

STABILIS KÖRRENDSZEREK SŰRŰSÉGÉRŐL

Írta: DOMINYÁK IMRE

Bevezetés

Körelhelyezésnek nevezünk egy olyan körrendszert, amelyben nincsenek közös belső ponttal rendelkező körök.

Tekintsük egy körelhelyezés O középpontú K körét. K ciklikus sorrendben a P_1, P_2, \dots, P_m pontokban érintkezzék a körelhelyezés más köreivel. A $\lambda' = \max \{P_1OP_2 \sphericalangle, P_2OP_3 \sphericalangle, \dots, P_mOP_1 \sphericalangle\}$ értéket K labilitásának, a $\sigma = \pi - \lambda'$ értéket pedig K stabilitásának nevezzük. Ha $\sigma > 0$, akkor K rögzítve van, azaz, ha a szomszédos köröket rögzítjük, nem lehet elmozdítani a körelhelyezést definiáló tulajdonság megszűnése nélkül. A körelhelyezés stabilitásán σ alsó határát értjük: $s = \inf \sigma$.

FEJES TÓTH [1] kimutatta, hogy az euklideszi sík bármely $s > 0$ stabilitású körhelyezésének sűrűsége

$$(1) \quad d \cong \frac{\pi}{n \operatorname{ctg} \frac{s}{2} - \operatorname{tg} \frac{n(\pi-s)}{2}},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi-s) \cong 2\pi$. Ugyanott megadott öt körelhelyezést (lásd 1–5. ábra), amelyeknél az (1) korlát pontos. Jelen dolgozat első részében az (1) alatti egyenlőtlenséggel analóg sűrűségbecslést adunk a gömbön és a hiperbolikus síkon. A második részben a körfedésekre vonatkozó duális problémákkal foglalkozunk.

Stabilis körelhelyezések

1. TÉTEL: *Legyen az egységnyi sugarú gömbön egy $s > 0$ stabilitású körelhelyezés minden körének a sugara $\cong r$; akkor a körelhelyezés sűrűsége*

$$(2) \quad d \cong \frac{\pi(1 - \cos r)}{\pi - n \arcsin \left(\cos \frac{s}{2} \cos r \right) - \arcsin \left(\sin \frac{n(\pi-s)}{2} \cos r \right)},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi-s) \cong 2\pi$.

Egy körelhelyezés K körének *Dirichlet*-celláján azon pontok halmazát értjük, amelyek K -ra vonatkozó hatványa nem nagyobb a körelhelyezés többi körére vonatkozó hatványánál. Az 1. tétel bizonyításaként megmutatjuk, hogy a körelhelyezés

sűrűsége mindenegyes Dirichlet-cellában legalább akkora, mint a (2)-ben szereplő korlát.

Legyen K a körelhelyezés egyik köre.¹ Legyen továbbá K középpontja O , sugara ϱ és Dirichlet-cellája D . Érintse D a K kört ciklikus sorrendben a P_1, P_2, \dots, P_m pontokban. Mivel D konvex, területe nem nagyobb, mint a K kört a P_1, P_2, \dots, P_m pontban érintő m -szög területe:

$$(3) \quad D \cong \sum_{i=1}^m 2 \left[\frac{\alpha_i}{2} - \arcsin \left(\sin \frac{\alpha_i}{2} \cos \varrho \right) \right],$$

ahol $\alpha_1 = P_1 O P_2 \sphericalangle, \dots, \alpha_m = P_m O P_1 \sphericalangle$.

Felhasználjuk most azt a tényt, hogy ha $f(x)$ az (a, b) intervallumban értelmezett konvex függvény és

$$a \cong \alpha - \lambda < \alpha \cong \beta < \beta + \gamma < b,$$

akkor

$$(4) \quad f(\alpha) + f(\beta) < f(\alpha - \gamma) + f(\beta + \gamma).$$

Figyelembe véve, hogy $-\arcsin(\sin z \cos \varrho)$ z -nek konvex függvénye ($0 < z < \pi/2; 0 < \varrho < \pi/2$), a (4)-es egyenlőtlenség véges számú alkalmazásával nyerjük, hogy

$$D \cong 2 \left[\pi - n \arcsin \left(\sin \frac{\lambda}{2} \cos \varrho \right) - \arcsin \left(\sin \frac{2\pi - n\lambda}{2} \cos \varrho \right) \right],$$

ahol $\lambda = \pi - s$.

Ezért a körsűrűség D -ben:

$$(5) \quad \frac{K}{D} \cong \frac{\pi(1 - \cos \varrho)}{\pi - n \arcsin \left(\sin \frac{\lambda}{2} \cos \varrho \right) - \arcsin \left(\sin \frac{2\pi - n\lambda}{2} \cos \varrho \right)}.$$

(5)-ben egyenlőség csak akkor áll fenn, ha D szabályos, vagy olyan érintő sokszög, amelyben az egy csúcsból induló két legkisebb egyenlő oldal kivételével a többi oldal egyenlő.

(5)-ben a K sugara, ϱ is szerepel. Kimutatjuk, hogy (5) jobboldala

$$G(\varrho) = \frac{\pi(1 - \cos \varrho)}{n \left[\frac{\lambda}{2} - \arcsin \left(\sin \frac{\lambda}{2} \cos \varrho \right) \right] + \left[\frac{2\pi - n\lambda}{2} - \arcsin \left(\sin \frac{2\pi - n\lambda}{2} \cos \varrho \right) \right]}$$

ϱ -nak monoton növekvő függvénye. Vezessük be a $\cos \varrho = x$ és $\arcsin(\sin \lambda/2 \cdot x) = f(x, \lambda)$ jelöléseket. Mivel $\arcsin(\sin \lambda/2 \cdot x)$ x -nek konvex függvénye ($0 \cong x \cong 1, 0 < \lambda < \pi$), geometriai megfontolásokból következik, hogy

$$\frac{\pi}{G(\varrho)} = n \frac{f(1, \lambda) - f(x, \lambda)}{1 - x} + \frac{f(1, \mu) - f(x, \mu)}{1 - x}, \quad \mu = 2\pi - n$$

ϱ -nak monoton csökkenő függvénye, vagyis $G(\varrho)$ monoton növekszik.

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

▼

¹ A továbbiakban ugyanazzal a szimbólummal jelöljük a tartományt és területét.

Vannak olyan stabilis körelhelyezések a gömbön, amelyekben a (2) alatti korlát pontos. Például ilyenek a szabályos poliéderek csúcspontjai által kijelölt középpontú körelhelyezések, amelyeket sztereografikus projekcióiban ábrázoltunk (6–10. ábra). Sőt az archimedeszi-féligszabályos poliéderek² közül a (3, 6, 6), (3, 8, 8), (3, 10, 10), (4, 6, 6), (5, 6, 6) és a (3, 4, 4, 4) szimbólumokkal jelöltek is meghatároz-
 nak egy-egy extrémális körelhelyezést (11–16. ábra). Elemi számolásokkal belát-
 ható, hogy a fenti körelhelyezéseken kívül nincs olyan, amelynél a (2) alatti korlát
 pontos.

2. TÉTEL: *Legyen a -1 görbületű hiperbolikus síkon egy $s > 0$ stabilitású körel-
 helyezés minden körének sugara $\cong R \cong \text{arch cosec } \pi - s/2$, akkor a körelhelyezés
 minden körének Dirichlet-cellájában a sűrűség*

$$(6) \quad d \cong \frac{\pi(1 - \text{ch } R)}{\pi - n \arcsin \left(\cos \frac{s}{2} \text{ch } R \right) - \arcsin \left(\sin \frac{n(\pi - s)}{2} \text{ch } R \right)},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \cong 2\pi$.

A bizonyításnál ugyanúgy járunk el, mint a gömbön. Minthogy a bizonyítás hasonló az 1. tétel bizonyításához, nem részletezzük azt. Ha az $R \cong \text{arch cosec } \pi - s/2$ feltétel nem teljesül, a (6) alatti korlát nincs értelmezve. Az eljárásunk azonban akkor azt a triviális korlátot szolgáltatja, hogy a sűrűség $\cong 0$. Ilyenkor ugyanis D területének becslésénél nem tudunk véges felső korlátot megadni.

A hiperbolikus síkon végtelen sok olyan stabilis körelhelyezés van, amelynél a (6) alatti korlát pontos. Például ilyenek a szabályos egybevágó sokszögekből álló mozaikok beírt körrendszerei. A 17–19. ábrán a $\{4, 5\}$, $\{3, \infty\}$ és $\{4, \infty\}$ szimbólum-
 mal jelölhető mozaikokhoz tartozó körrendszereket ábrázoltuk a Poincare-modell segítségével. De nemcsak egybevágó szabályos sokszögű mozaik esetén lehet a (6) alatti korlát pontos. A 20. ábrán például olyan egybevágó háromszögek a Dirichlet-
 cellák, amelyek 72° , 36° és 36° nagyságú szögekkel rendelkeznek.

Stabilis körfedések

Körfedésnek nevezzük egy állandó görbületű felület olyan körrendszerét, ha a felület minden pontja legalább egy körnek belsejében vagy határán van.

Legyen K a körfedés egyik köre. Legyen továbbá K középpontja O , sugara ρ és Dirichlet-cellája D . A P_1, P_2, \dots, P_m pontok ciklikus sorrendben K azon határ-
 pontjai, amelyek a körfedés egyetlen körének sem fekszenek a belsejében, s mind-
 egyikhez csatlakozik csak a K kör által fedett tartomány is. Ekkor K stabilitásán a
 $\sigma = \pi - \lambda' = \pi - \max \{P_1OP_2 \triangleleft, \dots, P_mOP_1 \triangleleft\}$ értéket értjük, a körrendszer stabili-
 tásának pedig az $s = \inf \sigma$ értéket tekintjük.

3. TÉTEL: *Az euklideszi sík $s > 0$ stabilitású fedő körrendszerének a sűrűsége*

$$(7) \quad D \cong \frac{2\pi}{n \sin s + \cos n\pi \sin ns},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \cong 2\pi$.

² Lásd [3] 17–22. oldal.

A bizonyítást ugyanúgy végezhetjük el, mint a körelhelyezéseknél: megadjuk, hogy milyen *Dirichlet*-celláknál lehet a megadott stabilitású körfedés sűrűsége maximális.

Legyen K a körfedés egyik köre. Legyen továbbá K középpontja O , sugara ϱ és *Dirichlet*-cellája D . A P_1, P_2, \dots, P_m pontok a K kör olyan egymás után következő pontjai, amelyek egyetlen körnek sem fekszenek a belsejében és amelyek mindegyikének van olyan környezete, amelyet csak a K kör fed. A P_1, P_2, \dots, P_m pontok a *Dirichlet*-cella csúcspontjai között szerepelnek. Minthogy D konvex, a $P_1 P_2 \dots P_m$ m -szög D -ben van, vagyis területe nem nagyobb D területénél

$$D \cong \sum_{i=1}^m \frac{\varrho^2 \sin \alpha_i}{2},$$

ahol $\alpha_1 = \angle P_1 O P_2$, $\alpha_2 = \angle P_2 O P_3$, ..., $\alpha_m = \angle P_m O P_1$. Tehát K -nak a D -re vonatkozó sűrűsége

$$(8) \quad \frac{K}{D} \cong \frac{2\pi}{\sum_{i=1}^m \sin \alpha_i}.$$

A $\lambda = \pi - s$ jelölést használva és (8) nevezőjére a (4) egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$(9) \quad \frac{K}{D} \cong \frac{2\pi}{n \sin \lambda - \sin(n\lambda)},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n\lambda \leq 2\pi$. Ez pedig tételünk állításával egyezik meg. Az eljárásunkból következik, hogy a $\{4; 4\}$ és $\{3; 6\}$ mozaikokhoz tartozó körfedések (21. és 22. ábra) sűrűsége a (7) alatti korláttal egyenlő.

A konstans görbületű felületek stabilis körfedései analóg módon definiálhatók. Ezek sűrűségére érvényesek a következő tételek:

4. TÉTEL: *Legyen az egységnyi sugarú gömb felületén egy $s > 0$ stabilitású körfedés minden körének sugara $\cong r$; akkor a körfedés sűrűsége*

$$(10) \quad D \cong \frac{\pi(1 - \cos r)}{\pi - n \arctg \left(\cos r \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right) + \arctg \left[\cos r \operatorname{tg} \frac{n(\pi - s)}{2} \right]},$$

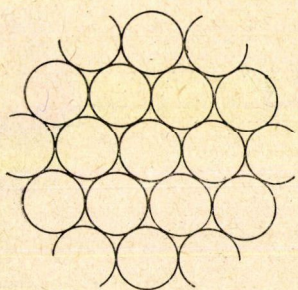
ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leq 2\pi$.

5. TÉTEL: *Legyen $\alpha - 1$ görbületű hiperbolikus síkon egy $s > 0$ stabilitású körfedés minden körének sugara $\cong R$, akkor a körfedés minden körének Dirichlet-cellájában a sűrűség*

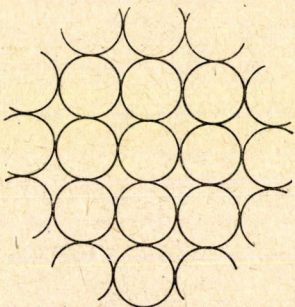
$$(11) \quad D \cong \frac{\pi(1 - \operatorname{ch} R)}{\pi - n \arctg \left(\operatorname{ch} R \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right) + \arctg \left[\operatorname{ch} R \operatorname{tg} \frac{n(\pi - s)}{2} \right]},$$

ahol n az a legnagyobb természetes szám, amelyre $n(\pi - s) \leq 2\pi$.

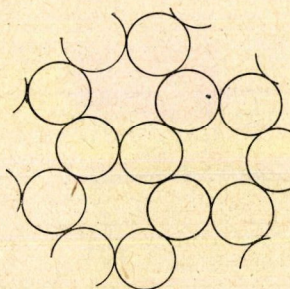
Minthogy a 4–5. tételek bizonyítása hasonló az 1. tétel bizonyításához, nem közöljük azt.



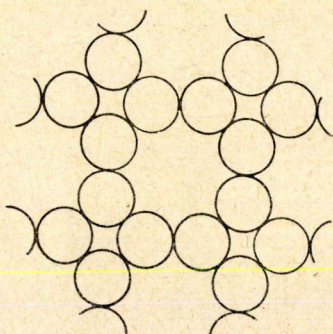
1. ábra



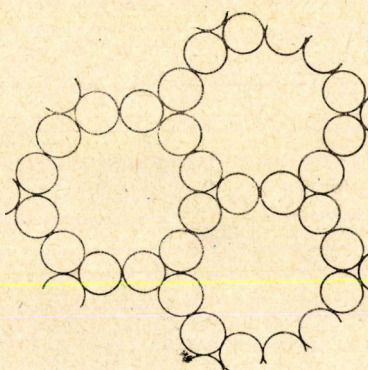
2. ábra



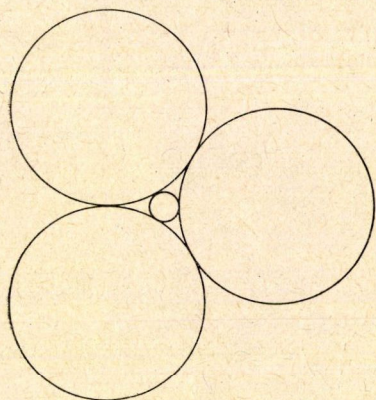
3. ábra



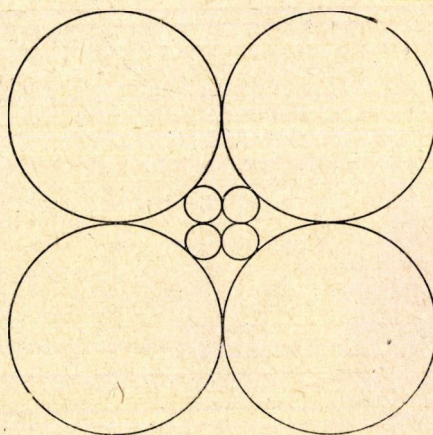
4. ábra



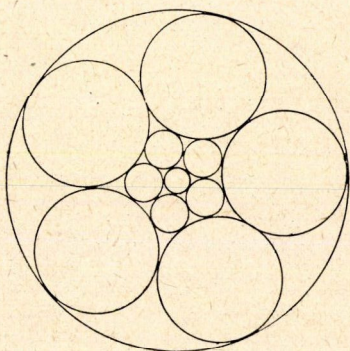
5. ábra



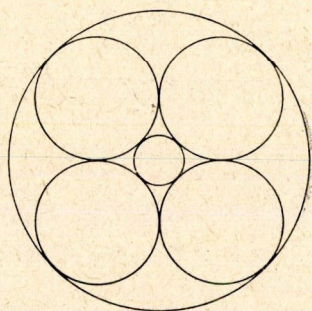
6. ábra



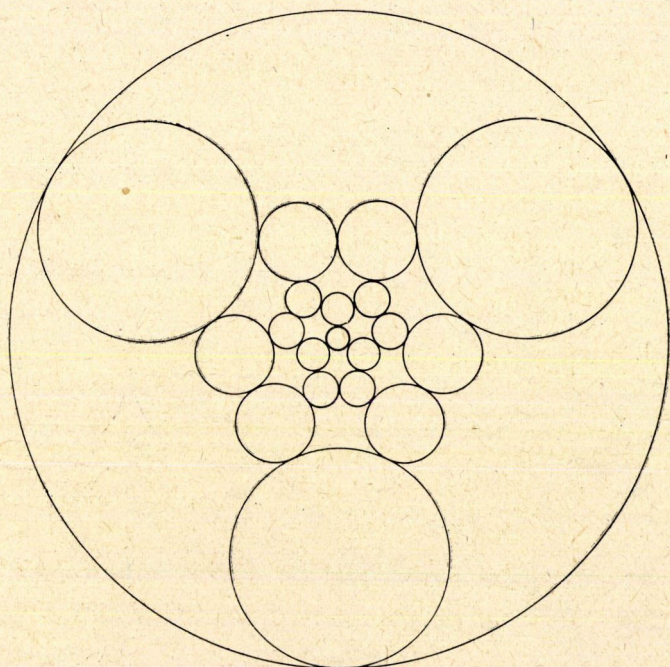
7. ábra



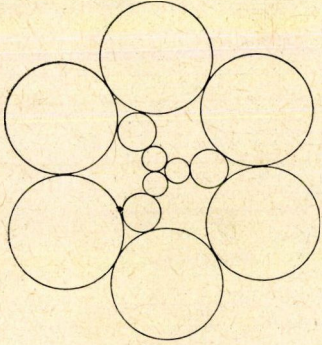
8. ábra



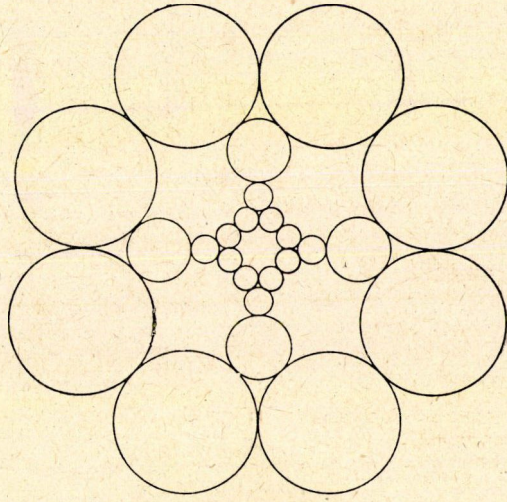
9. ábra



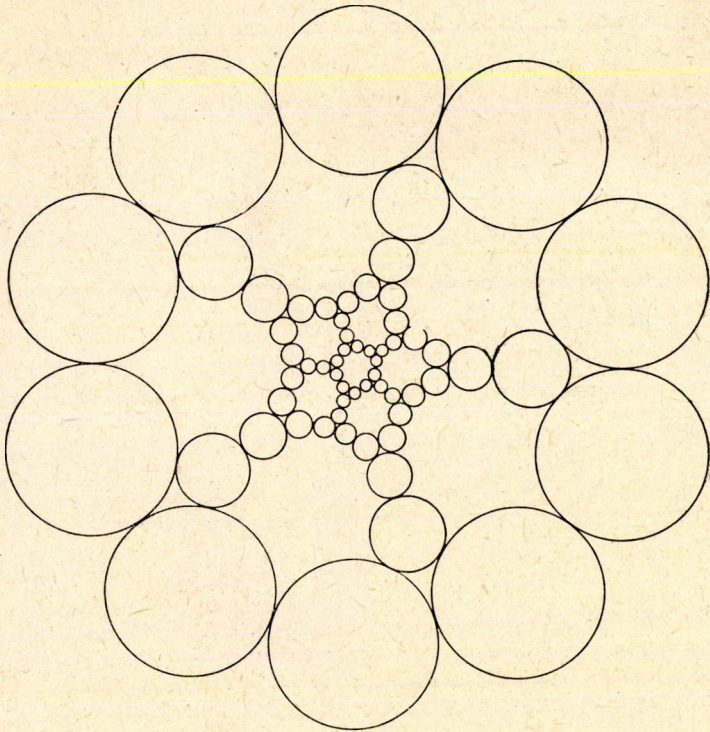
10. ábra



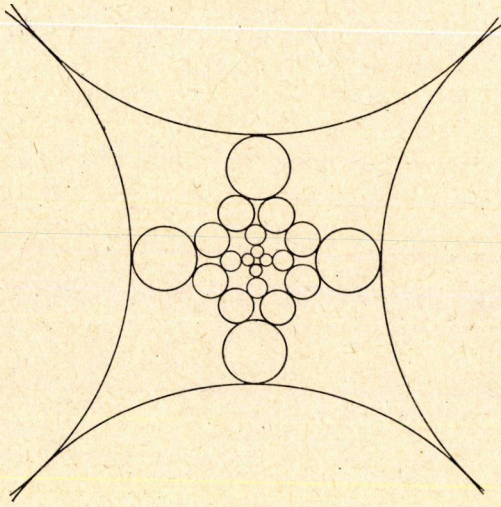
11. ábra



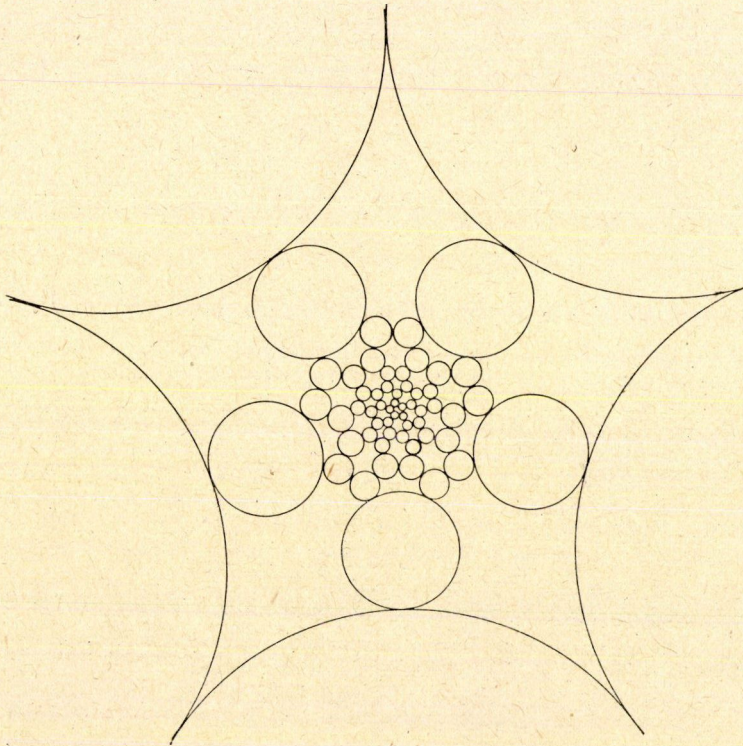
12. ábra



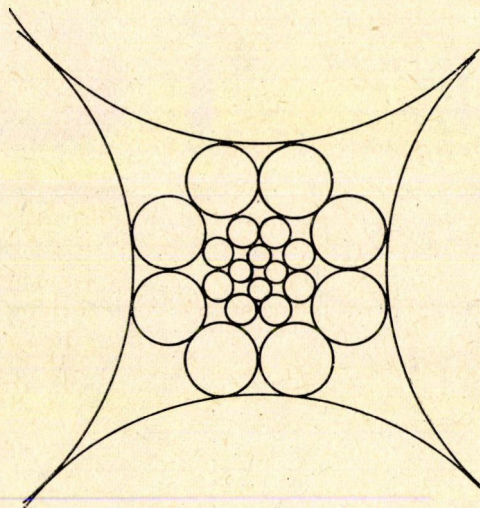
13. ábra



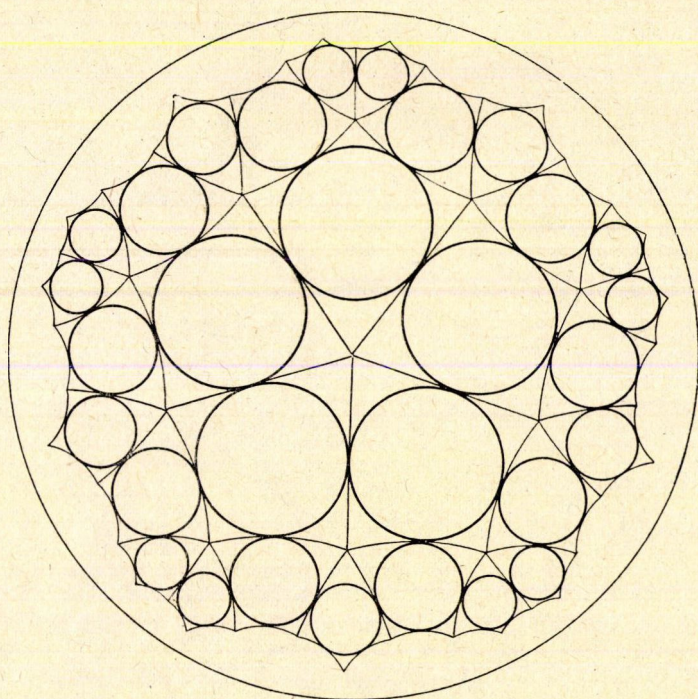
14. ábra



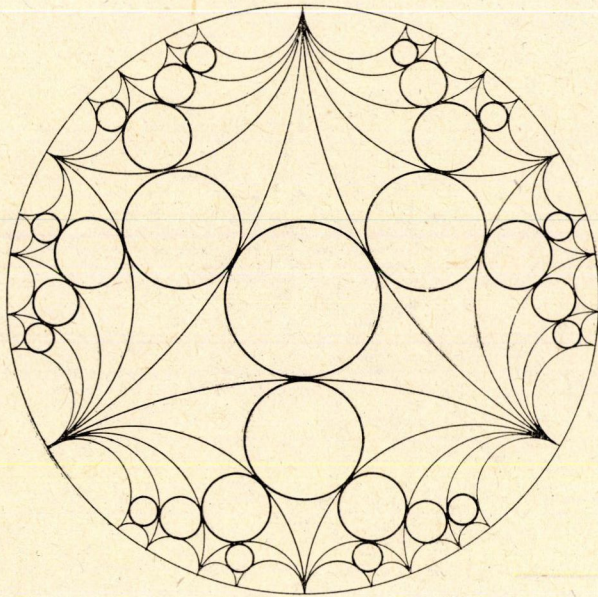
15. ábra



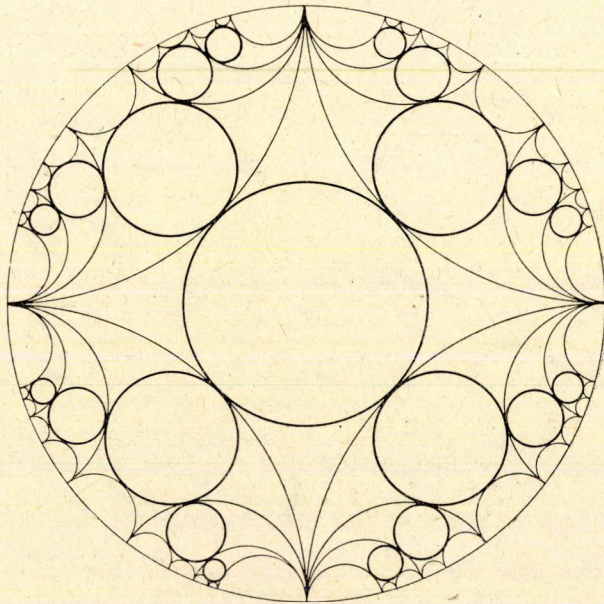
16. ábra



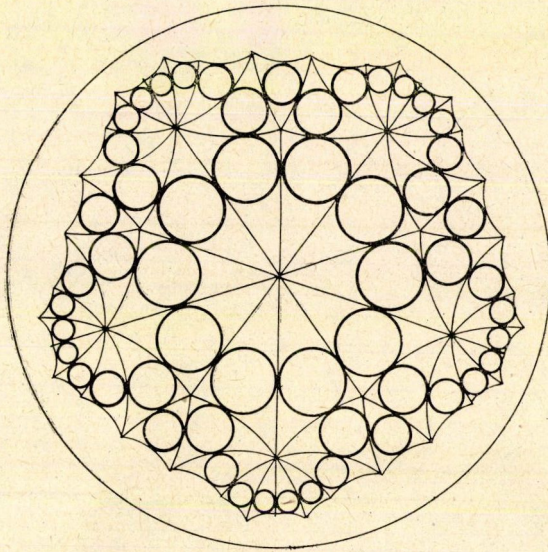
17. ábra



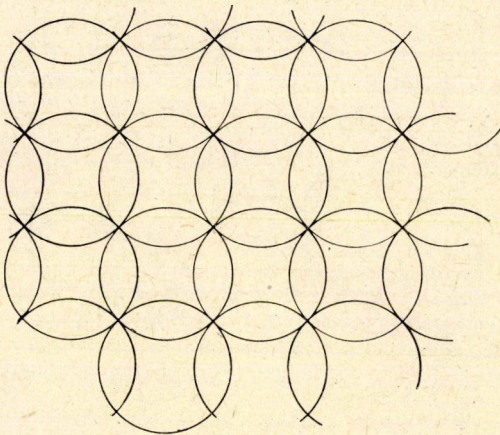
18. ábra



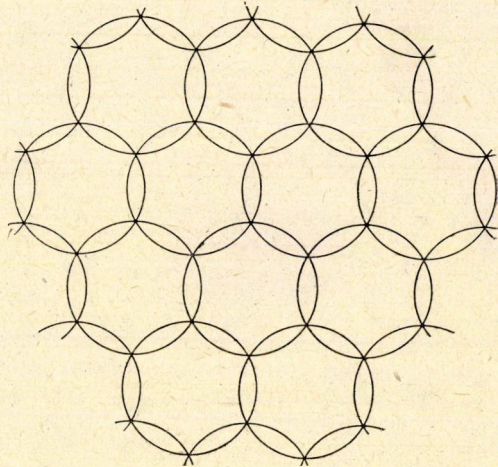
19. ábra



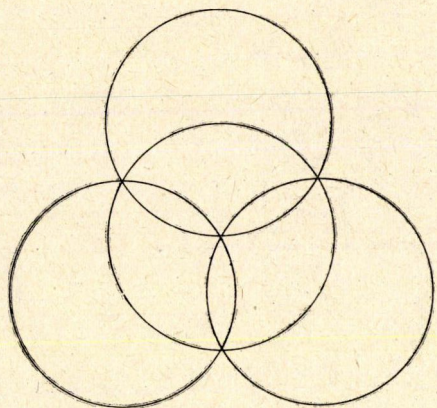
20. ábra



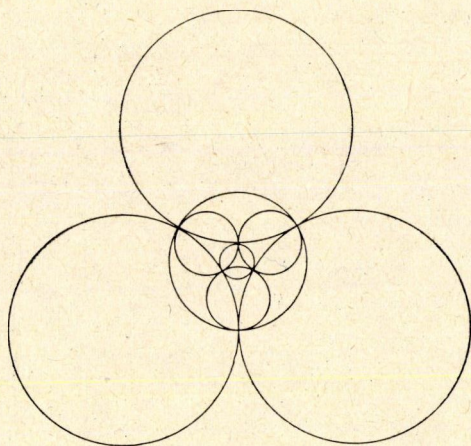
21. ábra



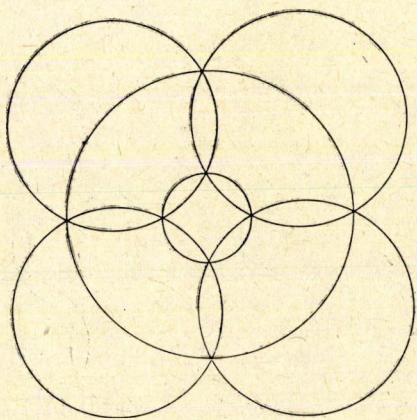
22. ábra



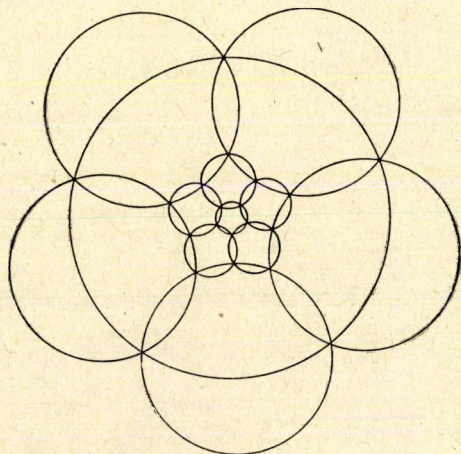
23. ábra



24. ábra

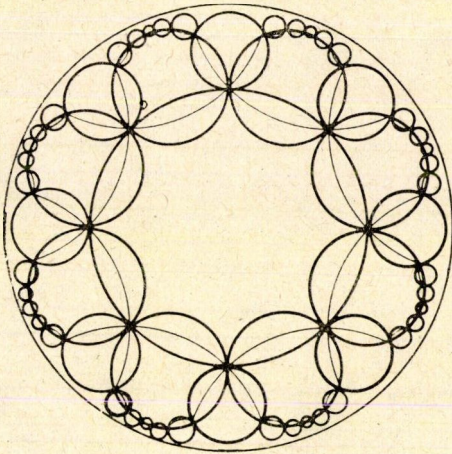


25. ábra

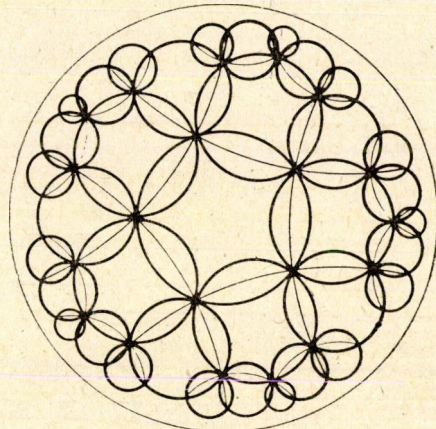


26. ábra

A gömbön négy olyan stabilis körfedés van, amelyeknél a (10) alatti korlát pontos. Ezen körrendszerek köreinek középpontjait a $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$ és $\{5, 3\}$ szabályos poliéderek³ csúcspontjai jelölik ki. A 23–26. ábrán a fenti körfedések sztereografikus projekciói láthatók.



27. ábra



28. ábra

A hiperbolikus síkon számtalan olyan körfedés van, amelyek sűrűsége a (11) alatti korláttal egyenlő. Ilyenek például az olyan egybevágó szabályos sokszögekből álló mozaikokhoz tartozók, amelyeknél a belső szög 90° vagy 120° . Ezek közül látható kettő a 27. és 28. ábrán, ahol a *Poincare*-modellben ábráztuk a körfedést.

IRODALOM

- [1] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: On the stability of a circle packing, *Ann. Univ. Sci. Budapest de R. Eötvös nom.* (1960/61), 63–66.
 [2] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* 4 (1953), 111–114.
 [3] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

(Beérkezett: 1963. XI. 8.)

ON THE DENSITY OF STABLE CIRCLE SYSTEMS

I. Dominyák

In the first part of the paper we give a lower bound of the density of the stable circle packing on the sphere and hyperbolic plane. In the second part an upper bound of density of stable circle-covering is given on the sphere, Euclidean and hyperbolic plané.

³ Lásd [3] 17. oldal.