

# TÖMEGKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁKRÓL, I.

Írta: TOMKÓ JÓZSEF

## Bevezetés

A tömegkiszolgálással foglalkozó elméleti munkák többségében főként olyan szkémák diszkussziója felé irányul a figyelem, amelyek kiszolgáló készülékei sohasem veszthetik el munkavégző-képességüket. A különböző problémafelvetések, amelyeknél a matematikai modellek feltételeinek a reális körülményekhez való közeli-tési foka más és más, egy közös vonásban, a kiszolgáló készülékek abszolút üzembiztonságának feltételezésében megegyeznek. Magától értetődik, hogy ezen utóbbi megszorítás elengedése is szükséges ahhoz, hogy sok, a gyakorlatban felmerülő problémát érdemlegesen vizsgálhassunk. Általában a kiszolgáló rendszerek effektivitását nagymértékben befolyásolják a kiszolgáló készülékek meghibásodásai s ezzel a hatással az esetek túlnyomó többségében számolnunk kell. Valamely telefonközpont csatornái, avagy más kiszolgáló berendezések, készülékek, emberek, általában nem képesek tetszőleges hosszúságú ideig funkciójukat hibátlanul teljesíteni. Időszakonként a kiszolgáló készülékek felújításra szorulnak, emiatt a kiszolgálási folyamat intenzitása csökken vagy teljesen megszűnik, s ez maga után vonja a rendszer effektivitásának a megváltozását.

A probléma tanulmányozása először az elvesztéses rendszerekkel kapcsolatos *Erlang*-formulák vizsgálatával indult meg. Általában feltételezték, hogy a készülékek csak munkaperiódusok, avagy csak szabad periódusok alatt romolhatnak el. Az esetben, amikor mind a szabad, mind a munkaperiódusok alatt bekövetkezhetnek a készülékek meghibásodásai, csak további, eléggé irreális feltevések mellett értek el eredményeket. Ilyen feltevés például az, hogy mind a szabad, mind a munkaperiódusok kezdő pillanataiban a készülékek megfelelnek múltukról. Ez azt eredményezi, hogy a soronkövetkező periódus alatti meghibásodás nem függ az előző periódus hosszától.

A jelen és a következő néhány dolgozatban különböző, meghibásodásoknak alávetett készülékkel rendelkező egycsatornás kiszolgáló rendszerekkel kapcsolatos problémákat fogunk vizsgálni. Ahol csak lehet, az előbb említett irreális feltevéstől el fogunk tekinteni. Emellett megengedjük majd azt, hogy a munkaperiódusokban nagyobb legyen a készülék kihasználódási intenzitása, mint a szabad periódusokban. Az utóbbi situációt most pontosabban körülírjuk. E célból bevezetjük a készülék *üzembiztonsági tartalékának* (rövidítve: ü. b. tart.) fogalmát, mely alapvető szerepet fog játszani a továbbiakban is. A készülék ü. b. tartalékán értjük azt az általában véletlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő ún. üzemanyagot (benzin, elektromos energia stb.), melynek esetleges kellő mértékű hiánya a készülék meghibásodását, munkavégző-képességének elvesztését idézi elő. Feltételezzük, hogy a készülék ü. b. tartaléka mind a szabad, mind a munkaperiódusok folyamán csökken. A csökkenést az idővel arányosnak tételezzük fel, éspedig, a szabad periódu-

sok alatt  $c=1$ , míg a munkaperiódusok alatt  $c>1$  arányossági tényezővel. Ennek értelmében az ü. b. tartalék mértékszám megegyezik azon időhosszal, amelynek folyamán a készülék hibátlan állapotban marad, hacsak munkavégzésre nem kényszerül. Mindvégig feltételezni fogjuk, hogy miután a készülék elvesztette ü. b. tartalékát, azaz meghibásodott, nyomban elkezdődik a javítása, felújítása, mely véletlen ideig tart.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

$\omega(t)$  jelöli a készülék  $t$  pillanatbeli ü. b. tartalékát. Ha a  $t$  pillanatban a készülék javítás alatt van, akkor definíciószerűleg  $\omega(t)=0$ . Legyenek  $\bar{r}_i, r_i$  az  $i$ -dik javítás kezdő, ill. végződési pillanatai. ( $i=0$  esetén  $\bar{r}_0=0, r_0>0$  meghatározottak, ha a  $t=0$  pillanatban a készüléket éppen javítják.) Legyenek továbbá  $\delta_i = r_i - \bar{r}_i$  ( $i \geq 0$ ),  $\eta_i = \omega(r_i+0)$  ( $i \geq 1$ ),  $\eta_0 = \omega(r_0+0)$ , ha  $r_0$  értelmezett, míg más esetben  $\eta_0 = \omega(0)$ . Feltételezzük, hogy a  $\delta_i$ -k,  $\eta_i$ -k összességükben egymástól független valószínűségi változók s  $i \geq 1$  mellett  $P(\delta_i \leq x) = G(x)$ ,  $P(\eta_i \leq x) = H(x)$ .

A jelen dolgozat 1. §-ában egy egysatornás veszteséges rendszerrel kapcsolatos problémát vizsgálunk. Felvetjük ugyanezt a problémát  $n$  készülék esetére is, majd röviden vázoljuk a feladat megoldását azon egyszerű esetben, amikor az előforduló összes valószínűségi változók mind exponenciális eloszlásúak. A 2. §-ban módosítjuk a vesztesi elvet. Feltételezzük, hogy a készülék hibátlan periódusaiban beérkező igények a „rendszerben maradnak”, ha szükséges sorban állnak. Ha viszont bekövetkezett a készülék meghibásodása, akkor a rendszerben tartózkodó, továbbá a javítási idő alatt érkező összes igény mind elvész, azaz kiszolgálás nélkül távozik.

## 1. §

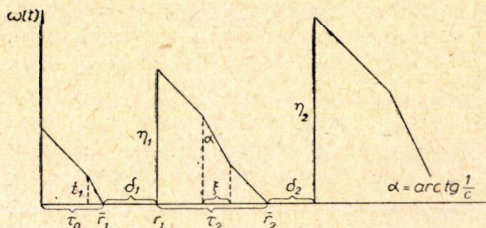
### Elvesztéses rendszer

1. A PROBLÉMA KITŰZÉSE. Tekintsünk egy egysatornás kiszolgáló rendszert. A készülék meghibásodásait a bevezetésben körülírt feltételek írják le, s tételezzük fel még a következőket:

a rendszerbe érkező igény  $\lambda$ -paraméterű homogén Poisson-folyamat,

a kiszolgálási idők egymástól, az érkezési folyamattól, az  $\eta_i$ -ktől és a  $\delta_i$ -ktől is független, azonos  $P(\xi_i \leq x) = F(x)$  eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók,

a rendszer elvesztéses, azaz, ha olyan pillanatban lép fel egy igény, amikor a készülék foglalt avagy javítás alatt van, akkor ez az igény megszűnik; hasonlóan megszűnik, elvész az az igény is, amelynek kiszolgálása elkezdődött ugyan, de megszakadt a készülék meghibásodása következtében.



1. ábra

Tekintsük most a bevezetésben szereplő  $\{\omega(t), t \geq 0\}$  folyamatot. Az alábbi ábra egy lehetséges trajektóriáját tükrözi ennek a folyamatnak. Innen leolvashatjuk, hogy a kezdő  $t=0$  pillanattól a  $t_1$  pillanatig a készülék szabad volt s ü. b. tartaléka az idővel arányosan  $t_1$  mennyiséggel csökkent. A  $t_1$  pillanatban érkezett egy igény,



elkezdődött a kiszolgálása, s eközben a készülék ü. b. tartaléka intenzívebben kezdett csökkenni. Az  $\bar{r}_1$  pillanatban a készülék meghibásodott s elkezdődött a javítása, mely  $\delta_1$  idő múlva az  $\bar{r}_1$  pillanatban fejeződött be. A folyamat további menete világos az ábrából. A  $\tau_i = \bar{r}_{i+1} - r_i$  ( $i \geq 0$ ) mennyiségek azon időperiódusok hosszai, amelyek folyamán a készülék hibátlan.  $c > 1$  következtében általában  $\tau_i \leq \eta_i$ . Feltételeink értelmében a  $\tau_i$ -k egymástól függetlenek, esetleg a  $\tau_0$ -tól eltekintve azonos eloszlásúak. Ezen közös eloszlásfüggvény meghatározására egyelőre nem lesz szükségünk, majd egy későbbi dolgozatban fogunk ezzel foglalkozni.

Legyen

$\pi_1(t)$  — annak a valószínűsége, hogy a  $t$  pillanatban a készülék kiszolgálással foglalt,

$\pi_2(t)$  — annak a valószínűsége, hogy a készülék a  $t$  pillanatban javítás alatt van,

$\pi_3(t)$  — annak a valószínűsége, hogy a  $t$  pillanatban a készülék hibátlan és szabad.

E §-ban megvizsgáljuk, hogy az eddigieken kívül milyen további feltételek mellett léteznek a

$$(1) \quad \pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

határvalószínűségek és hogy hogyan határozhatók meg.

2. A RENDSZERT LEÍRÓ MARKOV-FOLYAMAT ÉS A  $\pi_i$  VALÓSZÍNŰSÉGEK MEGHATÁROZÁSA. Tekintsük a következő

$$\gamma_1(t) = \{e(t), v(t)\}$$

valószínűségi folyamatot.  $e(t) = 1$ , ha a készülék hibátlan és kiszolgálással foglalt,  $e(t) = 2$ , ha javítás alatt van, végül  $e(t) = 3$ , ha a készülék hibátlan és szabad. A második koordináta,  $v(t)$  értelme az  $e(t)$  különböző értékei mellett más és más.  $e(t) = 1$  esetben  $v(t)$  egy kétdimenziós vektor  $\{\xi(t), \eta(t)\}$ , hol  $\xi(t)$  jelenti a készülék által a  $t$  pillanatban kiszolgálás alatt levő igény kielégítésére a  $t$  pillanatig ráfordított időt,  $\eta(t)$  pedig az ü. b. tartalék csökkenése a  $t$  pillanat és az öt megelőző javítás befejeződési pillanata között, azaz  $\eta(t) = \eta_i - \omega(t)$ , hacsak  $r_i \leq t < \bar{r}_{i+1}$ .  $e(t) = 2$  esetben  $v(t)$  a soron levő javításnak a  $t$  pillanatig eltelt ideje. Végül  $e(t) = 3$  esetben  $v(t)$  egyenlő az előbb meghatározott  $\eta(t)$ -vel. A feltételezéseink értelmében  $\gamma_1(t)$  időben homogén Markov-folyamat lesz. A folyamatnak a fázisterében való elhelyezkedésével kapcsolatos, tetszőleges  $t$  pillanatbeli eloszlását egyértelműen jellemzik az alábbi függvények:

$$P_1(x, y; t) = P\{e(t) = 1, v(t) = [\xi(t), \eta(t)] \in B_{x,y}\},$$

$$\text{ahol} \quad B_{x,y} = \{(\xi, \eta); \eta \geq c\xi, 0 \leq \xi < x, 0 \leq \eta < y\},$$

$$(2) \quad P_2(u; t) = P\{e(t) = 2, 0 \leq v(t) < u\},$$

$$P_3(y; t) = P\{e(t) = 3, 0 \leq \eta(t) < y\}.$$

A 4. pontban bebizonyítjuk, hogy hacsak a  $H(x)$  és  $G(x)$  ( $c > 1$  esetben a  $H(x)$ ,  $G(x)$  és  $F(x)$ ) eloszlásfüggvények közül legalább egy nem rácsos eloszlás<sup>1</sup> és

<sup>1</sup> Egy eloszlást rácsosnak nevezünk, ha létezik olyan  $h > 0$  szám, hogy az eloszlásfüggvény minden növekedési helye  $nh$  alakú, hol  $n$  egész szám.

$M(\eta_i + \delta_i) < \infty$ , akkor a  $\gamma_1(t)$  folyamat ergodik. Ennek értelmében tetszőleges kezdő eloszlás mellett, amelyet például valamely  $\{P_1(x, y; 0); P_2(u; 0); P_3(y; 0)\}$  függvény-hármas jellemez, ezek speciális választásától függetlenül léteznek a

$$P_1(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(x, y; t)$$

$$P_2(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_2(u; t)$$

$$P_3(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_3(y; t)$$

határfüggvények.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a  $\gamma_1(t)$  folyamat kezdő eloszlása, azaz a  $\{P_1(x, y; 0); P_2(u; 0); P_3(y; 0)\}$  függvény-hármas rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

léteznek a

$$p_1(x, y; 0) = \frac{\partial P_1(x, y; 0)}{\partial x \partial y}, \quad p_2(u; 0) = \frac{\partial P_2(u; 0)}{\partial u}, \quad p_3(y; 0) = \frac{\partial P_3(y; 0)}{\partial y}$$

sűrűségfüggvények, továbbá a

$$p_1^*(x, y; 0) = \frac{p_1(x, y; 0)}{[1 - F(x)][1 - H(y)]}, \quad p_2^*(u; 0) = \frac{p_2(u; 0)}{1 - G(u)}, \quad p_3^*(y; 0) = \frac{p_3(y; 0)}{1 - H(y)}$$

normált sűrűségfüggvények rendelkeznek az összes változóik szerinti elsőrendű parciális deriváltakkal. Könnyen belátható, hogy ez esetben a folyamatunk tetszőleges  $t$  melletti eloszlása, azaz a (2) függvények is rendelkeznek a felsorolt tulajdonságokkal.

A (3) határfüggvények létezése egyúttal a  $\pi_i$  valószínűségek létezését is jelenti. Meghatározásuk pedig a következőképpen történhet. Legyenek:

$$(4) \quad p_1(x, y; t) = \frac{\partial p_1(x, y; t)}{\partial x \partial y}, \quad p_2(u; t) = \frac{\partial p_2(u; t)}{\partial u}, \quad p_3(y; t) = \frac{\partial p_3(y; t)}{\partial y}$$

$$p_1^*(x, y; t) = \frac{p_1(x, y; t)}{[1 - F(x)][1 - H(y)]}, \quad p_2^*(u; t) = \frac{p_2(u; t)}{1 - G(u)}, \quad p_3^*(y; t) = \frac{p_3(y; t)}{1 - H(y)}.$$

A  $p_i^*(i=1, 2, 3)$  függvényekre felírható egy integro-differenciál egyenletrendszer. Ennek levezetése előtt hasznos lesz megvilágítani, milyen a  $\gamma_1(t)$  folyamat fázis tere. A folyamatunk a fázistér I-típusú pontjainak valamelyikében, az

$$\omega_1(x, y) \quad (0 \leq x, y < \infty, y \leq cx)$$

pontban tartózkodik, ha  $e(t) = 1$  és  $\xi(t) = x, \eta(t) = y$ ;

II-típusú pontjainak valamelyikében, az

$$\omega_2(u) \quad (0 \leq u < \infty)$$

pontban tartózkodik, ha  $e(t) = 2$  és  $v(t) = u$ ;

végül a fázistér

III-típusú pontjai közül az

$$\omega_3(y) \quad (0 \leq y < \infty)$$

pontban tartózkodik, ha  $e(t)=3$  és  $v(t)=\eta(t)=y$ .

Most megkeressük a  $\gamma_1(t)$  folyamat azon átmeneteit, amelyek  $\Delta t$  idő alatti bekövetkezéseinek a valószínűségei  $o(\Delta t)$ -nél nem kisebb nagyságrendűek. A folyamatunkban kis  $\Delta t$  idő alatt a következő átmenet történhet:

Ia. az  $\omega_1(x - \Delta t, y - c\Delta t)$  pontból az  $\omega_1(x, y)$  pontba

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta t)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)}$$

valószínűséggel,

Ib. az  $\omega_3(y - \Delta t)$  pontból az  $\omega_1(0, y)$  pontba

$$\lambda \Delta t \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)}$$

valószínűséggel,

IIa. az  $\omega_2(u - \Delta t)$  pontból az  $\omega_2(u)$  pontba

$$\frac{1 - G(u)}{1 - G(u - \Delta t)}$$

valószínűséggel,

IIb. az  $\omega_1(x, y)$ , ill.  $\omega_3(y)$  pontokból az  $\omega_2(o)$  pontba,

$$\frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} \cdot \frac{H(y + c\Delta t) - H(y)}{1 - H(y)}, \text{ ill. } \frac{H(y + \Delta t) - H(y)}{1 - H(y)}$$

valószínűségekkel, végül

IIIa. az  $\omega_3(y)$  pontba az  $\omega_3(y - \Delta t)$  pontból

$$(1 - \lambda \Delta t) \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)},$$

és az  $\omega_1(x, y - c\Delta t)$  pontból

$$\frac{F(x + \Delta t) - F(x)}{1 - F(x)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)}$$

valószínűséggel,

IIIb. az  $\omega_3(o)$  pontba az  $\omega_2(u)$  pontból

$$\frac{G(u + \Delta t) - G(u)}{1 - G(u)}$$

valószínűséggel.

Felhasználva ezeket az átmenet-valószínűségeket, a  $p_i$  függvényekre az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$p_1(x, y; t) = p_1(x - \Delta t, y - c\Delta t; t - \Delta t) \frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta t)} \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)} + o(\Delta t)$$

$$p_1(0, y; t) = p_3(y - \Delta t; t - \Delta t) \lambda \Delta t \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)} + o(\Delta t)$$

$$p_2(u; t) = p_2(u - \Delta t; t - \Delta t) \frac{1 - G(u)}{1 - G(u - \Delta t)} + o(\Delta t)$$

$$p_2(0; t) = \int \int_{0 \leq cx \leq y < \infty} p_1(x, y; t - \Delta t) \frac{1 - F(x + \Delta t)}{1 - F(x)} \frac{H(y + c\Delta t) - H(y)}{\Delta t [1 - H(y)]} dx dy + \\ + \int_0^{\infty} p_3(y; t - \Delta t) \frac{dH(y)}{1 - H(y)} + 0(1)$$

$$p_3(y; t) = p_3(y - \Delta t; t - \Delta t) (1 - \lambda \Delta t) \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta t)} + \\ + \Delta t \int_0^{\frac{y}{c} - \Delta t} p_1(x, y - c\Delta t; t - \Delta t) \frac{dF(x)}{1 - F(x)} \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta t)} + o(\Delta t)$$

$$p_3(0; t) = \int_0^{\infty} p_2(u; t - \Delta t) \frac{dG(u)}{1 - G(u)} + 0(1).$$

A  $p_i^*(i = 1, 2, 3)$  függvényekre ezek az összefüggések a következők lesznek:

$$p_1^*(x, y; t) = p_1^*(x - \Delta t, y - c\Delta t; t - \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$p_1^*(0, y; t) = \lambda \Delta t p_3^*(y - \Delta t; t - \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$p_2^*(u; t) = p_2^*(u - \Delta t; t - \Delta t) + o(\Delta t)$$

$$p_2^*(0; t) = \int \int_{0 \leq cx \leq y < \infty} p_1^*(x, y; t - \Delta t) [1 - F(x)] c dx dH(y) + \\ + \int_0^{\infty} p_3^*(y; t - \Delta t) dH(y) + 0(1)$$

$$p_3^*(y; t) = (1 - \lambda \Delta t) p_3^*(y - \Delta t; t - \Delta t) + \Delta t \int_0^{\frac{y}{c} - \Delta t} p_1^*(x, y - c\Delta t; t - \Delta t) dF(x) + o(\Delta t)$$

$$p_3^*(0; t) = \int_0^{\infty} p_2^*(u; t - \Delta t) dG(u) + 0(1).$$

Innen a  $\Delta t \rightarrow 0$  határátmenet elvégzése után nyerjük az alábbi integro-differenciál egyenletrendszert:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c \frac{\partial p_1^*}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p_2^*}{\partial t} + \frac{\partial p_2^*}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial p_3^*}{\partial t} + \frac{\partial p_3^*}{\partial y} + \lambda p_3^* &= \int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y; t) dF(x) \end{aligned}$$

A peremfeltételek a következők:

$$(6) \quad \begin{aligned} p_1^*(0, y; t) &= \lambda p_3^*(y; t) \\ p_2^*(0; t) &= c \int_0^{\frac{y}{c}} \left\{ \int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y; t) [1 - F(x)] dx \right\} dH(y) + \int_0^{\frac{y}{c}} p_3^*(y; t) dH(y) \\ p_3^*(0) &= \int_0^{\frac{y}{c}} p_2^*(u; t) dG(u). \end{aligned}$$

Mármint, ha  $p_1^*(x, y)$ ,  $p_2^*(u)$  és  $p_3^*(y)$  a folyamat valamely, a kezdő eloszlásra megkövetelt tulajdonságokkal rendelkező stacionárius eloszlásnak megfelelő függvényhármas, akkor szükségképpen megoldása a

$$(5') \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c \frac{\partial p_1^*}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p_2^*}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial p_3^*}{\partial y} + \lambda p_3^* &= \int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y) dF(x) \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a

$$(6') \quad \begin{aligned} p_1^*(0, y) &= \lambda p_3^*(y) \\ p_2^*(0) &= c \int_0^{\frac{y}{c}} \left\{ \int_0^{\frac{y}{c}} p_1^*(x, y) [1 - F(x)] dx \right\} dH(y) + \int_0^{\frac{y}{c}} p_3^*(y) dH(y) \\ p_3^*(0) &= \int_0^{\frac{y}{c}} p_2^*(u) dG(u) \end{aligned}$$

peremfeltételek mellett. Viszont (5')-nek (6') peremfeltételek melletti megoldása

$$\begin{aligned} p_1^*(\alpha, y) &= \varrho L_c(y - cx) \\ (7) \quad p_2^*(u) &= \varrho \\ p_3^*(y) &= \varrho \frac{1}{\lambda} L_c(y) \end{aligned}$$

alakú, ahol  $\varrho$  alkalmasan választott állandó, míg az  $L_c(y)$  függvény a

$$(8) \quad \frac{dL_c(y)}{dy} + \lambda L_c(y) = \lambda \int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y - cx) dF(x)$$

egyenletnek  $L_c(0) = \lambda$  kezdő feltétel melletti megoldása. Itt most az  $L_c(y)$  függvényt elegendő csak  $y \geq 0$  értékeire megadni, míg  $y < 0$ -ra  $L_c(y)$ -t azonosan 0-nak vehetjük. A (8) jobb oldalán álló integrálban elvégezve a  $w = cx$  helyettesítést, egyenletünk a

$$(9) \quad \frac{dL_c(y)}{dy} + \lambda L_c(y) = \int_0^y L_c(y - w) dF\left(\frac{w}{c}\right), \quad L_c(0) = \lambda$$

alakot veszi fel. Térjünk most át a  $A_c(s) = \int_0^\infty e^{-su} L_c(u) du$  és a  $\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF(u)$  Laplace-ill. Laplace—Stieltjes-transzformáltakra. (9) ekvivalens az

$$sA_c(s) - \lambda + \lambda A_c(s) = \lambda \Phi(cs) A_c(s)$$

összefüggéssel, ahonnan  $A_c(s)$ -re a

$$(10) \quad A_c(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda[1 - \Phi(cs)]}$$

formulát nyerjük. Mármost, a  $\gamma_1(t)$  folyamatunk említett tulajdonságokkal rendelkező stacionárius eloszlásának megfelelő sűrűségfüggvényei csak

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= \varrho L_c(y - cy) [1 - F(x)] [1 - H(y)] \\ (11) \quad p_2(u) &= \varrho [1 - G(u)] \\ p_3(y) &= \varrho \frac{1}{\lambda} L_c(y) [1 - H(y)] \end{aligned}$$

alakúak lehetnek. Amint arra már utaltunk, a  $\gamma_1(t)$  folyamat elég egyszerű feltételek mellett ergodikus, következésképpen (11) az egyetlen létező stacionárius eloszlás sűrűségfüggvényeit adja. A  $\pi_i$  valószínűségekkel kapcsolatosan pedig igaz az alábbi tétel:

1. TÉTEL. Ha a  $H(x)$  és a  $G(x)$  ( $c > 1$  esetben a  $H(x)$ ,  $G(x)$  és  $F(x)$ ) eloszlásfüggvények közül legalább egy nem rácsos eloszlásfüggvény és ha  $M(\eta_i + \delta_i) < \infty$ ,



akkor a  $\pi_i$  határvalószínűségek a

$$(12) \quad \begin{aligned} \pi_1 &= q \int_0^{\frac{y}{c}} \left\{ \int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)[1-F(x)]dx \right\} [1-H(y)]dy \\ \pi_2 &= q \int_0^{\infty} [1-G(u)]du \\ \pi_3 &= q \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} L_c(y)[1-H(y)] \end{aligned}$$

formulákkal adhatók meg, ahol a  $\Lambda_c(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} L_c(u) du$  Laplace transzformáltat

(10) szolgáltatja. A  $q$  konstans a  $\sum_1^3 \pi_i = 1$  normálási feltétel határozza meg.

A  $q$  explicit kifejezéséhez felhasználjuk azt, hogy

$$c \int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)[1-F(x)]dx + \frac{1}{\lambda} L_c(y) = 1.$$

Következésképpen,

$$\int_0^{\frac{y}{c}} L_c(y-cx)[1-F(x)]dx + \frac{1}{\lambda} L_c(y) = \frac{1}{c} \left[ 1 + \frac{c-1}{\lambda} L_c(y) \right]$$

és így

$$q = \frac{1}{\int_0^{\infty} [1-G(u)]du + \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \left[ 1 + \frac{c-1}{\lambda} L_c(y) \right] [1-H(y)]dy}.$$

3. AZ ERLANG FORMULÁK EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL. Tekintsük most az előző két pontban vizsgált problémánkat  $n$  kiszolgáló készülék esetén. A készülékek közül mindegyik mind a szabad, mind a foglaltsági periódusok alatt meghibásodhat. Feltételezzük, hogy elegendő felújító berendezés áll rendelkezésünkre. Ennek értelmében, függetlenül a javítás alatt levő készülékek számától, egy készülék meghibásodása esetén nyomban elkezdődik a felújítása, amelynek befejeződése után a készülék teljesen visszanyeri munkavégző-képességét. Jelöljék az  $\eta_i^{(k)}$  ( $i \geq 1, 0 \leq k \leq n$ ) változók a kiszolgáló készülékek egymásutáni ü. b. tartalékait. Legyenek ezek egymástól független valószínűségi változók, közös  $P\{\eta_i^{(k)} \leq x\} = H(x)$  eloszlásfüggvénnyel. Feltételezzük továbbá, hogy a készülékek ü. b. tartalékai az idővel arányosan, szabad periódusok alatt 1, foglaltsági periódusok alatt pedig  $c > 1$  sebességgel csökkennek. A javítási idők  $\delta_i^{(k)}$  ( $i \geq 1, 0 \leq k \leq n$ ) szintén legyenek független, közös  $P\{\delta_i^{(k)} \leq x\} = G(x)$  eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók. A rendszer legyen elvesztéses rendszer, azaz, ha egy olyan pillanatban merül

fel egy igény, amikor a rendszerben nincs hibátlan szabad készülék, akkor ez az igény megszűnik. Hasonlóan megszűnnek azok az igények is, amelyek kiszolgálásai elkezdődtek ugyan, de megszakadtak a kiszolgáló készülékek meghibásodásai következtében.

Mármost e rendszerre vonatkozólag az *Erlang*-probléma azon valószínűség meghatározásából áll, hogy  $k$  készülék kiszolgálással foglalt,  $l$  készülék pedig javítás alatt van ( $k + l \leq n$ ). Tetszőleges  $F(x)$ ,  $H(x)$  és  $G(x)$  mellett a feladat még megoldatlan. Ha viszont ezek az eloszlásfüggvények, mind exponenciálisak, azaz ha  $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ,  $H(x) = 1 - e^{-\alpha x}$  és  $G(x) = 1 - e^{-\beta x}$ , akkor a feladat egy homogen *Markov*-folyamat vizsgálatára vezethető vissza. Legyen  $v(t) = (k, l)$  ( $k, l$  nem negatív egész számok) ha a  $t$  pillanatban  $k$  készüléken kiszolgálás folyik és a javítás alatt levő készülékek száma  $l$ . Feltevéseink értelmében  $v(t)$  homogen *Markov*-folyamatot alkot, melynek fázistere a kétdimenziós sík mindazon  $(x, y)$  nem negatív egész koordinátájú pontjainak összessége, amelyekre  $x + y \leq n$ . A folyamat fázis-terében indukálódó tetszőleges  $t$  pillanatbeli eloszlást egyértelműen jellemzik a

$$P_{k,l}(t) = P\{v(t) = (k, l)\} \quad (0 \leq k + l \leq n)$$

valószínűségek. Egyszerű megfontolásokkal ezekre a függvényekre az alábbi differencia-differenciál egyenletrendszer vezethető le:

$$\begin{aligned} P'_{0,0}(t) &= -(\lambda + n\alpha)P_{0,0}(t) + \mu P_{1,0}(t) + \beta P_{0,1}(t) \\ &\quad 0 < l < n \\ P'_{0,l}(t) &= -[(n-l)\alpha + \lambda + l\beta]P_{0,l}(t) + \mu P_{1,l}(t) + (l+1)\beta P_{0,l+1}(t) + \\ &\quad + c\alpha P_{1,l-1}(t) + (n-l+1)\alpha P_{0,l-1}(t) \\ P'_{0,n}(t) &= -n\beta P_{0,n}(t) + \alpha P_{0,n-1}(t) + c\alpha P_{1,n-1}(t) \\ (13) \quad &\quad 0 < k < n \\ P'_{k,0}(t) &= -[k(\mu + c\alpha) + (n-k)\alpha + \lambda]P_{k,0}(t) + \lambda P_{k-1,0}(t) + \\ &\quad + \beta P_{k,1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1,0}(t) \\ &\quad 0 < k, l < n, k + l < n \\ P'_{k,l}(t) &= -[\lambda + l\beta + k(\mu + c\alpha) + (n-k-l)\alpha]P_{k,l}(t) + \lambda P_{k-1,l}(t) + \\ &\quad + (l+1)\beta P_{k,l+1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1,l}(t) + (k+1)c\alpha P_{k+1,l-1}(t) + \\ &\quad + (n-k-l+1)\alpha P_{k,l-1}(t) \\ &\quad k + l = n, 0 < k, l < n \\ P'_{k,l}(t) &= -[k(\mu + c\alpha) + l\beta]P_{k,l}(t) + \lambda P_{k-1,l}(t) + (k+1)c\alpha P_{k+1,l}(t) + \alpha P_{k,l-1}(t) \\ P'_{n,0}(t) &= -[n\mu + nc\alpha]P_{n,0}(t) + \lambda P_{n-1,0}(t). \end{aligned}$$

Most rendezzük a fázistér pontjait a következőképpen: a  $(0, l)$  pontokhoz  $0 \leq l \leq n$  rendeljük az  $l$  egész számot, míg más  $(k, l)$  párhoz rendeljük az

$$s = \sum_{i=1}^k [n - (k-1) + i] + l \quad \text{egészset.}$$

Fordítva, tetszőleges  $s$   $\left(0 \leq s \leq N, N = \frac{(n+1)(n+1)}{2}\right)$  egész számhoz könnyen megadható az a  $(k, l)$  számpár, amelyhez az előző módon az  $s$  rendelődik. Ily módon azt kapjuk, hogy

$$k = \text{első } i, \text{ melyre } s - \sum_{j=0}^i (n-j+1) < 0,$$

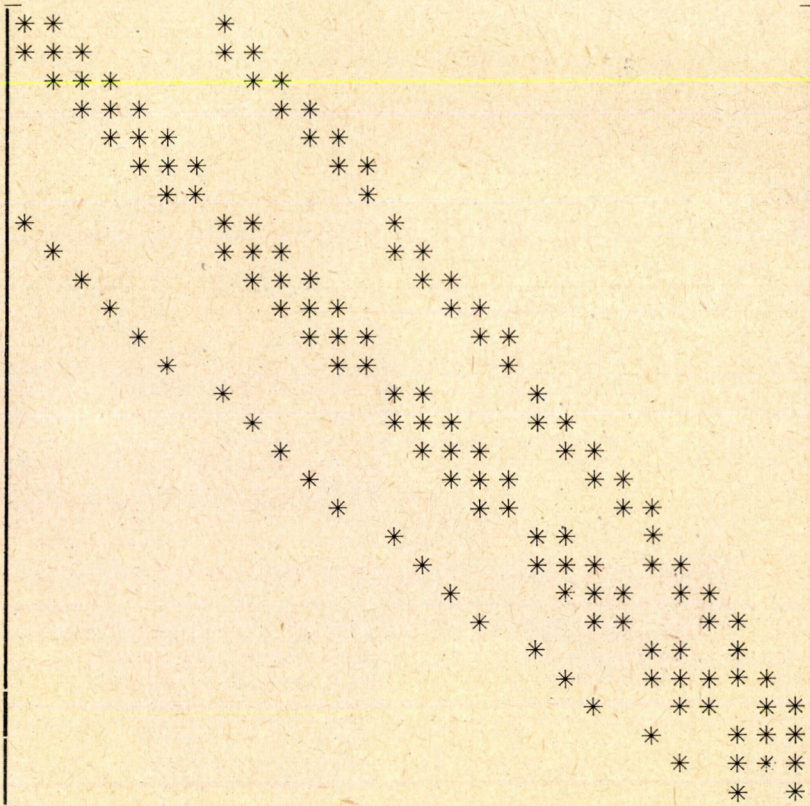
míg

$$l = s - \sum_{j=0}^{k-1} (n-j+1).$$

A (13) egyenletrendszer most átírható egyetlen

$$P'(t) = AP(t)$$

mátrix-egyenletbe.  $P(t)$  oszlop vektor, melynek komponensei a  $P_{k,l}(t) = P_s(t)$  valószínűségek. Az  $A$  mátrix strukturális alakjának érzékeltetésére vázoljuk az  $n=6$  esetnek megfelelő mátrixot. \* -gal jelöljük a 0-tól különböző elemek helyét, a jeletlenül hagyott helyeken a mátrix elemei zérusok.



Foglalkozzunk most a

$$q_s = \lim_{t \rightarrow \infty} P_s(t)$$

határvalószínűségek meghatározásának problémájával. Ha  $q$ -val jelöljük azt az oszlop-vektort, melynek komponensei a  $q_s$ -sek ( $0 \leq s \leq N$ ), akkor kell, hogy fennálljon a

$$(14) \quad Aq = 0$$

egyenlet. (14) homogén lineáris egyenletrendszer, melyet a  $\sum_0^N q_s = 1$ ,  $q_s \geq 0$  feltételek mellett kell megoldanunk. Az  $A$  mátrix eléggé bonyolult struktúrája miatt tetszőleges  $n$  mellett a  $q_s$  határvalószínűségek explicit meghatározása komoly nehézségekbe ütközik. A gyakorlati alkalmazásoknál azonban nem is erre van szükség. Adott  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $n$  értékek mellett elegendő a  $q_s$ -ek numerikus meghatározása, mely könnyen végrehajtható elektronikus számológép segítségével.

Az  $n=1$  esetben a (14) egyenletrendszer a

$$-(\lambda + \alpha)q_0 + \beta q_1 + \mu q_2 = 0,$$

$$\alpha q_0 - \beta q_1 + c\alpha q_2 = 0,$$

$$\lambda q_0 - (\mu + c\alpha)q_2 = 0,$$

egyenletekből áll. A  $\sum_0^2 q_i = 1$  normálási feltétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(15) \quad \begin{aligned} q_0 &= \frac{(\mu + c\alpha)\beta}{(\mu + c\alpha + \lambda)(\alpha + \beta) + (c-1)\lambda\alpha}, \\ q_1 &= \frac{\alpha(\mu + c\alpha + \lambda c)}{(\mu + c\alpha + \lambda)(\alpha + \beta) + (c-1)\lambda\alpha}, \\ q_2 &= \frac{\lambda\beta}{(\mu + c\alpha + \lambda)(\alpha + \beta) + (c-1)\lambda\alpha}. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy (12)-ben elvégezve a megfelelő behelyettesítéseket és számításokat ( $q_0 = \pi_3$ ,  $q_1 = \pi_2$ ,  $q_2 = \pi_1$ ), (15)-tel megegyező eredményre jutunk.

4. A  $\gamma_1(t)$  FOLYAMAT ERGODICITÁSA. A (3) határeloszlás létezésének igazolása céljából fordítsuk ismét figyelmünket a 2. pontban bevezetett  $\gamma_1(t)$  folyamatra. Könnyű észrevenni, hogy folyamatunk rekurrens folyamat, melynek regenerációs pontjaiként tekinthetjük a javítások befejeződési pillanatait, azaz az  $r_i$  pontokat. Ha feltesszük, hogy a  $H(x)$  és  $G(x)$  ( $c > 1$  esetben az  $F(x)$ ,  $H(x)$  és  $G(x)$ ) eloszlások közül legalább egy nem rácsos eloszlás, akkor  $\gamma_1(t)$  aperiodikus rekurrens folyamatot alkot. Ennélfogva az ergodicitás vizsgálatánál felhasználhatjuk SMITH W. L. [4], [5] eredményeit. Folyamatunk fázistere a

$$\mathcal{H}_1 \equiv \{\omega_1(v, u); 0 \leq cv \leq u\}$$

$$\mathcal{H}_2 \equiv \{\omega_2(w); w \geq 0\}$$

$$\mathcal{H}_3 \equiv \{\omega_3(u); u \geq 0\}$$

halmazok egyesítéséből áll. Tekintsük most  $cx \leq y$ -ra az

$$A_1^{(x,y)} = \{\omega_1(v, u); v \leq x, u \leq y, cv \leq u\} \subset \mathcal{H}_1$$

$$A_2^{(z)} = \{\omega_2(w); w \leq z\} \subset \mathcal{H}_2$$

$$A_3^{(y)} = \{\omega_3(u); u \leq y\} \subset \mathcal{H}_3$$

halmazokat. Tetszőleges  $t$  pillanatban a fázistérbeli eloszlást a

$$P_1(z, y; t) = P\{\gamma_1(t) \in A_1^{(x,y)}\}$$

$$P_2(z; t) = P\{\gamma_1(t) \in A_2^{(z)}\}$$

$$P_3(y; t) = P\{\gamma_1(t) \in A_3^{(y)}\}$$

valószínűségek írják le. A folyamat ergodicitása azt jelenti, hogy a (3), azaz a

$$P_1(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x, y; t)$$

$$P_2(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_2(z; t)$$

$$P_3(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_3(y, t)$$

határfüggvények tetszőleges kezdő eloszlás mellett, azok speciális választásától függetlenül, léteznek. Válasszuk ki most a folyamat valamelyik regenerációs pontját, mondjuk  $r_i$ -t az idő kezdőpontjaként. Majd véve  $X = r_{i+1} - r_i$ -t, definiáljuk a

$$\psi_{A_1^{(x,y)}}(t) = P\{\gamma_1(t) \in A_1^{(x,y)}, X > t\}$$

$$(16) \quad \psi_{A_2^{(z)}}(t) = P\{\gamma_1(t) \in A_2^{(z)}, X > t\}$$

$$\psi_{A_3^{(y)}}(t) = P\{\gamma_1(t) \in A_3^{(y)}, X > t\}$$

függvényeket. SMITH [4] dolgozatának 2. tételében bebizonyította, hogy az  $M\{r_{i+1} - r_i\} < \infty$  esetben (amelyhez szükséges és elégséges, hogy  $M(\eta_i + \delta_i) < \infty$ ), a (3) határértékek léteznek, hacsak a (16) függvények tetszőleges véges időintervallumon korlátos variációjúak. Ugyancsak SMITH [4] dolgozatának 2. lemmájára támaszkodva könnyen verifikálható a (16) függvényekre vonatkozó követelmény teljesülése. A mi esetünkben az említett lemma állítása a következőképpen fogalmazható meg:

Legyen  $A$  az  $A_1^{(x,y)}$ ,  $A_2^{(z)}$ ,  $A_3^{(y)}$  halmazok közül valamelyik. Jelöljük  $S_A$ -val azon időpontok halmazát, amelyekre  $\gamma_1(t) \in A$ , továbbá jelölje  $\Gamma(S_A)$  az  $S_A$  határpontjainak halmazát,  $c(\quad)$  pedig a zárójelben álló halmaz számosságát.  $t_0$  legyen a folyamat első regenerációs pontja, azaz a  $t=0$ -hoz legközelebb álló javítás befejeződési pillanata. Majd tekintsünk egy

$$I = (t_0 + a, t_0 + b) \quad (0 \leq a < b)$$

véges időintervallumot s ennek az  $I_j \subseteq I$  részintervallumain értelmezett  $\{Y(I_j)\}$  valószínűségi halmazfüggvényt. Ha most ez a halmazfüggvény olyan, hogy

a) bármely  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ,  $I_1, I_2 \subset I$  mellett.

$$Y(I_1) + Y(I_2) = Y(I_1 + I_2),$$

b) 1-valószínűséggel

$$M\{Y(I)/t_0, \gamma_1(0)\} < \infty,$$

c) tetszőleges  $I_j \subset I$  mellett

$$P\{c[I_j \cap \Gamma(S_A)] \leq Y(I_j)/t_0, \gamma_1(0)\} = 1,$$

akkor a

$$\psi_A(t) = P\{\gamma_1(t) \in A, X > t\}$$

függvény az (a, b) szakaszon véges variációjú.

Válasszuk most az  $Y(I_j)$  halmazfüggvényt a  $\sum_1^5 \varepsilon_i$  összegnek, amelyben az  $\varepsilon_i$ -k jelentései a következők:

- $\varepsilon_1$  — az  $I_j$  időintervallumbeli érkezések száma,
- $\varepsilon_2$  — azon kiszolgálások száma, amelyek az  $I_j$  időszakaszban fejeződtek be,
- $\varepsilon_3$  — az  $I_j$  időközbe eső regenerációs pontok, azaz javításbefejezési pillanatok száma,
- $\varepsilon_4$  — pedig azon javítások száma, amelyek az  $I_j$  időközben kezdődtek el,
- végül  $\varepsilon_5$  — az  $I_j$  szakasz azon pontjainak száma, amelyekben a

$$\{\xi(t) = x\}, \quad \{\eta(t) = y\}, \quad \{e(t) = 2, v(t) = z\}$$

események közül legalább egy bekövetkezik.

Könnyű ellenőrizni, hogy az  $Y(\cdot) = \sum_1^5 \varepsilon_i$  halmazfüggvény az a), b), c) követelményeknek eleget tesz. Következésképpen fennáll az alábbi tétel:

2. TÉTEL. Ha a  $H(x)$  és  $G(x)$  ( $c > 1$  esetben a  $H(x)$ ,  $F(x)$  és  $G(x)$ ) eloszlások közül legalább egy nem rácsos eloszlás és  $M(\eta_i + \delta_i) < \infty$ , akkor a  $\gamma_1(t)$  folyamat ergodikus, azaz léteznek a (3) alatti határértékek.

## 2. §

**Várakozás, ha a készülék hibátlan — elvész az igény,  
ha a készülék hibás**

1. A PROBLÉMA FELVETÉSE. Az alkalmazások különböző területein előfordulnak olyan helyzetek, amelyeknél egy meghibásodható készülékre bizonyos homogén funkciók elvégzése hárul. Emellett a munkaszervezés olyan, hogy amíg a készülék hibátlan, a kiszolgálandó egyedek torlódhatnak a készülék előtt, azaz ha valamely egyed érkezési pillanatában a készülék hibátlan ugyan, de foglalt, az egyed sorba áll, várakozik. Az esetben viszont, amikor a készülék meghibásodik, a rendszerben



tartózkodó összes igény megszűnik, elvész s hasonlóan megszűnnek azok az igények is, amelyek a készülék javítási ideje alatt lépnek fel. Az előző § eredményeinek felhasználásával erre az esetre is könnyen kiszámíthatók a  $\pi_i$  valószínűségek. Ezek a mennyiségek viszont meglehetősen gyengén jellemzik a rendszer effektivitását. A rendszer részletesebb tanulmányozásánál újabb karakterisztikák vizsgálatai merülnek fel, közben olyanoké is, amelyek az ún. abszolút megbízható készülékek esetében fel sem vetődhettek. A jelen §-ban vizsgálni fogjuk a rendszerben tartózkodó személyek számának eloszlását. További karakterisztikák vizsgálatával egy következő dolgozatban foglalkozunk.

2. A RENDSZERT LEÍRÓ MARKOV-FOLYAMAT. Tekintsük az 1. § 1. pontjában leírt egycsatornás kiszolgáló rendszert az elvesztési elv előző pontban vázolt módosításával. Ha tehát egy igény akkor érkezik a rendszerbe, amikor a készülék hibátlan, de egy korábban érkezett igény kiszolgálásával már foglalt, akkor ez az igény most nem vész el, hanem sorba áll, várakozik, míg a készülék meghibásodási pillanatában a rendszerben tartózkodó, s a javítási idő alatt fellépő igények mind elvesznek. Az  $\omega(t)$  folyamat a jelen esetben is az 1. ábrán vázolt trajektóriához hasonló típusú realizációkkal fog rendelkezni. A különbség csak az, hogy azok a periódusok, amelyekben a készülék ü. b. tartaléka  $c > 1$  sebességgel csökken, most általában hosszabbak lesznek. Egy ilyen periódus nem más, mint egy abszolút megbízható készülék megfelelő feltételek melletti foglaltsági periódusa. Ennek értelmében, azon időszakaszok, amelyekben a készülék ü. b. tartaléka  $c > 1$  sebességgel csökken, függetlenek és

$$(1) \quad D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} D^{*(n)}(x-u) dF(u)$$

közös eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. Szükségünk lesz az (1) eloszlásfüggvény Laplace—Stieltjes-transzformáltjára, melyet a következőkben  $\Gamma(s)$ -sel fogunk jelezni. Az irodalomból ismeretes (lásd pl. [6]), hogy  $\Gamma(s)$   $\operatorname{Re} s > 0$  mellett eleget tesz a

$$\Gamma(s) = \phi[s + \lambda(1 - \Gamma(s))]$$

függvényegyenletnek, s ennek a  $\Gamma(\infty) = 0$  és a  $|\Gamma(s)| < 1$  feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása.

Az 1. §-ban értelmezett  $\pi_i$  valószínűségeket jelen esetben is az 1. § (12)-es formulája adja, csupán az  $F(x)$  függvényt kell helyettesítenünk  $D(x)$ -szel s ennek megfelelően az  $L_c(u)$  helyett olyan  $\mathcal{L}_c(u)$  függvényt kell vennünk, amelynek Laplace-transzformáltja

$$\psi_c(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda[1 - \Gamma(cs)]}.$$

A továbbiakban a rendszerben tartózkodó egyedek (igények) számának stationárius eloszlásával kapcsolatos kérdéseket vizsgáljuk. Pontosabban, megmutatjuk, hogy az  $F(x)$ ,  $H(x)$  és  $G(x)$  eloszlásfüggvényekre vonatkozó 1. §-beli feltételek mellett léteznek a

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \begin{array}{l} \text{a } t \text{ időpontban a rendszerben tartózkodó egyedek} \\ \text{száma } k \end{array} \right\}$$

( $k \geq 1$ ) határvalószínűségek, majd meghatározzuk az  $R(z) = \sum_1^{\infty} P_k z^k$  generátorfüggvényt.

E célból bevezetjük a

$$\gamma_2(t) = \{e(t), v(t)\}$$

sztochasztikus folyamatot. Az  $e(t)$  komponens értéke  $k$ , ( $k \geq 0$ ) ha a  $t$  pillanatban pontosan  $k$  egyed tartózkodik a rendszerben, míg akkor, amikor a készüléket javítják, legyen  $e(t) = -1$ . A második komponens aszerint értelmeződik, hogy  $e(t)$  milyen értékeket vesz fel. Az  $e(t) = -1$  esetben  $v(t)$  a soron levő javítás  $t$  időpillanatig eltelt ideje, az  $e(t) = 0$  esetben  $v(t) = \eta(t)$ , ahol  $\eta(t)$  a készülék ü. b. tartálékának a  $t$  pillanatig történő csökkenésével kapcsolatos, pontosan  $\eta(t) = \omega(r_i + 0) - \omega(t)$ , hol  $r_i$  a  $t$ -hez balról legközelebb álló javításbefejezési pillanat. Végül  $e(t) \geq 1$  esetben  $v(t)$  egy kétdimenziós vektor  $\{\xi(t), \eta(t)\}$ . A második komponens,  $\eta(t)$  az előbb definiált mennyiség,  $\xi(t)$  pedig a soron levő kiszolgálásnak a  $t$  pillanatig eltelt időtartama. Feltevéseink értelmében  $\gamma_2(t)$  homogén Markov-folyamatot alkot.

Tetszőleges  $t$  időpontban a folyamat fázistérbeli eloszlását a

$$P_{-1}(z; t) = P\{e(t) = -1, \mu(t) \leq z\}$$

$$(2) \quad P_0(y; t) = P\{e(t) = 0, \eta(t) \leq z\}$$

$$P_k(x, y; t) = P\{e(t) = k, \xi(t) \leq x, \eta(t) \leq y\} \quad (k \geq 1)$$

valószínűségek írják le. Ugyanazokkal a megfontolásokkal, amelyeket az 1. § 4. pontjában alkalmaztunk, igazolható, hogy a  $\gamma_2(t)$  folyamat a 2 tétel feltételei mellett ergodikus. Ennek értelmében, bármilyen legyen is a kezdőeloszlás, egyértelműen léteznek az alábbi határfüggvények:

$$P_{-1}(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{-1}(z; t),$$

$$(3) \quad P_0(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(y; t),$$

$$P_k(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(x, y; t).$$

A folyamat stacionárius eloszlásának megkeresésénél (az ergodicitás következtében ez egyúttal a (3) határfüggvények meghatározását is jelenti) az 1. §-hoz hasonlóan feltételezzük, hogy a folyamat kezdő eloszlása sima. Ez azt jelenti, hogy ha a kezdő eloszlás a  $P_{-1}(z; 0)$ ,  $P_0(y; 0)$  és  $P_k(x, y; 0)$  függvényekkel van megadva, akkor léteznek a

$$p_{-1}(z; 0) = \frac{\partial P_{-1}(z; 0)}{\partial z}, \quad p_0(y; 0) = \frac{\partial P(y; 0)}{\partial y}, \quad p_k(x, y; 0) = \frac{\partial^2 P_k(x, y; 0)}{\partial x \partial y}$$

ún. sűrűségfüggvények. Feltételezzük még továbbá, hogy a

$$p_{-1}^*(z; 0) = \frac{p_{-1}(z; 0)}{1 - G(z)}, \quad p_0^*(y; 0) = \frac{p_0(y; 0)}{1 - H(y)}, \quad p_k^*(x, y; 0) = \frac{p_k(x, y; 0)}{[1 - F(x)][1 - H(y)]}$$

normált sűrűségfüggvények elsőrendben differenciálhatók. Könnyű verifikálni, hogy ez esetben a  $\gamma_2(t)$  tetszőleges  $t$  pillanatbeli eloszlását leíró (2) függvények is hasonló tulajdonságokkal bírnak. Továbbá a kezdő eloszlás ilyen választása mellett a (3) határfüggvények is rendelkeznek a

$$p_1(z) = \frac{\partial P_{-1}(z)}{\partial z}, \quad p_0(y) = \frac{\partial P_0(y)}{\partial y}, \quad p_k(x, y) = \frac{\partial^2 P_k(x, y)}{\partial x \partial y}$$

sűrűségfüggvényekkel és a megfelelő  $p_{-1}^*(z)$ ,  $p_0^*(y)$  és  $p_k^*(x, y)$  ( $k \geq 1$ ) függvények differenciálhatók. Az 1. § (11) alatti eredményéből most következik, hogy

$$p_0(y) = \varrho \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}_c(y) [1 - H(y)]$$

$$p_{-1}(z) = \varrho [1 - G(z)],$$

ahol  $\varrho$  a megfelelő normáló konstans,  $\mathcal{L}_c(u)$  Laplace-transzformáltja pedig  $\psi_c(s)$ .

Az 1. § (5) egyenleteinek levezetésénél alkalmazott megfontolásokkal az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$p_1(x, y; t + \Delta) = p_1(x - \Delta, y - c\Delta; t)(1 - \lambda\Delta) \frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta)} + o(\Delta) \quad (k \geq 2)$$

$$p_k(x, y; t + \Delta) = p_k(x - \Delta, y - c\Delta; t)(1 - \lambda\Delta) \frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta)} + \\ + \lambda\Delta p_{k-1}(x - \Delta, y - c\Delta; t) \frac{1 - F(x)}{1 - F(x - \Delta)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta)} + o(\Delta)$$

$$P_1(0, y; t + \Delta) = \lambda\Delta p_0(y - \Delta; t) \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - \Delta)} +$$

$$+ \Delta \int_0^{\frac{y}{c}} p_2(x, y - c\Delta; t) \frac{dF(x)}{1 - F(x)} \cdot \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta)} + o(\Delta) \quad (k \geq 2)$$

$$p_k(0, y; t + \Delta)\Delta = \Delta \int_0^{\frac{y}{c}} p_{k-1}(x, y - c\Delta; t) \frac{1 - H(y)}{1 - H(y - c\Delta)} \cdot \frac{dF(x)}{1 - F(x - \Delta)} + o(\Delta).$$

Ezekből a megfelelő normálás, majd a  $\Delta \rightarrow 0$  határátmenet elvégzése után a  $p_k^*(x, y; t)$  függvényekre a következő végtelen tagú parciális differenciál egyenletrendszert nyerjük;

$$\frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c \frac{\partial p_1^*}{\partial y} + \lambda p_1^* = 0.$$

$$\frac{\partial p_k^*}{\partial t} + \frac{\partial p_k^*}{\partial x} + c \frac{\partial p_k^*}{\partial y} + \lambda(p_k^* - p_{k-1}^*) = 0 \quad (k \geq 2).$$

A peremfeltételek az alábbiak lesznek:

$$p_1^*(0, y; t) = \lambda p_0^*(y; t) + \int_0^{\frac{y}{c}} p_2^*(x, y; t) dF(x)$$

$$p_k^*(0, y; t) = \int_0^{\frac{y}{c}} p_{k+1}^*(x, y; t) dF(x) \quad (k \geq 2).$$

3. A STACIONÁRIUS ELOSZLÁS. Bármely, a folyamat kezdő eloszlására megkövetelt tulajdonságoknak eleget tevő stacionárius eloszlás normált sűrűségfüggvényei szükségképpen kielégítik a

$$(4) \quad p_1^*(0, y) = \lambda p_0^*(y) + \int_0^{\frac{y}{c}} p_2^*(x, y) dF(x)$$

$$p_k^*(0, y) = \int_0^{\frac{y}{c}} p_{k+1}^*(x, y) dF(x) \quad (k \geq 2)$$

peremfeltételű

$$(5) \quad \frac{\partial p_1^*}{\partial x} + c \frac{\partial p_1^*}{\partial y} + \lambda p_1^* = 0$$

$$\frac{\partial p_k^*}{\partial x} + c \frac{\partial p_k^*}{\partial y} + \lambda(p_k^* - p_{k-1}^*) = 0 \quad (k \geq 2)$$

egyenletrendszer. A  $p_0^*(y)$  függvényt már ismerjük, Laplace-transzformáltját a

$$e^{-\frac{1}{\lambda} \psi_c(s)} = e^{-\frac{1}{s + \lambda[1 - \Gamma(cs)]}}$$

formula adja meg. Legyenek most

$$q_k(y) = \int_0^{\frac{y}{c}} p_k^*(x, y) dF(x) \quad (k \geq 2)$$

$$P(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(x, y) z^k, \quad Q(y, z) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(y) z^k.$$

A [8] dolgozatban igazolt, hogy ezek a végtelen sorok tetszőleges  $x, y$  mellett a  $|z| \leq 1$  körben abszolút konvergensek. Vegyük most észre, hogy az (5) egyenletrendszer ekvivalens a

$$\frac{\partial P}{\partial x} + c \frac{\partial P}{\partial y} + \lambda(1 - z)P = 0$$

egyenlettel és hogy a (4) peremfeltételek értelmében

$$Q(y, z) = zP(0, y, z) - \lambda p_0^*(y)z^2.$$

Az utóbbiak figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(6) \quad \begin{aligned} P(x, y, z) &= e^{-\lambda(1-z)x} P(x, y-cx, z) \\ &= e^{-\lambda(1-z)x} \left[ \lambda p_0^*(y-cx)z + \frac{1}{z} Q(y-cx, z) \right]. \end{aligned}$$

Következésképpen az (5) egyenletrendszer (4) peremfeltételek melletti megoldásához elegendő meghatározni a  $Q(u, z)$  függvényt, vagy annak Laplace-transzformáltját

$\bar{Q}(s, z) = \int_0^\infty Q(u, z) e^{-su} du$ -t.  $\bar{Q}(s, z)$  meghatározása érdekében összefüggéseket keresünk a  $q_k(u)$  függvények között. (6) jobb oldalát  $z$  hatványai szerint haladó végtelen sorba írva, kapjuk:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda(1-z)x} \left[ \lambda p_0^*(y-cx)z + \frac{1}{z} Q(y-cx, z) \right] &= e^{-\lambda x} \left( 1 + \frac{\lambda x}{1!} z + \dots + \frac{(\lambda x)^k}{k!} z^k + \dots \right) \cdot \\ &\cdot \{ [\lambda p_0^*(y-cx) + q_2(y-cx)]z + q_3(y-cx)z^2 + \dots + q_{k+1}(y-cx)z^k + \dots \} = \\ &= e^{-\lambda x} \left\{ a(y-cx) + \left[ a(y-cx) \frac{\lambda x}{1!} + q_3(y-cx) \right] z^2 + \dots + \right. \\ &+ \left. \left[ a(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} + q_3(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + q_k(y-cx) \frac{\lambda x}{1!} + q_{k+1}(y-cx) \right] z^k + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Itt  $a(y)$ -nal a  $\lambda p_0^*(y) + q_2(y)$  összeget jelöltük. (6) alapján

$$p_k^*(x, y) = e^{-\lambda x} \left[ a(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + q_k(y-cx) \frac{\lambda x}{1!} + q_{k+1}(y-cx) \right].$$

Innen viszont a  $q_k(u)$  függvények definíciója értelmében

$$(7) \quad q_k(y) = \int_0^{\frac{y}{c}} \left[ a(y-cx) \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + q_{k+1}(y-cx) \right] e^{-\lambda x} dF(x).$$

Az  $u=cx$  helyettesítés elvégzése után a

$$q_k(y) = \int_0^{\frac{y}{c}} \left[ a(y-u) \frac{(\lambda u)^{k-1}}{c^{k-1}(k-1)!} + \dots + q_{k+1}(y-u) \right] e^{-\frac{\lambda}{c}u} dF\left(\frac{u}{c}\right)$$

összefüggést kapjuk. Ha most bevezetjük az  $\bar{a}(s) = \int_0^\infty e^{-su} a(u) du$ ,  $\bar{q}_k(s) = \int_0^\infty e^{-su} q_k(u) du$

Laplace-transzformáltakat, akkor egyrészt  $\bar{Q}(s, z) = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{q}_k(s) z^k$  és (7) alapján

$$\begin{aligned} \bar{q}_k(s) = \bar{a}(s) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} (-1)^{k-1} \Phi^{(k-1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} (-1)^{k-2} \Phi^{(k-2)}(cs + \lambda) + \\ + \dots + \bar{q}_k(s) \frac{\lambda}{1!} (-1)^1 \Phi^{(1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_{k+1}(s) \Phi(cs + \lambda), \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s, z) = \left[ \bar{a}(s) \frac{\lambda}{1!} (-1)^1 \Phi^{(1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) \Phi(cs + \lambda) \right] z^2 + \\ + \left[ \bar{a}(s) \frac{\lambda^2}{2!} (-1)^2 \Phi^{(2)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) \frac{\lambda}{1!} (-1)^1 \Phi^{(1)}(cs + \lambda) + \bar{q}_4(s) \Phi(cs + \lambda) \right] z^3 + \\ + [\dots] z^4 + \dots \end{aligned}$$

Az összegezési sorrend felcserélésével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s, z) = \bar{a}(s) z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda) + \bar{q}_3(s) z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda) + \\ + \dots + \bar{q}_k(s) z^{k-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda) + \dots \end{aligned}$$

Itt most a  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} (-1)^k \Phi^{(k)}(cs + \lambda)$  sor a  $\Phi[cs + \lambda(1-z)]$  függvény  $z$  hatványai szerint haladó Taylor-sora, ennek következtében

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s, z) = z \bar{a}(s) \{ \Phi[cs + \lambda(1-z)] - \Phi(cs + \lambda) \} + \Phi[cs + \lambda(1-z)] \sum_{k=3}^{\infty} \bar{q}_k(s) z^{k-1} = \\ = z [\bar{a}(s) - \bar{q}_2(s)] \Phi[cs + \lambda(1-z)] - z \bar{a}(s) \Phi(cs + \lambda) + \frac{1}{z} \Phi[cs + \lambda(1-z)] \bar{Q}(s, z), \end{aligned}$$

s innen

$$(8) \quad \bar{Q}(s, z) = \frac{z^2 \lambda \bar{p}_0^*(s) \Phi[cs + \lambda(1-z)] - z^2 \Phi(cs + \lambda) [\lambda \bar{p}_0^*(s) + \bar{q}_2(s)]}{z - \Phi[cs + \lambda(1-z)]}.$$

(8)-ban még ismeretlen a  $q_2(s)$ . Ennek meghatározásánál felhasználhatjuk azt a tényt, hogy  $\bar{Q}(s, z)$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$  mellett a  $|z| < 1$  egységkörben analitikus függvény. Ennélfogva (8) jobb oldala nevezőjének a  $|z| < 1$  körbe eső zérushelyei szükségképpen a számláló zérushelyei is. Már említettük, hogy  $w = \Gamma(s)$  a

$$\Phi[s + \lambda(1-w)] = w$$

egyenlet egyetlen létező megoldása. Emiatt a (8) jobb oldala nevezőjének egyetlen, a  $|z| < 1$  egységkörbe eső zérushelye  $z = \Gamma(cs)$ . Mármost innen számításokkal azt



kapjuk, hogy

$$\bar{q}_2(s) = \lambda \bar{p}_0^*(s) \frac{\Gamma(cs) - \Phi(cs + \lambda)}{\Phi(cs + \lambda)} = \varrho \psi_c(s) \frac{\Gamma(cs) - \Phi(cs + \lambda)}{\Phi(cs + \lambda)}$$

és

$$\bar{Q}(s, z) = \varrho z^2 \psi_c(s) \frac{\Phi[cs + \lambda(1 - z)] - \Gamma(cs)}{z - \Phi[cs + \lambda(1 - z)]}.$$

Az  $R(z) = \sum_1^{\infty} P_k z^k$  generátorfüggvény

$$R(z) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{y}{c}} P(x, y, z) [1 - F(x)] dx [1 - H(y)] \right\} dy = \int_0^{\infty} U(y, z) [1 - H(y)] dy$$

alakba írható. (6) szerint

$$\begin{aligned} U(y, z) &= \int_0^{\frac{y}{c}} e^{-\lambda(1-z)x} \left\{ \lambda p_0^*(y - cx) z + \frac{1}{z} Q(y - cx, z) \right\} [1 - F(x)] dx = \\ &= \int_0^y e^{-\lambda(1-z)\frac{w}{c}} \left\{ \lambda p_0^*(y - w) z + \frac{1}{z} Q(y - w, z) \right\} \left[ 1 - F\left(\frac{w}{c}\right) \right] \frac{dw}{c} \end{aligned}$$

s innen

$$\begin{aligned} \bar{U}(s, z) &= \int_0^{\infty} e^{-sy} U(y, z) dy = \\ (9) \quad &= \left\{ \varrho \psi_c(s) + \varrho z \psi_c(s) \frac{\Phi[cs + \lambda(1 - z)] - \Gamma(cs)}{z - \Phi[cs + \lambda(1 - z)]} \right\} \frac{1 - \Phi[cs + \lambda(1 - z)]}{cs + \lambda(1 - z)} = \\ &= \varrho \psi_c(s) z \frac{z - \Gamma(cs)}{z - \Phi[cs + \lambda(1 - z)]} \cdot \frac{1 - \Phi[cs + \lambda(1 - z)]}{cs + \lambda(1 - z)}. \end{aligned}$$

Eredményünket a következő tételben foglalhatjuk össze:

3. TÉTEL. A 2. tétel feltételei mellett az  $R(z) = \sum_1^{\infty} P_k z^k$  generátorfüggvény

$$R(z) = \int_0^{\infty} U(y, z) [1 - H(y)] dy$$

alakban adható meg, ahol az  $\bar{U}(s, z) = \int_0^{\infty} e^{-su} U(u, z) du$  transzformáltat a (9) formula szolgáltatja.

4. PÉLDA. Elemezzük most az

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad H(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad G(x) = 1 - e^{-\beta x}$$

esetet. Ekkor

$$\Phi(s) = \frac{\mu}{\mu + s}, \quad \Gamma(s) = \frac{\mu + \lambda + s - \sqrt{(\lambda + s - \mu)^2 + 4s\mu}}{2\lambda},$$

$$\psi_c(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda[1 - \Gamma(cs)]} = \frac{2\lambda}{\lambda + (2-c)s - \mu + \sqrt{(\lambda + cs - \mu)^2 + 4cs\mu}},$$

és

$$\varrho = \frac{1}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c\alpha} + \frac{c-1}{c\lambda} \psi_c(\alpha)}.$$

Az  $R(z)$  generátorfüggvény pedig

$$R(z) = \bar{U}(\alpha, z) = \varrho \psi_c(\alpha) z \cdot \frac{\Gamma(c\alpha) - z}{\lambda z^2 - (\mu + c\alpha + \lambda)z + \mu}$$

alakú, míg a  $\pi_i$ -valószínűségek az alábbiak lesznek:

$$\pi_1 = R(1) = \bar{U}(\alpha, 1) = \varrho \psi_c(\alpha) \frac{1 - \Gamma(c\alpha)}{c\alpha},$$

$$\pi_2 = \frac{\varrho}{\beta}, \quad \pi_3 = \varrho \frac{1}{\lambda} \psi_c(\alpha).$$

A  $c=1$  esetben

$$\varrho = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \quad \pi_1 = \lambda\pi_3 \frac{1 - \Gamma(\alpha)}{\alpha}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \frac{2}{\lambda + \alpha - \mu + \sqrt{(\lambda + \alpha - \mu)^2 + 4\alpha\mu}}$$

és

$$R(z) = \lambda\pi_3 z \frac{\Gamma(\alpha) - z}{\lambda z^2 - (\mu + \alpha + \lambda)z + \mu} = \pi_3 z \frac{\Gamma(\alpha) - z}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

ahol

$$z_1 = \frac{\lambda + \alpha + \mu + \sqrt{(\lambda + \alpha - \mu)^2 + 4\alpha\mu}}{2\lambda} > 1, \quad \text{és} \quad z_2 = \Gamma(\alpha).$$

Végeredményben tehát

$$R(z) = \pi_3 \frac{z}{z_1 - z} = \pi_3 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z_1} \right)^k z^k,$$

és így

$$P_k = \pi_3 \left( \frac{1}{z_1} \right)^k, \quad (k \geq 1).$$

5. Az  $\eta_i = T$  (KONSTANS) ESET VIZSGÁLATA  $c=1$  ÉS  $T \rightarrow \infty$  MELLETT. Legyen  $c=1$  és

$$H(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y < T \\ 1, & \text{ha } y \geq T. \end{cases}$$

Ekkor

$$R(z) = \int_0^T U(yz) = V(T, z).$$

Vizsgáljuk most a  $P_0 + R(z) = V(T, z)$  viselkedését  $T \rightarrow \infty$  esetén. (9) és

$$\frac{1}{s} s\psi_c(s) = \frac{1}{s} \frac{\lambda}{1 - \lambda \frac{\Gamma(cs) - 1}{s}}$$

alapján következik, hogy  $s \rightarrow 0$  mellett

$$\bar{U}(s, z) \sim \frac{1}{s} \varrho \frac{\lambda}{1 - \lambda \Gamma'(0)} \cdot \frac{1 - \Phi(\lambda(1-z))}{\lambda(1-z)} z \frac{z-1}{z - \Phi[\lambda(1-z)]}.$$

Minthogy

$$-\Gamma'(0) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\lambda}; \quad \frac{\lambda}{1 - \lambda \Gamma'(0)} = \lambda P_0,$$

ezért

$$\bar{U}(s, z) \sim \frac{1}{s} \varrho \lambda P_0 \frac{1 - \Phi[\lambda(1-z)]}{\lambda(1-z)} z \frac{z-1}{z - \Phi[\lambda(1-z)]}.$$

Innen egy Tauber-féle tétel értelmében ([10] 4. tétel 192. old.) következik, hogy  $T \rightarrow \infty$  mellett

$$V(T, z) \sim T \varrho(T) P_0 \frac{1 - \Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)] - z} z.$$

Mivel pedig

$$\varrho(T) = \frac{1}{\int_0^\infty [1 - G(u)] du + T},$$

így végül is

$$(10) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} [P_0 + V(T, z)] = P_0 \left[ 1 + \frac{1 - \Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)] - z} z \right] = P_0 \frac{(1-z)\Phi[\lambda(1-z)]}{\Phi[\lambda(1-z)] - z}.$$

A vizsgált  $c=1$  és  $T \rightarrow \infty$  határeset lényegében azt jelenti, hogy a készülék abszolút megbízható. Éppen ezért (10) megegyezik TAKÁCS L. [6] 72 old. (67)-es eredményével.

## IRODALOM

- [1] Гнеденко, Б. В.—Беляев, Ю. К.—Коваленко, И. Н.: Основные направления исследований в теории массового обслуживания, Труды I-го Всесоюзного Совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс (1962) 341—356.
- [2] Марьянович, Т. П.: Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться, Укр. Матем. Ж. XII, № 3, (1960).
- [3] Севастьянов, Б. А.: Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами, *Теор. вер. и ее примен.* 2, I, (1957).
- [4] SMITH, W. L.: Regenerative stochastic processes, *Proc. Roy. Soc., ser. A* 232 (1955), 6—31.
- [5] SMITH, W. L.: Renewal theory and its ramifications, *Journal of the Royal Stat. Society, B.* 20 (1955), No 2.
- [6] TAKÁCS, L.: *Introduction to the Theory of Queues*, New York, Oxford University Press (1962).
- [7] Томкó, J.: Однолинейная система массового обслуживания с учетом ненадежности прибора, *Труды Мат. института АН Венгрии* Т. IX, серия А, выпуск 1—2, (1964).
- [8] Томкó J.: Стационарное распределение длины очереди в однолинейной системе с учетом ненадежности прибора, *Труды Мат. инс.-та АН Венгрии* Т. IX, серия А, выпуск 3, (1964).
- [9] Хинчин, А. Я.: *Работы по математической теории массового обслуживания*, Москва (1963).
- [10] WIDDER, D. W.: *The Laplace Transform*, Princeton (1941).

(Beérkezett: 1965. V. 3.)