

HATÁRELOSZLÁSTÉTELEK KITERJESZTÉSÉRŐL

Írta: NEMETZ TIBOR és VARGA GYULA

Bevezetés

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ egy P mérték szerint független valószínűségi változó sorozat, melyre igaz a centrális határeloszlástétel. RÉNYI ALFRÉD [1] dolgozatában azt a kérdést vetette fel, hogy milyen feltételek mellett lesz érvényes a centrális határeloszlástétel egy $Q \ll P^1$ mérték szerint is. A kérdést speciális esetekben megoldotta.

KOLMOGOROV a tételt általánosan bizonyította [2] dolgozatában azon megszorítás mellett, hogy P tökéletes mérték. Bizonyítása a

$$(1) \quad \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} |P(B) - Q(B)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty$$

reláció bizonyításán alapult. RÉNYI A. egy későbbi dolgozatában [3] a keverő halmazok fogalmának bevezetésével megmutatta, hogy a tökéletesség feltételezése nem szükséges. RÉNYI A. és RÉVÉSZ P. közös dolgozatukban [4] az eredményeket bizonyos ergodikus *Markov*-láncokra is kiterjesztették.

Ebben a dolgozatban a szerzők KOLMOGOROV eljárása alapján megmutatják, hogy az (1) összefüggés érvényes a tökéletesség feltevése nélkül nemcsak a P szerint független sorozatokra, hanem olyan sorozatokra is, melyekre érvényes a *Kolmogorov*-féle null-egy törvény. Ezen törvény a folyamatok elméletében különböző regularitási feltételek alapjául szolgált, melyekkel szintén foglalkozni kívánunk. Mivel pl. stacionárius sorozatok esetén a centrális határeloszlástétel fennállásához ez a legkevesebb, amit meg kell követelnünk, általánosításunk az eredeti tétel természetes általánosítása. A bizonyítás egyben megmutatja e tétel és a null-egy törvény szoros kapcsolatát. Megmutatjuk, hogy a stacionárius sorozatokra vonatkozó centrális határeloszlás tételek legutóbbi eredményei (ROZANOV [5], IBRAHIMOV [6]) milyen kapcsolatban vannak a fenti eredményekkel.

Munkánkban sok segítséget kaptunk ARATÓ MÁTYÁSTÓL, aki problémáink és kérdéseink megoldásában a legjobb információkat és utasításokat adta. Ezért a segítségért köszönetünket fejezzük ki.

1. §. A null-egy törvény és a keverés

Jelölje $\mathfrak{M}_s^t$ ($-\infty < s < t < +\infty$) az $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett $\xi_s, \xi_{s+1}, \dots, \xi_t$ valószínűségi változók által generált σ -algebrát. Jelölje továbbá $\mathfrak{M}_s^{+\infty}$ a legszűkebb $\bigcup_{n>s} \mathfrak{M}_s^n$ -t tartalmazó σ -algebrát. Defináljuk ezzel analóg az

¹ Itt és a továbbiakban $Q \ll P$ azt jelenti, hogy a Q mérték abszolút folytonos a P mértékre nézve, mégpedig, ha csak külön nem hangsúlyozzuk, mindig az $\mathfrak{M}_s^{+\infty}$ σ -algebrán. P és Q mindig valószínűségi mértéket fog jelölni.

$\mathfrak{M}_{-\infty}^t$ és az $\mathfrak{M}_{-\infty}^\infty$ σ -algebrákat. Ha a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változó sorozat teljesen független a $\mathbf{P}$ mértékre nézve, akkor tetszőleges $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^t$, $B \in \mathfrak{M}_{t+1}^\infty$ halmazokra

$$(1.1) \quad \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0.$$

Ha a $\{\xi_n\}$ sorozat a $\mathbf{P}$ mértékre nézve szigorú értelemben stacionárius sorozatot alkot, akkor az (1.1) összefüggés nem áll fenn, ellenben azt mondjuk, hogy rendelkezik a keverés tulajdonságával, ha az általa generált $\mathfrak{F}$ mértéktartó transzformáció keverő, azaz ha

$$(1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{P}(A\mathfrak{F}^n B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \rightarrow 0 \quad \begin{array}{l} A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \\ B \in \mathfrak{M}_0^\infty. \end{array}$$

Az (1.2) feltétel ekvivalens azzal, hogy tetszőleges B , az $\mathfrak{M}_{-\infty}^\infty$ σ -algebrára nézve mérhető halmazra $\mathbf{Q}(\mathfrak{F}^n B) \rightarrow \mathbf{P}(B)$, pontosabban igaz a következő

1.1. TÉTEL: *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy stacionárius sorozat rendelkezzen a keverés tulajdonságával az, hogy tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre teljesüljön a*

$$(1.3) \quad \mathbf{Q}(\mathfrak{F}^n B) \rightarrow \mathbf{P}(B) \quad B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^\infty, \quad n \rightarrow +\infty$$

összefüggés.

Bizonyítás: Ha

$$\mathbf{Q}_M(B) = \frac{1}{\mathbf{P}(M)} \int_B \chi_M d\mathbf{P}, \quad \text{ahol} \quad \chi_M = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in M \\ 0, & \text{ha } \omega \notin M, \end{cases}$$

akkor (1.2) épp (1.3) fennállását jelenti a $\mathbf{Q}_M \ll \mathbf{P}$ valószínűségi mértékre.

Ha (1.3) fennáll a $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$ mértékekre, akkor nyilván bármely konvex lineáris kombinációjukra is, ebből határátmenettel következőleg tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ valószínűségi mértékre is, ami e feltétel szükségességét mutatja. Másrészt, ha (1.3) fennáll minden $\mathbf{Q}_A$, $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0$ mérték esetén, akkor nyilván minden $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0$ -ra érvényes lesz az (1.2) összefüggés is.

Független valószínűségi változók sorozataira érvényes a *Kolmogorov*-féle null-egy törvény, azaz, ha

$$(1.4) \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}_n^\infty = \mathfrak{N},$$

akkor $\mathfrak{N}$ triviális σ -algebra. (Ezt úgy értjük, hogy $\mathfrak{N}$ csak null és egy mértékű halmazokból álló σ -algebra.)

Az (1.4) feltételnek eleget tevő sorozatokat szokás reguláris sorozatoknak nevezni. (A dinamikus rendszerek elméletében — vagy más néven ergodelméletben — az (1.4) feltételnek eleget tevő rendszereket *Kolmogorov*-féle rendszereknek nevezik [7]). Ismeretes, hogy (1.4) fennállása többet jelent a keverésnél (lásd pl. ROHLIN [8]), sőt igaz a következő tétel (a tételt stacionárius sorozatokra ROZANOV mondja ki és bizonyítja [5] könyvében, 246. old. Előzőleg VINOKUROV [12] bizonyított hasonló tételt *Markov*-láncokra).

1. 2. TÉTEL: $A \{\xi_n\}$ sorozat (1. 4) értelemben vett regularitásának szükséges és elégséges feltétele a

$$(1. 5) \quad \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty, A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^\infty$$

összefüggés fennállása.

Bizonyítás: A szükségesség bizonyítása. A null-egy törvény fennállása esetén

$$\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{M}) = \mathbf{M}(\xi),$$

másrészt az ismert martingál konvergencia tétel szerint (Doob [9] 298 o.)

$$(1. 6) \quad \mathbf{M}|\mathbf{M}(\xi|\mathfrak{M}_n^\infty) - \mathbf{M}(\xi|\mathfrak{M})| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Mivel a $B \in \mathfrak{M}_n^\infty$ halmaz κ_B karakterisztikus függvénye $\mathfrak{M}_n^\infty$ mérhető, tetszőleges mérhető A halmazra

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{M}(\chi_A \chi_B) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\chi_A \chi_B|\mathfrak{M}_n^\infty)) = \mathbf{M}(\chi_B \mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M}_n^\infty)) = \int_B \mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M}_n^\infty) d\mathbf{P},$$

másrészt

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{M}(\chi_A)\mathbf{M}(\chi_B) = \int_B \mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M}) d\mathbf{P},$$

így (1. 6) alapján

$$\begin{aligned} \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| &= \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} \left| \int_B (\mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M}_n^\infty) - \mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M})) d\mathbf{P} \right| \leq \\ &\leq \int_\Omega |\mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M}_n^\infty) - \mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M})| d\mathbf{P} = \mathbf{M}|\mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M}_n^\infty) - \mathbf{M}(\chi_A|\mathfrak{M})| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Az elégségség bizonyítása. Ha $A \in \bigcap_n \mathfrak{M}_n^\infty$ akkor $A \in \mathfrak{M}_n^\infty$ tetszőleges n -re, így az (1. 5) összefüggés alapján (B helyébe A -t téve)

$$|\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}^2(A)| = 0,$$

amiből $\mathbf{P}(A)$ vagy 0, vagy 1 lehet, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Az előbbi tételből azonnal következik egy — a mi céljainkra sokkal használhatóbb — tétel, mely a $\mathbf{P}$ -re nézve abszolút folytonos $\mathbf{Q}$ mértékek segítségével fejezi ki a regularitást.

1. 3. TÉTEL: $A \{\xi_n\}$ sorozat (1. 4) regularitásának szükséges és elégséges feltétele a

$$(1. 7) \quad \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} |\mathbf{Q}(B) - \mathbf{P}(B)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty$$

összefüggés fennállása, tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre.

Bizonyítás: A szükségesség bizonyítása. A Radon—Nikodym-tételt az $\mathfrak{M}_{-\infty}^\infty$ σ -algebrára alkalmazva,

$$\mathbf{Q}(B) = \int_B \lambda d\mathbf{P},$$

ahol tehát $M(\lambda) = 1$ és λ mérhető a $\mathfrak{M}_{-\infty}^{+\infty}$ σ -algebrára nézve. Az 1. 1 tétel bizonyításához hasonlóan elég a szükségességet $\lambda = \frac{\chi_A}{P(A)}$, $P(A) > 0$ alakú függvényekre bizonyítani. Az 1. 2 tétel szerint azonban ilyenkor

$$\sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} |Q(B) - P(B)| = \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{P(A)} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Innen az állítás tetszőleges 1 várható értékű lépcsős függvényekre következik, és $M_P(\lambda) = 1$ miatt λ ilyen lépcsős függvényekkel tetszőleges pontossággal megközelíthető.

Az elégségségesség bizonyítása nyilvánvalóan következik a $Q(B) = P(B|A) \ll P(B)$ (ha $P(A) > 0$) összefüggésből, mivel ekkor

$$\sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} |Q(B) - P(B)| = \sup_{B \in \mathfrak{M}_n^\infty} \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{P(A)}.$$

Ezzel a tételünket bebizonyítottuk.

2. §. Különböző regularitások

Mint az előző pontban láttuk, a null-egy törvény fennállása több, mint az egyszerű keverés. Most megvizsgáljuk a különböző célokra bevezetett regularitások viszonyát. Tekintsük először az egyszerű keverés közvetlen általánosításaként adódó

$$(2.1) \quad \sup_{B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty} |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \quad \begin{array}{l} \text{ha } n \rightarrow +\infty, A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^k \\ k \text{ rögzített} \end{array}$$

összefüggést. Ez az összefüggés ekvivalens az (1. 5) összefüggéssel. Pontosabban igaz á

2. 1. TÉTEL: *A (2. 1) összefüggés fennállásából következik az (1. 5) összefüggés fennállása. (A fordított állítás nyilvánvaló.)*

Bizonyítás: Először azt kell belátnunk, hogy ekkor igaz a null-egy törvény. Mivel ennek bizonyítása tulajdonképpen a független változó sorozatra vonatkozó null-egy tétel bizonyításának (lásd pl. ITO [10]) megismétlését jelentené csekély módosítással, így ettől eltekintünk. ROSENBLATT [11] dolgozatában a következő fogalmat vezeti be: Egy $\{\xi_n\}$ stacionárius sorozatot erősen keverőnek mondunk, ha

$$(2.2) \quad \sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^k \\ B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty}} |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Egy $\{\xi_n\}$ stacionárius sorozatot teljesen regulárisnak szoktak nevezni, ha 1 valószínűséggel

$$(2.3) \quad \sup_{B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty} |P(B|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - P(B)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Igazak a következő tételek:

2. 2. TÉTEL: Ha egy $\{\xi_n\}$ sorozat teljesen reguláris, akkor erősen keverő is.

2. 3. TÉTEL: A (2. 2) regularitásból következik a null-egy törvény fennállása.

Bizonyítás: Legyen $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^k$ és $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty$. Akkor

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| &= \left| \int_A [\mathbf{P}(B|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \mathbf{P}(B)] d\mathbf{P} \right| \leq \\ &\leq \sup_{B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty} |\mathbf{P}(B|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \mathbf{P}(B)| \cdot \mathbf{P}(A) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ezzel a 2. 2 tételt igazoltuk.

A (2. 3) tétel bizonyításához csak azt kell meggondolni, hogy a (2. 2) összefüggés fennállása maga után vonja a (2. 1) összefüggés fennállását.

Más megfogalmazásban a (2. 1) és (2. 2) regularitásokat a következőképpen lehet felírni:

$$(2. 1') \quad \sup_{\eta} |\mathbf{M}\eta\xi - \mathbf{M}\eta \cdot \mathbf{M}\xi| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

$$(2. 2') \quad \sup_{\xi, \eta} |\mathbf{M}\eta\xi - \mathbf{M}\eta \cdot \mathbf{M}\xi| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

ahol $|\eta| \leq 1$, $|\xi| \leq 1$ és ξ mérhető az $\mathfrak{M}_{-\infty}^k$, η pedig az $\mathfrak{M}_{k+n}^\infty$ σ algebrára nézve.

Annak belátásához, hogy (2. 1') és (2. 2') fennállásából következik (2. 1) és (2. 2) fennállása, elég tekinteni a $\xi = \kappa_A$ és $\eta = \kappa_B$ valószínűségi változókat. A fordított állítást igazolandó tekintsünk valós η és ξ változókat. Akkor fennáll az, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta &= \mathbf{M}[\mathbf{M}(\xi\eta|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \xi\mathbf{M}\eta] = \\ &= \mathbf{M}[\xi\mathbf{M}(\eta|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \xi\mathbf{M}\eta] = \mathbf{M}\{\xi[\mathbf{M}(\eta|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \mathbf{M}\eta]\}. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\begin{aligned} \eta' &= \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{M}(\eta|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \mathbf{M}\eta > 0 \\ -1 & \text{ha } \mathbf{M}(\eta|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \mathbf{M}\eta \leq 0, \end{cases} \\ \xi' &= \begin{cases} 1 & \text{ha } \mathbf{M}(\eta'|\mathfrak{M}_{k+n}^\infty) - \mathbf{M}\eta' > 0 \\ -1 & \text{ha } \mathbf{M}(\eta'|\mathfrak{M}_{k+n}^\infty) - \mathbf{M}\eta' \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

jelöléseket, nyerjük, hogy

$$|\mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta| \leq |\mathbf{M}\{\eta'[\mathbf{M}(\eta|\mathfrak{M}_{-\infty}^k) - \mathbf{M}\eta]\}| = |\mathbf{M}\eta\eta' - \mathbf{M}\eta\mathbf{M}\eta'|$$

és ebből teljesen hasonló módon az

$$|\mathbf{M}\eta\xi - \mathbf{M}\eta\mathbf{M}\xi| \leq |\mathbf{M}\eta'\xi' - \mathbf{M}\eta'\mathbf{M}\xi'|$$

összefüggéseket. Ez azt jelenti, hogy η -hoz és ξ -hez létezik olyan $B \in \mathfrak{M}_{k+n}^\infty$ és $A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^k$, hogy az

$$\eta^* = 2\chi_B - 1$$

$$\xi^* = 2\chi_A - 1$$

változókra nézve

$$|\mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta| \leq |\mathbf{M}\eta^*\xi^* - \mathbf{M}\eta^*\mathbf{M}\xi^*| = 4|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Következmény. A (2. 1), (2. 2) és (2. 3) regularitás fennállásából (1. 7) következik.

3. §. Határérték-tételek kiterjesztése

A Kolmogorov-féle [2] gondolatmenet megismétlésével bebizonyítjuk, hogy azon sorozatokra, melyekre érvényes valamilyen határeloszlástétel, és a határeloszlás nem függ az első m tag (m fix) összegétől, a határeloszlástétel igaz marad minden $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre is. Igaz ugyanis a következő

3. 1. TÉTEL: Ha a $\{\xi_n\}$ sorozat a $\mathbf{P}$ mérték szerint az (1. 4) értelemben reguláris, és léteznek olyan valós C_n és D_n számok, hogy a $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ változóra igaz a

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right\} \rightarrow F(x),$$

(ahol $F(x)$ nem függ az első m változótól, m rögzített) összefüggés, akkor tetszőleges $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ mértékre nézve is

$$\mathbf{Q}\left\{\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x\right\} \rightarrow F(x).$$

Megjegyzés. A regularitás megkövetelése lényegében nem jelent megszorítást, mivel $\mathbf{P}$ -re nézve csak így képzelhető el a határeloszlástétel fennállása (lásd IBRAHIMOV [6], VOLKONSKIJ és ROZANOV [13]).

Bizonyítás: Jelölje $A_n(x)$, ill. $A_{mn}(x)$ azon ω -k halmazát, melyekre

$$\frac{\zeta_n - C_n}{D_n} < x,$$

illetve az

$$\eta_{mn} = \frac{\xi_{m+1} + \dots + \xi_n - C_n}{D_n}$$

valószínűségi változó mellett

$$\eta_{mn} < x.$$

Állításunk igazolásához azt kell belátnunk, hogy ha x $F(x)$ -nek folytonossági helye, akkor

$$(3. 1) \quad |\mathbf{P}(A_n(x)) - \mathbf{Q}(A_n(x))| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_0(\varepsilon),$$

(1. 7) miatt

$$(3. 2) \quad |\mathbf{P}(A_{mn}(x)) - \mathbf{Q}(A_{mn}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } m > N_1(\varepsilon).$$

Minthogy feltettük, hogy a határeloszlás független az első m (rögzített) változó viselkedésétől, így

$$(3.3) \quad |P(A_n(x) \circ A_{mn}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon, m),$$

s mivel $Q \ll P$,

$$(3.4) \quad |Q(A_n(x) \circ A_{mn}(x))| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } n > N_3(\varepsilon, m, Q).$$

(3.2), (3.3) és (3.4) együttesen épp (3.1) fennállását jelentik.

IRODALOM

- [1] RÉNYI, A.: Contributions to the theory of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) 99–108.
- [2] KOLMOGOROV, A. N.: Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása. *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1950. aug. 28–szept. 2) 1952. 377–86.
- [3] RÉNYI, A.: On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 215–227.
- [4] RÉNYI, A.—RÉVÉSZ, P.: On mixing sequences of random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 338–393.
- [5] Розанов, Ю. А. *Стационарные случайные процессы*. Москва, 1963.
- [6] Ибрагимов, И. А.: Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее применения*, **7** (1962), 361–392.
- [7] ROHLIN, V. A.: Új fejlődés a mértéktartó leképezések elméletében, *MTA III. Osztály Közleményei*, **12** (1962), 339–360.
- [8] Рохлин, В. А.: Точные эндоморфизмы пространства Лебега, *Изв. Акад. Наук, СССР*, **25**, (1961), 499–530.
- [9] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*, New York, 1953.
- [10] Ито, К.: *Вероятностные процессы*, Москва, 1960.
- [11] ROSENBLATT, M.: A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956) 43. o.
- [12] Винокуров, В. Г.: Условия регулярности вероятностных процессов, *ДАН СССР*, **113** (1957), 959–961.
- [13] Волконский, В. А. и Ю. А. Розанов: Некоторые предельные теоремы для случайных функций, *Теория вероятностей и ее применения*, **4** (1959), 186–207.

(Beérkezett: 1964. V. 4.)