

A MÖBIUS-FÉLE μ -FÜGGVÉNYRŐL

Írta: KÁTAI IMRE

G. H. HARDY és J. E. LITTLEWOOD kimutatták, hogy a

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k! \zeta(2k+1)} = O(x^{-\frac{1}{4}+\epsilon}), \quad (x \rightarrow \infty)$$

összefüggés érvényessége a *Riemann*-sejtéssel ekvivalens. Ebben az az érdekes, hogy (1) csupán a $\text{Re } s = 1$ egyenestől jobbra eső értékektől függ. (1) átírható $x = \beta^2$ helyettesítéssel a

$$(2) \quad S(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\beta/n)^2} = O(\beta^{-\frac{1}{2}+2\epsilon}), \quad (\beta \rightarrow \infty)$$

alakba. Innen azonnal következik, hogy ha a *Riemann*-sejtés nem igaz, akkor

$$\overline{\lim}_{\beta \rightarrow \infty} \frac{|S(\beta)|}{\beta^{\frac{1}{2}}} > 0.$$

Kimutatjuk, hogy ez az egyenlőtlenség a *Riemann*-sejtés fennállása esetén is érvényes.

W. STAS hasonló problémával foglalkozott és kimutatta a következő tételt [1]:

Ha a *Riemann*-féle ζ -függvény nem-triviális gyökei a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszenek és egyszeresek, akkor $T > c_1$ -re

$$\max_{T^{1-\sigma(1)} \leq \beta \leq T} |S(\beta)| > T^{-\frac{1}{2}-\sigma(1)},$$

alkalmas $c_1 > 0$ állandóval.¹

Ennek bizonyítása a *Turán*-féle hatványösszeg-módszer segítségével történik. Igen egyszerűen bizonyítható a következő

TÉTEL: *Feltéve a Riemann-sejtés helyességét, minden $M_1 > c_2$ -re érvényesek a*

$$(3) \quad \max_{M_1 \leq \beta \leq N_1} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) > \delta,$$

$$(4) \quad \min_{M_1 \leq \beta \leq N_1} \beta^{\frac{1}{2}} S(\beta) < -\delta$$

egyenlőtlenségek az $N_1 = e^{(\log M_1)^{c_3} \log_3 M_1}$ választással és alkalmas, numerikusan meghatározható c_2, c_3, δ pozitív állandókkal.²

¹ A továbbiakban c_1, c_2, \dots alkalmas, numerikusan meghatározható pozitív állandókat jelölnek.

² $\log_1 x = \log x$, $\log_{\nu+1} x = \log(\log_{\nu} x)$, ($\nu = 1, 2, \dots$).

$S(\beta)$ definíciójából könnyen levezethető a

$$(5) \quad \beta S(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\frac{1}{2} + \varepsilon_1)} \beta^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\zeta(2s)} ds \quad \left(0 < \varepsilon_1 < \frac{3}{2}\right)$$

azonosság, ahol $\Gamma(s)$ az Euler-féle Γ függvény. Innen $\sigma > \frac{1}{4}$ -re ($s = \sigma + it$) a

$$(6) \quad \int_0^\infty \beta^{-\frac{1}{2} - s} S(V\beta) d\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)}{\zeta(2s)}$$

azonosságot kapjuk.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő segédtetelekre.

1. LEMMA: Minden T -re létezik egy $t = t(T)$, $T \leq t \leq T+1$, amelyre

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq (|t| + 1)^{c_3}$$

$a-1 \leq \sigma \leq 2$ szakaszon [2].

2. LEMMA: Ha a $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| \leq A+3$ sávban $\zeta(s)$ nem tűnik el, akkor az $\frac{1}{2} < \sigma \leq \frac{5}{4}$, $|t| \leq A$ téglalapon

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + it)} \right| \leq (|t| + 1)^{-c_4 \log(\sigma - \frac{1}{2})},$$

alkalmas $c_4 > 0$ állandóval.

Bizonyítás: Jelöljük $N(T)$ -vel a $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq |t| \leq T$ tartományba eső ζ -gyökök számát. Ismeretes [2], hogy

$$N(T+5) - N(T) < c_5 \log(|T| + 1).$$

Az 1. lemma szerint minden m természetes számhoz található olyan T_m , amelyre $m \leq T_m < m+1$ és

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma + iT_m)} \right| \leq (|T_m| + 1)^{c_3}$$

az egész $-1 < \sigma \leq 2$ szakaszon. Legyen $s_0 = \sigma_0 + it_0$, $|t_0| \leq A$, $\frac{1}{2} < \sigma_0 < \frac{5}{4}$, $[t_0] = m$. Felhasználva az 1. lemmát és a szokásos nagyságrendi becsléseket, adódik, hogy a $(2 + iT_{m-2}, 2 + iT_{m+2})$, $(2 + iT_{m+2}, iT_{m+2})$, (iT_{m+2}, iT_{m-2}) , $(iT_{m-2}, 2 + iT_{m-2})$ szakaszokon $\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < c_6 (|t| + 1)^{c_7}$. Jelöljük $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_N$ -nel a ζ -függvény e szakaszok által határolt D tartományba eső gyökeit. Mivel a

$$\frac{\prod_{j=1}^N (s - \varrho_j)}{\zeta(s)}$$

függvény D -ben és határán reguláris,

$$\frac{\prod_{j=1}^N (s_0 - \varrho_j)}{\zeta(s_0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\prod_{j=1}^N (z - \varrho_j)}{\zeta(z)} \frac{1}{z - s_0} dz,$$

ahol az integrál D határára van kiterjesztve. Az előbbieket felhasználásával

$$\frac{\left| \prod_{j=1}^N (s_0 - \varrho_j) \right|}{|\zeta(s_0)|} \leq c_8 5^N \cdot (|t_0| + 1)^{c_7}.$$

Innen $|s_0 - \varrho_j| \cong (\sigma_0 - \frac{1}{2})$ és $N < c_5 \log(|m| + 1)$ miatt érvényes az állítás.

3. LEMMA: *Ha igaz a Riemann-sejtés, akkor*

$$S(\beta) = O(\beta^{-\frac{1}{2}} e^{c_8 \log_2 \beta \cdot \log_3 \beta}) \quad (\beta \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás: Az (5) jobb oldalán álló integrált toljuk át a $\sigma = \frac{1}{4} + r$ egyenesre, ahol $0 < r < \frac{1}{4}$ állandó. Ismeretes [3], hogy $\frac{1}{4} < \sigma < 2$ -re egyenletesen $|\Gamma(\sigma + it)| = O(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \cdot (|t| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}})$. Ezek segítségével

$$|\beta S(\beta)| \leq c_9 \beta^{\frac{1}{2} + 2r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} (|t| + 1)^{c_4 \log \frac{1}{2r} - \frac{1}{4} - r} dt < c_{10} \beta^{\frac{1}{2} + 2r} \Gamma\left(c_4 \log \frac{1}{2r} + 1\right).$$

Mivel pozitív x -re

$$\Gamma(x + 1) < c_{11} e^{x \log x},$$

így

$$|\beta S(\beta)| < c_{12} \beta^{\frac{1}{2}} e^{2r \log \beta + c_{13} \log \frac{1}{2r} \log_2 \frac{1}{2r}}.$$

Az $\frac{1}{2r} = \frac{1}{c_{12}} \frac{\log \beta}{\log_2 \beta \cdot \log_3 \beta}$ választással világos, hogy $\beta > c_{13}$ -ra $r < \frac{1}{4}$. Így

$$\beta S(\beta) = O(\beta^{\frac{1}{2}} e^{c_8 \log_2 \beta \cdot \log_3 \beta}).$$

Rátérünk tételünk bizonyítására.

Mivel a $\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s)}{\zeta(2s)}$ függvény a $\sigma = \frac{1}{2}$ egyenesen reguláris és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Gamma(0 - it)}{\zeta(1 + 2it)} \right| dt < \infty,$$

így tetszőleges $\beta > 0$ -ra $S(\beta) = O(1)$ következik (5)-ből. Legyen $\varrho_0 = \frac{1}{2} + i\gamma_0 = \frac{1}{2} + i \cdot 14, 13 \dots$ a ζ -függvény legkisebb pozitív képzetes részű gyöke. A (6) formulába $s = \frac{1}{4} + \lambda + i \frac{\gamma_0}{2}$ -t írva, ahol $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, tegyük fel, hogy valamely

$1 \leq M \leq \beta < N$ szakaszon $\max_{M \leq \beta \leq N} \left(S(\sqrt{\beta}) - \frac{\delta}{\beta^{1/4}} \right) \leq 0$, vagy $\min_{M \leq \beta \leq N} \left(S(\sqrt{\beta}) + \frac{\delta}{\beta^{1/4}} \right) \geq 0$.
Ezek szerint

$$(7) \quad \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda-\frac{i\gamma_0}{2}} S(\sqrt{\beta}) d\beta \right| \leq \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda-\frac{i\gamma_0}{2}} \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} d\beta \right| + \\ + \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} \left(S(\sqrt{\beta}) \pm \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} \right) d\beta \right| \leq 2\delta \int_M^N \beta^{-1-\lambda} d\beta + \left| \int_M^N \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} S(\sqrt{\beta}) d\beta \right|.$$

Másrészt

$$\int_0^M \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} |S(\sqrt{\beta})| d\beta \leq c_{13} + c_{14} e^{c_8 \log_2 M \cdot \log_3 M} \frac{1 - M^{-\lambda}}{\lambda}$$

és a $\lambda = \frac{2c_8 \log_2 N \cdot \log_3 N}{\log N}$ választással,

$$\int_N^{\infty} \beta^{-\frac{3}{4}-\lambda} |S(\sqrt{\beta})| d\beta \leq \int_N^{\infty} \beta^{-1-\lambda} e^{c_8 \log_2 \beta \cdot \log_3 \beta} d\beta = \int_{\log N}^{\infty} e^{-\lambda \log \beta + c_8 \log_2 \beta \cdot \log_3 \beta} d \log \beta < \\ < \int_{\log N}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2} v} dv = \frac{2e^{-2c_8 \log_2 N \cdot \log_3 N}}{\lambda} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

M -et úgy választjuk, hogy

$$e^{c_8 \log_2 M \cdot \log_3 M} (1 - M^{-\lambda}) \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty)$$

teljesüljön. Ez biztosan teljesül akkor, ha a $\log_2 M \cdot \log_3 M = 2 \log_2 N$, azaz az $N = e^{(\log M)^{\frac{1}{2}} \log_3 N}$ választással élünk.

Ezek felhasználásával (6), (7)-ből a

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - r - i\lambda\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + 2r + 2\lambda i\right)} \right| \leq \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - r\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + 2r\right)} \right| + \frac{2\delta}{\lambda} + \frac{o(1)}{\lambda} \quad (\lambda \rightarrow 0)$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Mivel $\Gamma(s)$ az egész síkon 0-tól különböző, a bal oldal $\lambda \rightarrow 0$ -ra

$$\cong \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{\gamma_0}{2}\right)}{4\lambda |\zeta'(\varrho_0)|} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B}{\lambda}; \quad (B > 0),$$

a jobb oldal első tagja korlátos $\lambda \rightarrow 0$ -ra. Így a $\frac{B}{\lambda} \leq \frac{2\delta}{\lambda} + \frac{o(1)}{\lambda}$ egyenlőtlenséget

kapjuk $\lambda \rightarrow 0$ -ra. Ez azonban nem állhat fenn, ha $\delta < \frac{B}{2}$ és λ elég kicsi. Így

$$\max_{M \cong \beta \cong N} \left(S(\sqrt{\beta}) - \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} \right) > 0 \quad \text{és} \quad \min_{M \cong \beta \cong N} \left(S(\sqrt{\beta}) + \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{4}}} \right) < 0.$$

Bevezetve az $M_1 = M^{1/2}$, $N_1 = N^{1/2}$ jelöléseket és $\sqrt{\beta}$ helyett β -t írva kapjuk a (3), (4) egyenlőtlenségeket.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] W. STAS: Über eine Reihe von Ramanujan, *Acta Arithm.* **8** (1963), 261–271.
- [2] E. C. TITCHMARSH: *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.
- [3] E. C. TITCHMARSH: *The theory of functions*, Oxford 1939.

(Beérkezett: 1964. IX. 29.)