VÉGTELEN SOROK ÉS FLUXIOK

(A NEWTONI INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS KIALAKULÁSA, II.)

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

Előző közleményünkben[1] röviden vázoltuk a XX. századi matematika-történetírás állásfoglalását NEWTON infinitézimális analízisével kapcsolatban. Láttuk, hogy többnyire a NEWTON—LEIBNIZ vita és a fizika—matematika ellentétpár felől közelednek a newtoni infinitézimális számítás fogalmainak történeti tisztázásához. Ez annyit jelent, hogy a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálgeometria, a limesz-matematika, a sorelmélet és függvényelmélet felől érkeznek NEWTONhoz. Olyan matematikai diszciplinák felől, amelyek a leibnizi jelölési mód és algoritmus kifejlesztéseként és hiányosságainak fokozatos kiküszöbölésével nőttek naggyá. Ezzel párhuzamosan a matematikai gondolkozás fokozódó szigorodása, amelyik egyre pontosabb válaszfalat igyekezett vonni a matematika és annak fizikai alkalmazásai közé, eleve bizalmatlanul tekintett NEWTON fizikai fogalmakkal átszőtt infinitézimális meggondolásaira.

A matematikatörténészek, fordított Antoniusként dicsérni jönnek NEWTONt és eltemetik. Talán Jean PELSENEER fejezte ki legvilágosabban és legőszintébben ennek az interpretációnak a lényegét. Szerinte[2] — és ismételjük, hogy ebben a tudománytörténészek legnagyobb részének ugyanez az álláspontja — NEWTON érdeklődése sohasem volt igazán matematikai. Az infinitézimális módszert csupán új eredmények elérésére alkalmas eljárásnak tekintette. Sohasem tudott áttörni a modern matematikai felfogáshoz, mindvégig a görög matematika fogalmi körében maradt, az egyszerű, szép, harmonikus, ahogyan ő nevezte „simple & elegant" bűvkörében. Nem jutott el, jóllehet abban a korban élt, amit a *synthèse algebrico-logique* korának nevez a matematika-történetírás, a matematika algebrai felfogásáig. Nem tudott csatlakozni ahhoz a vonalhoz, amelyik szakított a görög gondolkozásmóddal: DESCARTES, FERMAT, LEIBNIZ matematikájához. Korszakalkotó nagy műve a *Principia* éppen azért nem hatott a maga korában, mert a nehézkes, elavult görög geometriai módszereket alkalmazta benne. A *Principia* forradalmi fizikai gondolatait retrográd matematikai módszerekbe öltöztette és ez a tény különös kettőségre vezetett az angol tudományos élet fejlődésében. NEWTON fizikai kiválósága miatt szerzett tekintélye bizonyos fokig kötelezővé tette Angliában matematikai módszereinek az alkalmazását is, és ez a tény csaknem egy évszázadra visszavetette az angol matematikát a leibnizi módszereket alkalmazó kontinenshez képest. Csak a XIX. század

[1] VEKERDI LÁSZLÓ: „A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténetírás tükrében", *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, **14**, 35—70, 1964.

[2] PELSENEER, J.: „Une opinion inedite de Newton sur l'Analyse des Anciens à propos de l'Analysis geometrica de Hugo de Omerique", *Isis*, **14**, 163—165, 1930.

elején kezdik az angol matematikusok *to accept the „de-ism" of Leibniz in place of the „dot-age" of Newton*[3], írja szellemesen Newton matematikai műveinek kitűnő ismerője és kiadója, J. F. SCOTT.

LEIBNIZ szerencsés jelölése — NEWTON szerencsétlen pontjai, LEIBNIZ bátor előretörése az infinitézimális analízis geometriai alkalmazásainak területén — NEWTON régi, steril görög geometriai módszerekhez való ragaszkodása, LEIBNIZ nagyobb érzéke az algebrai algoritmus iránt, LEIBNIZ nagyobb szintetiko-kombinatorikus képessége, ez az állandó és csaknem elkerülhetetlen összehasonlítgatás NEWTON és LEIBNIZ infinitézimális matematikája között szükségszerűen vezetett J. E. HOFMANN kategorikus megállapításához: „A későbarokk matematikai csúcsteljesítménye a kalkulus felfedezése. Ez G. W. LEIBNIZ, egy lipcsei professzor fiának a kizárólagos érdeme."[4]

Másfelől rámutatott a modern matematika-történetírás a newtoni infinitézimális matematika elődeinek a hosszú sorára. NEWTON mestere, Isaac BARROW „fedezte fel" az „integrálás" és „differenciálás" inverz jellegét. MERCATOR és James GREGORY fedezték fel a „transzcendens függvények" sorbafejtését. FERMAT fedezte fel, hogy a „differenciálhányados" a differenciahányados „határértékeként" értelmezendő. GREGORIUS A SANTO VINCENTIO fedezte fel az infinitézimális analízis szempontjából annyira fontos összefüggést a logaritmus és az egyenlő szárú hiperbola területe között, DESCARTES a „differenciálegyenleteket", GALILEI a fizikai problémából adódó „differenciálegyenlet integrálását", és így tovább.[5]

Amit NEWTON matematikai munkájában újnak és meglepőnek tartottak, az a modern matematika-történetírás szerint elődeitől származik s ezt sem ő fejleszti tovább és juttatja diadalra, hanem LEIBNIZ. Mit fedezett fel NEWTON, aki — minden matematika-történetírás ellenére — mégiscsak a modern infinitézimális matematika egyik legnagyobb jelentőségű megteremtője volt? Mit tudott a matematikából NEWTON?

Modern fogalmak és a XVII. századi matematika

Lássuk először mit nem tudott.

1. Nem tudta, hogy mi a függvény. Sem ő, sem kortársai nem ismerték ezt az egyszerű, számunkra oly mindennapos és nélkülözhetetlen fogalmat.[6] Nem tudta,

[3] SCOTT, J. F.: *A history of mathematics*, London, 1958, 162: „...elfogadni LEIBNIZ ‚deizmusát' NEWTON ‚pontozása' helyébe". Lefordíthatatlan szójáték, a diff. LEIBNIZi jelölésére építve.

[4] HOFMANN, J. E.: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.*, Berlin, 1957, 62.

[5] Lényegében már ZEUTHEN így látta ezt (ZEUTHEN, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig, 1903) s a infinitézimális számítás történetének újabb monográfusai, TOEPLITZ (TOEPLITZ, O. *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1949) és BOYER (BOYER, C. B.: *The history of the calculus and ist conceptual development*, New York 1949) szintén ezt a felfogást követik. Utóbbi szerint pl. a NEWTON és LEIBNIZ között kitört pritításharc okát elsősorban abban kell keresni, hogy azonos elődök munkáját folytatják, ill. veszik át.

[6] A függvényfogalom XVII. századi előtörténetét jól ismerteti WHITESIDE, D. TH.: „Patterns of Mathematical thought in the later seventeenth century", *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, 179—388, 1960. Az infinitézimális számítás fontos szerepét a függvényfogalom kialakulásában BOUTROUX ismerte fel (BOUTROUX, P.: *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, [2]1955, 118—119.), szerinte viszont NEWTON semmi egyebet nem tett, mint létrehozta a „végtelen algebráját", a véges algebrának a tetszőleges pontosság figyelembevételével történő folytatását (i. m. 129.). BOUTROUX végeredményben az EULER-féle függvényfogalmat vetíti vissza a XVII. századba, az

mit jelent egy adott számhalmaz minden egyes x eleméhez egy másik halmaz egy vagy több y elemét rendelni. Nem a hozzárendelés fogalma okozta a nehézséget. A NEWTON korabeli matematika kiterjedten dolgozott táblázatokban kifejezett összefüggésekkel. NEWTON maga jelentős helyet foglal el az interpolációs módszerek fejlesztésében. Az interpoláció pedig nem egyéb, mint új számértékek adott számértékekhez bizonyos szabályok szerint történő hozzárendelése. Azt is tudta NEWTON, hogy az algebrai egyenletek adott számokhoz rendelnek hozzá más számokat, de sohasem jutott eszébe *általánosságban* egy adott halmaz minden egyes eleméhez egy másik halmaz egy vagy több elemét rendelni hozzá. NEWTON nem általánosítja a hozzárendelés fogalmát, s így ahol alkalmazza is ott sem szabad ebben „függvényt" látnunk. Nem szabad még az EULER-féle függvényfogalom értelmében sem, mert az EULER-féle függvényfogalom már a modern függvény szűk körben érvényes intuitív megsejtését jelenti.

2. Nem ismerte NEWTON a határérték fogalmát sem.[7] Több helyen beszél ugyan „eltűnő" és „megszülető" mennyiségekről, sőt ír — különösen levelezésében — minden adott értéknél kisebb eltéréssel történő megközelítésről is és kísérletet tesz a végtelen sorral nyert megközelítés esetében az elhanyagolás folytán előálló hiba megbecsülésére, de a határérték fogalmát, ami a konvergencia kritériumokkal körülbástyázottan a modern infinitézimális analízis lelkét jelenti, a határérték fogalmát nem ismeri. Újból nem azt akarjuk ezzel mondani, hogy nem *dolgozik* vele. Hiszen számos olyan feladatot old meg, amit mi a limesz-fogalom segítségével végzünk el. Szinte boszorkányos ügyességgel dolgozik végtelen sorokkal. Nyoma sincs nála CAVALIERI bizonytalanságának vagy WALLIS próbálgatásainak. Magabiztosan jár azon a területen, ahol előtte sötétben tapogatóztak, vagy — sokszor még James GREGORY is — klasszikus módszerekkel megkerülve a problémát, indirekt bizonyítást alkalmaztak. De a határérték és a konvergencia fogalmát, azt, hogy „bármely kicsiny ε számhoz rendelhető egy N küszöbszám úgy ..." — azt *nem ismeri.*

3. Nem ismerte a „folytonosság" fogalmát. Fölöslegesnek tűnik talán külön kiemelni ezt, mert mi a folytonosságot a függvényeknél vezetjük be a limesz-fogalom segítségével, de a folytonosságnak a mi mai felfogásunk szerint centrális jelentősége van a differenciálszámítás elméletében és így nem árt szem előtt tartani, hogy ennek az elméletnek egyik megteremtője, NEWTON nem ismerte azt.

---

algebrai és nem-algebrai *függvények* megkülönböztetését keresi ott, ahol nem erről van szó, hanem végtelen „egyenletekről" és infinitézimális számításról. Vö. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest, 1954, 11.: „A valós változós függvények elmélete a differentiál- és integrálszámításnak NEWTON és LEIBNIZ által a XVII. században történt felfedezésével kezdődött. E számítások tárgyának: a függvénynek a fogalma együtt fejlődött az elmélettel. DESCARTES a század első felében a ‚geometriától' még minden olyan görbét távol kívánt tartani, amely nem definiálható algebrai műveletekkel. A differentiál- és integrálszámításból megszülető matematikai analízisban azonban rendre polgárjogot nyertek az algebraiakon kívül más egyszerű függvények is, mint a logaritmus, exponenciális, trigonometrikus és arcus függvények, s ezekkel együtt minden olyan függvény is, amely belőlük ered akár közvetlenül, akár az infinitézimális számítás eszközeivel: kvadratúrákkal vagy végtelen sorok összegeként. Legalábbis ezeket tekintette pl. EULER igazi függvényeknek".

[7] VEKERDI LÁSZLÓ: „Infinitézimális módszerek Pascal matematikájában", *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*, **13**, 269—285, 1963.

4. Ugyanezen okból jegyezzük meg, hogy nem ismerte a monotónia fogalmát sem.

5. Nem ismerte, még sík esetében sem, az analitikus geometriát,[8] helyesebben azt, amit ma ez alatt a kifejezés alatt értünk: a sík pontjaihoz rendelt számpárok közötti kapcsolatok vizsgálatát. Pl. az ellipszis számára nem a sík azon x, y pontjainak a helye, amelyek kielégítenek egy bizonyos — a koordinátarendszertől függő — másodfokú egyenletet. NEWTONnak az ellipszis koordinátarendszertől független geometriai fogalom, kis és nagy átmérővel, fókuszokkal, érintőkkel és azoknak megfelelő átmérőkkel és ezek között a vonalak között fennálló arányokkal. Számára a geometria adekvát matematikai módszerét az arányok jelentették, nem az egyenletek. NEWTON sokat dolgozott egyenletekkel, de azt tartotta, hogy a két tudományt, geometriát és aritmetikát nem szabad összezavarni. Milyen gondosan ügyeltek a görögök ennek a kettőnek az elkülönítésére! S milyen sok bajt okoznak a modernek a kettő összekeverésével: elveszik a geometria „egyszerűségét és eleganciáját". Számunkra, akik sokszor napokig töprengünk a *Principia* egy-egy „egyszerű" ellipszis-tételén, amit modern analitikus geometriai módszerekkel percek alatt megértünk, különösnek tűnhet NEWTON ízlése. Azonban ha a newtoni matematikát kívánjuk megérteni, alkalmazkodni kell hozzá. A függvény, a határérték, a folytonosság, a monotonia fogalmai és a koordináta geometria nélkül kell közelednünk a newtoni analízishez.

A XVII. századi angol matematika numerikus tradíciói

A XVII. századi matematika egyik legfontosabb tette az algebrai egyenletekkel kifejezhető, DESCARTES által „geometrikus"-nak nevezett (algebrai) és az így ki nem fejezhető „mechanikus"-nak nevezett (transzcendens) problémák közötti különbségtétel s utóbbiak lépésről lépésre történő tisztázása volt. Az angol matematika azonban sohasem tett olyan éles különbséget geometrikus és mechanikus problémák között, mint a Cartesianus. Sőt, eleinte meg sem értik a mély megkülönböztetés lényegét.

William OUGHTRED, I. Károly korának legnagyobb matematikusa írta pl. egy mechanikus segédeszközökkel megoldható problémával kapcsolatban: „Vonalzók és körzők nem mechanikusak-e és mégis nem minden geometrikus problémát ezekkel oldunk meg? És nem használunk-e kúpszeleteket a maguk megfelelő műszereivel és maradunk mégis a nem-mechanikus problémák körében?"[9] A mechanikus problémákat épp úgy meg kell oldani, mint a geometrikusakat, a különbség csak az, hogy előbbiekben általában nem lehet teljes pontossággal számítani, meg kell elégedni megközelítésekkel. Ilyen megközelítő számításokba ütközünk mindenütt, ahol pl. a kör kerületének, ívhosszának vagy szögeinek a mérése szükséges: az egész trigonometriában. A trigonometrikus számítások a XVI. és XVII. század során igen nagy jelentőségűekké váltak a geográfia és a hajózás fejlődése miatt, azért meg-

[8] A matematika-történetírás régen megcáfolta azt a makacsul tovább élő tévhitet, hogy DESCARTES „fedezte fel" az analitikus geometriát. Jól tudjuk, hogy nem ismerte a „Descartes-féle" koordinátarendszert sem. Vö. BOYER, C. B.: *History of analytic geometry,* New York. 1956.

[9] *Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Ed. by* STEPHEN PETER RIGAUD, 2 vols., Oxford, 1841. (Továbbiakban *Corr. Rigaud)* I, 22, Oughtred to Price Junii 6°. 1642, 60—63, 61.

könnyítésükre nagy táblázatokat állítottak össze, s a sok számjegyű, megközelítő számokkal oly nehéz szorzás megkerülésére vezették be a logaritmust. OUGHTRED főműve, a *Clavis Mathematica* ezeknek a trigonometriai megközelítő számításoknak az ismertetését tartalmazza. Az angol matematika a gyakorlati számolás felől indulva nem látta olyan nagynak a különbséget geometriai és mechanikai problémák között, mint az elméleti megoldásokra törekvő Cartesianus. Angliában erős számolótradíció él a XVII. század elején, amely a kiszámíthatóságra helyezi a súlyt a matematikai problémákban, nem az elvi különbségekre.

DESCARTES geometriájához képest szinte gyerekesen hat ez a számolós angol matematika. Íme idézet egy egykorú levélből: „*A*, *E*, és *I* így okoskodtak: *A* azt mondotta, hogy ha 480 fonttal több pénzem lenne mint amennyi van, akkor annyi lenne, mint amennyi *E*-nek és *I*-nek van együtt; *E* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, kétszer annyi lenne, mint *A* és *I*-nek; *I* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, háromszor annyim lenne mint *A* és *E*-nek együtt ..." Ezt és két hasonló kérdést OUGHTREDhez, kora legnagyobb angol matematikusához intézte a levélíró és hozzáfűzte: „Uram, tudom, hogy ön meg tud felelni a kérdésekre, vagy ha nem, úgy senki emberfia; mert nincs élő ember, aki többet tudna matematikából, mint ön ..."[10]

Egyenletek felállítása, transzformálása valamilyen ismert alakra, a gyökök — szükség esetén táblázatok segítségével történő — pontos vagy közelítő kiszámítása a XVII. század közepén az angol matematika centrális problémaköre. Egyenletek és sohasem függvények. Ismeretlenekről van bennük szó, nem változókról, ismeretlenekről, amiket ki kell számolni vagy egyszerű aritmetikai műveletek, vagy ha ez nem lehetséges, táblázatok segítségével. Ehhez az egyenleteket különféle ügyeskedésekkel már ismert formára kell hozni, transzformálni kell. Az algebra ebben a felfogásban közönséges számolás, csupán a számok helyett betűkkel dolgozik. Amint NEWTON alapvető algebrai művében, az *Arithmetica universalis*-ban megfogalmazza, csupán annyiban különbözik a számokkal történő számolástól, hogy meghatározatlan jelekkel dolgozik az adott számok helyett.[11] Az egyenletekben az ismeretlen vagy ismeretleneket meghatározott számok helyett ezekkel az indefinit jelekkel kell kapcsolatba hozni. Az egyenletek megoldása az ismeretleneknek ezen meghatározatlan jelek általi kifejezéséből áll s éppen ezért, mert jelekkel dolgozik, a megoldás általános érvényű: az algebra ilyen értelemben véve univerzális tudomány, amelyik tételekre vezet.[12] Ezek a tételek az egyenletek megoldására vonatkoznak. Az algebra NEWTON felfogásában az algebrai egyenletek megoldásának a tudományát jelenti. Olyan problémák oldhatók meg a segítségével, amiket egyenletekbe lehet önteni. De nem minden probléma fordítható le algebrai nyelvre már a geometriában sem, még kevésbé a mechanikában és a csillagászatban. Az algebra NEWTON szemében korlátolt tudomány. Csak előkészítője egy általánosabb, minden — vagy legalábbis minden *fontos* — probléma kezelésére alkalmas tudománynak,

[10] *Corr. Rigaud* I, 35, R. Shuttleworth to Oughtred 22. Jan. 1656, 88—90.

[11] *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica auctore* IS. NEWTON, *Eq. Aur. Cum commentario* JOHANNIS CASTILLIONEI... *Amstelodami* 1761, 1. — Az *Arithmetica universalis* orosz fordítását kitűnő jegyzetekkel és kísérő tanulmánnyal adta ki A. P. JUSKEVICS. (*Iszaak N'juton, Vszeobscsaja arifmetika ili i kniga ob arifmeticseszkih szinteze i analize. Perevod, sztat'ja i kommentarii* A. P. JUSKEVICSA. Moszkva 1948.) A következőkben ezt a két kiadást használjuk és *Castill*, ill. *Juskevics* jelzéssel idézzük.

[12] *Juskevics* ... 7.

az analízisnek. A probléma megoldása azonban az analízisben is éppen úgy, mint az algebrában, a *kiszámítás*. NEWTON művei, még a legelvontabb matematikai munkái is, számolási szkémákkal vannak tele. NEWTON matematikájának egyik alapvető vonása a számolási könnyedség, a számolás szkematizálására való törekvés. Ebben teljesen az angol matematikai tradíció folytatója. DESCARTES univerzális módszert keresett a matematikában, NEWTON számolási szkémákat.

Algebra és infinitézimális analízis

Az algebrát NEWTON az infinitézimális analízis bevezetésének tekintette. Ebből a szempontból nagyon fontos az *Arithmetica universalis* egyik fejezete,[13] amelyben NEWTON az egyenletek „határainak" (limites) a kiszámítását tárgyalja. Egy egyenlet határain azt a két számot értették, amelyek közé az egyenlet gyökei esnek. NEWTON úgy jár el a megkeresésükben, hogy lépésenként „redukálja" az egyenletet addig, amíg az az ismeretlent már csak első hatványon tartalmazza. Az egyenletek redukált sorába egymásután az 1, 2, ..., ill. -1, -2, ... értékeket helyettesíti be. Az a szám, amelynek a behelyettesítésére a redukált egyenletek mindegyike azonos előjelű eredményt ad a határ, ennél nincs az egyenletnek nagyobb pozitív vagy negatív gyöke.

Az eljárás lelke, a redukció nem NEWTON felfedezése. A holland Cartesianusok, elsősorban J. HUDDE dolgozták ki. Az egyenletek redukciója a XVII. század hatvanas éveiben a matematikai kutatás egyik centrális kérdése volt. „Amit ön az algebra nagy kívánalmának tart — írja 1670-ben James GREGORY COLLINSnak — és SLUSIUStól vagy RICCIOtól várja a megoldását, azt én könnyen megoldom (megbízható módon) általános érvénnyel így: legyen

$$x^5 - ax^4 - b^2x^3 + c^3x^2 - d^4x = N^5,$$

szorozzuk meg minden tagját saját kitevőjével, az így előálló egyenlet

$$5x^5 - 4ax^4 - 3b^2x^3 + 2c^3x^2 - d^4x = 0,$$

vagy

$$5x^4 - 4ax^3 - 3b^2x^2 + 2c^3x - d^4 = 0,$$

amely második egyenletnek bármely gyökét behelyettesítve az első egyenletbe x helyébe, az eredő mennyiség az az érték, amelyen túl (ha N^5-t nagyobbnak vesszük, mint az eredő mennyiség) az első egyenlet két gyökének lehetséges voltát veszíti el. ..."[14] A bizonyítást nem közli, az „túl fáradságos" — írja —" és felteszem, hogy kipróbálhatja anélkül is",[15] fűzi hozzá.

A XVII. században nagy divat volt formulák közlése azok bizonyítása nélkül. Kézről kézre jártak a nagy matematikusok képletei és eljárásai, számpéldák tömegére alkalmazták matematikus és amateur tisztelőik — a kettő között a XVII. században nem volt olyan nagy szakadék, mint ma — s éppen ezek a példák okozták, hogy a műveltek kis köre lassan szinte átitatódott — ha sokszor csak felületesen is — matematikával.

[13] Caput IV.

[14] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban *Corr.*) Vol. I. 1661—1675. *Ed. by* H. W. TURNBULL, Cambridge, 1959, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45—49, 45.

[15] Uo. 46.

A XVII. század matematikájában nagyon fontos szerepet játszottak az egyenletek, s a HUDDE-féle módszertől azok néhány fontos tulajdonságának a megismerését várták. Elsősorban pl. azt, hogy milyen szélsőértékekkel rendelkezik egy adott egyenlet? GREGORY 1672-ben hosszú levélben[16] magyarázta meg COLLINSnak, hogyan kell használni a redukciós módszert az egyenletek maximum—minimumának a meghatározására. Az egyenletnek ott van szélsőértéke, ahol azt a redukált egyenlet gyökei mutatják. A maximum, ill. a minimum értékét pedig úgy kapjuk meg, hogy a redukált egyenlet gyökeit behelyettesítjük az eredeti egyenletbe.

Ez az egyszerű szabály, amit ma minden első éves matematikus azonnal helyére tesz, a XVII. század legnagyobb matematikusainak okozott súlyos fejtörőt. Tudták, hogy a szabály valamiképpen összefügg a görbéhez vont érintő meghatározásával. Tudták, hogy a redukált egyenletből a görbe sok más fontos tulajdonságára is lehet következtetni a szélsőértéken kívül. Pl. tudták azt, hogyha adva van két görbe metszését kifejező egyenlet, akkor a két görbe metszéspontjainak megfelelő összeeső gyököket a HUDDE-féle redukcióval lehet meghatározni. Nem hiába nevezte COLLINS az egyenletek redukcióját az „algebra nagy desideratumának".

Maga NEWTON már 1664-ben kimutatta egy megfelelőképpen felállított egyenlet HUDDE-féle redukciójának a segítségével, hogy a kvadratura és érintőszerkesztés összetartozó műveletek, sőt, ismerte már az összetartozás jellegét is: egy adott görbéhez érintőt szerkeszteni annyit jelent, mint meghatározni egy másik, alkalmasan felvett görbe alatti területet és megfordítva.[17]

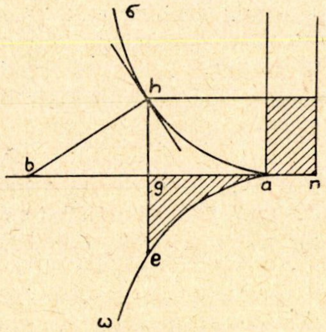
Később ez a tétel lett az infinitézimális számítás ún. „fundamentalis tétele", s e miatt a tétel miatt lett BARROW — aki hat évvel NEWTON kézirata után feltehetően először közölte azt nyomtatásban — az infinitézimális számítás egyik „felfedezője".

Azonban a XVII. század közepén, amikor nem ismerték a „primitív függvény" és a „derivált függvény" fogalmát — hiszen nem ismerték még a „függvény" fogalmát sem — akkor ennek a tételnek nem tulajdonítottak olyan nagy jelentőséget, mint ma. Az egyenletek redukciójának, annak igen. *Az* volt a „nagy desideratum" — ahogy COLLINS nevezi — nem a „Fundamentalsatz". A fundamentális tétel csak azután vált az infinitézimális számítás alaptételévé, miután kezdtek függvényekben gondolkozni a matematikusok, s a tétel csak számukra mondja majd a „primitív függvény" és a „derivált függvény" inverz voltát. A végeredmény ugyanaz, de a sorrend különböző, s történeti szempontból ez nem közömbös. Mi a függvény felől haladunk a differenciálás és integrálás művelete felé, a fejlődés útja azonban fordított volt. Előbb tudtak differenciálni és integrálni, mint azt megmondani, hogy mi a „függvény". A függvény fogalom megszületéséhez az egyik legfontosabb impulzust éppen az infinitézimális módszer kialakulása és gyors fejlődése szolgáltatta. A XVII. század nem függvényekben, hanem *egyenletekben* gondolkozott. Véges (algebrai) vagy végtelen sok tagú (transzcendens) egyenletekben, s az egyenletek tették a XVII. század matematikusai számára lehetővé a kvadratura és az érintőszerkesztés közötti összefüggés definiálását.

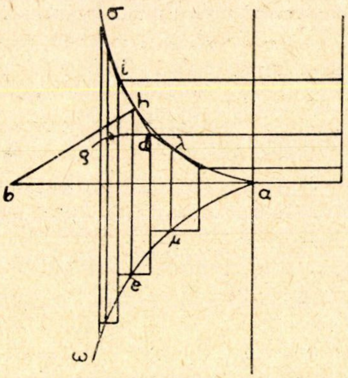
[16] *Corr. Rigaud* II, 206, J. Gregory to Collins 14 Febr. 1672, 232—237.
[17] *Corr.* II, 190, A mannuscript by Newton (? 1664), 164—167.

„Módszer kvadrálható görbe vonalak kvadrálására"

Az elv egyszerű: ha adva van két görbe úgy, hogy az egyik érintőjének az adatai határozzák meg a másik görbe alatti területet, akkor ez a terület mérhető, kvadrálható. Az érintő adatainak a meghatározása DESCARTES nyomán történt. NEWTON is DESCARTES módszerét alkalmazza 1664-es, az infinitézimális számítás „alaptételét" kimondó kéziratában: egy körrel metszi a görbét, amihez érintőt kell vonni, s azután egybeejti a két metszéspontot. Ekkor a kör és így ebben a pontban vont érintője is érinti a görbét. A metszéspontok egybeesését a kör és a görbe metszését kifejező egyenlet két gyökének az egybeesése adja meg. Ezáltal megkapja az érintőre merőleges egyenesnek, az érintő normálisának az adatait. Így megszerkesztve egy σha görbe minden h pontjában az érintőt, s az érintőt definiáló bgh normális háromszög



1. ábra



2. ábra

$\frac{bg}{gh}$ oldalarányának tetszőleges an-szeresét véve egy másik $ae\omega$ görbe $ge = an\frac{bg}{gh}$ ordinátáinak, ez alatt a másik görbe alatti terület egyenlő lesz a tetszőleges an távolság és a görbe h pontjához tartozó gh ordináta szorzatával.

A bizonyítás nagyon egyszerű: NEWTON az érintősokszöggel helyettesíti a σha görbét és az érintősokszög $d, i, \ldots$ csúcsaiból az ab egyenesre bocsátott merőlegesekkel kis téglalapokra osztja be az $ae\omega$ görbe alatti területet, s azután a sokszög oldalait egyre kisebbnek véve, a téglalapbeosztás összege egyre jobban megközelíti az $ae\omega$ görbe alatti terület értékét. A sokszög h pontjában — a σha görbe egy tetszőlegesen felvett pontja — azonban a $d\varrho i$ háromszögből megadott $\frac{i\varrho}{\varrho d}$ érintőarány a beosztás finomítása közben is állandó marad. Ugyanis bármely határon túl csökken is az érintősokszög di oldala, a $d\varrho i$ háromszög $d\varrho$ és $i\varrho$ oldalai mindig merőlegesek maradnak a bgh háromszög gh és bg oldalaira s így az érintő hajlását megadó $\frac{i\varrho}{\varrho d}$ arány mindig azonos marad s egyenlő a bgh normális háromszög állandó $\frac{bg}{gh}$ oldalarányával.

Mindezt nem mondja el ilyen részletesen NEWTON. Az eljárás, az érintő és a normális háromszögeknek ez a viselkedése, valamint a téglalapbeosztás finomításával történő területmeghatározás a XVII. század közepén már közismert. Közismert a hatvanas években az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti ilyen összefüggés is. A kor matematikusainak a leveleiben nagyon gyakran fordulnak elő ezt az összefüggést jelölő diagramok sokszor minden utalás nélkül. James GREGORY 1668-ban nyomtatásban is közölte. Az elv már egy évtizeddel azelőtt megjelent egyébként nyomtatásban Franciaországban, PASCAL alkalmazta a színuszgörbe alatti terület meghatározására.[18]

Mint ismeretes, utóbbi vezette LEIBNIZet a „karakterisztikus háromszög" fogalmára. Az egész fogalomkör, amiből az infinitézimális számítás algoritmusa konkretizálódik, távolról sem új már a XVII. század közepén. „Karakterisztikus háromszög" és az érintőszerkesztés-kvadratura közötti összefüggés — amiket LEIBNIZ és BARROW nagy felfedezéseiként tart számon a történetírás — pl. már valószínűleg mint közismert anyag kerül egy 21 éves Cambridge-i diák, Isaac NEWTON DESCARTES-ból készített jegyzetei közé.

Nem az infinitézimális számítás geometriai alkalmazása, nem az érintőszerkesztés és kvadratura közötti összefüggés felismerése az új ezekben a jegyzetekben. Még csak nem is az, hogy egyenletekbe önt egy geometriai problémát. Ezt DESCARTES-ból veszi, úgyannyira, hogy átveszi még a betű jelöléseit is. Az az eljárás sem új, ahogyan a probléma egyenletéből megkapja az érintési feltételt s így az $ae\omega$ görbe ge ordinátáit. Ez az eljárás nem egyéb, mint a HUDDE-féle redukció. „A kifejezésnek két egyenlő gyöke van és ezért megszorozzuk a HUDDE-féle módszer szerint" írja NEWTON.

Kis túlzással azt lehetne mondani, hogy ebben az 1664-es NEWTON kéziratban egyedül a cím az új: „Módszer kvadrálható görbe vonalak kvadrálására". Nem minden görbe vonal kvadrálására, hanem csak az olyan görbe vonalakéra, amik kvadrálhatók. NEWTON már 21 éves korában is NEWTON: a definíciók, a pontos meghatározás, az axiomatizálás mestere. A többiek, nem csak COLLINS, hanem még az olyan nagyon nagy matematikusok is, mint James GREGORY, egyre-másra használják a „minden", az „általános" az „univerzális", jelzőket módszereikre. NEWTON igyekszik pontosan fogalmazni: „amik kvadrálhatók". Melyek azok a görbék, amelyek kvadrálhatók? Az 1664-es kézirat világosan felel erre: Olyan görbék, amelyeknek a területét egy másik görbe *érintősajátságai* adják meg. A kézirat két példát hoz fel, egy x^3/a egyenletű parabolát és egy a^3/x egyenletű hiperbolát. Ezeket az egyenleteket kombinálva a metsző kör egyenletével, a Hudde-féle redukcióval azonnal megkapjuk az érintési feltételt, az új, kvadrálható görbe egyenletét. Az x^3/a egyenletű parabola esetében $ge=\frac{3xx}{a}$ lesz az új görbe egyenlete, az a^3/x hiperbola esetében pedig $ge=\frac{a^3}{xx}$. A $\frac{3xx}{a}$ görbe alatti területet $\frac{x^3}{a}$, az $\frac{a^3}{xx}$ alatti területet $\frac{a^3}{x}$ adja meg. A görbék kvadrálhatók, mert úgy vettük fel, hogy azok legyenek. A feltétel — ismételjük meg — az volt, hogy a kvadrálható görbe egyenletét egy másik görbe érintőjének az adatai szabják meg.

A megoldás, ha a kvadrálható görbe egyenlete, mint a fenti két példában,

[18] *Traité des sinus du quart de cercle. = Oeuvres completes de Pascal, édition Pléiade. Texte établi et annoté par* JACQUES CHEVALIER. Paris 1954, 275—282, 275—277.

hatvány, nagyon egyszerű. Ha $\frac{3axx}{b}$ a görbe egyenlete, ahol a és b állandók, akkor a görbe alatti terület $\frac{ax^3}{b}$. Ha általánosságban $\frac{ax^m}{b}$ a kvadrálható görbe egyenlete, a terület $\frac{ax^{m+1}}{(m+1)b}$ lesz. Nem szükséges egész számokhoz ragaszkodni a kitevőben, lehet a kitevő bármilyen tört. És ha a kvadrálható görbe egyenlete nem egytagú, hanem hatványok összegéből vagy különbségéből áll, akkor a kvadratura képlete tagonként alkalmazható. Ha pedig a görbe egyenlete nem hatványok összegéből álló kifejezés, akkor meg kell kísérelni ilyenné alakítani. Hogyan? Egyszerűen úgy, hogy elvégezzük a kijelölt műveleteket. *Számolni* kell az algebrai jelekkel, mintha csak közönséges számok lennének. „Ha $a+b=\frac{1}{a+b}$ — írja NEWTON 1665-ben —, elosztom 1-et $(a+b)$-vel úgy, mintha tizedes törtek lennének és az

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}\ \&\ c.$$

hányadost kapom, ami kitűnik abból is, ha mindkét részt (kifejezést) megszorzom $(a+b)$-vel. Ugyanígy vonom ki a gyököt (a^2+b)-ből, mintha tizedestörtek lennének és azt találom, hogy

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a}-\frac{bb}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^5}\ \&\ c,$$

ami kitűnik, ha mindkét részt négyzetre emelem."[19]

Ugyanebben a kéziratában kimutatja azt is, hogyan adható meg m/n tetszőleges értéke esetében hatványok végtelen sorával egy $\overline{a+b}\}^{\frac{m}{n}}$ alakú kifejezés:

$$\overline{a+b}\}^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}\cdot a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{bb}{aa}\cdot a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{m-2n}{3n}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot a^{\frac{m}{n}}\ \&\ c.$$

Az „új" itt sem a tételben van. Már PASCAL használta a binomok kifejtésére az aritmetikai háromszöget és már arab szerzőnél is előfordul a „binomiális tétel". De csak *egész* kitevők esetében. NEWTONnál azonban m/n tetszőleges lehet, pl. 1/2, és akkor a sor éppen $a+b$ négyzetgyökét adja meg. Kifejthető pl. ennek a sornak a segítségével $1-xx$, az egység sugarú kör egyenlete, s az x hatványainak az összegéből álló kifejtett alakban tagonként végezhető el a kvadratura. Közvetlen módszerrel egyszerűen megoldható a kör területének a kiszámítása, a közvetett és körülményes eudoxoszi és a pontatlan és nem egészen megalapozott indivizibilia módszer nélkül.

Így a bonyolultabb kifejezéseket sokszor kvadrálható alakra lehet hozni, ha elvégezzük rajtuk a kijelölt műveleteket, „mintha csak tizedes törtek lennének". S ha az eredmény végtelen sor lesz, attól éppen úgy nem kell megijedni, mint ha pl. egy osztás vagy gyökvonás végtelen tizedes törtre vezet.

Az „infinitézimális számítást" már régen nem kellett felfedezni a XVII. század

[19] *Corr.* II, 191. A mannuscript by Newton (? 1665), 168—171, 170. A négyzetet a Newton korabeli matematika a betű megduplázásával jelöli, a harmadik hatványt már az általunk is használt módon. $\&c$ jel a mi $+\ldots$ jelünk megfelelője.

hatvanas éveiben. DESCARTES, PASCAL, FERMAT, CAVALIERI, TORRICELLI, RICCI, HUDDE és SLUSE munkái után már nem volt erre szükség. De azt a tényt, hogy a végtelen hatványsorba fejthető kifejezések állítják elő a „kvadrálható görbéket", azt fel kellett fedezni. Ezt nem tudták a többiek, csak NEWTON és James GREGORY. A két angol a hatvanas évek második felében egymástól függetlenül csaknem ugyanarra a nagy felfedezésre jutott. Függetlenül? Személy szerint kétségkívül igen. De nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy mindketten az angol matematikai tradíciónak megfelelően, konkrét számoláshoz szokott szemmel olvasták — a Cartesianus „geometriai algebrát" (ahogyan DESCARTES módszerét nevezhetnénk valamivel találóbban a mindenképpen anakronisztikus analítikus geometria helyett). Mindketten kétségkívül jól ismerték a Cartesianus matematikát. James GREGORY nem egyszer nyíltan is kifejezi DESCARTES iránti hódolatát.[20] NEWTON sokkal tartózkodóbb volt ebben a tekintetben. DESCARTES-ból indultak ki, de a végtelen sorok segítségével átlépték a DESCARTES által vont szigorú határvonalat a „geometriai" (algebrai) és „mechanikus" (transzcendens) problémák között. Azt a határvonalat, amit „Levelezése" ragyogó matematikájában maga DESCARTES is nem egyszer átlépett, s ami ellen — ha helytelen alapokon is — az angol matematika már OUGHTRED óta lázadt. De csak GREGORY és NEWTON dolgozták ki, a végtelen sok tagú egyenletekkel való *számolás* segítségével a két nagy területet egységesítő *analízis* alapjait.

„Analízis végtelen sok tagú egyenletekkel..."

A XVII. század hatvanas éveinek végén, hetvenes éveinek elején egymással versengve küldik NEWTON és GREGORY COLLINSnak szebbnél szebb sorbafejtéseiket. Nagy figyelemmel kísérik egymás munkáját. „Nagyon szeretném megismerni — írja GREGORY 1670 nov. 23-án Collinsnak — Mr. NEWTON módszerét a kéttagú egyenletek végtelen sorrá való alakításáról, amely formában logaritmusokkal megoldhatók: én bármely egyenletet át tudok alakítani végtelen sorrá, de nekem a logaritmusok semmit sem segítenek, mert az én soraimban nincs semmi *in ratione continua* (folytonos arányban). Van egy módszerem, amellyel nem-geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen sorba tudok átalakítani. ... Azt hiszem, hogy azok a sorok, amiket mellékelten küldök, némi hasonlóságot mutatnak azokhoz, amikről értesített, hogy Mr. NEWTON és Mr. MERCATOR felfedeztek: ezért volt, hogy oly gyakran kértem Önt, közölje velem az ő felfedéseiket."[21]

GREGORY tudta, hogy egy sorban jár NEWTONnal. Még egy hónap sem telt el, s már újra ír COLLINSnak: „Legutóbbi levelemben — írja — nem vettem észre, hogy Mr. NEWTON sora körcikkre (amit Ön régen küldött volt nekem) hasonló sorok sokaságával együtt következménye annak, amit én a logaritmusokra vonatkozóan küldöttem Önnek, *viz. Dato logarithmo invenire ejus numerum vel radicem potestatis cujuscumque purae in infinitam seriem permutare* (adott logaritmusból megkeresni a numerust vagy hatvány tetszőleges gyökét végtelen sorrá alakítani)".[22]

GREGORY a hatvanas évek legvégén ugyanott tart, ahol NEWTON. Felfedezte, hogy végtelen hatványsorba fejtett kifejezések tagonkénti kvadrálásával vagy redu-

[20] *Corr. Rigaud* II, 220, J. Gregory to Collins 20 Aug. 1675, 269—272, 269.
[21] *Corr.* I, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45—49, 47.
[22] *Corr.* I, 21, Gregory to Collins 19 Dec. 1670, 49—52, 49—50.

kálásával olyan kifejezések kvadrálhatók vagy redukálhatók, olyan kifejezésekkel megadott görbékhez szerkeszthető érintő, számítható súlypont, olyan egyenletek gyöke kereshető meg, amelyeknek zárt, kifejtetlen formáival szemben tehetetlenül áll a matematika. Amelyekkel szemben eddig legfeljebb egyes kivételes esetekben, fáradságos egyszeri módszerekkel értek el valamilyen eredményt. Általános módszerről eddig szó sem lehetett. Most a végtelen sorba való átalakítás és a hatványok kvadrálásának — redukálásának az összekapcsolásával olyan általános módszerhez jutottak, amely előtt nem állanak többé hozzáférhetetlenként az általános kezeléssel szemben eddig dacoló „mechanikus" problémák.

Azok a kifejezések, amelyeket addig táblázatokban összefoglalva, a gyakorlati számolás segédeszközeinek tekintettek: szögfüggvények és a hozzájuk tartozó körívek, a kamatos kamat táblázatok, a körív hosszát és a körcikk területét megadó táblázatok most mind elméleti megalapozottságot nyertek és sok közülük egymásból levezethetővé vált. A táblázatok adathalmazai mögött GREGORY és NEWTON munkái nyomán kezdett felderengeni az *összefüggés.*

Azok a problémák, amelyeknek a megoldására eddig „mechanikus" eszközöket, ill. körző-vonalzó segítségével meg nem szerkeszthető görbéket kellett igénybe venni és táblázatokat szerkeszteni gyakorlati megoldásukra, mint pl. a szögharmadolás, szögötödelés, szöghetedelés ..., ill. a nekik megfelelő négyzetgyök, negyedik gyök, hatodik gyök... vonás; a különféle spirálisok, conchoid, ciklois íhvossz és szegmentum területmeghatározásai; a kör ívhossza és kvadraturája ... egyszóval mindaz a hatalmas terület, amit DESCARTES mint „mechanikus" problémákat megpróbált távol tartani a geometria „tiszta" épületétől, a zárt algebrai alakban meg nem adható problémák egyre növő világa a végtelen sorok módszerével egyszerre bebocsátást nyert a „törvényes" matematika keretei közé.

NEWTON már hosszú évek óta dolgozott ezen a módszeren, amikor GREGORY értesült róla. A nemes skót azonnal elismeri prioritását: közli COLLINSszal, hogy addig semmit nem publikál ide vonatkozó kutatásaiból, amíg NEWTON műve meg nem jelenik.[23]

Várhatott volna GREGORY, amíg NEWTON infinitézimális módszere napvilágot lát. A módszert előszónak szánta egy holland szerző, KINCKHUYSEN algebrájának tervezett angol kiadásához. A könyv sohasem jelent meg, a módszer rövid összefoglalását NEWTON 1669-ben elküldte COLLINSnak. Ez a híres levél, a *De Analysi per AEquationes Numero Terminorum Infinitas*[24] a kvadratura alaptételenek a szabályokba foglalásával kezdődik. Az I. szabály a tetszőleges kitevőjű hatvány kvadrálási szabályát adja meg, a már ismertetett módon. A II. a „tagonkénti integrálhatóságot" mondja ki, s azután adja meg a számunkra jelen összefüggésben legfontosabb III. Szabályt:

„Ha maga *y* értéke vagy annak valamely tagja a fentieknél összetettebb, egyszerűbb kifejezésekre kell visszavezetni; ugyanúgy dolgozva a betűkkel, mint ahogy az aritmetikában végzik a tizedes törtekkel az osztást, gyökvonást vagy többtagú egyenletek megoldását; és ezekből a kifejezésekből a keresett görbe alatti területet a fenti szabályok alkalmazásával azonnal megkapjuk."[25]

[23] *Cor.* I, 25. Collins to Newton 5 July. 1671, 65—67.

[24] = ISAACI NEWTONI *Equitis aurati opuscula mathematica, philosophica, et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit* JOH. CASTILLIONEUS. I—III. Lausannae & Genevae 1744. I, 1—28.

[25] Uo. 7.

Példaként az $\frac{aa}{b+x} = y$ hiperbola és a $\sqrt{aa-xx} = y$ kör esetében végzi el az osztást és gyökvonást, mintha közönséges számok lennének a betűk, s a kapott végtelen sorokra alkalmazva a II és I szabályt, azonnal megkapja — egy másik végtelen sor formájában — a hiperbola, ill. kör területét.

Harmadik példaként[26] egy harmadfokú egyenlet

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

megoldását mutatja be. Ez a példa nagyon jellemző NEWTON matematikai gondolkozására. Úgy jár el, hogy felvesz egy olyan számot, amely saját értékének 1/10-ével kevesebbel tér el a keresett számtól. Jelen esetben ez pl. 2. Azután $2+p$ értéket helyettesít be az egyenletbe y helyébe és az így előálló

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

egyenlet p gyökének a kiszámításában elhanyagolja p elsőnél magasabb hatványait. Így a $10p - 1 = 0$ egyenletből $p = 0{,}1$-et kap első közelítésként p-re. Most $0{,}1 + q$ értéket helyettesít a p egyenletében p helyébe s a kapott

$$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$$

egyenletben a q elsőnél magasabb hatványait újból elhanyagolva kiszámítja $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ egyenletből q-t. Az eljárást tetszés szerint folytatva, a részleteredmények összegezésével tetszés szerinti pontossággal megkapja a keresett gyököt: 2,094551....

A számpélda azonban csak arra való NEWTONnak, hogy annak a mintájára járjon el általános esetben is. Áttéve a fenti eljárás lépéseit betűkbe, pl. az

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

egyenlet gyökét

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \ \&\ c$$

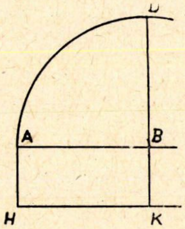
alakban kapja meg, amiből az I és II szabály alkalmazásával azonnal megadja az y görbe alatti területet:

$$ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \&\ c.$$

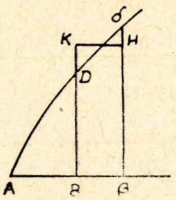
Azután tárgyalja a módszer alkalmazásait „geometrikus", majd „mechanikus" görbék esetében. A két eset semmiféle elvi különbséget nem jelent a módszer alkalmazása szempontjából. „Semmi olyanról nem tudok — írja — amire ez a módszer valamilyen formájában ne lenne kiterjeszthető. Sőt, ennek a segítségével érintők húzhatók mechanikus görbékhez (akkor is, mikor másképpen nem lehet) és amit a közönséges analízis véges, állandó számú tagból álló egyenletekkel elvégez (amikor az lehetséges), ez végtelen egyenletekkel mindig teljesíti: úgyhogy ne kételkedjünk abban, hogy ezt is megilleti az analízis elnevezés (értsd: algebra). A számítások ugyanis ebben semmivel sem kevésbé biztosak, mint amabban, sem az egyenletek nem kevésbé egzaktak; mi, véges értelmű emberek nem tudjuk jelölni minden tagjukat és így felfogni sem, de mint megkövetelt mennyiségeket (quantitates desisera-

[26] Uo. 10–11.

tas) egzakt módon felismerjük: ugyanúgy, mint ahogy véges egyenletek irracionális gyökeit sem vagyunk képesek sem számokkal, sem bármely analitikus módon úgy kifejezni, hogy az maradék nélkül, pontosan állíttassék elő valamely mennyiséggel."[27] A dolgozat elején megadott I szabály bizonyítását NEWTON a munka legvégén közli. A matematikatörténetírás elsősorban ezt szokta kiemelni a *De Analysi* ... gazdag gondolatvilágából, mert a kifejlett differenciálszámítás felől nézve a differenciálhányados képzésének primitívebb formáját ismeri fel benne.[28] Valójában pedig ez a mű legkevésbé eredeti része, az itáliai iskola és BARROW mozgásgeometriai megfontolásainak a körében marad. A módszer egy geometrikus eljárás általánosítása. Úgy határozza meg az *AD* görbe alatti *ABD* területet, hogy a görbét a *BD* ordináta „egyenletes mozgásából" származtatja és a változó *BD* „momentummal" történő „növekvést" egy állandó *KB* egységnyi momentummal történő növekvéssel hasonlítja össze. A változó *BD* momentum által kisepert *ABD* terület így az állandó, egységnyi *KB* momentum által leírt *AHKB* területtel mérhető.[29]



3. ábra



4. ábra

Ezt a megfontolást viszi át algebrai formába és bizonyítja segítségével a mű elején megadott hatvány-integrálási szabályt. A *BD* momentumot egy kis *BKHβ* négyszöggel helyettesíti — mintegy „széthúzza" erre a négyszögre — és ezzel a kis négyszöggel megnövelt területet helyettesíti az *ABD* területet kifejező egyenletbe. Ugyanakkor az *AB* helyébe a *Bβ*-val megnövelt értéket teszi be, az egyenletet rendezi, egyszerűsít, azután *Bβ*-t zérussal teszi egyenlővé és minden tagot elhagy, amiben előfordul.[30]

Ez a bizonyítás nem egyéb, mint a mozgásgeometriai területszámítás megfejelve FERMAT érintőszerkesztési módszerével. Ennek megfelelően ugyanazok a kritikák hozhatók fel ellene, amiket a kortárs-matematikusok DESCARTES-tól kezdve oly gyakran s annyi joggal szegeztek szembe az új infinitézimális matematikával. Azokkal a bizonytalanságokkal terhelt ez a bizonyítás, amik miatt a XVII. század egyik legnagyobb matematikusa, HUYGENS, sohasem fogadta el az új módszereket.

A *De Analysi* ...-ben különös fordulattal állunk szemben. Ami addig „érthetetlen" volt, a „mechanikus" problémák megoldása a végtelen egyenletek segítségével fogalmilag tisztázottá, gyakorlatilag tetszőleges pontossággal kiszámíthatóvá vált.

[27] Uo. 24—25.
[28] Pl. CHILD, J. M.: „Newton and the art of discovery". = *Isaac Newton 1642—1727. A memorial volume ed. by* W. J. GREENSTREET. London 1927, 117—129.
[29] *De Analysi* ... 19.
[30] Uo. 27—28.

Ami addig egyszerűnek látszott, a közönséges algebrai egyenletekkel leírható „geometrikus" görbék kvadrálása viszont visszasüllyedt a DESCARTES-i tisztaságból a század jól-rosszul megfogalmazott infinitézimális módszereinek a zürzavarába.

A folytonos folyás matematikája: a fluxioszámítás

A mi számunkra, akik a folytonos függvények ismeretében közeledünk a differenciálhatóság fogalma felé, ez a bizonyítás jobbnak látszik, mint amilyen valójában. Ne unjuk meg ismételni, hogy a XVII. század nem ismerte a függvények és a folytonosság fogalmát, de annál inkább az egyenleteket és a „matematikai" mozgást. Nem ismerte a differenciálhányadost, de tudta, hogy az érintőszámítás, maximum—minimum feladatok, egyenletek redukciója közös módszeren alapulnak. Tudta azt is, hogy ez a módszer speciális összefüggésben áll a kvadraturával. A hatvanas években NEWTON és GREGORY felfedezték, hogy ha az algebrai jelekkel ugyanúgy számolunk, mint a közönséges számokkal és ha a közönséges egyenletek helyett „végtelen egyenleteket" alkalmazunk, akkor semmi elvi különbség nincs az alkalmazott módszerek szempontjából a „geometrikus" és a „mechanikus", nem-algebrai problémák között. A végtelen sorokkal történő analízis egységes nagy módszer, ez *a* módszer a matematikában. Ezért mondotta NEWTON, a nagy algebrista a „véges" algebráról, hogy az „kontárok matematikája."

De hiányzott még az új analízis elméleti megalapozása. Annak a megadása, miféle mennyiségekre érvényesek a használt új módszerek.

A görög matematika az eudoxoszi arányelméletben találta meg a maga módszereinek ilyen jellegű megalapozását, a XIX. századi matematika a valós számok DEDEKIND-féle elméletében és a CANTOR-féle halmazelméletben. A XVII. századi matematika a newtoni fluxioszámításban.

A fluxioszámítás ebből a szempontból az egész XVI—XVII. századi matematikai fejlődés csúcsa. A fluxioelmélet definiálja azt a matematikai mennyiségfogalmat, amelyikre a XVII. század infinitézimális módszerei a legjobban illenek. Ez a fluxioelmélet lényege, nem nehézkes matematikai szimbolisztikája. A „végtelen egyenletekkel" való számolás a newtoni analízis jövőbe mutató oldala, ígéretteljes kezdet, s mutatja a kezdet minden nehézségét és pontatlanságát. A fluxioszámítás teljesen a XVII. század fizikai-matematikai módszereihez alkalmazkodó elmélet, zárt és tökéletes a maga nemében.

A módszert NEWTON a *De Analysi* ... végén közölt pontatlan mozgásgeometriai megfontolás továbbfejlesztésével építi ki. Már a hetvenes évek legelején készen van, s ezt a módszert rejti titkosírásba az 1676-ban LEIBNIZnak írott híres levelében: „... tetszőleges számú fluens mennyiségből megtalálni a fluxiokat és megfordítva."[31]

Nyomtatásban azonban csak 1736-ban jelent meg a módszer, *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*[32] címen. A *Methodus*-ban nagyon jól követhető a módszer genezise. A fluxioszámítás két problémára vezethető vissza, írja NEWTON. „I. A mindig (azaz bármely időpillanatban) megadott megtett út hosszúságából meghatározni az adott időben a

[31] *Corr.* II, 188, Newton to Oldenburg 24 Oct. 1676, 110—161, 115. „fluens" a mi terminológiánkban az időparaméter valamely folytonos függvénye, „fuxio" ennek idő szerint vett differenciálhányadosa.

[32] = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 29—199.

mozgás sebességét, II. ha mindig adva van a mozgás sebessége, meghatározni egy adott időpillanatban a megtett utat."[33]

A kérdésfeltevés azonnal mutatja a forrást: Galilei. Már maga ez a tény is arra utal, hogy a fluxioszámítás szerves része a XVII. század nagy élményének, amit a világkép mechanizálódásának szokás nevezni. Ugyanezt mutatják az elnevezések is: „Mármost a következőkben *fluens*eknek nevezem azokat a mennyiségeket, amelyeket mintegy fokozatosan és határozatlanul növekvőknek tekintek ..." Ezeket a mennyiségeket az ABC végéről vett betűkkel jelzi: z, x, y, u, ... „Azokat a sebességeket, amelyekkel az egyes, a mozgás által létrehozott fluensek nőnek (amely sebességeket fluxioknak vagy egyszerűen sebességeknek vagy celeritasnak nevezek) ugyanazon betűk felé tett ponttal fejezzük ki ..."[34]

Ezeknek az elnevezéseknek a segítségével a fenti két fizikai probléma következőképpen fordítható le matematikai nyelvre: „I. probléma. Határozzuk meg fluens mennyiségek között fennálló adott *relációból* azt a *relációt*, amely fluxioik között áll fenn". És ugyanígy a „II. probléma. Fluxiokat tartalmazó adott egyenletből határozzuk meg, milyen *reláció* áll fenn a fluens mennyiségek között."[35]

Az első probléma megoldása és a megoldás bizonyítása egyszerű, lényegében úgy történik, amint azt az 1664—65-ös kéziratban és a *De Analysi* ...-ben láttuk. De pontosabban fogalmaz: „Fluens mennyiségek momentumai (azaz meghatározatlanul kicsiny részei, amelyeknek az idő meghatározatlanul kicsiny részeiben való csatlakozásával maguk a fluens mennyiségek folytonosan növekednek) úgy aránylanak, mint a sebességek, amelyekkel folynak vagy nőnek.

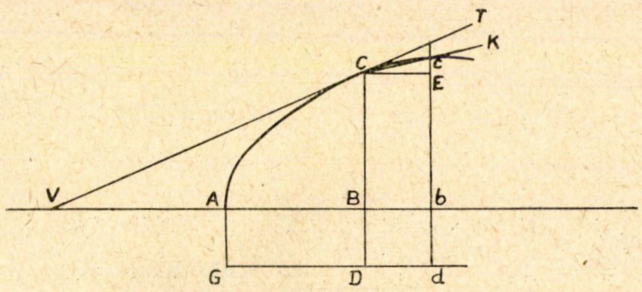
Ezért, ha valamelyik (tegyük fel, x) momentumát sebességének ($\dot{x}$) és a meghatározatlanul kicsiny mennyiségnek a szorzatával (azaz, $\dot{x}o$-val) reprezentáljuk, a többi u, y, z-nek a momentumát $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$-val kell reprezentálni, mivel $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ & $\dot{z}o$ között ugyanaz az arány áll fenn, mint $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ között."[36] Ugyanaz az egyenlet, amely egy adott időben kifejezi a fluensek közötti relációt, megadja a fluensek $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ stb. értékekkel megnövelt mennyiségei között fennálló relációt is. Behelyettesítve az $x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$ stb. értékeket az egyenletbe, összevonva és egyszerűsítve, az o-t tartalmazó tagokat elhagyva azonnal megkapjuk az I probléma megoldását.

A II. probléma már sokkal nehezebb, jóllehet elvben igen egyszerű. Az előbbi megfordítottja és így „megfordított műveletekkel kell megoldani."[37] Ez a probléma nem egyéb, mint a kvadratura általánosítása.

A tényleges keresztülvitel azonban csak a legegyszerűbb esetekben könnyű, már valamivel bonyolultabb fluxioegyenletek megoldása is komoly nehézségeket okoz. Mindenesetre mivel egyenletekről van szó, az algebrai egyenletek mintájára kell eljárni. Éppen ezért nevezi Newton a gyökvonás mintájára a fluensek fluxioegyenletből történő meghatározását a fluensek „kivonásának". Az algebrai egyenletekhez hasonlóan, először osztályozni kell a fluxioegyenleteket, azután a normálalakoknak megfelelő, alkalmas egyszerű egyenleteket megoldani, végül gondoskodni olyan átalakításokról, amikkel egy tetszőleges fluxióegyenlet a megoldott alakok egyikére hozható[38].

[33] Uo. 53—54.
[34] Uo. 54—55.
[35] Uo. 63.
[36] Uo. 59—60.
[37] Uo. 63.
[38] Uo. 84—85.

NEWTON világosan felismeri, hogy ez a probléma nem egyéb, mint egy speciális feladat, a kvadratura általánosítása. Egy 1704-ben, az *Opticks* függelékeként megjelent összefoglalásában[39] fejti ki talán ezt legszebben. A probléma címe: „*Megkeresendők azok a görbék, amelyek kvadrálhatók*", mutatja az 1664-es gondolatkörhöz való közvetlen csatlakozást. Legyen ABC a megkeresendő terület, BC a görbe ordinátája a C pontban, AB az abszcissza. Hosszabbítsuk meg CB-t D-ig úgy, hogy $BD = 1$ legyen és egészítsük ki az ábrát az $ABDG$ parallelogrammával. Legyenek az ABC és az $ABDG$ területek olyan arányban, mint BC és BD. Vegyünk fel mármost bármely egyenletet, amely a területek viszonyát definiálja, és ebből az az I propozícióval (ugyanaz, mint a *Methodus*... első problémája) adódik a BC és BD ordináták relációja, amit kerestünk."[40]



5. ábra

Az ábrán több vonal van, mint ami az itt mondottakhoz szükséges, mert annak a demónstrálására is szolgál, hogyan lesz a Bb, ill. Ec „születő növekmények" (augmentum nascentium) eltűnésekor „végső arányukból" (ultima ratio) az érintő hajlását megadó $CB:VB$ arány. Ehhez „a C és c pontoknak teljesen össze kell esni. Matematikai dolgokban mégoly kis hibák sem megvetendők."[41]

A GALILEI—TORRICELLI-féle mozgásmatematikából kiindulva a fogalmak jelentős tisztázásáig ért el. Eltűntek a vonalakat „végtelen kis területekké" szétmosó mozgásmatematika bizonytalanságai. A számításhoz szükséges „folytonosságot" nem a szétkenés, hanem a fluxiok *definíciószerű* létezése biztosítja. Érintő pl. olyan görbékhez szerkeszthető, amelyeknek az ordinátáit és abszcisszáit kifejező mennyiségeknek fluxioik *vannak*. S ha azt akarjuk, hogy a görbe kvadrálható legyen, akkor a görbét kifejező egyenletnek egy fluens mennyiség fluxiojának *kell* lenni. Definíciószerűen. Mert „matematikai dolgokban még oly kis hibák sem megvetendők".

A fluensek hierarchiája

Most már csupán a kvadrálható görbék általános alakját kell megtalálni. A legalkalmasabbak erre természetesen a végtelen hatványsorokkal előállított görbék, amelyekkel tagonként lehet bánni. Ezek egyben a legáltalánosabbak, mert ezekkel

[39] *De Quadratura Curvarum.* London 1704. = *Opuscula*... Castillioneus-féle kiadás I, 201—244.
[40] Uo. 212.
[41] Uo. 205.

bármely görbe összehasonlítható megfelelő szabályok szerint. Az összehasonlítás megkönnyítésére NEWTON a legegyszerűbb görbék kvadraturáját két hatalmas táblázatban[42] adja meg, amely így kezdődik:

TÁBLÁZAT a kvadrálható egyszerű görbékről

A görbe alakja	A görbe alatti terület
Első forma $dz^{n-1}=y$	$\frac{d}{n} z^n = t$
Második forma $\frac{dz^{n-1}}{ee+2efz^n+ffz^{2n}}=y$	$\frac{dz^n}{nee+nefz}=t$, vagy $\frac{-d}{nef+nffn^n}=t$
⋮	⋮

Itt z jelenti a görbe abszcisszáját, y a derékszögű ordinátáját, t a területet, d, e, f adott mennyiségek.

Hajlandók lennénk azt hinni, hogy az első nagyszabású integráltáblázatokkal állunk szemben. De figyeljük meg, hogy NEWTON táblázatai „formákat" tartalmaznak, nem formulákat. y és z még nem függő és független változók, hanem ismeretlenek. Még az egyenletek világában vagyunk, nem a függvényekében. Csupán a név hiányzik? A matematikában azonban sokszor éppen a dolgok nevükön nevezése a legnehezebb. És a legjellemzőbb: NEWTON más nevet mondott, nem a függvényét. NEWTON matematikája fluensek és fluxiok egymásra épülő hierarchiáján alapult. Minden fluxio valamely fluens mennyiség fluxioja és egyben egy további fluxio fluense. Ebből azután minden más levezethető, ezt a tényt azonban definíciószerűen posztulálni kell. A matematika NEWTON számára az a tudomány, amelyik a fluens mennyiségekkel dolgozik. A mennyiség nem egyenesdarab, nem egész számokból összetevődő racionális tört, a matematikai mennyiség *fluens*. A növekvésnek, ill. a csökkenésnek, magának a *változásnak* az absztrakciója. A legnagyobb mértékben összetett valami, fluxiok végtelen egymásrakövetkezésének a lehetőségét rejti magába és ő maga más fluensek fluxioja. A fluensek közötti reláció még nem függvény. Ehhez túlságosan igényes. Kevés függvény lesz majd, amelyik kielégíti azokat a feltételeket, amiket a fluensek közötti relációk megkövetelnek. Egyszerűsíteni, kevésbé igényessé kell tenni ezt a túlságosan bonyolult mennyiségfogalmat ahhoz, hogy a XVIII. század nagy matematikusai kezében megszülethessen a függvény fogalma.

A fluens-fluxio mennyiség és a végtelen sorok

Addigra az infinitézimális számítás már több mint egy évszázados múltra tekint vissza. S éppen az infinitézimális számítás gyors fejlődése tette lehetővé és szükségessé a függvényfogalom kialakulását. S ez a fogalom menti majd meg a különböző rendű

[42] Uo. 233.

„végtelen kicsinyek" zavaros rengetegében való elveszéstől, ahová — LEIBNIZ iskolája nyomán — a XVIII. század során került. A XVII. századi infinitézimális analízis azonban a csúcsán — NEWTON és GREGORY kezében — még nem annyira a „végtelen kicsi", mint a „végtelen sok" analízise volt. De, ha szabad így kifejeznünk, egy „nyitott" végtelen soké, soroké, amelyeknek „se vége, se hossza". Meg kellett állani az elejükön, a végük elveszett a végtelenben. A két legnagyobb, NEWTON és GREGORY érezte, hogy ezen a téren tenni kellene valamit. Ők ketten sejtik a sorok konvergenciájának a jelentőségét. NEWTON becslést is próbál adni, mekkora hibát követ el egy adott végtelen sorban egy adott tag után következő végtelen sok tag elhagyásával. De — talán nagyon jellemző módon — NEWTON, aki alig követett el számolási hibát életében, ebben a becslésben téved. Éppen olyan felesleges lenne konvergenciakritériumokra alapító, modern sorelméletet keresni náluk, mint függvényt. A konvergencia elnevezést használja NEWTON is. De számára a sorok nem határértékük felé konvergálnak, hanem az „igazság" felé.[43]

Mégis, sorelméleti alapjainak legnagyobb bizonytalansága mellett is a sorok *alkalmazásában* sohasem téved. Bámulatos biztonsággal jár olyan területeken, ahová a mai sorelmélet birtokában is félve követi a matematikus. De ez nem az alvajáró biztonsága, hanem a matematikusé, akin a határérték biztosító öve helyett a fluens-fluxio hierarchia biztosító kötele van. Ez szolgáltatja — definíciószerűen — a végtelen hatványsorba fejtéshez szükséges „differenciálhányadosok" létezését. A fluensek között felírt relációkat — definíciószerűen — mindig sorba lehet fejteni, s akkor már hozzáférhetők a végtelen soktagú egyenletekkel dolgozó analízis számára.

Éppen ezért, ha biztosítjuk, hogy az egyenleteinkben szereplő mennyiségek fluensek legyenek, a továbbiakban alkalmazott módszer szinte már nem is lényeges. Lehet ez könnyebb érthetőség kedvéért akár a megszokott, antik geometriai módszer is, mint a *Principiá*ban. A *Principia*, mint ismeretes, részletes fluxioelméleti bevezetéssel kezdődik, s később is folyton felbukkannak benne az antik geometriai köntös alatt a direkt infinitézimális módszerek. Láttuk már, hogy nem az infinitézimális módszereket, hanem az algebrai jelölési módot kerüli NEWTON a *Principiá*ban. Azt is láttuk, hogy a *Principiát* a Cartesiánus világrend legyőzésének tekintette.[44] Az algebrai jelölési mód pedig a XVII. század matematikusai és műkedvelői előtt erősen összeforrt DESCARTES nevével. Azonban DESCARTES eleve kizárta algebrájából a végtelen figyelembevételét igénylő „mechanikus" problémákat. Az ilyen „véges algebrára" mondotta NEWTON, hogy „kontárok algebrája".

Kontároké? Lehet, hogy a bölcs dilettáns talán nem is tiltakozott volna nagyon az elnevezés ellen.

(Beérkezett: 1964. V. 30.)

[43] *Corr.* I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

[44] VEKERDI LÁSZLÓ: „A Principia születése". *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 14, 161—182, 1964.