A SZABÁLYOS POLIÉDEREK EGY SZÉLSŐÉRTÉK TULAJDONSÁGA ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ TEREKBEN

Írta: TOMOR BENEDEK

Az euklideszi tér egy R sugarú gömböt tartalmazó l lapú, e élű, c csúcsú (röviden: $[l, e, c]$) konvex poliéderének F felszínére és V térfogatára vonatkozóan érvényesek a következő — egymással ekvivalens — egyenlőtlenségek [1]:

$$F \geqq 2eR^2 \operatorname{tg}\frac{\pi l}{2e}(k^2-1), \tag{1}$$

$$V \geqq \frac{2e}{3}R^3 \operatorname{tg}\frac{\pi l}{2e}(k^2-1). \tag{2}$$

Itt (és a továbbiakban is) k a $\dfrac{\sin\dfrac{\pi l}{2e}}{\cos\dfrac{\pi c}{2e}}$ törtet jelenti.

Egyenlőség csak a gömb köré írt szabályos poliéderekre áll fenn. Állandó görbületű terekben a két probléma nem egyenértékű. A kérdéses poliéder térfogatának alsó becslése olyan tetraéder térfogatának meghatározására vezet, amelynek mind a 4 lapja derékszögű háromszög (ortoschem tetraéder). LOBACSEVSZKIJ, SCHLÄFLI és mások vizsgálatai szerint egy ilyen tetraéder térfogata nem elemi függvénye a lapszögeknek. FEJES TÓTH [2] bebizonyította, hogy a $\varkappa$ görbületű térben érvényes a következő becslés:

$$V \geqq \frac{2e}{\sqrt{\varkappa^3}} \int_0^{\pi l/2e} \left\{\sqrt{\varkappa}\,R - \frac{\cos\varphi}{\sqrt{k^2-\sin^2\varphi}} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,R\,\frac{\sqrt{k^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)\right\} d\varphi, \tag{3}$$

és egyenlőség csak a gömb köré írt szabályos poliéderekre áll fenn. (Szférikus térben ezek közé számítjuk a szabályos diédereket és hosoédereket* is.)

A poliéder felszínére vonatkozó becslés azonban elemi függvényekkel elvégezhető. E dolgozatban bebizonyítjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$F \geqq \frac{4e}{\varkappa}\left[\frac{\pi l}{2e} - \arcsin\frac{\sin\dfrac{\pi l}{2e}}{\sqrt{1+(k^2-1)\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R}}\right]. \tag{4}$$

* A diéder duálisának ez az elnevezése VITO CARAVELLItől (1724—1800) származik.

Egyenlőség ebben az esetben is csak a gömb köré írt szabályos poliéderekre áll fenn. A $\varkappa \to 0$ határesetben a (3), ill. (4) formula a (2), ill. (1) formulába megy át, mint arról könnyen meggyőződhetünk.

Az említett tételek a következő, általános tételből származnak ([1], [2]): Jelöljük $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$-lel a Φ gömb olyan $e_1, e_2, \ldots, e_l$ oldalszámú konvex poligonjait**, amelyekre: $\sum_{i=1}^{l} \Phi_i = \Phi$, s-sel pedig az $e_1, \ldots, e_l$ oldalszámok összegét. Legyenek $P_1, P_2, \ldots, P_l$ Φ-nek tetszőleges pontjai, $a(x)$ pedig egy, a $0 \leqq x \leqq \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\pi\Phi}$ (a legnagyobb gömbi távolság) intervallumban értelmezett szigorúan monoton növekvő függvény.

Akkor:

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} a(P_i P)\, d\Phi \geqq 2s \int_{\Delta} a(AP)\, d\Phi, \tag{5a}$$

ahol Δ az az ABC derékszögű gömbháromszög, amelynek szögei: $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi l}{s}$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{s} - \alpha$. Ezek alapján: $\Delta = \frac{\Phi}{2s}$. (α és β egyszerűen szemléltethető. Az egyes sokszögek belsejében vegyünk fel egy-egy pontot, és ezeket kössük össze a megfelelő sokszög csúcsaival. α az így meghatározott középponti szögek, β pedig a sokszögekben szereplő szögek átlagának fele.)

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$ egybevágó szabályos poligonok, $P_1, P_2, \ldots, P_l$ pedig ezek középpontjai. (Szabályos poligonnak számít a gömbkétszög és a félgömb is.)

Ha speciálisan a sokszögek a gömb egy l, e, c lap-, él- és csúcsszámú konvex mozaikját alkotják, akkor $\alpha = \frac{\pi l}{2e}$, $\beta = \frac{\pi c}{2e}$, és az egyenlőtlenség a

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} a(P_i P)\, d\Phi \geqq 4e \int_{\Delta} a(AP)\, d\Phi \tag{5b}$$

alakot ölti. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a mozaik szabályos, $P_1, P_2, \ldots, P_l$ pedig a mozaik lapjainak középpontjai.

A tétel az idézett forrásmunkákban csak ez utóbbi fogalmazásban szerepel. Ezért a teljesség kedvéért vázoljuk az (5a) egyenlőtlenség igazolását, amely lényegtelen különbségektől eltekintve azonos az (5b) tétel ismert bizonyításával.

Felhasználunk két, most nem bizonyított segédtételt.

1. Jelöljük σ-val az O középpontú, félgömbnél nem nagyobb K gömbsüvegnek valamely főkör által levágott szeletét.

A $0 \leqq \sigma \leqq \frac{K}{2}$ intervallumban az

$$\omega(\sigma) = \int_{\sigma} a(OP)\, d\Phi$$

függvény konkáv.

** A továbbiakban egy gömbi tartománynak és a területének a jelölésére ugyanazt a betűt használjuk.

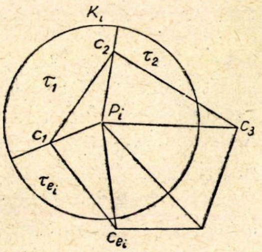
2. Tekintsünk egy olyan gömbháromszöget, amelynek egyik csúcsa az O-val átellenes pont. Ennek és K-nak a közös részét jelöljük τ-val.

Akkor:

$$\int_{\tau} a(OP)d\Phi \leqq \omega(\tau).$$

Az $a(x)$ függvény monotonitásából, valamint a Φ_i tartományok konvexitásából következik, hogy az $\int_{\Phi_i} a(P_iP)d\Phi$ integrál változó P_i esetén minimumát a Φ_i tartomány valamely belső vagy kerületi pontjában veszi fel.

Jelöljük a Φ_i sokszög csúcsait ciklikus sorrendben $C_1, C_2, \ldots, C_{e_i}$-vel, a P_i pont körül AB szférikus sugárral húzott kört (gömbsüveget) K_i-vel (1. ábra). Jelentse továbbá $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{e_i}$ a K_i körnek a Φ_i sokszögön kívül eső azon részeit, amelyek közül az első a P_iC_1, C_1C_2, P_iC_2, a második a P_iC_2, C_2C_3, $P_iC_3, \ldots$ az e_i-edik a $P_iC_{e_i}$, $C_{e_i}C_1$, P_iC_1 főkörök által határolt tartományba esik (esetleg $\tau_\nu = 0$).



1. ábra

A közös $a(P_iP)d\Phi$ integrandust elhagyva, írhatjuk:

$$\int_{\Phi_i} = \int_{K_i} - \sum_{\nu=1}^{e_i} \int_{\tau_\nu} + \int_{\Phi_i'},$$

ahol Φ_i' Φ_i-nek a K_i-n kívül eső részét jelenti. Az $i = 1, 2, \ldots, l$-re felírt egyenlőségeket összeadva és segédtételeinket alkalmazva, a következő eredményre jutunk:

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} = l\int_K - \sum_{\nu=1}^{s} \int_{\tau_\nu} + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} \geqq l\int_K - \sum_{\nu=1}^{s} \omega(\tau_\nu) + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} \geqq$$

$$\geqq l\int_K - s\omega\left(\frac{1}{s}\sum_{\nu=1}^{s} \tau_\nu\right) + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi'}.$$

K az A körül AB sugárral rajzolt kör, $\int_K$ pedig az $\int_K a(AP)d\Phi$ integrál.

Nyilván — a $\sum_{i=1}^{l} \Phi_i' = \Phi'$ rövid jelöléssel — :

$$\Phi = lK - \sum_{\nu=1}^{s} \tau_\nu + \Phi',$$

és így

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} \geqq l\int_K - s\omega\left(\frac{lK - \Phi + \Phi'}{s}\right) + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} =$$

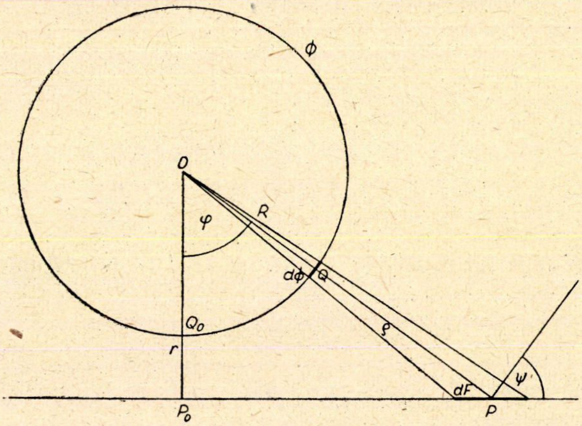
$$= l\int_K - s\omega\left(\frac{lK - \Phi}{s}\right) - s\int_{\tau} a(AP)d\Phi + \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'}.$$

Itt τ K-nak azt a részét jelenti, amely az $\frac{lK-\Phi}{s}$ területű körszeletet az $\frac{lK-\Phi+\Phi'}{s}$ területű körszeletté egészíti ki. Az $a(x)$ függvény monotonitása miatt a két utolsó tag összege $\geqq 0$, és így

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} \geqq l \int_K - s\omega\left(\frac{lK-\Phi}{s}\right) = 2s\left[\frac{\alpha}{2\pi}\int_K - \frac{1}{2}\omega\left(\frac{lK-\Phi}{s}\right)\right] = 2s\int_\Delta a(AP)\,d\Phi.$$

Ez utóbbi egyenlőség belátásához vegyük figyelembe azt, hogy $\frac{\alpha}{2\pi}K$ K-nak α középponti szögű szektora, $\frac{lK-\Phi}{s}$ pedig $\Delta=\frac{\Phi}{2s}=\frac{\alpha}{2\pi}K-\frac{1}{2}\frac{lK-\Phi}{s}$ alapján az a körszelet, amelyet K-ból a BC főkör levág. Ezzel az (5a), ill. az (5b) egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a K_i körök a Φ_i sokszögeket teljesen lefedik, a τ_ν tartományok pedig egybevágó körszeletek. Ez akkor igaz, ha a Φ_i sokszögek egybevágó szabályos sokszögek, a P_i pontok pedig ezek középpontjai.

Térjünk rá a konvex poliéderek felszínének és térfogatának vizsgálatára. Jelentse P az R sugarú, Φ felszínű gömb O középpontjától r távolságra levő sík egy pontját, dF a hozzátartozó felszínelemet, Q és $d\Phi$ vetületüket a gömbön, dV pedig a dF alapterületű, O csúcsú elemi kúpszerű test térfogatát. O-ból a síkra bocsátott merőleges talppontját jelöljük P_0-lal, P_0 vetületét a gömbön Q_0-lal, a POP_0 szöget φ-vel (2. ábra).



2. ábra

Adott R esetén dF és dV $d\Phi$-nek, r-nek és φ-nek (illetve a QQ_0 gömbi távolságnak) függvénye:

$$dF=f(r,\varphi)\,d\Phi,$$

$$dV=v(r,\varphi)\,d\Phi.$$

Az állandó görbületű tér egy $[l, e, c]$ konvex poliéderét vetítsük centrálisan egy általa tartalmazott gömbre. A gömb sugarát jelöljük R-rel, a poliéder lapsíkjainak távolságát a gömb középpontjától pedig $r_1, r_2, \ldots, r_l$-lel. Az euklideszi és a hiperbolikus esetben a kérdéses gömb tetszőleges lehet, a szférikus esetben azonban átmenetileg a legnagyobb tartalmazott gömbre kell szorítkoznunk, hogy biztosítani tudjuk a továbbiakban jelentősen kihasznált $r_i \leqq \frac{\pi}{2}$ feltételt. A poliéder gömbi vetülete egy $[l, e, c]$ konvex mozaik lesz, amelynek lapjait $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$-lel jelöljük.

A poliéder felszíne és térfogata:

$$F = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} f(r_i, \varphi) d\Phi,$$

$$V = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} v(r_i, \varphi) d\Phi.$$

$v(r, \varphi)$ az OP sugarú gömb térfogatának $\frac{1}{\Phi}$-szerese, és így nyilván r-nek és φ-nek szigorúan monoton növekvő függvénye.

Az euklideszi esetben $f(r, \varphi) = \frac{r^2}{R^2} \sec^3 \varphi \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, mindkét változójában szigorúan monoton növekvő függvény.

E meggondolások alapján az (5b) egyenlőtlenséget alkalmazva nyerjük:

$$F \geqq 4e \int_{\Delta} f(R, \varphi) d\Phi \quad \text{az euklideszi térben,}$$

$$V \geqq 4e \int_{\Delta} v(R, \varphi) d\Phi \quad \text{általában.}$$

Itt e jelenti a poliéder éleinek számát, φ pedig az AOP szöget. Egyenlőség csak a gömböt érintő szabályos testekre áll fenn. A jobb oldalon álló integrálok szemléletes jelentését is megadhatjuk: az első az ABC háromszög vetületének területe a gömböt az A pontban érintő síkon; a második pedig annak az ortoschem tetraédernek a térfogata, amelynek csúcsai az említett vetület csúcspontjai és a gömb középpontja. Ezeket meghatározva kapjuk az (1)—(3) tételeket.

Határozzuk meg $f(r, \varphi)$-t általánosan. Jelöljük az $\overline{OP}$ távolságot ϱ-val, a P pontban az $\overline{OP}$-re merőlegesen állított sík és az adott sík szögét ψ-vel. A dF felszínelemet vetítsük először az adott gömbbel koncentrikus ϱ sugarú gömbre. Mivel a P pont elég kis környezetében az euklideszi geometria érvényes, az így nyert dF' felszínelemre:

$$dF' = \cos \psi \, dF.$$

dF' és $d\Phi$ között a következő kapcsolat áll fenn:

$$dF' = \frac{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R}\,d\Phi,$$

és így

$$dF = \frac{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R}\sec\psi\,d\Phi.$$

Az OP_0P derékszögű háromszögből:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)} = \sec\psi = \frac{\sin\sqrt{\varkappa}\,\varrho}{\sin\sqrt{\varkappa}\,r},$$

továbbá

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = \sin\psi = \cos\sqrt{\varkappa}\,r\sin\varphi,$$

tehát

(6) $$dF = \frac{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,r}{\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R(1-\cos^2\sqrt{\varkappa}\,r\sin^2\varphi)^{3/2}}\,d\Phi = f(r,\varphi)\,d\Phi.$$

A természetes hosszegységet használva,

(6a) $$f(r,\varphi) = \frac{\sin^2 r}{\sin^2 R(1-\cos^2 r\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

a szférikus,

(6b) $$f(r,\varphi) = \frac{\mathrm{sh}^2 r}{\mathrm{sh}^2 R(1-\mathrm{ch}^2 r\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

a hiperbolikus térben.

A (6a) és (6b) formulákból közvetlenül látható, hogy $f(r,\varphi)$ rögzített r mellett φ-nek, hiperbolikus térben pedig rögzített φ mellett r-nek is szigorúan monoton növekvő függvénye.

Így a hiperbolikus térben az R sugarú gömböt tartalmazó $[l, e, c]$ konvex poliéder felszínére a már ismert jelölésekkel a következő becslést kapjuk:

(7a) $$F = \sum_{i=1}^{l}\int_{\Phi_i} f(r_i,\varphi)\,d\Phi \geqq \sum_{i=1}^{l}\int_{\Phi_i} f(R,\varphi)\,d\Phi \geqq 4e\int_{\Delta} f(R,\varphi)\,d\Phi.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a poliéder a gömb köré írt szabályos poliéder.

A szférikus térben $f(r,\varphi)$ r-nek nem monoton növekvő függvénye a szóba jövő teljes tartományban. FEJES TÓTH LÁSZLÓ egy ötlete alapján azonban ebben az esetben is találunk egy eljárást, amely a (7a)-val analóg egyenlőtlenségre vezet. Felhasználjuk a szabályos poliéderek egy általánosan érvényes szélsőérték tulajdonságát:

Tekintsük a Φ gömb középpontjától r távolságban levő $\left(\text{a szférikus térben feltesszük, hogy } r \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ és a gömböt nem metsző síkban azokat a konvex n-szögeket, amelyek vetületének területe a gömbön ugyanakkora. E sokszögek közül azoknak a szabályos n-szögeknek a területe a legkisebb, amelyek középpontja a gömb középpontjának vetülete a síkon. E tételt az (5) tétel bizonyításához hasonlóan igazolhatjuk (vö. [3]).

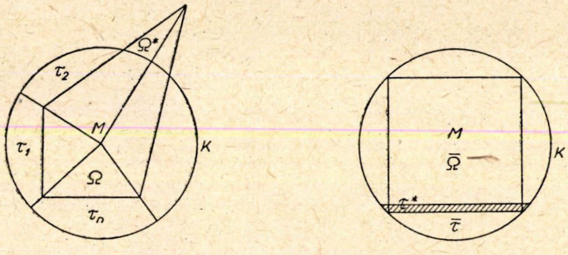
Jelöljünk $\bar{\Omega}$-sal egy olyan szabályos gömbi n-szöget, amelynek középpontja a Φ gömb középpontjából a síkra húzott merőleges és a gömb M metszéspontja, Ω-val pedig egy ugyanakkora területű, egyébként tetszőleges konvex n-szöget. (Természetesen feltesszük, hogy $\bar{\Omega}$ és Ω vetülete a síkon létezik.) Állításunk szerint:

$$\int_{\Omega} f(\varphi)\,d\Phi \geqq \int_{\bar{\Omega}} f(\varphi)\,d\Phi,$$

ahol $f(\varphi)$ a korábban $f(r, \varphi)$-vel jelölt függvényt jelenti rögzített r esetén. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha Ω is M középpontú szabályos n-szög.

A bizonyításnál — $f(r, \varphi)$ φ-szerinti monotonitása alapján — szorítkozhatunk arra az esetre, amikor M Ω-nak belső pontja. Jelöljük K-val $\bar{\Omega}$ körülírt körét (3. ábra). Jelöljük továbbá Ω^*-gal Ω-nak K-n kívül eső részét, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$-nel azokat a tartományokat, amelyekre az Ω csúcsain át húzott sugarak osztják fel K-nak Ω-n kívüli részét, $\bar{\tau}$-sal az $\bar{\Omega}$ egy oldala által K-ból levágott körszeletet, τ^*-gal pedig azt a sávot, amely $\bar{\tau}$-t $\bar{\tau}+\frac{\Omega^*}{n}$ területű körszeletre egészíti ki.

A tétel igazolásához felhasználjuk az (5a, b) általános egyenlőtlenség bizonyí-



3. ábra

tásánál már megismert két segédtételt, továbbá a *Jensen*-egyenlőtlenséget.

Ezek alapján (az integrandust nem írjuk ki):

$$\int_{\Omega} = \int_{K} - \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_i} + \int_{\Omega^*} \geqq \int_{K} - \sum_{i=1}^{n} \omega(\tau_i) + \int_{\Omega^*} \geqq \int_{K} - n\omega\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right) + \int_{\Omega^*} =$$

$$= \int_{K} - n\omega(\bar{\tau}) - n\int_{\tau^*} + \int_{\Omega^*}.$$

A nyert összeg két utolsó tagja $f(\varphi)$ monotonitása következtében $\geqq 0$, így

$$\int_{\Omega} f(\varphi)\,d\Phi \geqq \int_{K} f(\varphi)\,d\Phi - n\int_{\bar{\tau}} f(\varphi)\,d\Phi = \int_{\bar{\Omega}} f(\varphi)\,d\Phi.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha Ω is M középpontú szabályos n-szög.

Térjünk vissza eredeti problémánkra. A most bebizonyítottak szerint a poliéder minden lapjának meg tudunk feleltetni egy nála nem nagyobb területű szabályos sokszöget. Vetítsük ezt a szabályos sokszöget centrálisan a gömb azonos normálisú érintősíkjára. Ezzel a terület nem növekedhet $\left(r \leqq \frac{\pi}{2}\right)$. Ilyen módon a poliéder minden lapját helyettesíthetjük egy azonos oldalszámú szabályos sokszöggel, amely középpontjában érintkezik a gömbbel, és amelynek területe nem nagyobb a poliéderlap területénél, viszont vetülete a gömbön ugyanakkora. Jelöljük a sokszögeket F_i'-vel, a gömbi vetületeiket Φ_i'-vel, oldalszámukat e_i-vel, az oldalszámok összegét s-sel.

Az elmondottak alapján:

$$F = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i} f(r_i, \varphi) d\Phi \geqq \sum_{i=1}^{l} F_i' = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} f(R, \varphi) d\Phi,$$

ahol Φ_i és Φ_i' megegyező területű és oldalszámú konvex gömbi sokszögek (Φ_i' szabályos).

Az (5a) tétel minden feltétele teljesül, ezért:

$$F \geqq \sum_{i=1}^{l} F_i' = \sum_{i=1}^{l} \int_{\Phi_i'} f(R, \varphi) d\Phi \geqq 2s \int_{\Delta} f(R, \varphi) d\Phi,$$

ahol Δ jelentése ismert.

A helyettesítés során a gömbi sokszögek oldalszáma nem változott, ezért $s=2e$, továbbá Δ szögei:

$$\alpha = \frac{\pi l}{2e} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\pi c}{2e}.$$

Tehát a következő (a hiperbolikus esettel analóg) becslést kapjuk:

$$F \geqq 4e \int_{\Delta} f(R, \varphi) d\Phi, \tag{7b}$$

és könnyen belátható, hogy az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a poliéder a gömb köré írt szabályos poliéder (ide számítva a szabályos diédereket és hosoédereket is).

Ki kell még számítanunk a (7a) és (7b) jobb oldalán álló integrált. Mint tudjuk, ezek az ABC háromszög vetületének területét jelentik.

Jelöljük a B és C pontok vetületét a kérdéses síkon B'-vel és C'-vel, és vezessük be az $\overline{AC'}=u$, $\overline{B'C'}=v$, $B' \sphericalangle = \beta'$ jelöléseket (4. ábra).

Az $AB'C'$ háromszög területe:

$$T = \frac{1}{\varkappa}\left(\alpha + \beta' - \frac{\pi}{2}\right).$$

Meghatározzuk β'-t.

Az $AB'C'$ háromszögből:

$$\cos \beta' = \cos \sqrt{\varkappa}\, u \sin \alpha. \tag{8}$$

Az OAC' háromszögből:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,u = \sin\sqrt{\varkappa}\,R\operatorname{tg} b,$$

ahol b az AC oldalt jelenti.

Az ABC gömbháromszögből:

$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

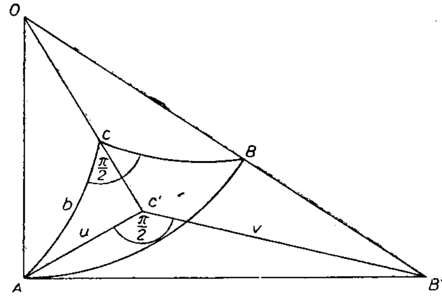
ahonnan

$$\operatorname{tg} b = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1}.$$

Tehát:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa}\,u = \sin\sqrt{\varkappa}\,R\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} - 1},$$

s így



4. ábra

$$\cos\sqrt{\varkappa}\,u = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}-1\right)}}.$$

Ezt (8)-ba helyettesítve:

$$\cos\beta' = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}-1\right)}} = -\sin\left(\beta'-\frac{\pi}{2}\right).$$

Tehát az $AB'C'$ háromszög területe:

$$T = \frac{1}{\varkappa}\left[\alpha - \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\sqrt{\varkappa}\,R\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta}-1\right)}}\right], \tag{9}$$

ahol

$$\alpha = \frac{\pi l}{2e}, \qquad \beta = \frac{\pi c}{2e}.$$

(9)-et (7b)-vel egybevetve adódik a (4) tétel.

A szférikus esetben most már elejthetjük azt a megszorítást, hogy R a poliéder által tartalmazott legnagyobb gömb sugara, mert a szóba jövő intervallumban $\left(R \leq \frac{\pi}{2}\right)$ T R-nek növekvő függvénye.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth, L.: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg (1953).

[2] ———— : On the volume of a polyhedron in non-Euclidean spaces, *Publ. Math.* **4** (1956).

[3] Coxeter, H. S. M.—Fejes Tóth, L.: The total length of the edges of a non-Euclidean polyhedron with triangular faces, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **14** (1963).

[4] Imre, M.: Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** (1964).

(Beérkezett: 1965. II. 15.)