}$$

$$= \frac{4\lambda(\lambda^2-2i\alpha_2)^{1/2}e^{\lambda T - T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}{(\lambda-i\alpha_1+\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2})^2-(\lambda-i\alpha_1-\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2})^2e^{-2T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}.$$

Legyen $\varkappa = \lambda T$, akkor a $\lambda\chi_1$, $\lambda^2\chi_2$ változók karakterisztikus függvénye

$$\frac{4(1-2i\alpha_2)^{1/2}e^{\varkappa}}{(1-i\alpha_1+\sqrt{1-2i\alpha_2})^2e^{\varkappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}-(1-\alpha_1\sqrt{1-2i\alpha_2})^2e^{-\varkappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}} \tag{3.16}$$

alakú lesz.

(2.3) alapján az ismeretlen λ paraméterre vonatkozó maximum likelihood egyenlet

$$\frac{1}{\lambda}-(\chi_1-T)-\lambda\chi_2=0$$

alakú lesz, melynek egyetlen pozitív megoldása

$$\hat{\lambda}=\frac{-(\chi_1-T)+\sqrt{(\chi_1-T)^2+4\chi_2}}{2\chi_2}. \tag{3.17}$$

A $\hat{\lambda}$ becslés eloszlásának meghatározására tekintsük a

$$P_\lambda\{\hat{\lambda}<x\}=P_\lambda\left\{\chi_2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}(T-\chi_1)>0\right\}=P_\lambda\{x^2\chi_2+x\chi_1>Tx+1\} \tag{3.18}$$

összefüggést, ahonnan $x=\lambda y$ és $\zeta_I=\lambda y\chi_1+\lambda^2y^2\chi_2$, $\lambda T=\varkappa$ helyettesítéssel

$$P_\lambda\{\hat{\lambda}<\lambda y\}=P_\varkappa\{\zeta_y>\varkappa y+1\} \tag{3.19}$$

ahol ζ_y karakterisztikus függvénye (3.16) alapján

$$\frac{4(1-2iy^2\alpha)^{1/2}e^{\varkappa}}{(1-iy\alpha+\sqrt{1-2iy^2\alpha})^2e^{\varkappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}-(1-iy\alpha-\sqrt{1-2iy^2\alpha})^2e^{-\varkappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}} \tag{3.20}$$

alakú. Innen adott $\varkappa$ és y esetén a megfelelő valószínűségek kiszámíthatók.

Legyen $p=1-2iy^2\alpha$, akkor ζ_y valószínűségi változó eloszlásának *Laplace*-transzformáltja (3.20) alapján a következő,

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\frac{\sqrt{p}\,e^{-\varkappa\sqrt{p}}}{(p-1)}\left[\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{p}+2y-1)^2}-\frac{2}{(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}+2y-1)}\right]\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\dfrac{p-1}{2y}-\sqrt{p}}{1-\dfrac{p-1}{2y}+\sqrt{p}}\right)^{2k}\cdot e^{-2k\varkappa\sqrt{p}},$$

vagy az $s^2=p$ és $a=2y-1$ helyettesítéssel

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\varkappa(2k+1)s}\frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s+a)}\frac{(s-1)^{2k}}{(s+1)^{2k+1}}\frac{(s-a)^{2k}}{(s+a)^{2k+1}}. \tag{3.21}$$

A (3.21) összeg első tagjának, az

$$\frac{8y^4e^{\varkappa}}{(y-1)^2}\frac{p^2e^{-\varkappa p}}{(p-1)(p+a)^2(p+1)^2}$$

kifejezésnek inverz *Laplace*-transzformáltja (felhasználva például DITKIN, KUZNYECOV [6] táblázatait)

$$
\begin{aligned}
(3.22)\qquad & \frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{2(\varkappa y+1)}}-\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]+ \\
& +\left[1-\Phi\left(\frac{ky}{\sqrt{\varkappa y+1}}+\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\varkappa}\left[-\frac{y^2(y^2+4y-2}{2(y-1)^4}+\frac{(6y-2)(\varkappa y^2+\varkappa y+1)}{2(y-1)^3}-\right. \\
& \left.-\frac{\varkappa y+1}{(y-1)^2}-\frac{(\varkappa y^2+\varkappa y+1)^2}{y^2(y-1)^2}\right]+ \\
& +\left[1-\Phi\left(\frac{\varkappa y}{\sqrt{2(\varkappa y+1)}}+\frac{(2y-1)\sqrt{\varkappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]e^{2\varkappa y+\frac{\varkappa y+1}{2y^2}[2y-1)^2-1]}\left[\frac{(2y-1)(4y^2-2y+1)}{2(y-1)^4}-\right. \\
& \left.-\frac{(2y-1)^2}{y(y-1)^3}(\varkappa y^2+(2y-1)(\varkappa y+1))\right]+ \\
& +\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\varkappa y+1}}{y(y-1)^2}e^{\varkappa-\frac{\varkappa y+1}{2y^2}\frac{\varkappa^2y^2}{2(\varkappa y+1)}}\left[\frac{7y^2-5y+1}{y(y-1)}y^2+\varkappa y^2+\varkappa y+1\right],
\end{aligned}
$$

ahol

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du.$$

Ez a közelítés ζ_y eloszlásának meghatározására $\varkappa$ nagy értékeire megfelelő. További közelítés kapható, ha pl. figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{(p-a)^{2k}}{(p+a)^{2k+1}}$$

alakú függvények inverz *Laplace*-transzformáltja

$$e^{-ax}\left[\frac{e^{2ax}}{k!}\,\frac{d^k(2ax)^k e^{-2ax}}{dx^k}\right]$$

alakú, tehát a megfelelő *Laguerre*-polinomok fognak szerepelni. $\varkappa$ kis értékeire a megfordítási képlet alapján ζ_y sűrűségfüggvénye

$$f_\zeta(x)=\sum_k e^{s_k x}b(s_k)$$

alakú lesz, ahol s_k a (3.20) függvény pólusait jelöli, $b(s_k)$ pedig az s_k pontban levő reziduumot. A pólusokra vonatkozó egyenlet

$$\frac{(1+ys+\sqrt{1+2y^2s})^2}{(1+ys-\sqrt{1+2y^2s})^2}=e^{-2\varkappa\sqrt{1+2y^2s}}$$

alakú.

A fenti összefüggések alapján lehetséges λ-ra konfidencia intervallumok szerkesztése, a számításokhoz azonban elektronikus számológép igénybevételére volt szükség. A következő pontban szereplő példában $T=60$ év és $\hat{\varkappa}=3{,}6$ esetén a megfelelő felső és alsó becslések (a valószínűségi szinteket az indexbe téve)

$$\begin{aligned} &\varkappa_{0,90}=5{,}5, \quad \varkappa_{0,95}=6{,}2, \quad \varkappa_{0,975}=7{,}8, \\ &\varkappa_{0,10}=1{,}27, \quad \varkappa_{0,05}=0{,}82, \quad \varkappa_{0,025}=0{,}46. \end{aligned} \tag{3.23}$$

A (3.19) és (3.20) összefüggésekből látható, hogy $\varkappa$ kicsiny értékeire

$$P_\varkappa\{\hat{\varkappa}<y\varkappa\}=\exp\left\{-\frac{1}{y}\right\}, \tag{3.24}$$

azaz a $\hat{\varkappa}/\varkappa$ hányados χ^2 eloszlású 2 szabadságfokkal, míg $\varkappa$ nagy értékeire

$$P\{\varkappa<\hat{\varkappa}+y\sqrt{\hat{\varkappa}}\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\,dt, \tag{3.25}$$

azaz $\hat{\varkappa}$ normális eloszlású $D^2(\hat{\varkappa})\sim\hat{\varkappa}$ szórásnégyzettel. Mivel $\hat{\varkappa}$ eloszlása folytonos tetszőleges $0<\alpha<1$ és $0<\varkappa<\infty$ értékekre van olyan k, hogy

$$P_\varkappa\{\hat{\varkappa}>k\}=\alpha.$$

A

$$k=k_\alpha(\varkappa)$$

összefüggésből a

$$\varkappa=\varkappa_\alpha(k)$$

összefüggést kapjuk, ahonnan nyilvánvaló, hogy

$$P_\varkappa\{\varkappa<\varkappa_\alpha(\hat{\varkappa})\}\equiv\alpha$$

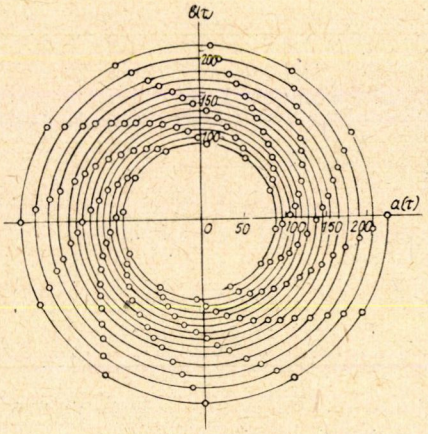
és $\varkappa_\alpha(\hat{\varkappa})$ lesz a $\varkappa$-ra vonatkozó konfidencia határ. A számítások azt mutatták, hogy $k_\alpha(\varkappa)$ monoton növekvő és így lézetik az inverze, tehát megfelelő konfidencia határok kaphatók.

4. § Egy geofizikai probléma

Földünk pillanatnyi forgástengelye a Föld mint ellipszoid kistengelyéhez viszonyítva állandóan változtatja helyzetét (ez az ún. „szabad mutáció"). Ezen helyváltoztatásnak van egy egyéves periódusa, melynek kiszűrése után megmarad az ún. *Chandler*-féle változás, melynek mintegy 14 hónapos periódusa van. Ez az ingadozás azonban már nem pontosan periodikus mozgás és emellett az amplitúdója is 10—20 éves hullámokban változik. Az 1. ábra, mely a pólus *Chandler*-féle komponenseinek empirikus korrelációs függvényét ábrázolja, jól mutatja, hogy szépen teljesülnek azok a feltételek, melyek az 1. §-ban kerültek ismertetésre (az empirikus korrelációs függvény alakja szabályos spirális, melyet vö. (1.2)-vel).

Az 1. ábra A. Ja. Orlov [11] dolgozatának 6. táblázata alapján készült a Moszkvai Egyetem Valószínűségszámítási Tanszékén. Az említett 6. táblázat

$x(t), y(t)$ koordinátáiból leválasztva azokat a komponenseket, melyeknek periódusa egy év, kapjuk a $\xi(t)$, $\eta(t)$ komponensű stacionárius *Gauss—Markov*-folyamatot. Az ábrán körrel jeleztük az 0,1 év nagyságú τ növekményekhez tartozó értékeket, mivel évente — immár több mint 70 éve — 10 mérést végeznek, s ezeket a méréseket még a Nagy Honvédő Háború idején sem szakították meg. Az ábra alapján szemléletesen is azonnal megállapítható, hogy a $2\pi/\omega$ periódus kb. 14 hónapos. A 2.1 tétel éppen azt mondja ki, hogy ω valóban pontosan becsülhető, tehát a becslésünk megbízható. A kapott spirális alapján azt lehetne várni, hogy a λ paramétert is pontosan lehet becsülni, ez azonban nincs így, mint ahogyan azt a 3. §-ban láttuk.



1. ábra. $\tau = 0, 1 \cdot n$; $n = 0, 1, 2, \ldots, 156$

A földforgás pólusának nevezzük a forgástengely és a földfelszín metszéspontját P-t, melynek koordinátáit jelölje (x, y, z), ahol a koordináták a Föld tehetetlenségi ellipszoidjának tengelyei irányában mérendők. A földet abszolút szilárd testnek föltételezve az *Euler*-féle egyenletekből

$$x = x_0 \cos(a^2 r_0 t + \tau)$$
$$y = y_0 \sin(a^2 r_0 t + \tau)$$
$$z = z_0$$

mozgást kapnánk: azaz a forgási pólus egy körmozgást ír le a tehetetlenségi pólus (a földfelszín és földtengely metszéspontja) $I(0, 0, z_0)$ körül. Ha az időegység egy csillagászati nap $r_0 = 1$ és $T = \frac{2\pi}{a} \sim 304$ nap.

Az eddigiekben feltettük, hogy a tehetetlenségi pólus időben nem változtatja helyét, azonban a különböző tömegváltozások (pl. levegőáramlások) hatására I szinten változtatja helyét. A függőleges komponens változásait elhanyagolva az egyenlítő síkjával párhuzamos síkban mérve φ és ψ koordinátáit, azok az idő függvényei lesznek, melyek periodikus komponensektől (éves vagy féléves periódussal) és véletlen határoktól is függnek. Azaz

$$\varphi(t) = \sum_k a_k \cos(\lambda_k t + \alpha_k) + \Delta_1(t)$$

$$\psi(t) = \sum_k b_k \cos(\lambda_k t + \beta_k) + \Delta_2(t)$$

ahol a $\Delta_1(t)$ és $\Delta_2(t)$ sztochasztikus folyamatokról fel lehet tételezni — első durva közelítésben —, hogy ún. „fehér zaj"-szerűek.

Mivel az új koordinátarendszerben a forgási pólus ξ, η koordinátái a

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T}(\eta - \psi)$$

(4.1)

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{2\pi}{T}(\xi - \varphi)$$

egyenletrendszernek tennének eleget, melynek megoldásai nagy „kilengéseket" is kell hogy mutassanak — amit a valóságban nem tapasztaltak —, még figyelembe kell venni a föld rugalmasságát is, ami a T periódus meghosszabbodását eredményezi ugyan, de nagy „kilengések" nem válnak lehetségessé. A rugalmasság figyelembe vételével a (4.1) rendszer helyett a

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(t)}{dt} &= a\eta + b\xi + \sum_k a_{1k}\cos(\lambda_k t + \theta_{1k}) + \Delta_1(t) \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= -a\xi + b\eta + \sum_k a_{2k}\cos(\lambda_k t + \theta_{2k}) + \Delta_2(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

egyenleteket kapjuk, melyeknek viselkedésével éppen az előző pontokban foglalkoztunk.

A (4.2) egyenlettel kapcsolatban elmondottak természetesen mutatják, hogy az (1.1) egyenletben szereplő $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ folyamatokról feltételezni, hogy azok *Wiener*-folyamatok, a Föld pólusai mozgásának vizsgálatánál csak első közelítés és durva idealizálás. Azonban ORLOV [13] adatai azt mutatják, hogy a

$$\xi' = -\lambda\xi - \omega\eta + f, \quad \eta' = \omega\xi - \lambda\eta + g$$

feltételezéssel élve az $f(t)$ és $g(t)$ távoli értékei függetlenek, így helyettesítésük megfelelő „fehér zajokkal" törvényes. Úgy tűnik, hogy ezen ekvivalens $\varepsilon_i(t)$ $(i=1,2)$ „fehér zajok" intenzitásának meghatározásában levő hiba elég kicsiny ahhoz, hogy ne legyen hatással a λ paraméter becslésére. Egy olyan elmélet kidolgozása azonban, mely ennek az állításnak pontos matematikai megfogalmazását adná, nincs meg, bár igen hasznos lenne.

Hatvan év adatainak feldolgozása alapján a következő eredmények adódtak

$$\hat{\omega} = 5{,}274; \quad \hat{\varkappa} = 3{,}6, \quad 2\pi : \hat{\omega} = 1{,}191, \quad \sigma(2\pi : \hat{\omega}) = 0{,}006 \text{ [3]}$$

A (3.25) aszimptotikus formula szerint

$$\sigma^2(\hat{\varkappa}) = 3{,}6$$

és $\alpha < 0{,}03$ szint esetén $\varkappa$ negatív alsó becslést kapnánk — ami lehetetlen — tehát a normális eloszlással való közelítés még egyáltalán nem megfelelő.

IRODALOM

[1] ARATÓ, M: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *M. T. A. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 13—24.

[2] ———, Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, II., *M T. A. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 135—157.

[3] Арато, М.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов *Disszertáció*, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.

[3] A λ és ω paraméterek becslése megtalálható pl. [10]-ben is, ahol $\lambda = {}^1/_{15}$ és $2\pi:\omega = 1{,}193$ értékek adódtak. Ehhez közeli értékeket kapott még 1942-ben JEFFREYS [9], azonban a [12] és [15] dolgozatokban ettől lényegesen eltérő $\lambda = 0{,}3$ és $\lambda = 0{,}01$ értékeket kaptak. Ezen eltérés okaira mutat rá jelen dolgozat 3. pontja (vö. az ott szereplő $\varkappa$ alsó és felső becslésekkel (3.23)).

[4] Арато, М. — Колмогоров, А. Н. — Синай, Я. Т.: Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского процесса, ДАН **146** (1962) 747-750.
[5] Арато, М. — Рыкова, Л. — Синай, Я. Т.: До верительные границы для коэффициента затухания комплексного стационарного гауссовсного марковского процесса. Теория вероятн. и ее прим (sajtó alatt).
[6] Диткин — Кузнецов: Справочник
[7] Дынкин Е. Б.: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов, ДАН **104** (1955) 691-693.
[8] Федоров Е. П.: Тр. Полтавск. гравиметрич. общ 2,3 (1948)
[9] JEFFREYS, H.: *Monthly Not. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.* **100**, 139 (1942)
[10] MUNK, W. H.—MACDONALD, G. J. P.: *The Rotation of the Earth*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Math., 1960.
[11] Орлов А. Ч.: Служба широты, Изд. А. Н. СССР, 1958
[12] Панченко: Тр. 14 Астрономич. Конф. СССР, Изд. А. Н. СССР, 1960, 232.
[13] Степанов В. В.: Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1959.
[14] STRIEBEL, CH. T: Densities for Stochastic Processes, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959) 559—567.
[15] WALKER, A. M.,—YOUNG, A.: The analysis of the observations of the variation of latitude. *Monthly notices. Roy. Astr. Soc. Geophys. Suppl.*. **115** (1955) 443, **114** (1957) 119.

(Beérkezett: 1964. VI. 15.)