# FOLYTONOS ÁLLAPOTÚ MARKOV-FOLYAMATOK STATISZTIKAI VIZSGÁLATÁRÓL, IV.

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

## Bevezetés

Ebben a dolgozatban azoknak az eredményeknek az ismertetésére kerül sor, melyek az $n$-dimenziós — időben diszkrét — stacionárius, *Gauss—Markov*-folyamatok paramétereinek becslésével s azok eloszlásaival kapcsolatosak. A kézikönyvekben (vö. pl. GRENANDER—ROSENBLATT [8]) az $A$ matrix (lásd alább az (1. 2) összefüggést) sajátértékeire tett kikötésekkel történnek a paraméterbecslések és azok eloszlásainak meghatározása. Ez bizonyos előismeretet követel meg a folyamatról magáról s elsősorban az ismeretlen $A$ matrixról, a gyakorlatban azonban ez a legtöbbször hiányzik. A dolgozatban egy olyan lehetséges tárgyalási módot mutatok be, melynek segítségével az általános feladat bizonyos speciális esetei könnyen visszavezethetők az egydimenziós valós és komplex esetre (egyszeres sajátértékek esetén), másrészt az általános feladat megoldása is könnyebben kezelhetővé válik. Az $A$ matrix (vagy differenciálegyenletek esetén a $Q$-matrix) *Jordan*-féle alakban történő felírása azonban nem a probléma statisztikai, hanem előzetes nem-sztochasztikus vizsgálatát teszi szükségessé. Amennyiben ez nem lehetséges, az egyes feladatok megoldása igen bonyolult s igen hosszú megfigyeléssorozatra van szükség az egyes paraméterek megbízható becsléséhez (emlékeztetni kell arra, hogy matrixok sajátértékei meghatározása komoly numerikus nehézségeket jelent). Megmutatom, hogy mely paraméterek becsülhetők jól (azaz kevesebb megfigyelés alapján is nagyobb pontossággal). Ismertetem a tárgyalt folyamatok elégséges statisztikáira vonatkozó korábbi eredményeket [5] is. A többdimenziós stacionárius folyamatok elméletére vonatkozó eredmények megtalálhatók ROZANOV [11] nemrég megjelent könyvében, melyre gyakran utalás nélkül is hivatkozom. A dolgozat alapvető eredményei disszertációmban [4] szerepeltek, azonban nyomtatásban nem jelentek meg.

A dolgozatban sehol nem történik hivatkozás konkrét gyakorlati feladatokra, megemlítem elsősorban a híradástechnikai és közgazdasági alkalmazások jelentőségét (l. pl. QUENOUILLE [10] könyvecskéjében szereplő példákat).

## AZ IDŐBEN DISZKRÉT $n$-DIMENZIÓS STACIONÁRIUS, NORMÁLIS ESET

### 1. §. Konstans együtthatós sztochasztikus differenciál- és differenciaegyenletrendszer

Ha a $\xi_k(t)=\{\xi_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ $n$-dimenziós reguláris folyamat stacionárius, *Gauss—Markov* típusú, akkor — éppen úgy, mint az egy- és kétdimenziós esetben — kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet

$$d\xi(t) = Q\cdot\xi(t)dt+d\zeta(t), \tag{1. 1}$$

ahol $Q=\{q_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ egy négyzetes matrix, melynek $\lambda_i$ sajátértékeire fennáll, hogy $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0$, és $\zeta(t)=\{\zeta_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ egy $n$-dimenziós *Wiener*-folyamat; $\mathbf{M}\Delta\zeta_k(t)=0$, $\mathbf{M}\Delta\zeta_i(t)\Delta\zeta_j(t)=\Delta t\cdot s_{ij}$, $\{s_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ pozitív definit. A $Q$ matrix egyértelműen meg van határozva. (Lásd DOOB [6]).

A $\xi(k\varepsilon)$ $(\varepsilon>0, k=0, \pm 1, \ldots)$ folyamat diszkrét stacionárius *Gauss—Markov* típusú és így kielégíti a (legyen az egyszerűség kedvéért $\varepsilon=1$)

$$\xi(k+1) = A\xi(k)+\zeta(k+1) \tag{1.2}$$

egyenletet, ahol $\zeta(k)$ egy független *Gauss* sorozat. Az $A$ matrix $\varrho_i$ és a $Q$ matrix $\lambda_i$ sajátértékei között a következő összefüggés áll fenn: $\varrho_i=e^{\lambda_i}$.

Az $R^n$ térben az $S$ nemszinguláris matrix segítségével végrehajtott lineáris leképezéssel a $Q$ és $A$ matrixok $Q'=SQS^{-1}$, ill. $A'=SAS^{-1}$ matrixokba mennek át és a $\xi'=S\xi$ valószínűségi változókra vonatkozó differenciál-, ill. differencia-egyenlet

$$d\xi'(t) = Q'\xi'(t)dt+d\zeta'(t), \tag{1.1'}$$

illetve

$$\xi'(k+1) = A'\xi'(k)+\zeta'(k+1) \tag{1.2'}$$

alakú lesz, ahol $\zeta'=S\zeta$. Az $S$ matrix megfelelő választásával elérhető, hogy $Q'(A')$ a lehető legegyszerűbb alakú legyen. Általában egy tetszőleges matrix nem hozható diagonális alakra, azonban az ún. *Jordan*-féle alakra hozás minden matrixra elvégezhető.

Az $m$-edrendű matrixot *Jordan*-féle elemi matrixnak nevezzük, ha

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \lambda \end{pmatrix},$$

alakú. Egy $B$ matrixról akkor mondjuk, hogy *Jordan*-típusú, ha egy vagy több elemi *Jordan*-féle matrixból áll, melyek a fődiagonálisa mentén helyezkednek el, míg a matrix összes többi eleme nullával egyenlő.

Az $R^n$ tér $h_1, \ldots, h_m$ vektorsorozatát a $B$ matrix $\lambda$ sajátértékéhez tartozó *szériának* nevezzük ha teljesül, hogy $h_1\neq 0$, $Bh_1=\lambda h_1$, $Bh_2 = \lambda h_2+h_1, \ldots, Bh_m = \lambda h_m+h_{m-1}$. Igaz a következő tétel, mely azt mutatja, hogy tetszőleges matrix *Jordan*-típusú alakra hozható. (Lásd pl. PONTRJAGIN [9] 34. §).

*Tétel.* Az $R^n$ térnek létezik olyan bázisa, mely a $B$ matrix által meghatározott leképezés egy vagy több szériájához tartozó összes vektorokból áll. Ha $B$ valós, a bázist alkotó szériák kiválaszthatók úgy, hogy a valós sajátértékeknek megfelelő szériák valósak legyenek, és a komplex sajátértékű szériák pedig páronként komplex konjugáltak legyenek.

A tételben említett koordinátarendszerben a $B$ matrixnak megfelelő leképezésnek egy új matrix szerinti leképezés felel meg s ez az új matrix már *Jordan*-típusú.

Az (1. 1') és (1. 2') egyenletek (elhagyva a vesszős jelölést) a következő alakúak lesznek a *Jordan*-féle alakra hozás után:

$$
\begin{aligned}
d\xi_1(t) &= \lambda_1\xi_1(t)dt+\xi_2(t)dt+d\zeta_1(t)\\
d\xi_2(t) &= \lambda_1\xi_2(t)dt+\xi_3(t)dt+d\zeta_2(t)\\
&\vdots\\
d\xi_{k_1}(t) &= \lambda_1\xi_{k_1}(t)dt+d\zeta_{k_1}(t)\\
d\xi_{k_1+1}(t) &= \lambda_2\xi_{k_1+1}(t)dt+\xi_{k_1+2}(t)dt+d\zeta_{k_1+1}(t)\\
&\vdots\\
d\xi_n(t) &= \lambda_r\xi_n(t)dt+d\zeta_n(t),
\end{aligned}
\tag{1. 3}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
\xi_1(k+1) &= \varrho_1\xi_1(k)+\xi_2(k)+\zeta_1(k+1)\\
&\vdots\\
\xi_{k_1}(k+1) &= \varrho_1\xi_{k_1}(k)+\zeta_{k_1}(k+1)\\
\xi_{k_1+1}(k+1) &= \varrho_2\xi_{k_1+1}(k)+\xi_{k_1+2}(k)+\zeta_{k_1+1}(k+1)\\
&\vdots\\
\xi_n(k+1) &= \varrho_r\xi_n(k)+\zeta_n(k+1).
\end{aligned}
\tag{1. 4}
$$

Ilyen alakú egyenletrendszer esetén az egy- és kétdimenziós esetben kapott eredmények minden különösebb nehézség nélkül átvihetők, hiszen sztochasztikus differenciálegyenletrendszerünk valós és komplex folyamatokra vonatkozó egyenletekre esett szét. A későbbiekben, amikor feltételezzük, hogy a *Jordan*-alakra hozás elvégezhető, csak egyetlen *Jordan*-féle blokkal fogunk foglalkozni.

## 2. §. Elégséges statisztikák

Kiszámítjuk a

$$\xi(t)+a_1\xi(t-1)+\ldots+a_p\xi(t-p) = \zeta(t) \tag{2. 1}$$

sztochasztikus differenciaegyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ stacionárius, *Gauss*-folyamat egy véges realizációjának sűrűségfüggvényét. Feltesszük, hogy $\mathbf{M}\xi(t)=0$ és a $\zeta(t)$ folyamat független valószínűségi változók sorozata (természetesen normális eloszlású). A $\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(N)$ valószínűségi változók kovariancia matrixa a stacionaritás miatt mindkét diagonálisra nézve szimmetrikus lesz és ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik $R_N^{-1}$-el jelölt inverze is. A $\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(N)$ változók sűrűségfüggvénye

$$p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(x_1,\ldots,x_N) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}|R_N|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\tfrac{1}{2}(X_N R_N^{-1} X_N^*)\}$$

lesz. Az

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1\\
&\vdots\\
x_p &= x_p\\
x_{p+1}+a_1x_p+\ldots+a_px_1 &= z_{p+1}\\
&\vdots\\
x_N+a_1x_{N-1}+\ldots+a_px_{N-p} &= z_N
\end{aligned}
$$

leképezéssel (melynek determinánsa 1) és felhasználva azt, hogy a $(\xi(1), \dots, \xi(p))$ változók függetlenek a $\zeta(p+1), \dots, \zeta(N)$ változóktól, melyek eloszlását ismerjük, a függetlenségi feltevés szerint kapjuk, hogy

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(p), \zeta(p+1), \dots, \zeta(N)}(x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_N) =$$
$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |R_p|^{-\frac{1}{2}} \sigma_\zeta^{-(N-p)} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[(X_p R_p^{-1} X_p^*) + \frac{1}{\sigma_\zeta^2}\sum_{p+1}^{N} z_i^2\right]\right\}$$

és innen

$$p_{\xi(1), \dots, \xi(N)}(x_1, \dots, x_N) =$$
$$=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}|R_p|^{-\frac{1}{2}}\sigma_\zeta^{-(N-p)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(X_p R_p^{-1} X_p^*) + \frac{1}{\sigma_\zeta^2}\sum_{p+1}^{N}(x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_p x_{i-p})^2\right]\right\}$$

A (2. 1) előállításból az $R_N^{-1}$ matrixot a mindkét diagonálisra nézve szimmetrikusság felhasználásával teljesen meg tudjuk határozni. Legyen $a_0 = 1$, akkor

$$\text{(2. 2)} \qquad R_N^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0 a_1 & a_0 a_2 & \dots & a_0 a_p & 0 & 0 \dots 0 \\ a_0 a_1 & a_0^2 + a_1^2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & \dots & a_0 a_{p-1} + a_1 a_p & a_0 a_p & 0 \dots 0 \\ a_0 a_2 & a_0 a_1 + a_1 a_2 & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 & \dots & & & \\ \vdots & & & & & & \\ a_0 a_p & a_0 a_{p-1} + a_1 a_p & & \dots & \sum_1^p a_i^2 \,. & & \sum_1^{p-1} a_i a_{i+1} \dots \\ 0 & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & a_0^2 \end{pmatrix}$$

azaz az $R_N^{-1}$ matrix $r_{ij}$ eleme a következő alakú

$$\text{(2. 3)} \qquad r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |i-j| > p+1 \\ \sum\limits_{k=0}^{p-|j-i|} a_k a_{k+|j-i|}, & \text{ha } |i-j| \leqq p+1,\ p < i,\ j < N-p+1 \\ \sum\limits_{k=0}^{i} a_k a_{k+j-i}, & \text{ha } i < p,\ i \leqq j \\ \sum\limits_{k=0}^{i} a_k a_{k+(i-j)}, & \text{ha } j \leqq i \leqq p \end{cases}$$

Ezenkívül

$$\text{(2. 4)} \qquad |R_N^{-1}| = |R_p^{-1}| \cdot \sigma_\zeta^{2(N-p)}.$$

DÜNKIN ismert tételéből [7], mely szerint

$$\log p(X, a) - \log p(X; a^0)$$

fix $a^0$ esetén szükséges és elégséges statisztikája a $p(X, a)$ eloszlásseregnek, és $R_N^{-1}$ fenti alakjából következik a

2. 1 TÉTEL: *Ha a $\xi(t)$ stacionárius Gauss-folyamat kielégíti a* (2. 1) *egyenletet az $x_1, x_2, \ldots, x_N$ $(N>p)$ minta*

$$\Big(\sum_{p+1}^{N-p} x_i^2,\ \sum_{p+1}^{N-p+1} x_i x_{i-1}, \ldots, \sum_{p+1}^{N} x_i x_{i-p},\ x_1^2+x_N^2,\ x_1x_2+x_Nx_{N-1}, \ldots x_1x_p+$$

$$+x_Nx_{N-p+1},\ x_1^2+x_{N-1}^2, \ldots, x_2x_p+x_{N-1}x_{N-p+1}, \ldots, x_p^2+x_{N-p+1}^2\Big)$$

*rendszere szükséges és elégséges statisztikát alkot.*

Ismeretes (lásd pl. ROZANOV [1]), hogy a (2. 1) egyenletnek eleget tevő folyamat spektrál sűrűségfüggvénye $e^{i\lambda}$ olyan racionális függvénye, melynek számlálója konstans. Kérdés, hogy általában a racionális spektrál sűrűségű folyamatok esetén található-e egy elégséges statisztikarendszer. Amint az alábbi példa mutatja, általában nem létezik ilyen ($N$-nél kevesebb elemet tartalmazó) rendszer. Tekintsük ugyanis a

$$\xi(t) = a_0\zeta(t)+a_1\zeta(t-1)$$

folyamatot, ahol $\zeta(t)$ egy független normális eloszlású sorozat. Legyen $\mathbf{M}\xi(t)=0$ és

$$\sigma_\xi^2 = \mathbf{M}\xi^2(t) = (a_0^2+a_1^2)\mathbf{M}\zeta^2(t), \quad \varrho = \frac{\mathbf{M}\xi(t)\xi(t-1)}{\sigma_\xi^2} = \frac{a_0a_1}{a_0^2+a_1^2}.$$

Nyilván

$$\mathbf{M}\xi(t)\xi(t-\tau) = 0, \quad \text{ha } |\tau|>1.$$

A $\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(N)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$p(y_1, \ldots, y_N) = \sigma_\xi^{-N}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}|B_N|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}^* y_i y_j\right\}$$

alakú, ahol $B_N^{-1}=\{b_{ij}^*\}_{i=1,N}^{j=1,N}$ a $B_N$ korrelációs matrix inverze. Könnyű kiszámítani, hogy

$$b_{ij}^* = (-1)^{j-i}\varrho^{|j-i|}|B_{i-1}|\,|B_{N-j}|\frac{1}{|B_N|},$$

ha $i<j$ és $|B_i| = \dfrac{u_1^{i+1}-u_2^{i+1}}{u_1-u_2}$ (az inverz matrix természetesen ismét szimmetrikus mindkét diagonálisra nézve.) Észre kell venni, hogy $|B_N|$ kielégíti a

$$|B_N| = |B_{N-1}|-\varrho^2|B_{N-2}|$$

differenciaegyenletet és $u_1, u_2$ az

$$u^2-u+\varrho^2 = 0$$

egyenlet gyökei, azaz $u_1 = \dfrac{1+\sqrt{1-4\varrho^2}}{2}$, $u_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4\varrho^2}}{2}$. Mivel pl. a $b_{iN}^*$ $(i=1, \ldots, N)$ függvények mint $\varrho$ függvényei függetlenek, nem létezik az $x_1, \ldots, x_N$ változók olyan függvényrendszere, mely elégséges statisztikarendszert alkotna (lásd DÜNKIN [7] 2. §.).

Többdimenziós folyamatok esetén csak azt a *Markov*-típusú stacionárius *Gauss*-folyamatot tekintsük, mely kielégíti a

$$\xi(t) = A\xi(t-1)+\zeta(t)$$

differenciaegyenletet, ahol $A=\{\alpha_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$, $\xi(t)=\{\xi_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\zeta(t)=\{\zeta_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$, és

$$\mathbf{M}\zeta_j(t)=0$$

$$\mathbf{M}\zeta_i(t)\zeta_j(t+\tau)=\begin{cases} s_{ij}, & \text{ha } \tau=0 \\ 0, & \text{ha } \tau\neq 0 \end{cases}$$

A $\zeta(t)$ sorozat független.

A $\xi(t)$ folyamat $B(\tau)$ korrelációs függvénye,

$$B(\tau)=A^{\tau}\cdot B(0) \tag{2. 5}$$

alakú, ahol

$$B(0) = A\cdot B(0)\cdot A^{*}+B_{\zeta}(0). \tag{2. 6}$$

A $B(0)$ matrix meghatározása a következő módon történhet akkor, amikor az $A$ matrix egyetlen *Jordan*-féle blokkból áll és $B_{\zeta}(0)$ diagonális. A $\xi(t)$ folyamat ekkor eleget tesz a

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= \varrho\xi_n(t-1)+\zeta_n(t) \\ \xi_{n-1}(t) &= \varrho\xi_{n-1}(t-1)+\xi_n(t-1)+\zeta_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ \xi_1(t) &= \varrho\xi_1(t-1)+\xi_2(t-1)+\zeta_1(t) \end{aligned}$$

összefüggéseknek. Az első összefüggés mindkét oldalát beszorozva $\xi_n(t-1)$, majd $\xi_n(t)$-vel és minden alkalommal várható értéket képezve, a következő összefüggésekre jutunk

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\zeta_n(t) = s_n$$

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\xi_n(t-1) = \varrho\beta_{nn}^2, \quad \text{ahol} \quad \beta_{nn}=M\xi_n^2$$

$$\beta_{nn} = \varrho^2\cdot\beta_{nn}+s_n, \quad \beta_{nn}=\frac{s_n}{1-\varrho^2}.$$

Ugyancsak az első összefüggést $\xi_{n-1}(t)$-vel és $\xi_{n-1}(t-1)$-gyel beszorozva és várható értéket képezve, az

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\xi_{n-1}(t) = \varrho\mathbf{M}\xi_n(t-1)\xi_{n-1}(t)$$

$$\mathbf{M}\xi_n(t)\xi_{n-1}(t-1) = \varrho\,\mathbf{M}\xi_n(t-1)\xi_{n-1}(t-1)$$

összefüggéseket kapjuk. Ezek felhasználásával a második egyenletnek $\zeta_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$, $\xi_{n-1}(t)$ és $\xi_n(t-1)$-gyel való beszorzása és a várható értékképzéssel azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\zeta_{n-1}(t) = s_{n-1}$$

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_n(t-1) = \frac{s_n}{(1-\varrho^2)^2}$$

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t-1)\xi_n(t) = \frac{\varrho^2 s_n}{(1-\varrho^2)^2}$$

$$\mathbf{M}\xi_{n-1}(t)\xi_{n-1}(t-1) = \varrho\beta_{n-1,\,n-1}+\frac{\varrho s_n}{(1-\varrho^2)^2}$$

$$\beta_{n-1,\,n-1}(1-\varrho^2) = s_n\frac{1+\varrho^2}{(1-\varrho^2)^2}+s_{n-1}.$$

Ezt az eljárást folytatva a $B(0)$ matrix összes elemei meghatározhatók.

Feltettük, hogy a $\zeta(t)$ folyamat komponensei is függetlenek, másrészt a $\xi(1), \ldots$ $\ldots, \xi(N)$ változók és a $\xi(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(N)$ változók közötti (1. 1)-nek megfelelő leképezés determinánsa 1 lesz, ily módon

$$
\begin{aligned}
(2.7) \qquad & p_{\xi(1), \ldots, \xi(N)}(x_{11}, \ldots, x_{1N}; x_{21}, \ldots, x_{2N}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{nN}) = \\
& = (2\pi)^{-\frac{Nn}{2}} |R_{Nn}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} X R_{Nn}^{-1} X^*\right\} = \\
& = p_{\xi(1)}(x_{11}, \ldots, x_{n1})(2\pi)^{-\frac{(N-1)n}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n} s_i\right)^{-\frac{N-1}{2}} \cdot \\
& \cdot \exp\left\{-\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i+1}^{n} \frac{1}{2s_i} (x_{ij+1} - \alpha_{i1} x_{1j} - \ldots - \alpha_{in} x_{nj})^2\right\}
\end{aligned}
$$

ahol

$$
(2.8) \qquad p_{\xi(1)}(x_{11}, \ldots, x_{n1}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |B(0)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} X_1 B(0)^{-1} X_1^*\right\}
$$

A fenti összefüggésből látszik, hogy

$$
(2.9) \qquad |R_{Nn}| = |B(0)| \cdot \left(\prod_{i=1}^{N} s_i\right)^{N-1},
$$

ahol az $R_{Nn}^{-1}$ matrix

$$
(2.10) \quad \begin{pmatrix}
a_{10} & b_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a'_{12} & b_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} & b_{1n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
b_{11} & a_{11} & b_{11} & \cdots & \cdots & 0 & b'_{12} & a_{12} & b_{12} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & b'_{1n} & a_{1n} & b_{1n} & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & a_{11} & b_{11} & 0 & & & & a_{12} & b_{12} & & & & & & a_{1n} & b_{1n} \\
0 & & & & b_{11} & a''_{12} & 0 & & & & a'_{12} & a''_{12} & & & & & & b'_{1n} & a''_{1n} \\
a'_{12} & b'_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{20} & b_{22} & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & & & & & \\
b_{12} & a_{12} & b'_{12} & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & a_{22} & b_{22} & \cdots & & 0 & & & & & & & \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & \\
0 & & & & & a''_{12} & & & & & a_{22} & b_{22} & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & b_{22} & a''_{22} & \cdots & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
a'_{1n} & b'_{1n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & & & a_{n0} & b_{nn} & 0 & \cdots & & 0 \\
b_{1n} & a_{1n} & b'_{1n} & \cdots & 0 & 0 & & & & & & & & b_{nn} & a_{nn} & b_{nn} & \cdots & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & & & & & \\
0 & & & \cdots & a_{1n} & b'_{1n} & & & & & & & & 0 & & & \cdots & a_{nn} & b_{nn} \\
0 & & & \cdots & b_{1n} & a''_{1n} & & & & & & & & 0 & & & \cdots & b_{nn} & a''_{n0}
\end{pmatrix}
$$

alakú, az

$$
\begin{aligned}
a_{i0} &= \beta_{ii} + \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha_{ij})^2}{s_j}, \\
a''_{i0} &= \frac{1}{s_i} \\
a'_{ik} &= \beta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ik}}{s_j}, \quad a''_{ik} = 0, \quad \text{ha} \quad k \neq i,\ k \neq 0, \\
a_{ii} &= \frac{1+(\alpha_{ii})^2}{s_i} + \sum_{j \neq i} \frac{(\alpha_{ji})^2}{s_j}, \\
a_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{ji}+\alpha_{jk}}{s_j}, \quad k \neq i, \\
b_{ik} &= -\frac{\alpha_{ki}}{s_k}, \\
b'_{ik} &= -\frac{\alpha_{ik}}{s_i}, \quad B(0) = \{\beta_{ik}\}_{i=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}},
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

elemekkel. Ebből következik, hogy elégséges statisztika a

$$
\Bigg( \sum_{j=2}^{N} x_{ij}^2, \quad \sum_{j=1}^{N} x_{i_1 j} x_{i_2 j}, \quad \sum_{j=1}^{N-1} x_{i_1 j} x_{i_2 j+1}, \quad i, i_1, i_2 = \overline{1,n}, \quad x_{11}^2, \dots, x_{n1}^2, \quad x_{1N}^2, \dots, x_{nN}^2,
$$

$$
x_{11}x_{21}, \quad x_{11}x_{31}, \dots, x_{11}x_{n1}, \quad x_{21}x_{31}, \dots, x_{21}x_{n1}, \dots, x_{n-1\,1}x_{n_1} \Bigg)
$$

rendszer lesz.

Példaként vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ekkor, amint az könnyen belátható

$$
A^{\tau} = e^{-\lambda\tau} \begin{pmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix}
$$

és

$$
B(0) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix},
$$

ahol

$$
\beta_{11} = \frac{\gamma[s_1(1-\alpha^2+\beta^2)+2\beta\alpha s_{12}] + \delta[s_2(1-\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta s_{12}]}{\gamma^2-\delta^2}
$$

$$
\beta_{12} = \frac{\beta_{22}\alpha\beta - \beta_{11}\alpha\beta + s_{12}}{1-\alpha^2+\beta^2}
$$

$$
\beta_{22} = \frac{\delta[s_1(1-\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta s_{12}] + \gamma[s_2(1-\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta s_{12})]}{\gamma^2-\delta^2}
$$

$$
e^{-2\lambda} = \alpha^2+\beta^2, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \gamma = (1-\alpha^2)^2 + \beta^2(1+\alpha^2), \quad \delta = \beta^2(1+\alpha^2+\beta^2),
$$

speciálisan, ha $s_{12}=0$, $s_{11}=s_{22}=s$,

$$B(0)=\frac{1}{1-\alpha^2-\beta^2}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Formálisan nyilvánvalóan felírható a sűrűségfüggvény abban az esetben is, amikor a $\zeta(k)$ valószínűségi változó komponensei nem függetlenek, a megfelelő összefüggések azonban túlságosan bonyolultak ahhoz, hogy itt ismertessük őket.

A későbbiekben viszont szükségünk lesz olyan folyamatok sűrűségfüggvényeinek meghatározására, melyek *Jordan*-típusú differenciálegyenletnek (egyetlen blokkal) tesznek eleget.

Legyen $\xi(t)=\{\xi_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ ilyen. Akkor az $R_{Nn}^{-1}$ matrix

$$(2.12)\qquad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ A'_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & A_{n-1\,n-1} & A_{n-1\,n} \\ 0 & & & & A'_{n-1\,n} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol az $A_{ik}$ matrixok

$$(2.13)\qquad A_{i\,i+1}=\begin{pmatrix} a_{i\,i+1} & 0 & 0 \dots & & 0 \\ -\frac{1}{s_i} & \frac{\varrho}{s_i} & 0 \dots & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot\ \frac{\varrho}{s_i} & 0 \\ \cdot & & & & \\ 0 & & & -\frac{1}{s_i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2.14)\qquad A_{ii}=\begin{pmatrix} a_{ii} & -\frac{\varrho}{s_i} & 0 & \dots & & 0 \\ -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & -\frac{\varrho}{s_i} & \dots & & 0 \\ 0 & -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \frac{1+\varrho^2}{s_i} & -\frac{\varrho}{s_i} \\ 0 & & & & -\frac{\varrho}{s_i} & \frac{1}{s_i} \end{pmatrix}$$

alakúak.

Speciálisan az $n=2$ esetben könnyű kiszámítani, hogy

$$a_{11}=\frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)+s_2}+\frac{\varrho^2}{s_1}$$

$$a_{12}=-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}+\frac{\varrho}{s_1}$$

$$a_{22}=\frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]}+\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2}{s_2}.$$

Az általános esetben a

$$\xi(t)+C_1\xi(t-1)+\ldots+C_p\xi(t-p)=\xi(t)$$

differenciaegyenletnek eleget tevő $n$-dimenziós $\xi(t)$ folyamat vizsgálata tűnik természetesnek, mint az egydimenziós autoregressziós séma általánosítása. Az ilyen típusú folyamatokkal általánosan nem fogunk foglalkozni, bár a korrelációs-matrixra vonatkozó összefüggések ugyanúgy felírhatók, mint a $p=1$ esetben.

## 3. §. Regressziós problémák

A gyakorlatban legtöbbször nem az $n$-dimenziós folyamatot, $\xi(t)$-t figyeljük meg, hanem az

$$\eta(t)=C\cdot h(t)+\xi(t)$$

folyamatot, ahol a $h(t)=\{h_k(t)\}_{k=\overline{1,m}}$ függvények ismertek, míg a $C=\{c_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ matrix elemei ismeretlenek.

Az $\eta(t)$ folyamat megfigyelése esetén a $c_{ij}$ regressziós együtthatók becslése az idősorok elméletének egyik központi problémája. A gyakorlatban leggyakrabban előforduló eset az, amikor a $h_k(t)$ függvények polinomok vagy trigonometrikus polinomok. Az alábbiakban az előző pontok eredményei alapján a maximum likelihood becslésekkel fogunk foglalkozni s ezen becslések bizonyos tulajdonságait vizsgáljuk meg.

Feltéve, hogy a $\xi(t)$ diszkrét folyamatot leíró egyenlet már (1. 4) alakú, vizsgáljuk egyetlen — valós sajátértékű — *Jordan*-féle blokk által leírt $n$-dimenziós folyamat sűrűségfüggvényét. Feltesszük, hogy a $\zeta(t)$ változó komponensei függetlenek, bár ezt a feltevést a gyakorlatban mindig ellenőrizni kell. A komplex sajátértékű eset vizsgálatát külön nem végezzük el. A tett feltevések mellett a $\xi(2),\ldots,\xi(N)$ változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x(1)$ feltétel mellett

$$C_N\exp-\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2s_1}(x_{1j+1}-\varrho x_{1j}-x_{2j})^2+\frac{1}{2s_2}(x_{2j+1}-\varrho x_{2j}-x_{3j})^2+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2s_{n-2}}(x_{n-1\,j+1}-\varrho x_{n-1\,j}-x_{nj})^2+\frac{1}{2s_n^2}(x_{nj+1}-\varrho x_{nj})^2\right]\right\},$$

alakú lesz. A $\xi(1)$ változó sűrűségfüggvénye a (2. 6) összefüggés alapján a $B(0)$

matrix meghatározásával számítható ki ($\mathbf{M}\zeta_j^2 = s_j$). Az előbbi pontban láttuk, hogy a feltételes sűrűségfüggvény:

$$
\begin{aligned}
C_N \exp -\frac{1}{2}\Bigg\{ & \frac{\varrho^2}{s_1}x_{11}^2 + \left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2}{s_2}\right)x_{21}^2 + \left(\frac{1}{s_2}+\frac{\varrho^2}{s_3}\right)x_{31}^2 + \dots + \left(\frac{1}{s_{n-1}}+\frac{\varrho^2}{s_n}\right)x_{n1}^2 + \\
& + \frac{1}{s_1}x_{1N}^2 + \frac{1}{s_2}x_{2N}^2 + \dots \qquad + \frac{1}{s_n}x_{nN}^2 + \\
& + \frac{2\varrho}{s_1}x_{11}x_{21} + \frac{2\varrho}{s_2}x_{21}x_{31} + \dots \qquad + \frac{2\varrho}{s_{n-1}}x_{n-1\,1}x_{n1} + \\
& + \frac{1+\varrho^2}{s_1}\sum_2^{N-1} x_{1i}^2 + \dots \qquad + \frac{1+\varrho^2}{s_n}\sum_2^{N-1} x_{ni}^2 + \\
& - \frac{2\varrho}{s_1}\sum_1^{N-1} x_{1i+1}x_{1i} + \dots \qquad - \frac{2\varrho}{s_n}\sum_1^{N-1} x_{ni+1}x_{ni} + \\
& - \frac{2}{s_1}\sum_1^{N-1} x_{1i+1}x_{2i} + \dots \qquad - \frac{2}{s_{n-1}}\sum_1^{N-1} x_{n-1i+1}x_{ni}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Az egyszerűség kedvéért csak a feltételes (a $\xi(1) = x(1)$ feltétel melletti) maximum likelihood egyenletekkel foglalkozunk. Legyen speciálisan $h(t) \equiv 1 = (1, \dots, 1)$, tehát a $\xi(t)$ folyamat $m_1, \dots, m_n$ várható értékeit akarjuk becsülni. A feltételes maximum likelihood egyenletek a következők lesznek

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2\varrho^2}{s_1}(x_{11}-m_1) - \frac{2}{s_1}(x_{1N}-m_1) - \frac{2\varrho}{s_1}(x_{21}-m_2) - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_1}\sum_2^{N-1}(x_{1i}-m_1) + \\
& \qquad + \frac{2\varrho}{s_1}\sum_{i=1}^{N-1}[(x_{1i}-m_1)+(x_{1i+1}-m_1)] + \frac{2}{s_1}\sum_{i=1}^{N-1}(x_{2i}-m_2) = 0 \\
& -2\left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2}{s_2}\right)(x_{21}-m_2) - \frac{2}{s_2}(x_{2N}-m_2) - \frac{2\varrho}{s_1}(x_{11}-m_1) - \\
& \qquad - \frac{2\varrho}{s_2}(x_{31}-m_3) - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_2}\sum_2^{N-1}(x_{2i}-m_2) + \frac{2\varrho}{s_2}\sum_1^{N-1}[(x_{2i}-m_2)+(x_{2i+1}-m_2)] + \\
& \qquad + \frac{2}{s_1}\sum_1^{N-1}(x_{1i+1}-m_1) + \frac{2}{s_2}\sum_1^{N-1}(x_{3i}-m_3) = 0 \\
& \quad \vdots \\
& -2\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{\varrho^2}{s_k}\right)(x_{k1}-m_k) - \frac{2}{s_k}(x_{kN}-m_k) - \frac{2\varrho}{s_{k-1}}(x_{k-1\,1}-m_{k-1}) - \frac{2\varrho}{s_k}(x_{k+1,1}-m_{k+1}) - \\
& \qquad - \frac{2(1+\varrho^2)}{s_k}\sum_2^{N-1}(x_{ki}-m_k) + \frac{2\varrho}{s_k}\sum_1^{N-1}[(x_{ki}-m_k)+(x_{k-1i+1}-m_k)] + \\
& \qquad + \frac{2}{s_{k-1}}\sum_1^{N-1}(x_{k-1i+1}-m_{k-1}) + \frac{2}{s_k}\sum_1^{N-1}(x_{k+1i}-m_{k+1}) = 0 \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$-2\left(\frac{1}{s_{n-1}}+\frac{\varrho^2}{s_n}\right)(x_{n1}-m_n)-\frac{2}{s_n}(x_{nN}-m_n)-\frac{2\varrho}{s_{n-1}}(x_{n-1\,1}-m_{n-1})-$$

$$-\frac{2(1+\varrho^2)}{s_n}\sum_{2}^{N-1}(x_{ni}-m_n)+\frac{2\varrho}{s_n}\sum_{1}^{N-1}[(x_{ni}-m_n)+(x_{ni+1}-m_n)]+$$

$$-\frac{2}{s_{n-1}}\sum_{1}^{N-1}(x_{n-1i+1}-m_{n-1})=0$$

Innen egyszerű, de hosszadalmas átalakításokkal nyerjük az alábbi

$$\frac{\varrho^2-\varrho}{s_1}x_{11}+\frac{1-\varrho}{s_1}x_{1N}+\frac{\varrho-1}{s_1}x_{21}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}\sum_{2}^{N-1}x_{1i}-\frac{1}{s_1}\sum_{2}^{N-1}x_{2i}=$$

$$=\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}m_1+\frac{\varrho-1}{s_1}m_2+\frac{(1-\varrho)^2}{s_1}(N-2)m_1-\frac{(N-2)}{s_1}m_2$$

$$\left(\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_2}\right)x_{21}+\frac{1-\varrho}{s_2}x_{2N}+\frac{\varrho}{s_1}x_{11}-\frac{1}{s_1}x_{1N}+\frac{\varrho-1}{s_2}x_{31}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\sum_{2}^{N-1}x_{2i}-$$

$$-\frac{1}{s_1}\sum_{2}^{N-1}x_{1i}-\frac{1}{s_2}\sum_{2}^{N-1}x_{3i}=\left(\frac{1}{s_1}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\right)m_2+\frac{\varrho-1}{s_1}m_1+\frac{\varrho-1}{s_2}m_3+$$

$$+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}(N-2)m_2-\frac{(N-2)}{s_1}m_1-\frac{(N-2)}{s_2}m_3$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_k}\right)x_{k1}+\frac{1-\varrho}{s_k}x_{kN}+\frac{\varrho}{s_{k-1}}x_{k-11}-\frac{1}{s_{k-1}}x_{k-1N}+\frac{\varrho-1}{s_k}x_{k+1,1}+$$

$$+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}\sum_{2}^{N-1}x_{ki}-\frac{1}{s_{k-1}}\sum_{2}^{N-1}x_{k-1i}-\frac{1}{s_k}\sum_{2}^{N-1}x_{k+1i}=\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}\right)m_k+$$

$$+\frac{\varrho-1}{s_{k-1}}m_{k-1}+\frac{\varrho-1}{s_k}m_{k+1}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}(N-2)m_k-\frac{N-2}{s_{k-1}}m_{k-1}-\frac{N-2}{s_k}m_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{s_{n-1}}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_n}\right)x_{n1}+\frac{1-\varrho}{s_n}x_{nN}+\frac{\varrho}{s_{n-1}}x_{n-11}-\frac{1}{s_{n-1}}x_{n-1N}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_n}\sum_{2}^{N-1}x_{ni}-$$

$$-\frac{1}{s_{n-1}}\sum_{2}^{N-1}x_{n-1i}=\left(\frac{1}{s_{k-1}}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_k}(N-1)\right)m_n+\frac{\varrho-(N-1)}{s_{n-1}}m_{n-1}$$

egyenletrendszert, mely lényegében

$$\begin{aligned}
C_1X &= a_{11}m_1+a_{12}m_2\\
C_2X &= a_{21}m_1+a_{22}m_2+a_{23}m_3\\
&\vdots\\
C_kX &= a_{kk-1}m_{k-1}+a_{kk}m_k+a_{kk+1}m_{k+1}\\
&\vdots\\
C_nX &= a_{nn-1}m_{n-1}+a_{nn}m_n
\end{aligned}$$

alakú, ahol a megfelelő konstansok jelentése az előző egyenletrendszerből látható.

Ha az összes $s_i$ szórásnégyzetek azonosak, legyen $s_i = s$, akkor a fenti

$$b = A \cdot m$$

egyenletrendszer $A$ matrixa

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & a & b \\ 0 & & & & b & a \end{pmatrix}$$

alakú. Az $A$ matrix inverzének meghatározása az eddigiekben sokszor felhasznált valószínűségszámítási meggondolások alapján történhet. Az $n=2$ speciális esetben a fenti egyenletrendszer

$$\frac{\varrho^2-\varrho}{s_1} x_{11} + \frac{1-\varrho}{s_1} x_{1N} + \frac{\varrho-1}{s_1} x_{21} + \frac{(1-\varrho)^2}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{2i} =$$

$$= \frac{(1-\varrho)^2(N-1)}{s_1} m_1 - \left( \frac{N-2}{s_1} + \frac{1-\varrho}{s_1} \right) m_2$$

$$\left( \frac{1}{s_1} + \frac{\varrho^2-\varrho}{s_2} \right) x_{21} + \frac{1-\varrho}{s_2} x_{2N} + \frac{\varrho}{s_1} x_{11} - \frac{1}{s_1} x_{1N} - \frac{(1-\varrho)^2}{s_2} \sum_2^{N-1} x_{2i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} =$$

$$= \frac{\varrho-N-1}{s_1} m_1 + m_2 \left( \frac{1}{s_1} + \frac{(N-1)(1-\varrho)^2}{s_2} \right)$$

alakú lesz.

Említésre méltó, hogy ellentétben az egydimenziós esettel, $\varrho$-nak 1-hez közeli értékei esetén is a várható értéket a megfigyelések számtani átlagával lehet jól becsülni.

Ebben a speciális ($n=2$) esetben a feltétel nélküli maximum likelihood egyenletek (a számítások mellőzésével) a következők lesznek

$$\left\{ \frac{\varrho^2-\varrho}{s_1} + \frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2} \right\} x_{11} + \frac{1-\varrho}{s_1} x_{1N} + \left\{ \frac{\varrho-1}{s_1} - \frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2} \right\} x_{21} +$$

$$+ \frac{(1-\varrho)^2}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{1i} - \frac{1}{s_1} \sum_2^{N-1} x_{2i} = \left[ \frac{(1-\varrho)^2(N-1)}{s_1} + \frac{(1-\varrho^2)^3}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2} \right] m_1 -$$

$$- \left[ \frac{N-2}{s_1} + \frac{1-\varrho}{s_1} + \frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2} \right] m_2$$

$$\left\{\frac{1}{s_1}+\frac{\varrho^2-\varrho}{s_2}+\frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]}\right\}x_{21}+\frac{(1-\varrho)}{s_2}x_{2N}+$$

$$+\left(\frac{\varrho}{s_1}-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}\right)x_{11}-\frac{1}{s_1}x_{1N}+\frac{(1-\varrho)^2}{s_2}\sum_2^{N-1}x_{2i}-\frac{1}{s_1}\sum_2^{N-1}x_{1i}=$$

$$=\left[\frac{\varrho}{s_1}-\frac{\varrho(1-\varrho^2)^2}{s_1(1-\varrho^2)^2+s_2}-\frac{N-1}{s_1}\right]m_1+$$

$$+\left[\frac{1}{s_1}+\frac{(1-\varrho^2)[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2(1+\varrho^2)]}{s_2[s_1(1-\varrho^2)^2+s_2]}+\frac{(N-1)(1-\varrho)^2}{s_2}\right]m_2.$$

Ha $\varrho\sim 1$, a közelítő egyenletekből a következő becslések adódnak:

$$m_2=\frac{1}{N-2}\sum_2^{N-1}x_{2i}$$

$$m_1=\frac{x_{1N}-x_{11}}{N-2}+\frac{1}{N-2}\sum_2^{N-1}x_{1i}+\frac{1}{(N-2)^2}\sum_2^{N-1}x_{2i}-\frac{x_{21}}{N-2}.$$

Az eredményből látható, hogy az egydimenziós esettel szemben itt mindig a számtani középpel való becslés lesz jó.

## 4. §. Az $A$ matrix elemeinek becslése

Tegyük fel, hogy $\mathbf{M}\xi(t)=0$ és a $\xi(t)$ *Gauss*-folyamat eleget tesz az (1. 2) egyenletnek. A $\xi(t)$ folyamat $t=1,2,\ldots,N$ időpontokban való megfigyeléseiből az ismeretlen $A$ matrix elemei maximum likelihood becsléseinek meghatározása a megfelelő sűrűségfüggvény alapján elvben könnyen elvégezhető. Az egyszerűség kedvéért tekintsük ismét a könnyebben kezelhető feltételes sűrűségfüggvényt s az ily módon adódó feltételes, maximum likelihood becsléseket (az ún. széria-korrelációs együttható becslés többdimenziós analogonjáról van szó, vö. [2] 1. §). Legyen $A=\{\alpha_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ és legyenek a $\zeta(i)$ változók komponensei függetlenek, $\mathbf{M}(\zeta_j(i))^2=s_j$, $\mathbf{M}(\zeta_{j_1}(i)\zeta_{j_2}(k))=0$, ha $j_1\neq j_2$; paraméterekkel, ekkor a $\xi(2),\xi(3),\ldots,\xi(N)$ változók feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi(1)=x(1)$ feltétel mellett

$$p_{\xi(2),\ldots,\xi(N)}(x_{21},\ldots,x_{2N};\ldots;x_{n1},\ldots,x_{nN}\,|\,\xi(1)=x(1))=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n(N-1)}{2}}\left(\prod_1^n s_i\right)^{-\frac{N-1}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_i}\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1}-\alpha_{i1}x_{1j}-\alpha_{i2}x_{2j}-\ldots-\alpha_{in}x_{nj})^2\right\}.$$

A maximum likelihood egyenletek

$$\frac{\partial\log p}{\partial\alpha_{i1}}=\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1}-\alpha_{i1}x_{1j}-\alpha_{i2}x_{2j}-\ldots-\alpha_{in}x_{nj})x_{1j}=0$$

$$\vdots \tag{4. 1}$$

$$\frac{\partial\log p}{\partial\alpha_{in}}=\sum_{j=1}^{N-1}(x_{ij+1}-\alpha_{i1}x_{1j}-\alpha_{i2}x_{2j}-\ldots-\alpha_{in}x_{nj})x_{nj}=0$$

$$i=\overline{1,n},$$

alakúak lesznek. Bevezetve az

$$\eta_{i1}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}(\xi_i(j+1)-\alpha_{i1}\xi_1(j)-\alpha_{i2}\xi_2(j)-\dots-\alpha_{in}\xi_n(j))\xi_1(j)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{1}^{N-1}\zeta_i(j+1)\xi_1(j),$$

(4. 2)
$$\eta_{i2}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}\zeta_i(j+1)\xi_2(j)$$

$$\vdots$$

$$\eta_{in}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}\zeta_i(j+1)\xi_n(j)$$

valószínűségi változókat és a (4. 1) egyenletrendszer megoldásait a $\xi(1),\dots,\xi(N)$ megfigyelések esetén $\hat{\alpha}_{ij}$-vel jelölve az $\eta_{ik}(N)$ változók a következő alakba írhatók:

(4. 3)
$$\eta_{ik}(N)=\frac{1}{\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N-1}[(\hat{\alpha}_{i1}-\alpha_{i1})\xi_1(j)+(\hat{\alpha}_{i2}-\alpha_{i2})\xi_2(j)+\dots+(\hat{\alpha}_{in}-\alpha_{in})\xi_n(j)]\xi_k(j)$$

$$i,k=\overline{1,n};$$

felhasználva közben, hogy (4. 1) alapján

$$\sum_{j=1}^{N-1}\xi_i(j+1)\xi_k(j)=\sum_{j=1}^{N-1}(\hat{\alpha}_{i1}\xi_1(j)+\dots+\hat{\alpha}_{in}\xi_n(j))\xi_k(j).$$

Kis átalakítással (4. 3) a következő alakba írható

(4. 3')
$$\eta_{ik}(N)=\sqrt{N-1}\,(\hat{\alpha}_{i1}-\alpha_{i1})\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\xi_k(j)\xi_1(j)}{N-1}+\dots$$

$$\dots+\sqrt{N-1}\,(\hat{\alpha}_{in}-\alpha_{in})\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\xi_k(j)\xi_n(j)}{N-1}\qquad i,k=\overline{1,n}.$$

A (4. 2) összefüggések alapján könnyű kiszámítani — felhasználva a $\zeta_i(j)$ változók tulajdonságait — hogy

(4. 4)
$$\mathbf{M}\eta_{il_1}(N)\eta_{il_2}(N)=s_i\mathbf{M}\xi_{l_1}(j)\xi_{l_2}(j).$$

Másrészt, ha az $A$ matrix sajátértékei 1-nél kisebbek, a folyamat ergodikus és így

(4. 5)
$$\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\xi_i(j)\xi_k(j)\to\mathbf{M}\xi_i(j)\xi_k(j),\qquad i,k=\overline{1,n}$$

1 valószínűséggel. Fix $\alpha_{ik}$ $(i, k=\overline{1, n})$ értékekre az $\eta_{ik}(N)$ valószínűségi változók $N \to \infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlásúak (lásd pl. ROZANOV [10])

$$s_i \{\mathbf{M}\xi_{l_1}(j)\xi_{l_2}(j)\}_{l_1=\overline{1,n}}^{l_2=\overline{1,n}} = \{\mathbf{M}\eta_{il_1}(N)\eta_{il_2}(N)\}$$

kovariancia matrixszal. A (4. 5) összefüggések felhasználásával (4. 3′) azt mutatja, hogy az $\eta_{ik}(N)$ $(k=\overline{1, n})$ változók az $\sqrt{N-1}\,(\hat{\alpha}_{ik}-\alpha_{ik})$ változók $(k=\overline{1, n})$ lineáris kombinációi, így azok is aszimptotikusan normális eloszlásúak

$$s_i \cdot \{\mathbf{M}\xi_{l_1}(j)\xi_{l_2}(j)\}^{-1}$$

kovariancia matrixszal.

Nyilván az $\hat{\alpha}_{ij}$ $(i, j=1, n)$ becslések torzítatlanok és konzisztensek is.

Megjegyzem, hogy a (4. 1) egyenletrendszer helyett tekinthető a

$$\sum_{j=1}^{N-\tau-1} [\xi_i(j+\tau)-\alpha_{i1}\xi_1(j+\tau-1)-\ldots-\alpha_{in}\xi_n(j+\tau-1)]\xi_k(j) = 0; \qquad i, k=\overline{1, n}$$

egyenletrendszer is az $\alpha_{ik}$ becsléseinek meghatározására $(\tau=1, 2, \ldots, r)$ értékek esetén. A megfelelő becsléseket jelöljük $\hat{\alpha}_{ik}(\tau)$-val. Nyilván minden $\tau$ értékre más és más becslést kapunk, kérdés, hogy az így kapott becsléseket átlagolva milyen rendszerek esetén jutunk jobb becslésekhez? Amennyiben a folyamat stacionárius *Gauss—Markov*-típusú, a becslések nem javulnak, azonban megadhatók lennének olyan, az említett típushoz közel álló folyamatok, melyeknél ez az eljárás hasznosnak bizonyul pl. nem *Gauss*-típusú folyamatok esetén.

Az eddigiekben csak azt az ismert eljárást mutattuk meg, hogy hogyan nyerhetők az $\alpha_{ik}$ ismeretlen paraméterekre becslések. A továbbiakban azzal a problémával kívánunk foglalkozni, hogy ezek a becslések mennyire megbízhatóak s melyek azok a nehézségek, amelyekkel számolni kell ezeknek a becsléseknek a vizsgálatánál. Pontosabban megfogalmazva az a kérdés, hogy az így nyert statisztikai becslések segítségével megállapíthatók-e az $A$ matrix sajátértékei? Tehát $N$ nagy értékeire (mégpedig milyen nagy $N$ értékek esetén mekkora pontossággal) elvégezhető-e pl. a *Jordan*-alakra hozás?

Ehhez első lépésként vizsgáljuk meg az (1. 4) alakú egyenletrendszernek eleget-tevő $\xi(t)$ $n$-dimenziós folyamat egyetlen ismeretlen $\varrho$ paraméterének becslését. A (2. 12) összefüggésekből megállapítható, hogy a $\xi(1)=x(1)$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényből nyert maximum likelihood becslés

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_1^{N-1} x_{1i}x_{1i+1} - \sum_1^{N-1} x_{1i}x_{2i} + \sum_1^{N-1} x_{2i}x_{2i+1} - \sum_1^{N-1} x_{2i}x_{3i} \pm \ldots - \sum_1^{N-1} x_{n-1i}x_{ni} + \sum_1^{N-1} x_{ni}x_{ni+1}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N-1} x_{ki}^2}$$

lesz. Könnyű belátni az (1. 4) összefüggések alapján, hogy

$$\hat{\varrho}-\varrho = \frac{\sum_1^{N-1} \xi_{1i}\zeta_{1i+1} + \ldots + \sum_1^{N-1} \xi_{n1}\zeta_{ni+1}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N-1} \xi_{ki}^2}$$

és a jobb oldal számlálójának várható értéke 0 (mivel $\mathbf{M}\xi_{ki}\zeta_{ki+1}=0$). Ily módon a becslés aszimptotikusan torzítatlan. $N$ nagy értékeire — az ergodikusság miatt — a nevező az $(N-1)\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ értékkel asszimptotikusan egyenlő, másrészt a számláló négyzetének várható értéke

$$\Sigma s_k\sigma_k^2.$$

Ily módon

$$\mathbf{M}(\sqrt{N-1}(\hat{\varrho}-\varrho))^2 \sim \frac{\Sigma s_k\sigma_k^2}{(\Sigma\sigma_k^2)^2}, \quad \text{ha} \quad N\to\infty.$$

Az $n=2$ speciális esetben, ha $s_1=s_2$

$$\mathbf{M}(\sqrt{N-1}(\hat{\varrho}-\varrho))^2 \sim \frac{(1-\varrho^2)^3}{2(1-\varrho^2)^2+(1+\varrho^2)}$$

(vö. [2] 2. §, ahol az egydimenziós folyamat esetén $\sqrt{N-1}(\hat{\varrho}-\varrho)$ szórásnégyzetére $(1-\varrho^2)$ adódott).

Ugyanúgy, mint az egydimenziós esetben, szükség van a fenti becslés aszimptotikus eloszlásának vizsgálatára 1-hez közeli $\varrho$ értékre. Láttuk az egydimenziós esetben, hogy $\sigma_\zeta^2=1$ feltétel esetén $\varrho$ becslése aszimptotikusan egyenletesen normális eloszlású $-1<\varrho<1$-ben, míg $s=1$ esetén normalitásról szó sincs. Éppen amiatt volt szükség $s=1$ esetén az időben folytonos folyamat paraméter becslései pontos eloszlásának meghatározására, $\sigma_\zeta^2=1$ esetén pedig a diszkrét folyamat paraméter becslései aszimptotikus eloszlásának meghatározására. Ez a megkülönböztetés a többdimenziós esetben is fennáll, a megfelelő számítások gyakorlati kivitelezése azonban igen nagy és nehézkes számításokat igényel. Heurisztikus meggondolások alapján látható, hogy $\sigma_1^2=1, \sigma_2^2=c\,(\neq 1)$ esetén $\varrho$ becslése aszimptotikusan egyenletesen normális eloszlású a $-1<\varrho<1$ intervallumban, míg $s_1=s_2=1$ esetén ez nem áll fenn. A megfelelő kétdimenziós — időben folytonos — folyamat paraméter becslése eloszlásának meghatározását egy külön dolgozatban végezzük el.

Visszatérve az általános esetre, a következő megállapításokat tehetjük.

Az [1] dolgozat 3. 3 tételéből, valamint [2] 5. 4 tételének korolláriumából következik, hogy amennyiben az (1. 2)-ben szereplő $A$ matrix sajátértékei mind egyszeresek és valósak s az $\eta(t)=\xi(t)+m$ folyamatot figyeltük meg, az *$m$ várható értékre nem szerkeszthetők véges konfidencia intervallumok és a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sajátértékekre nem szerkeszthetők 0-tól különböző alsó konfidencia határok folytonos funkcionálok segítségével.*

Ez egyben azt is jelenti, hogy a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sajátértékek nem különböztethetők meg.

Amennyiben komplex és többszörös sajátértékei is vannak az $A$ matrixnak, a megfelelő komponensek várható értékeire a számtani közepek jó becslések lesznek és nincs szükség végtelen konfidencia intervallumok szerkesztésére.

Ezen állítások tételszerű megfogalmazását mellőzzük.

## IRODALOM

[1] ARATÓ, M.: Folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, I., *MTA III. Oszt. Közleményei* 14 (1964) 13—24.
[2] ——— : II., *MTA III. Oszt. Közleményei* 14 (1964) 135—157.
[3] ——— : III., *MTA III. Oszt. Közleményei* 14 (1964) 317—330.

[4] ARATÓ M.: Некоторые статистические вопросы стационарных гауссовских марковских процессов *Disszertáció*, Moszkva, Állami Egyetem, 1962.
[5] ——— : О достаточных статистиках стационарных процессов, *Теория вероятностей и ее прим.*, **6** (1961) 216—218.
[6] DOOB, J. L.: The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.*, **15** (1944) 229—281.
[7] Дынкин, Е. Б.: Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей, *Усп. мат. наук*, **6** (1951) 68—90.
[8] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: *Statistical analysis of stationary time series*, John Wiley, New York, 1957.
[9] Понтрягин, Л. С.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, 1961.
[10] QUENOUILLE, M. H.: *The analysis of multiple time series*, London, 1957.
[11] Розанов, Ю. А.: Стационарные случайные процессы, Москва, 1963.

(Beérkezett: 1965. III. 5.)