A GEOMETRIE (1637)
ÉS A DIFFERENCIÁLÁSI ALGORITMUS SZÜLETÉSE

Írta: VEKERDI LÁSZLÓ

DESCARTES *Geometrie*-jét a XIX. század óta az analitikus geometria megteremtéseként ünnepelték. Így vezette ezt be M. CHASLES, a múlt század egyik leghíresebb geométere és matematikatörténésze, aki az analitikus geometria előd nélküli, tökéletes formában való megjelenésének tekintette a *Geometrie*-t.[1] S így él ez máig a legtöbb matematikus képzeletében.

Pedig már a századfordulón figyelmeztetett rá egy kivételképpen matematikához is értő filozófus, Louis LIARD, hogy „a cím ellenére, a látszat ellenére a *Geometrie* tulajdonképpen nem geometria, hanem algebra[2]... Annak a szövetségnek a célja, amit az algebra és a geometria között teremt, nem a geometria megújítása, hanem az algebra átvilágítása a geometriai intuició tisztaságával. Amit kínál, az egy szóval kifejezve, egyenletek grafikus megoldása."[3]

Az analitikus geometria következménye lesz ennek az algebrai reformnak, de nem ez volt DESCARTES célja. Csak a már kialakult analitikus geometria felől visszatekintve, a helytelen perspektíva keltette azt a látszatot, hogy a *Geometrie*-ben geometriáról van szó. „Vissza kell fordítani ezt a hamis perspektívát; olyan rendbe kell állítani a dolgokat, amint azt a módszer előírta. Hűen módszeréhez, DESCARTES a tudomány reformját a legegyszerűbb dolgok tudományán kezdte el, ti. a viszonyokén és arányokén általában, vagy ahogy ő nevezte, az univerzális matematikán."[4] Ennek a módszernek az alapjait fiatalkori művében, a *Regulae*-ban fektette le. LIARD szerint a *Regulae* semmi egyéb, mint általánosított arányelmélet. LIARD ezt tekinti az egész későbbi cartesianus módszer kulcsának. „Végső analízisben a módszer célja összetett viszonyok képzése egyszerűek segítségével, mint ahogy a számolás a nagyobb számokat az egység megismétlésével konstruálja."[5]

A *Geometrie* későbbi interpretációi ennek a két iránynak a folytatásai. Akik a modern analitikus geometria felől közelednek hozzá, azok, mint CHASLES, koordináta geometriát látnak benne, akik a *Regulae* felől, azok algebrát és arányelméletet.

Moritz CANTOR[6] jól látta, hogy a *Geometrie*-ben az algebra a lényeg, de az egészet nem tartotta túlságosan újnak. Ezzel szemben Pierre BOUTROUX[7] szerint DESCARTES előtt az algebra zsákutcában volt, a továbbjutáshoz mindenekelőtt

[1] CHASLES, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles 1837, 94–95.
[2] LIARD, L.: *Descartes.* Paris ²1903, 47.
[3] Uo. 62–63.
[4] Uo. 63.
[5] Uo. 21.
[6] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II/1. von 1200–1650.* Leipzig ²1899, 793–796.
[7] BOUTROUX, P.: *L'imagination et les mathématiques selon Descartes.* Paris 1900, 41.

az egyenletek algebrai megoldásának az elméletét kellett megteremteni, s éppen ezt végezte el DESCARTES. Charles ADAM[8] is az egyenletek elméletét tartja nagy újságnak a *Geometrie*-ben, ez teszi lehetővé a görbék algebrai kezelését. TANNERY szerint viszont az a tény, hogy DESCARTES olyan nagy fontosságot tulajdonít a folytonos mozgás által szerkeszthető görbéknek, arra utal, hogy egy folytonos mozgáson alapuló görbeelmélet kiépítése lebegett a szeme előtt, az érintőszerkesztés módszerének általánosítása érdekében.[9]

Ezeket a század végi—század eleji interpretációkat ismétlik a későbbi történészek. Pl. L. J. BECK,[10] aki LIARD interpretációját eleveníti fel, kidolgozva a *Geometrie* és a *Regulae* közötti összefüggéseket. Egy másik angol történész, J. F. SCOTT pedig Charles ADAM értelmezését részletezi: „Minden algebrai számítás öt elemi műveletből, összeadásból, kivonásból, szorzásból, osztásból, gyökvonásból van összetéve. Hasonlóképpen, mondja DESCARTES, a geometriai szerkesztéseket öt megfelelő elemi szerkesztésből kell összetenni. Algebra és geometria így egymás struktúrájára vetnek fényt."[11]

A geometriai értelmezés felől közeledik a *Geometrie*-hez Morris KLINE. Arra a hirtelen megnőtt szükségletre figyelmeztet, amit a XVII. század elejének technikai-természettudományos fejlődése támasztott a különféle görbékkel szemben. Az antikvitás görbéi nem voltak elegendőek ennek a keresletnek a kielégítésére. Itt lépett közbe DESCARTES. A görbét egy változó hosszúságú egyenes vonalszakasz mozgásaival állítja elő, ezen egyenes és talppontjának egy választott kezdőponttól való távolsága között algebrai egyenletet állít fel, s így megadja a kívánt új módszert különféle görbék előállítására.[12]

Ezt az inkább ötletszerű interpretációt alapozza meg tudományos pontossággal D. T. WHITESIDE. Szerinte DESCARTES az algebrai görbéket „ponthalmazként" fogja fel, s az x, y koordináta hosszúságok közötti kapcsolat és a görbét kifejező egyenlet közötti aequivalencia analitikus feltételét adja meg $f(x, y) = 0$ formában. „Ilyen körülmények között csak akkor meglepő, hogy a *Geometrie* olyan nagy része foglalkozik egyenletek analízisével, ha elfogadjuk azt a modern szempontot, amely ezekben az eljárásokban pusztán algebrai technikát lát. Mélyebb szinten azonban a *Geometrie* nagy része az általános független-változós polinomot megszabó feltételeket kutatja —, amely vizsgálat közvetlenül kapcsolódik a geometriai pont (és vonal) halmazok elméletéhez."[13]

DESCARTES matematikai módszerének egyik legutóbbi interpretátora, Jules VUILLEMIN szerint viszont DESCARTES az „algebrai függvények általános elméletét" redukálja a geometriai arányelméletre azáltal, hogy csak olyan görbéket enged meg, amelyeknek minden pontja megszerkeszthető. Ekkor a görbe egyetlen pontjának a megadásában sincs szükség megközelítésre, határátmenetre, mint az pl. a DE BEAUNE-feladat görbéje esetében szükséges volt. „Csupán, mivel az analitikus geometria

[8] ADAM, Ch.: *Vie et OEuvres de Descartes. Supplément a l'édition de Descartes.* Paris 1910, 214.
[9] TANNERY, P.: „Les Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes" *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft,* 1899, 501—513.
[10] BECK, L. J.: *The method of Descartes. A study of the Regulae* London 1952.
[11] SCOTT, J. F.: *The scientific work of René Descartes.* London 1952, 90.
[12] KLINE, M.: *Mathematics in Western culture.* London 1954, 170.
[13] WHITESIDE, D. T.: „Patterns of mathematical thought in the later Seventeenth Century" *Archive for History of Exact Sciences.* 1, 1961, 179—388.

szemszögéből ítéltek, hihették azt, hogy DESCARTES számot és pontot azonosítva a pontból, azaz a számból indul ki az egyenes megszerkesztésében. Ez a reprezentáció azonban az utódoké, nem az övé. Az ő elve a pontos arányok elve, aminek a *Módszer* által kapott mennyiségek között kell fennállnia. A meghúzható vonalak között kétféle van: azok a görbék, amelyek algebrai egyenletnek felelnek meg, és az egyéb görbék. Az előbbiek DESCARTES szerint ... szabályozott, pontos és folytonos szerkesztés által keletkeznek. Az utóbbiak csak diszkontinuusan szerkeszthetők meg, grafikus eljárásokkal. Összefoglalva, a filozófus szándéka annak a befejezése volt, amit a görögök kezdtek el. A körzővel-vonalzóval való szerkesztés engedélyezése azt a bővített számtestet eredményezte, amiben csak négyzetgyökök fordultak elő; a DESCARTES által elfogadott szerkesztések rendeltetése az volt, hogy — modern kifejezést használva — megteremtse a számtest általános algebrai bővítését, a grafikus eljárásoknak átengedett transzcendens testbővítés kizárásával."[14]

Lényegében ugyanezt az interpretációt vezette be már évekkel VUILLEMIN előtt a XVII. század matematikájának legjobb ismerője, J. E. HOFMANN is. DESCARTES „különbséget tesz precíziós matematika és approximációs matematika között. Minden algebrai úton megoldható problémát — ő geometrikusoknak nevezi ezeket — a precíziós matematikába sorol, minden egyebet — ő mechanikusoknak hívja — az aproximációs matematikába ... Egyidejűleg, a vonalszakasz-egység bevezetésével aritmetizálja a geometriát. A számfogalom, ami kezdetben a természetes számokra korlátozódott és csak fáradságos lépések árán volt kiterjeszthető törtekre, negatív számokra és egyszerű irracionalitásokra, egy csapással lényegesen kibővített: az algebrai számok egész tartományát felölelte."[15]

Carl BOYER, az analitikus geometria történetének monográfusa nem látja ilyen kimagaslónak DESCARTES matematikai teljesítményét. Szerinte DESCARTES VIÈTE célját veszi át, ami algebrai egyenletek gyökeinek geometriai szerkesztése volt. DESCARTES tette pusztán új jelölések bevezetésében állott. Az analitikus geometriát viszont FERMAT teremti meg, aki ugyan megtartotta VIÈTE régi jelölésmódját, de bevezette az új, analitikus geometriának megfelelő célkitűzést: a geometriai hely, tanulmányozását.[16]

Mi volt hát valójában a *Geometrie*? Analitikus geometria? Algebra? Arányelméletre redukált egyenletelmélet? Görbék előállítására és osztályozására bevezetett módszer? Algebrai polinomok elmélete? Kezdődő függvényelmélet? Számtestbővítés? Vagy, mint TANNERY sejtette, előkészület egy általános érintőszerkesztési módszerhez? Vagy egyszerűen, DESCARTES szándékosan homályba borított könyvében bizonyos részleteket, s ezek vezetik félre az interpretátorokat? „Különös élvezet — írta erre célozva a legnagyobb DESCARTES-filológus, Charles ADAM —, ami újból rávilágít arra, hogy DESCARTES bizony egy kicsit misztifikátor volt."[17] A *Geometrie* valóban nagyon különös olvasmány. Könnyed és élvezetes, átfutva azt hiszi az ember, hogy teljesen érti. Azután újra kézbe véve meglepődik: mennyire nem értette meg először

[14] VUILLEMIN, J.: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Paris 1960, 87—88.
[15] SCHOLZ, H.—KRATZER, A.—HOFMANN, J.: *Descartes.* Münster, Westfalen 1951, 56.
[16] BOYER, C. B.: *History of analytic geometry.* New York 1956, 74.
[17] ADAM, Ch.: i. m. 224.

A szerkesztés fogalma és szerepe a *Geometrie*-ben

A *Geometrie* három könyvből áll. Az első könyv a körzővel-vonalzóval megszerkeszthető problémákról szól, a második görbe vonalak szerkesztésével, osztályozásával és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozik. A harmadik könyv a harmadfokú és magasabb problémák egy ötletes görbe-előállító mechanizmus segítségével történő szerkesztésével és ennek a szerkesztésnek megfelelő egyenletekkel foglalkozik.

A könyvben tehát szerkesztésekről van szó s így joggal viseli a *Geometrie* címet, amit éppen a szerkesztésekkel foglalkozó tudomány számára tartottak fenn már az antikvitás óta a számolásokkal foglalkozó aritmetikától való megkülönböztetésképpen.

Négy fontos szerkesztési feladat foglalkoztatja DESCARTES-ot a *Geometrie*-ben: **1.** a PAPPOSZ-probléma megoldása **2.** az ún. optikai oválisok szerkesztése, **3.** az érintőszerkesztés és **4.** a másodfokúnál magasabb fokú parabolák szerkesztése.

Az egyenletek nagyon megkönnyítik a munkát, de *elvi* különbséget nem jelentenek a rajzban történő szerkesztésekkel szemben. Csupán világosabban eldönthetővé teszik, melyik az a legegyszerűbb görbe, amelynek segítségével egy adott probléma megoldható. Ugyanis ez a görbe az, amelyik a második könyv osztályozási elvei alapján a legalacsonyabb görbe-osztályba tartozik. Ez pedig legkönnyebben a görbét leíró *egyenlet* vizsgálatával dönthető el.

Az egyenletek tárgyalásában is a *szerkesztés* szempontjai dominálnak. DESCARTES az egyenletet mintegy „megszerkeszti" a gyöktényezőkből. Ez az eljárás: az egyenleteknek az ismeretlenből és a gyökökből álló binomok szorzataként való előállítása ekkor már nem teljesen új. DESCARTES azonban felismeri az eljárás megfordíthatóságát: az egyenlet osztható egyik gyöktényezőjével, s így eggyel alacsonyabb fokú egyenletté redukálható.

A szerkesztés centrális fontosságának a gondolata végig követi az egyenletek vizsgálatát. A különféle problémák és a nekik megfelelő egyenletek osztályozása a szerkesztésükre használt eljárásokra épül fel. „Ami pedig a test-problémákat (harmad- és negyedfokú egyenletekkel kifejezett problémák) illeti — írja DESCARTES —, amikről azt mondottam, hogy nem oldhatók meg valamely, a körnél magasabb fokú görbe használata nélkül, eleget lehet találni közöttük, amik mindkét szerkesztésre vezethetők vissza. Ezek egyikében meg kell találni azt a két pontot, amit két adott vonalszakasz közötti középarányosok határoznak meg, a másikban azt a két pontot, amik egy adott ívet három egyenlő részre osztanak. Mert tekintve, hogy a kör csupán egyetlen aránytól függ, ti. amely a pontjai és a középpont között fennáll, a kört csupán két pont közötti egyetlen pont meghatározására, vagy két adott egyenes szakasz egyetlen középarányosának a megadására, vagy egy adott szög két részre osztására lehet felhasználni. A kúpszeletek azonban mindig két különböző dologtól függenek és így két pont meghatározására használhatók fel.

Ugyanezen okból a negyediknél magasabb fokú problémákat, amelyek négy középarányos beírását vagy a szög öt egyenlő részre való osztását követelik meg, nem lehet megoldani a kúpszeletek segítségével. Ezért a lehető legjobbnak gondolom, ha általános szabályt adok a megszerkesztésükre, azt a görbét alkalmazván, amit egy parabola és egy egyenes metszése ír le."[18]

[18] *Geometrie*... Descartes műveinek V. COUSIN-féle kiadása, V. kötet, 419—420.

Ez az egyenletek megoldására, helyesebben megszerkesztésére adott görbeelőállító mechanizmus, amelyik voltaképpen az algebrai görbék definíciójára szolgál egy parabola és egy egyenes metszéspontjainak a segítségével, lehetővé tette DESCARTES számára a különböző fokú algebrai egyenletekkel kifejezhető problémák megoldhatóságának a *konstruktív* definiálását. Így bizonyos fokig ebben az eljárásban a RUFFINI—ABEL-tétel cartesianus megfelelőjét láthatjuk. Mutatja ez az eljárás azt a mély különbséget, ami a komplex számtestben a polinomok faktorokra történő felbontásával dolgozó mai algebra és az egyenletpolinomot szerkesztés-feladatként felfogó cartesianus algebra között van.

Annál feltűnőbb ez a különbség, mert DESCARTES is a gyöktényezőkre való felbontásból és az egyenletpolinom gyöktényezővel vagy egy másik egyenletpolinommal való oszthatóságából indul ki, mint a mai egyenletelmélet. Pl. ha valamely probléma megszerkesztésénél olyan egyenletre jutunk, amelyben az ismeretlen dimenziója három (harmadik hatványon van), keresünk egy olyan binomot, amellyel az adott egyenletpolinom osztható és így visszavezetjük alacsonyabb fokú problémák megoldására. „De ha egyetlen binomot se találunk, amelyik az adott egyenletpolinomot osztaná, bizonyos, hogy az egyenlettől függő probléma test-probléma — háromdimenziós — és ezek után nem kisebb hiba lenne megkísérelni csupán körzővel és vonalzóval történő megszerkesztését, mint amilyen az lenne, ha kúpszeleteket alkalmaznánk olyanok megszerkesztésére, amelyek csak köröket igényelnek: mert végül is mindaz, ami tudatlanságot árul el, hibának nevezendő."[19]

Ugyanígy megadja, milyen esetekben redukálhatók negyedfokú egyenletek, azaz milyen esetekben húzódnak meg mögöttük sík-problémák. Azután megadja az általános szabályt a negyediknél magasabb fokú egyenletek redukciójára: „Felsorolhatnánk a következőkben az ötödfokú, hatodfokú és ennél magasabb fokú egyenletek esetét, de inkább összefoglalva tárgyaljuk őket és általánosságban azt állítjuk, hogy ha megkíséreltük az egyenletet előállítani alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzataként és összeszámlálva mindazokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható, azt találjuk, hogy az előállítás egyik által sem sikerül, akkor meggyőződhetünk, hogy nem redukálhatók alacsonyabb fokú egyenletekre, úgyhogy ha az ismeretlen mennyiség harmadik vagy negyedik hatványon van, a probléma amelynek a megoldását keressük test-probléma és ha az ismeretlen ötödik vagy hatodik hatványon van, még magasabb fokú és így tovább."[20]

Megelőzően megadott egy példát egy hatodfokú egyenlet redukciójára.[21] A példát a fentebb említett görbe-előállító mechanizmusa igénybevételével oldja meg, tehát szerkesztéses alapon. A példa:

$$y^6-8y^4-124y^2-64=0$$

éppen

$$x^{km}+a_1x^{(k-1)m}+\ldots+a_{k-1}x^m+a_k=0$$

alakú, ahol $k=3$, $m=2$ s mint az jól ismert, éppen ez az eset az, amelyet k-ad fokúra redukálva, ill. ezt követően k számú m-ed fokú $x^m-a=0$ binom egyenletre redukálva a négy alapművelettel és gyökvonással lehet megoldani. Hozzávéve ehhez a

[19] Uo. 401.
[20] Uo. 408.
[21] Uo. 399—400.

fentebb idézett sorokat: „...összeszámlálva azokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható", hajlandók lennénk azt hinni, hogy DESCARTES itt a GALOIS-elmélet közelébe jutott. De a folytatás meggyőz róla, hogy erről szó sem lehet: „Egyébként a fentebb mondottak legnagyobb részének a bizonyításától eltekintek — írja közvetlenül az idézett általános redukciós szabály után —, mivel oly könnyűnek látszanak, ha valaki veszi a módszeres vizsgálathoz szükséges fáradságot, mint én tettem, hogy önmaguktól adódnak, és hasznosabb lesz ily módon megérteni azokat, mint készen olvasva."[22]

Nem kell itt mélyebb tudás szándékos titkolásától tartani. Egyszerűen, ahol mi az egyenletek általános megoldhatóságának nehéz problémáját sejtenénk, ott DESCARTES semmi egyebet nem lát próbálgatásokkal történő egyedi megoldásoknál. Az általánosítás számára nem az egyenletek *megoldhatóságának* a síkján jelentkezik, hanem az egyenletek által leírt problémák *megszerkeszthetőségének* a síkján. „Ha meggyőződtünk, hogy az adott probléma test-probléma, akár negyedfokú az egyenlet, amely által kerestük, akárcsak harmadfokú, mindig meg lehet találni a gyökét a három kúpszelet valamelyikének a segítségével,"[23] és ezenkívül csak körző és vonalzó alkalmazása szükséges a szerkesztésben.

Az egyenletek redukciójának az elmélete azt volt hivatva megmutatni, miért nem oldhatók meg a test-problémák a kúpszeletek használata nélkül, s az ezeknél magasabb fokú problémák más, összetettebb vonalak nélkül. Az algebrai egyenletek és az arányelméleti szerkesztések egymásra való leképzése egészen más természetű betekintést nyújt az algebrai egyenletek struktúrájába, mint a mai algebra. DESCARTES nem ismeri a csoport, a számtest, a testbővítés fogalmát. Amit a modern történetírás ilyenekként ismer fel nála, nem egyéb későbbi fejlődés visszavetítésénél. DESCARTES nem végezhette el azt, ami GALOIS és ABEL feladata volt. DESCARTES algebrája a megelőző száz év algebrai fejlődésének az összegezése az antik kúpszelet- és helyelmélet csúcsa. Ezentúl azonban bevezet valamit, ami a jövő fejlődés szempontjából felbecsülhetetlen jelentőségű volt: az ismeretlen hatványai szerint rendezett, zérusra redukált egyenletpolinom fogalmát és alakját, és felismeri, hogy az ilyen alakban felírt egyenletek oszthatók, akárcsak a közönséges számok.

A XVII. század matematikájában az egyenletpolinom centrális fontosságú lesz. Közvetlenül csatlakoznak hozzá a németalföldi iskola és az angolok: HUDDE, SLUSIUS, PELL, COLLINS, James GREGORY és NEWTON. Az egyenletek redukciója a XVII. század közepére a matematika centrális kérdése lesz, s ezzel szoros kapcsolatban alakul ki előbb csak algebrai egyenlet formájában felírható, majd végtelen sok tagú egyenletre is érvényes formában az első *differenciálási algoritmus*. DESCARTES az egyenletpolinomban olyan *modellt* teremtett, amelyikre a következő évszázad alatt lassan és nagy nehézségek leküzdése árán felépülhetett a *differenciálás művelete.*

Az egyenletpolinom differenciálása

DESCARTES a *Geometrie*-ban speciális módszert adott meg a görbe érintőjének a szerkesztésére. A módszer az érintőkör sugarának — a normálisnak — a meghatározásán alapul. A normális abból a feltételből adódik, hogy az érintési pontban a görbe és a kör két metszéspontja egybeesik. Ebben a pontban a normálisra a kör,

[22] Uo. 409.
[23] Uo. 409.

a görbe, valamint PÜTHAGORÁSZ tételének a segítségével felírt négyzetes egyenletnek két egybeeső gyöke van.

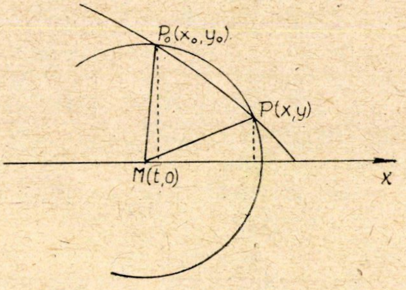
A történészek Moritz CANTOR-tól J. F. SCOTT-ig az érintő kör sugarának a meghatározására helyezik a hangsúlyt, ami a kör és a görbe két metszéspontjának az egybeeséséből adódik. J. E. HOFMANN éles szeme vette csak észre, hogy egyébről is van itt szó: DESCARTES választ a görbén, amelyhez érintőt akar húzni egy $P_0(x_0, y_0)$ pontot és a tengelynek választott egyenesen egy $M(t, 0)$ pontot. E körül az M pont körül leír egy P_0 ponton átmenő kört, ami a görbét újból metszi $P(x, y)$ pontban.

Ez az eljárás az ábra szerint az

$$(x-t)^2+y^2 = (x_0-t)^2+y_0 2$$

egyenletet eredményezi, ahonnan

$$y = x-t+\sqrt{(x_0-t)^2+y_0 2}.$$



1. ábra

Behelyettesítve ezt a görbe egyenletébe, $f(x, t)=0$ egyenletet kapja, amelyben $x-x_0$ lineárfaktor fordul elő. „DESCARTES most megköveteli — írja HOFMANN —, hogy az $x-x_0$ faktor még másodszor is lehasítható legyen, s így nyer t-re egy egyedül t-t tartalmazó feltételt.”[24]

HOFMANN ezt az eljárást egyáltalában nem tartja lekicsinylendő tettnek, mint azt a többi matematika történészek teszik, csupán mert megkerülte a határátmenetet. Éppen ellenkezőleg az a szép HOFMANN szerint ebben az eljárásban, hogy teljesen a cartesianus matematika keretei között maradva, *algebrai* megoldást talált erre az egyébként *infinitézimális* megfontolásokat igénylő problémára.[25]

Ennek az infinitézimális módszert megkerülő, tiszta algebrai eljárásnak azonban óriási jelentősége volt az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából. Ugyanis az első matematikus, aki ennek az érintőszerkesztési eljárásnak a jelentőségét felfogta, ezen keresztül alkotta meg a differenciálás műveletének az algoritmusát.

A két Francis SCHOOTEN — apa és fiú[26] — köré tömörült németalföldi cartesianus matematikusok a XVII. század közepén vaskos tanulmánykötetet adtak ki a *Geometrie*-hez írt kommentátorokból.[27] Ebben van közzétéve Johann HUDDE két rövid tanulmánya 1657, ill. 1658-ból. Az első[28] az egyenletek redukciójáról szól, a második[29] szélsőérték problémákról. Az 1657-es tanulmány tartalmazza az első világosan és általánosságban megfogalmazott differenciálási algoritmust a függvények egy speciális osztálya, az egyenletpolinomok esetére megfogalmazva. HUDDE

[24] SCHOLZ—KRATZER—HOFMANN: i. m. 64—65.
[25] Uo. 66.
[26] Az ifjabb Frans van SCHOOTEN-ről J. E. HOFMANN írt a reá jellemző csodálatra méltó apparatúrával ellátott rövid bibliográfiát. HOFMANN, J. E.: *Frans van Schooten der Jüngere.* Wiesbaden 1962.
[27] Renati Des Cartes Geometria, una cum notis Florimondi de Beaune, in Curia Blesensi Consiliarii Regii, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten, in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris. ... Frankfurti. (1695-ös kiadás.)
[28] *Johannis Huddenii Epistola Prima de Reductione AEquationum.* Uo. 406—506.
[29] *Johannis Huddenii Epistola Secunda de Maximis et Minimis.* Amsterdam 1658. Uo. 507—516.

maga hangsúlyozza, hogy eljárásának lényege már benne foglaltatott a *Geometrie*-ban, ő csupán explicite kifejtette, megmagyarázta és általánosította az ott elrejtett lehetőségeket. Valójában sokkal többet tett ennél, megadta a DESCARTES által bevezetett egyenletpolinom differenciálásának az explicit és általános szabályát. Az egyenletpolinom esetében ugyanis a differenciálhatóság egyszerűen két egybeeső gyök létezését jelenti. Pontosan ezt adta meg a *Geometrie*, amikor az érintőszerkesztés kritériumaként a görbét reprezentáló egyenlet két gyökének az egybeesését követeli meg. HUDDE azonban felismeri az érintőszerkesztés és a maximum-minimum problémák összefüggését és DESCARTES speciális eljárását *általános számolási móddszerré* fejleszti. Olyan *algoritmussá, amelyik egyenletpolinomok esetében mindig alkalmazható* s nem kell keresgélni alkalmazása előtt, vajon érvényes-e az adott esetben.

HUDDE, DESCARTES nyomán, mindig csökkenő hatványok szerint rendezett alakban, nullára redukálva írja fel az egyenletet s az ismeretlen hiányzó hatványait $*$-gal jelöli. Modern jelölésben (de egyebekben a cartesianus elmélet szelleméhez ragaszkodva)

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

alakban írhatjuk fel az egyenletpolinomot. HUDDE először is különbséget tesz kétféle redukció között. Az egyik, a közönséges értelemben vett redukció az ún. abszolút redukció az egyenlet közönséges algebrai műveletekkel történő megoldása. Ezzel nem foglalkozik. A másik, általa relatívnak nevezett redukció a feltett problémára vonatkoztatva vizsgálja az egyenlet gyökeinek a viselkedését. HUDDE csak ezzel a redukcióval foglalkozik.

Közvetlenül a *Geometrie*-hez kapcsolódva számos esetet sorol fel, hogyan kell olyan egyenletet redukálni, amely két másik egyenlet összeszorzásából állott elő. Mint láttuk, ezt a kérdést már DESCARTES elintézte. Azonban HUDDE felismeri, hogy a különféle esetek mind feltételezik annak az ismeretét, hogyan kell „két (vagy több) egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját megkeresni. Tegyük fel példának okáért, hogy két egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját kell megtalálni."[30]

Azonnal példán mutatja be az esetet. Legyen pl. a két egyenlet

$$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd = 0$$

és

$$d^4c - bbcdd + cacbb - caadd = 0.$$

Először azt kell megnézni, nincs-e valamely betű vagy szám, amellyel mindkét egyenlet osztható. Jelen esetben pl. mindkét egyenlet osztható c-vel:

$$d^3 - add + 2aab - 2abd = 0,$$

$$d^4 - bbdd + aabb - aadd = 0.$$

Azután mindkét egyetlenben ismeretlennek tekinti az egyik betűt. Legyen pl. ez a d betű:

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0,$$

$$\begin{array}{l} d^4 * - bbdd * + aabb = 0. \\ \quad\quad\; - aa \end{array}$$

[30] HUDDE, J.: *Epistola Prima*... 422.

Az egyenleteket a HUDDE által alkalmazott cartesianus írásmódban írtuk fel, ahol a zárójelet a tagok egymás alá írása helyettesíti. A legutolsó egyenlet a mi írásmódunkban

$$d^4-(b^2+a^2)d^2+a^2b^2 = 0$$

lenne. A csillagok a HUDDE-féle írásmódban az ismeretlen hiányzó hatványait (d^3-t és d-t) jelölik.

Ebben a lépésben veszi fel a HUDDE-féle egyenletpolinom azt az alakot, amit mi $f(x)=0$ alakkal jelölünk és ez a lépés vezet majd SLUSIUSon keresztül a parciális derivált képzéséhez. Ami ezután következik, az a továbbiak szempontjából nagyon lényeges, azért szó szerint idézzük.

„Azután a d^3-nek az első egyenletből vett értékét behelyettesíthetjük mindenütt a második egyenletben d^3 helyébe és ezt kapjuk:

$$d^4 = ad^3+2abdd-2aabd = bbdd+aadd-aabb$$

vagy (d^3 helyébe az első egyenletből)

$$\begin{array}{ll} & aadd+2aabd-2a^3b \\ & -2aabd+2abdd \\ \hline \text{azaz} & aabb-2a^3b+2abdd-bbdd = 0 \end{array}$$

és $dd = \dfrac{2a^3b-aabb}{2ab-bb}$ vagy aa; és $d=a$ vagy $d-a = 0$. Így ezt a dd értéket helyettesítve az első egyenletbe, az

$$aad-a^3-2abd+2aab = 0$$

egyenletet kapjuk.

Végül magát d-t helyettesítve be a helyébe az utolsó egyenletben

$$a^3-a^3-2aab+2aab = 0$$

egyenletre jutunk.

Mivel ebben az egyenletben minden tag kölcsönösen megsemmisíti egymást, bizonyítást nyert, hogy mind a

$$d^3-add-2abd+2aab = 0$$

egyenlet, mind a

$$\begin{array}{l} d^{4}*-bbdd*+aabb = 0 \\ \quad\;\; -aa \end{array}$$

osztható $d-a = 0$-val, azaz $d-a$ mindkettőnek az osztója, a legnagyobb közös osztó. És mivel továbbá mindkét adott egyenletet (vagy mennyiséget) előbb c-vel osztottuk, nyilvánvaló, hogy a legnagyobb közös osztójuk $d-a$ szorozva c-vel, vagy $dc-ac$."[31]

Lehet természetesen d helyett más betűt is ismeretlennek tekinteni és aszerint keresni meg a két egyenlet legnagyobb közös osztóját.

Mint látjuk — s a további fejlődés szempontjából ez a nagyon fontos — HUDDE világosan felismeri, hogy a legnagyobb közös osztó létesít olyan kapcsolatot egy

[31] Uo. 422—423.

$f(x)$ egyenlet s egy ebből megadott szabály szerint előállított másik $f'(x)$ egyenlet között, hogy az $f'(x)$ egyenletből az eredeti $f(x)$ egyenlet kétszeres vagy többszörös gyökét ki lehessen számítani. Ezt az eljárást adja meg az X. szabály:

„Hogyan kell redukálni minden, vagy betűkben vagy számokban megadott egyenletet, amelynek az ismeretlen mennyisége (vagy más betűje, amelyet mintegy ismeretlennek lehet tekinteni) két vagy több megegyező értékkel rendelkezik.

Először: ha az adott egyenletben két egyező gyök van, megszorzom azt egy tetszőlegesen felvett aritmetikai progresszióval. Magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Az így kapott szorzat legyen 0. Azután, midőn így két egyenletem van, megkeresem a fentebb megadott módszerrel a legnagyobb közös osztójukat. Végigosztom ezzel az adott egyenletet, így előállítható a hányados."[32]

Mai nyelven elmondva, egy adott $f(x)$ egyenlethez kell egy olyan másik $f'(x)$ egyenletet találni, hogy a két egyenletnek legyen legnagyobb közös osztója, $d(x)$. Ebben az esetben az eredeti $f(x)$ egyenletnek van többszörös gyöke, az $f(x)$ egyenlet szétejthető, redukálható egy alacsonyabb fokszámú egyenlet és a $d(x)$ szorzatára.

A további fejlődés szempontjából ennek a módszernek a jelentősége óriási. Az az $f'(x)$ egyenlet ugyanis, amit az $f(x)$ egyenletből azzal a feltétellel kaptunk, hogy legyen legnagyobb közös osztójuk, szolgál a maximum-minimum feladatok és az érintőfeladatok megoldására. Erről szól HUDDE második, 1658-as éretekezése.

Az értekezés a következő tétellel kezdődik: „Ahhoz, hogy egy egyenletben két gyök egyenlő legyen, meg kell szorozni egy tetszőleges aritmetikai progresszióval, magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Állítom, hogy ez a szorzat az az egyenlet, amelyből meg lehet találni a mondott gyököt."[33]

Mivel a két egybeeső gyök az egyenlet valamilyen szélsőértékét jelenti, az ismeretlen maximum vagy minimum értékét, nyilvánvaló, hogy az így kapott egyenletet lehet használni ennek a szélsőértéknek a megkeresésére. A kapott egyenlet és az eredeti egyenlet közös gyöke lesz az eredeti egyenlet kétszeres gyöke. „Úgyhogy a módszer bizonyítására még csupán azt kellene igazolni, hogy a kiinduló egyenletnek van két egyenlő gyöke. Amit valóban oly egyszerű bizonyítani, hogy ennél tovább időzni semmi más nem lenne, mint munka és olaj vesztegetése."[34]

E helyett felsorolja az egyes eseteket, s mindegyiket bemutatja néhány jól választott példán. Pl. az első esetet: ha az egyenlet csak egy ismeretlent tartalmaz és ez sem fordul elő a nevezőben, a következő példán mutatja be:

„Legyen pl. $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab$ x valamely maximumára érvényes. Szorozzunk tagonként

$$\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 1 & \text{-el:} \\ \hline \end{array}$$

Legyen

$$9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x = 0 \quad \text{vagy}$$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0.$$

[32] Uo. 433–434.
[33] HUDDE, J.: *Epistola Secunda*... Uo. 507.
[34] Uo. 510.

Az általános módszer szerint hasonlóképpen:

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c} x + aab = 0$$

Szorozzunk egy aritmetikai haladvánnyal	3	3·2	1	0	
Legyen, mint fent	$9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c} x = 0$				vagy

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0.\text{"}^{35}$$

Ebből az egyenletből kiszámított x az eredeti egyenlet kétszeres gyöke (tehá t szélső értékének a helye) lesz, mert a két egyenletnek van legnagyobb közös osztója.

Modern megfogalmazásban így foglalhatjuk össze a HUDDE-féle eljárást: Egy $f(x)$ egyenletnek akkor és csakis akkor van többszörös gyöke, ha $f(x)$-nek és egy, belőle megadott eljárással előállítható $f'(x)$ egyenletnek van $d(x)$ legnagyobb közös osztója, azaz ha $f(x)$ és $f'(x)$ nem relatív prím polinomok. Ebben az esetben az $f(x)$ többszörös gyökei a $d(x)=0$ egyenletnek tesznek eleget, ennek tesznek eleget az $f'(x)$ gyökei is, úgyhogy utóbbiakból kiszámíthatók. Az $\frac{f(x)}{d(x)}$ egyenlet pedig alkalmas az eredeti $f(x)$ egyenlet egyszeres gyökeinek a meghatározására.

Látnivaló, hogy a HUDDE-féle elmélet semmi egyéb, mint az a módszer, amit a mai algebra használ a gyökök többszörösségének a vizsgálatára.[36] Az $f'(x)$ nem más, mint az $f(x)$ polinom deriváltja. Természetesen HUDDE nem használta ezt az *elnevezést*, nem használta *explicite* még a *fogalmat* sem. De *ahogyan* használja a mi általunk így nevezett és definiált fogalmat, az fedi a mai értelmezést, s ezért átírhatjuk modern terminológiára.

A továbbiakat, hogy ti. hogyan lett a HUDDE-féle eljárásból NEWTONnál a mi parciális differenciálhányadosunknak megfelelő fogalom, már tisztázta WHITESIDE a XVII. század második felének matematikájáról szóló alapvető monográfiájában. A cartesianus algebra tehát nem csupán önmagában teljes tárgyalását adta az általa megteremtett egyenletpolinomoknak, hanem túlmutatott önmagán, s mintegy *modellként szolgált az algebrai egyenleteknél általánosabb függvények differenciálásának a kidolgozásához.*

Az érintőszerkesztés problémájának a megoldása abból a feltételből, hogy a problémára felállított egyenlet két gyöke összesen, nem kisebb jelentőségű az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából, mint amilyen ARKHIMÉDÉSZ kimeríthetetlenségi módszere volt. Azonban a két eljárás szellemében óriási a különbség. ARKHIMÉDÉSZ eljárása nehézkes, körülményes indirekt bizonyításon alapuló módszer volt, aminek az érvényességi feltételeit minden esetben külön meg kellett vizsgálni s egyedi módon ismételni el a bizonyítást. DESCARTES módszere a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenletekre leképezhető szerkesztések esetében, közvetlenül és általánosan alkalmazható egységes szabályt ad az egyenlet által előállított görbe érintőjének a megtalálására.

[35] Uo. 510.
[36] L. pl. SZELE Tibor: *Bevezetés az algebrába.* Budapest 1953, 216–218.

Igaz, hogy a módszere csak speciális esetben, az algebrai görbék esetében, érvényes. Ezáltal azonban ezen a területen megteremti egy olyan eljárás modelljét, ami NEWTON és LEIBNIZ kezében a *Geometrie*-ből kirekesztett transzcendens görbék esetére is alkalmazható algoritmussá bővül. Az a mód ugyanis, ahogyan két egyenlet megfelelő tagjainak az egyenlővé tételéből következtet a gyökök azonosságára, semmi egyéb, mint a deriváltképzés centrális gondolatának, a *lineáris approximálhatóságnak* a kifejezése.

A szerkesztések algebrája

Az aritmetika és geometria között létesített megfelelkezés, aminek a DESCARTES-algebra és „analitikus geometria" köszönheti létrejöttét, nem az algebrai és geometriai struktúrák ekvivalenciáján alapul. Nem az algebra leképezése geometriára, hanem a geometriai szerkesztések egyszerűvé, áttekinthetővé, racionális rend szerint elrendezetté tétele az algebra segítségével. A racionálist itt szó szerint kell érteni. Nem átvitt értelemben „ésszerűnek", hanem *arányos*nak kell fordítani, úgy, ahogyan azt az antik geometria és még DESCARTES is használta. Láttuk, milyen fontos szerepe volt DESCARTES görbeelméletében a középarányosok beiktatásának. A matematika történetírás jól ismeri és kellőképpen kiemeli DESCARTES matematikájának arányelméleti vonatkozásait. Éppen ez az arányelmélet kapcsolja a cartesianus matematikát legerősebben a reneszánsz századai alatt felfedezett antik matematikához.

A *Geometrie* első, XVII. századi kommentátorai többnyire ezeket az antik arányelméleti vonásokat veszik észre a műben. Így a század második felének a geometriájában bizonyos visszatérés észlelhető az antik módszerekhez, s azt lehetne mondani, hogy a valóban cartesianus geometria csak sokkal később, a XIX. században bontakozik majd ki CHASLES munkáiban.

Jóllehet CANTOR és már MONTUCLA is ismerték a XVI—XVII. századi hatalmas, antik matematikáról szóló kommentárirodalmat — joggal beszélhetünk ezzel kapcsolatban „matematikai humanizmusról" —, mégis nagyon keveset tudunk arról, milyen szerepet játszott az antik matematika pontos megismerése az ötlet- és problémaadáson túl a XVI—XVII. századi matematika kialakulásában.

Nem egyszerűen arról van szó, hogy pl. VIÈTE és FERMAT jól ismerik és utánozzák DIOPHANTOSZT vagy APOLLONIOSZT, s hogy a XVII. században végig lankadatlanul fáradoznak elveszett görög matematikai művek rekonstruálásán. A WARBURG-intézet korszakalkotó munkája óta tudjuk, milyen hallatlanul bonyolult történelmi problémát jelentenek „átvétel" és „rekonstrukció", ha olyan magasrendű és önmagában zárt kulturális képződményekről van szó, mint az antik művészet vagy matematika.

A XV., XVI. és XVII. század egyik legnagyobb jelentőségű, döntő élménye az antik kultúra recepciója volt. Ennek a nagy felfedezésnek a súlypontja a XVI. században van, a XV. század bizonyos értelemben elő-, a XVII. utójátéka. De ez az utójáték az antikvitásnak, mint élet- és kulturális eszménynek az értékcsökkenésével párhuzamosan az antikvitás egyre pontosabb megismeréséhez vezetett. POUSSIN sokkal antikabb, mint MICHELANGELO, HALLEY sokkal inkább követi APOLLONIOSZT, mint FERMAT. Az antikvitás *értékelése* és *megismerése* közötti ellentét a XVII. század végén az „antikok" és a „modernek" közötti nagy harcban realizálódik és hosszú küzdelem után a „modernek" javára dől el.

Amikor a XVII. század legvégén NEWTON műveinek nagy csodálója és kiadója, BENTLEY doktor *Phalaris*-ában leleplezi az antikvitásimádók hamisításait, nemcsak egy új szakmát, a klasszika-filológiát teremti meg, nemcsak a szövegkritika első nagy példáját adja, hanem egyben megöli az antikvitást is, az antikvitást mint utólérhetetlen életeszményt.

A humanizmus általános jelenség volt, a kultúra minden területét átitatta. Azért volt olyan általános és szenvedélyes az ellene vívott harc is a XVII. század második felében. A humanizmus mozgalma egész Európára kiterjedt. Általánosabb jelenség, mint a vallási reformok, mert utóbbiak egy északi (szárazföldi és óceáni) és egy déli (mediterrán) részre osztották Európát. A humanizmus azonban egész Európán átsöpört. Amikor a XVII. század során a gazdasági és kulturális vezetés a mediterráneumból fokozatosan északnyugatra tevődik át, úgyszólván ezt az egyetlen tényezőt, a humanizmust viszi magával.

A XVII. században a németalföldi és angol egyetemek lesznek a humanizmus fő fészkei. Ezzel azonban átalakul a mozgalom jellege: a humanizmus, ami Itáliában többnyire egyetemen kívüli emberek vállalkozásaként indult, itt szorosan egyetemi tudósokhoz kötődik. S ez nem kicsiny változást jelent. Szinte beosztási elvként lehetne végigvinni az aurópai kultúra történelmén az egyetemi és nem-egyetemi korszakok váltakozását, annyira fontos különbség az, hogy a kor szellemi életének a vezetői ennek a nagy, középkorban kialakult intézménynek a keretében dolgozó emberek-e vagy sem.

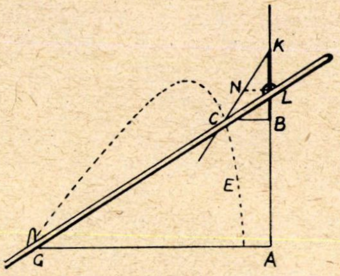
Nem lehet tehát figyelmen kívül hagyni, hogy a humanizmus a XVII. században lényegében egyetemi mozgalommá válik, s hogy a humanizmus első nagy és sikeres ellenfele, DESCARTES, mindvégig kívül marad az egyetemeken és egyre fokozódó harcban áll velük. Annyira nem egyetemi ember, s annyira gyűlöli az egyetemi tudósokat és humanistákat egyaránt, hogy szinte hajlandók vagyunk a PAPPOSZ-probléma *Geometrie*-ben adott megoldását egyszerű ürügynek tekinteni. Ürügynek és párviadalnak: lám, a híres problémát, amit a bámult EUKLIDÉSZ és APOLLONIOSZ sem tudtak megoldani, s aminek PAPPOSZ csak a legegyszerűbb esetét tudta nagy nehézségek árán megfejteni, azt ő, DESCARTES, az egyetemeken kívüli ember, az egyszerű *honette homme*, az egyszerű polgár játszi könnyedséggel és teljes általánosságban megoldotta.

Két kultúra ütközik itt össze a matematika területén: az egyetemivé vált humanista kultúra és az új, előbb gúnyként, majd DESCARTES által is vállaltan cartesianusnak nevezett Univerzális Módszer. Nem kis dologról volt hát szó és DESCARTES jogosan tiltakozott felháborodottan, mikor a *Geometrie*-t a PAPPOSZ-probléma egyik sikerült megoldásává akarták degradálni.

A PAPPOSZ-probléma megoldása DESCARTES-nál csupán a szerkesztések és az egyenletek között kidolgozott megfelelkezés egyik példája. Szerkesztések és egyenletek megfelelkeztetésének a módszeréhez csatlakozik SCHOOTEN és de WITT munkái nyomán a XVII. századi kúpszelet-elmélet nagy része. Ez jelentkezik HUYGENS és NEWTON műveiben. Ehhez csatlakozik, NEWTON és HALLEY nyomán, az egész késő XVII. századi, XVIII. század eleji angol geometria. A *Geometrie* eredeti felfogása azonban közben észrevétlenül egyre inkább elvész, egyre nagyobb lesz az antikvitáshoz való visszatérés, s alig lehet nagyobb különbséget elképzelni matematikai stílusban, mint a PAPPOSZ-problémának NEWTON és DESCARTES által adott megoldásait.

Ezzel párhuzamosan vész el az a másik, tisztán geometriai kúpszeletelmélet is, ami DESARGUES és PASCAL munkáiban a *Geometrie* algebrai kúpszeletelméletével egy időben és szintén az antikvitással való teljes szakításként, nem-egyetemi emberek kezében alakult ki. Mindkét módszer elmerül az egyetemi humanizmus fokozódó antikizálásában.

Az első lépést e felé az antikizálás felé az ifjabb Frans van SCHOOTEN Leyden-i professzor, DESCARTES tanítványa és HUYGENS mestere tette híres *Geometrie* kommentárjaiban. SCHOOTENben a matematikatörténetírás J. E. HOFMANN alapvető tanulmányáig DESCARTES szolgai kommentátorát és utánzóját látta. HOFMANN ismerte fel, hogy a Leyden-i professzor módszere több helyenjel entősen eltér a kommentált szöveg stílusától.[37]



2. *ábra*

A mi szempontunkból különösen fontosak SCHOOTEN második könyvhöz írott kommentárjai. A második könyvben vezeti be DESCARTES a görbék osztályozását és algebrai-geometriai analízisét az általa kigondolt ötletes, egymáson eltolható és egy középpont körül forgatható egyenesekből összeállított görbe-szerkesztő gép segítségével. Azután így folytatja: „Tegyük fel, hogy az *EC* görbét a *GL* vonalzó és *CNKL* sík idom metszése írja le, amelynek *KN* oldalát meghosszabbítjuk *C* irányába és amely úgy mozog az adott síkban, hogy *KL* oldala mindig egybeesik a mindkét irányban meghosszabbított *BA* vonal valamely részével és ezáltal *GL* vonalzónak, amely az *L* pontban a *CNKL* síkidomhoz van kapcsolva forgó mozgást ad *G* középpont körül. Ha meg akarom tudni, hogy milyen osztályba tartozik az így leírt görbe, választok egy egyenes vonalat, pl. *AB*-t amelyre a görbe pontjait vonatkoztatom és választok *AB* egyenesen egy *A* pontot, amelynél kezdem a számítást. ...Azután felveszünk a görbén egy tetszőleges *C* pontot és feltesszük, hogy a görbeleíró gép éppen ezt határozza meg. Ezen a *C* ponton át *CB* párhuzamost húzunk *GA*-hoz. Mivel *CB* és *BA* két ismeretlen és indeterminált mennyiség, egyiket y-nal, másikat x-szel jelöljük. Ahhoz, hogy e között a két mennyiség közötti viszonyt megkapjuk, tekintetbe kell venni egyéb, a görbe leírását megszabó ismert mennyiségeket is, mint *GA*, amit a-val jelölünk; *KL*, amit b-vel jelölünk és a *GA*-val párhuzamos *NL*, amit c-vel jelölünk. Azt állítom, hogy *CB* vagy y úgy aránylik *BK*-hoz, amint *NL* aránylik *LK*-hoz, vagyis amint c aránylik b-hez. Tehát *BK* egyenlő $\frac{b}{c}y$. De akkor *BL* egyenlő $\frac{b}{c}y-b$ és *AL* egyenlő $x+\frac{b}{c}y-b$. Továbbá *CB* úgy aránylik *LB*-hez, azaz y úgy aránylik $\frac{b}{c}y-b$-hez, amint *AG* vagy a aránylik *LA* vagy $x+\frac{b}{c}y-b$-hez. Az aránypár második tagját megszorozva a harmadikkal az eredmény $\frac{ab}{c}y-ab$, és ez egyenlő az aránypár első és negyedik tagjának a szorzatával,

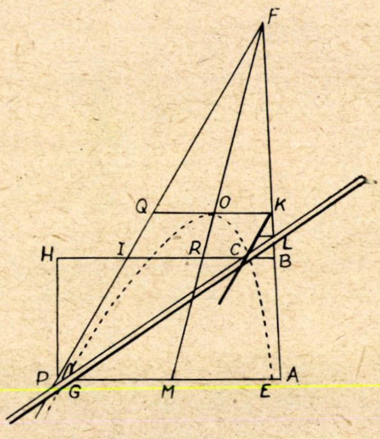
[37] HOFMANN, J. E.: i. m. 4.

ami $xy+\frac{b}{c}y^2-by$. A keresett egyenlet tehát

$$y^2 = cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac.$$

Ebből az egyenletből látjuk, hogy az *EC* görbe az első osztályba tartozik, amennyiben semmi egyéb, mint egy hiperbola."[38]

Ehhez a legutolsó mondathoz fűzi SCHOOTEN az alábbi hosszú magyarázatot: „Ha ugyanis *AG*-t meghosszabbítjuk *D*-ig és *DG*-t egyenlőnek vesszük *EA*-val vagy *NL*-el (l. 3. ábra, de vö. 2. ábrával) és *D* ponton keresztül *CK*-val párhuzamos egyenest húzunk, amely az *AB* egyenest *F* pontban metszi, *DF* lesz az egyik aszimptota és *AF* a másik. Tegyük fel ugyanis, hogy a *GOCE* vonal hiperbola és *DF*, *FA* az aszimptotái, továbbá hogy *DG*, *EA* egyenlők *NL*-el, *DF* párhuzamos *CK*-val, amint mondottuk, azaz *DFA* szög egyenlő *CKB* szöggel. Hosszabbítsuk meg *BC*-t, amíg *I*-ben metszi *DF*-et és húzzunk *D*-n keresztül egy *AF*-el párhuzamos *DH* egyenest, amely *H* pontban metszi *BC*-t. Mivel *DHI* és *KLN* háromszögek egyébként hasonlóak *FAD* háromszöghöz, azért hasonlóak egymáshoz is. Tehát ahogy *KL* aránylik *LN*-hez, azaz *b* aránylik *c*-hez, úgy aránylik *DH* vagy *AB*, azaz *x*, *HI*-hez, amely így $\frac{cx}{b}$ lesz. Levonva *HB*-ből ezt és *BC* vagy *y* szakaszt, marad *IC*, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Mivel a hiperbolánál Apolloniosz



3. ábra

Konikájának második könyv 10. propozíciója szerint *ICB* négyszög egyenlő *DEA* négyszöggel; ezért ha *IC*-t megszorozzuk *CB*-vel, azaz $a+c-\frac{cx}{b}-y$ kifejezést *y*-al, az így előálló *ICB* négyszög, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$ egyenlő lesz *DEA* négyszöggel, vagyis *ac*-vel, azaz azzal a négyszöggel, ami *DE*-nek vagy *GA*-nak az *EA*-val való szorzásából áll elő. Tehát rendezve az egyenletet, úgy csoportosítva, hogy *yy* legyen az egyik oldalon, $yy = cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$ egyenletre jutunk. Amely egyenlet ugyanaz, mint ami fentebb a *GL* vonalzó és a *CK* egyenes mozgásából állott elő. Így bebizonyítottuk az állításunkat, hogy a leírt *CE* vonal hiperbola, melynek aszimptotái *AF*, *FD*."[39]

Eljutottunk ahhoz a félmondathoz, amit SCHOOTEN hosszan kommentált: „amint hogy ez semmi egyéb, mint egy hiperbola". A kommentár azonban teljesen visszájára fordítja a mondat értelmét. SCHOOTEN bizonyításában a hiperbola aszimptotatulajdonságai a döntőek, s feleslegessé válik DESCARTES görbe-előállító mechaniz-

[38] DESCARTES, *OEuvres*, ADAM—TANNERY-féle kiadás, VI. kötet, 393—394.

[39] *Renati Des Cartes Geometria*... SCHOOTEN-féle kiadás, SCHOOTEN kommentárjai a II. könyvhöz. i. m. 171—172.

musa. DESCARTESnál ez az eszköz, ill. az általa megengedett *mozgás* biztosította a kapott görbe megfelelő, ahogy ő nevezte, „geometrikus" voltát. Ez az eszköz biztosította, hogy a kapott görbe algebrai egyenlettel legyen előállítható, s így természetes, hogy ez az algebrai mozgást létesítő eszköz szolgál az algebrai, DESCARTES által „geometrikusnak" nevezett görbék osztályozására. Ha ugyanis az eszközön a *CNK* egyenes helyére a most nyert hiperbolát, vagy bármely más, kettőnél nem magasabb fokú egyenlettel leírható, ún. első *genre*-beli görbét teszünk, akkor ennek a görbének és a *GL* vonalzónak a metszése az *ECA* hiperbola helyett egy ún. második *genre*-ba tartozó görbét ír le. Pl. ha *CNK* kör, melynek középpontja *L*, a görög geometria ún. második konhoidját kapjuk. Ha pedig a *CNK* egyenes helyén egy második *genre*-ba tartozó görbe van, akkor ennek és a forgó *GL* vonalzónak a metszése egy harmadik *genre*-ba tartozó görbét ír le. „És bármely más módon képzeljük is el egy görbe vonal leírását, feltéve, hogy ez a görbe azok közé tartozik, amelyeket geometrikusoknak neveztünk, mindig lehet találni ezzel a módszerrel egy egyenletet a meghatározására."[40]

Szerkesztés és algebrai egyenlet között ezáltal az eljárás által definiált „algebrai mozgás" létesít kapcsolatot. Az algebrai mozgás által definiált görbe egyetlen pontjának a meghatározásához sincs szükség infinitézimális processzusra, aproximációra. Ez az algebrai mozgás biztosítja, hogy a *Geometrie*-ben elkerülhető a végtelen aproximáció fogalmával dolgozó infinitézimális matematika, hogy megmaradhatunk a görbék leírásában az egyenletpolinomoknál, ahol még az érintőszerkesztés és a maximum-minimum feladatok, ezek a tipikusan infinitézimális módszereket kívánó problémák is megoldhatók aproximáció nélkül, limes fogalom nélkül, anélkül, amit közönségesen infinitézimális alatt értenek.

Ugyanis az algebrának „nem kell támaszkodnia a differenciálhányados analízisbeli fogalmára (amelynek értelmezése a határérték nem-algebrai fogalmának segítségével történik), mert tisztán algebrai úton is definiálni tudjuk a polinom deriváltját, s e fogalom számunkra szükséges tulajdonságait is bevezethetjük ilyen módon."[41]

Ezt végezték el DESCARTES és HUDDE: a polinom deriváltjának számukra szükséges tulajdonságait vezették le tisztán algebrai úton. Ezért központi jelentőségű az algebrai mozgás, amelyik az egyenletpolinom és a görbe közötti összefüggést létesíti. S ezért tesz olyan nagy lépést visszafelé SCHOOTEN, amikor kiküszöböli az antik módszerek segítségével ezt a mozgást. Hiába fordítja le SCHOOTEN az antik definíciókat az új betűszámtani nyelvre, ebből nála nem lesz a DESCARTES értelmében vett algebra. DESCARTES algebrája ugyanis nem betűszámtan. A *Geometrie* egy új, nagy jelentőségű fogalom, a deriválható egyenletpolinom és a vele való munka szabályainak a megteremtését tartalmazza. Az algebrai egyenletekkel leírható görbék világa ez, ahol általános szabály adható meg ezen görbék érintőjének a szerkesztésére és a görbéket előállító egyenletek szélső értékének a számítására. Ebből a szemszögből tekintve a *Geometrie* nem az első analitikus geometriai értekezés, hanem az *egész* újkori függvénykalkulus nélkülözhetetlen *előfeltétele.*

Semmit nem szóltunk még a *Geometrie* első könyvéről, amelyben DESCARTES bevezeti egy vonalszakasz és a mennyiség közötti megfelelkezést. Általában ezt szokták a *Geometrie* legnagyobb tettének és lényegének tartani. Azonban meg-

[40] Geometrie, *OEuvres*, ADAM—TANNERY-féle kiadás, VI. kötet, 395.
[41] SZELE Tibor: i. m. 216.

található ez már FERMAT-nál is, ezzel dolgozott HARRIOT, VIÈTE, ez húzódott meg BRADWARDINE és ORESME elképzelései mögött, ezt használta PAPPOSZ, APOLLONIOSZ, ezen alapul az euklidészi *Elemek* egész második könyve. Úgyszólván az egész görög geometria az általános mennyiség vonalszakaszként való interpretálásán alapul. DESCARTES itt csak alkalmasabb jelölést vezetett be, s a matematika végső soron nem jelöléseken múlik. A vonalszakaszt és a valósszámot DESCARTES sem veszi egyenlőnek. Ehhez ugyanis a határérték fogalma szükséges, legalább abban az intuitív formában, ahogyan NEWTON bevezette. NEWTON az első, aki, ha bizonyítani még nem is tudja, egyenlőséget tesz vonalszakasz és — intuitíve felfogott — valósszám közé. DESCARTES-nál talán éppen a mennyiség fogalma a legantikabb. De *ahogyan* ezzel az antik vonalszakasz-mennyiség fogalommal dolgozik, a vele elvégezhető öt algebrai művelettel és (implicite) az egyenlőségjellel definiálva azt, annak nincs párja előtte az antikvitásban és utána a modern algebráig. Ez az első könyv jelentősége: definiálja az algebra eredményeit és módszerét, mint ami „a matematika olyan tényein alapul, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók”.[42]

Nem maga a mennyiség, hanem a vele való munka definiálása DESCARTES matematikájának a lényege. Ezért jut geometriájában olyan fontos szerep a mozgásnak. SCHOOTEN antik aszimptota-keretekbe szorított és DESCARTES szabad mozgásban leírt görbéje jól szemlélteti a két geometria közötti különbséget. A görög elmélet kész, statikus formákkal dolgozik, a cartesianus geometria a mozgást kihasználó kinematikus eljárás. A görög geometriában a görbék tulajdonságait mindig bizonyos egyenesek szabják meg, a görög geometria, amelyik nem ismeri még intuitíve sem a „folytonosság” fogalmát, nem képes magukhoz a görbékhez férkőzni, mindig egyenesek kereteibe kényszeríti őket. DESCARTES a mozgás zseniális használatával intuitíve biztosítja geometriája számára a „folytonosság” *követelményének* a teljesülését. Ezáltal közvetlen utat talál a görbék egy nagy csoportjához. Még számos görbét kirekeszt a geometriából és hosszú utat kell megtenni a matematikának, amíg ezek is általánosságban tárgyalhatók lesznek. Többek között explicite tisztázni kell, mit jelent a „folytonosság”. De azokra a görbékre, amelyek egy speciális mozgásféleség segítségével algebrai egyenletekre vezethetők vissza, egységes matematikai módszerek adhatók meg. Ezek a módszerek egymással összefüggő, zárt egészet képeznek, jól definiált matematikai rendszert. Ez a felfogás és eljárásmód lett az újkori matematika mintaképe. Ahogyan J. E. HOFMANN írta, DESCARTES nyitotta meg az utat a modern matematikai gondolkozási mód felé.

(Beérkezett: 1964. XII. 10.)

[42] Uo. 9.