A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ÉS STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSEK (III)*

Írta: ULF GRENANDER

6. fejezet

A REGRESSZIÓ PROBLÉMÁJA

6. 1. Regresszió a függvénytérben. A hipotézisvizsgálaton és a becslés problémáján kívül röviden foglalkozni kívánunk még a statisztikai következtetések két más típusú feladatával, és meg fogjuk mutatni, hogy vissza lehet őket vezetni a regresszió elméletére, amely a matematikai statisztikának régóta jól kidolgozott fejezete. Ezekkel a feladatokkal kapcsolatban gyakran lesz dolgunk feltételes valószínűségeloszlásokkal; minden esetben fel fogjuk tételezni, — amint ezt néhányszor eddig is tettük —, hogy ezeket a feltételes eloszlásokat úgy lehet definiálni, hogy 1 valószínűséggel valószínűségeloszlások legyenek.

Tegyük fel, hogy ismerjük az $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak a T időszakaszban megfigyelt értékeit, és ezeknek az adatoknak az alapján akarunk valamilyen következtetést levonni egy olyan y valószínűségi változóra, amely valószínűségi kapcsolatban áll az $x(t)$ folyamattal. Tegyük fel, hogy eleve ismerjük az $\{y, x(t);\, t\in T\}$ együttes valószínűségeloszlást, amely ezt a statisztikai kapcsolatot meghatározza. A folyamat észlelt realizációját ω-val jelölve, bevezetjük az y mennyiség $P\{y|\omega\}$ feltételes valószínűségeloszlását. Ha ilyen esetben az ω realizáció ismerete alapján ki akarunk jelölni y számára valamilyen valószínű értéket, közelfekvő e célra a $P(y|\omega)$ eloszlásnak egy centrális értékét választani. Ha y-nak létezik véges várható értéke, akkor célszerű y becsléseként az

$$y^* = \mathbf{E}[y|\omega]$$

feltételes várható értéket tekinteni. Ahhoz, hogy továbbjuthassunk, konkretizálnunk kell, milyen valószínűségeloszlásokat akarunk tekintetbe venni. Tegyük fel, hogy tudomásunk van róla, hogy a folyamat és az y valószínűségi változó normális eloszlásúak zérus átlaggal (az együttes eloszlást is beleértve), és hogy $x(t)$ középben folytonos. Jelöljük az $x(t)$, $t\in T$, folyamat által generált Hilbert-teret a szokásos módon $L_2(X)$-szel, és ezen tér projekciós operátorát $P_{L_2(X)}$-szel. Legyen

$$y_1 = P_{L_2(X)} y$$

és

$$y = y_1 + z.$$

* Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Matematik*, **1** (1950), 195—277. A fordítás első része az *MTA III. Oszt. Közl.*, **15** (1965), 51—87. oldalán, a második rész a 125—164. oldalakon jelent meg.

Ekkor $z \perp x(t)$, $t \in T$, tehát z és $x(t)$ függetlenek egymástól, mert az összes tekintetbe veendő valószínűségeloszlások normálisak. Ezért majdnem biztosan

$$\mathbf{E}[y|\omega] = \mathbf{E}[y_1|\omega] + \mathbf{E}[z|\omega] = y_1(\omega) + \mathbf{E}z = y_1(\omega).$$

De y_1 felfogható, mint az $L_2(X)$ térnek az $\|y-x\|$ kifejezést minimálissá tevő pontja. Ezért ésszerűnek látszik y_1-et az y becslésének tekinteni még abban az esetben is, amikor a valószínűségeloszlásokról semmit sem tudunk. Az $\|y-x\|$ kifejezést minimalizáló y_1 mennyiségnek az $\mathbf{E}[y|\omega]$ feltételes várható értékkel való egybeesése egyszerűen annak a ténynek az általánosításaként tekinthető, hogy a többdimenziós normális eloszlások esetében a regresszió mindig lineáris.

6. 2. Előrejelzés mint regresszió-probléma. Tegyük fel, hogy $x(t)$ mindazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, amelyeket az előző szakaszban feltételeztünk, és hogy normális eloszlású. Vegyük y valószínűségi változónak az $x(c)$ értéket, ahol $c \notin T$. Azt a feladatot, hogy $x(c)$-re becslést adjunk $x(t)$, $t \in T$ alapján, az előrejelzés, vagy extrapoláció feladatának nevezik. A 6.1. szakasz eredményeit közvetlenül alkalmazhatjuk erre a problémára. Állítsuk elő az $x(t)$ folyamatot (amint az előzőkben ezt már többször tettük) az alábbi átlagban konvergens sor alakjában:

$$x(t) = \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu(t)}{\sqrt{\lambda_\nu}}, \quad t \in T,$$

(az itt szereplő mennyiségek jelentését lásd az 1. 3. pontban). Könnyen belátható, hogy $L_2(X)$ itt egybeesik a z_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ortonormált vektorrendszerre kifeszített Z térrel, tehát a folyamatnak a c időpontra való előrejelzéséhez csupán az

$$x^*(c) = P_Z x(t) = \sum_1^\infty z_\nu \mathbf{E} z_\nu x(c)$$

sort kell képezni. De

$$\mathbf{E} z_\nu x(c) = \sqrt{\lambda_\nu}\, \mathbf{E} x(c) \int_T x(t) \varphi_\nu(t)\, dt = \sqrt{\lambda_\nu} \int_T r(c, t) \varphi_\nu(t)\, dt,$$

és mivel $s \in T$ esetén

$$\lambda_\nu \int_T r(s, t) \varphi_\nu(t) dt = \varphi_\nu(s),$$

ezért természetes feltevés, hogy

$$\mathbf{E} z_\nu x(c) = \frac{\varphi_\nu^*(c)}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

ahol a $\varphi_\nu^*(c)$ kifejezések a folyamathoz tartozó $r(s, t)$ magú integrálegyenlet sajátfüggvényeinek a c pontig vett folytatásai. Így tehát a legjobb előrejelzést az

$$x^*(c) = \sum_1^\infty z_\nu \frac{\varphi_\nu^*(c)}{\sqrt{\lambda_\nu}}$$

képlettel adhatjuk meg. Az $x^*(c)$ becslésnek ez az előállítása, amely abból indul ki, hogy a legjobb előrebecslést az $L_2(X)$ térnek y-hoz legközelebb eső pontja adja, KARHUNEN-től származik. Az egyik irányban végtelen $T=(-\infty, a)$ intervallumon megfigyelt stacionárius folyamat fontos esetére WIENER [1] dolgozott ki olyan speciális módszert, amellyel ténylegesen meg lehet szerkeszteni a legjobb lineáris előrebecslést.

6. 3. Példa. Ha a folyamat nem normális eloszlású, akkor a legjobb lineáris előrebecslés általában nem esik egybe a feltételes valószínűségeloszlás várható értékével. Vizsgáljuk azt a nem-normális eloszlású egyszerű folyamatot, amellyel már a 4.11. szakaszban foglalkoztunk. Legyen $T=(a, b)$, ekkor $x(c)$ számára a következő feltételes eloszlásfüggvényt kapjuk:

$$F(x|\omega) = e^{-\beta(b-c)}\varepsilon[x-x(b)]+[1-e^{-\beta(b-c)}]\Phi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ a normális eloszlásfüggvény. A feltételes várható érték tehát

$$\mathbf{E}[x(c)|\omega] = x(b)e^{-\beta(b-c)},$$

ez pedig azonos azzal az eredménnyel, amit a legjobb lineáris előrebecslés megszerkesztése útján kaptunk volna.

6. 4. Előrejelzési tartományok. Egyes esetekben az lehet kívánatos, hogy a folyamatnak későbbi időpontokban felvett értékei számára ne egyetlen pontot, hanem egy *tartományt* adjunk meg, amelybe ezek az értékek várhatóan esni fognak. A kérdésnek ilyen módon való felvetése teljesen analóg a konfidencia tartományok alkalmazásával a becsléselméletben (lásd a 2. 3. pontot).

Tegyük fel, hogy valamilyen folyamatot az (a, b) időszakasz folyamán megfigyeltünk, és jelöljük az észlelt realizációt $\omega_{a,b}\in\Omega_{a,b}$-vel. A folyamat (c, d) intervallumához tartozó összes $\omega_{c,d}$ realizációinak $\Omega_{c,d}$ terében meg akarunk határozni egy olyan π tartományt (amely $\omega_{a,b}$-től függ), hogy ésszerűen elvárható legyen az $\omega_{c,d}$ realizációnak ebbe a π tartományba való esése, vagyis olyan π tartományt akarunk meghatározni, amelyre a $P(\pi|\omega_{a,b})$ feltételes valószínűség lehetőleg nagy. Hogy két különböző tartomány közül választani tudjunk, bevezetünk egy m mértéket Ω-ban úgy, hogy $\Omega_{c,d}$ véges m-mértékű halmazok legfeljebb megszámlálható összege legyen. Rögzített $\omega_{a,b}$ esetén a

$$P(S|\omega_{a,b}); \quad S\subset\Omega_{c,d},$$

feltételes valószínűség 1 valószínűséggel valószínűségeloszlás. Az additív halmazfüggvények felbontására vonatkozó LEBESGUE-tételnek megfelelően

$$P(S|\omega_{a,b}) = P(XS|\omega_{a,b})+\int_S f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})dm(\omega_{c,d}),$$

ahol $X=X(\omega_{a,b})$ a feltételes eloszlás szinguláris része. Keresünk egy $\pi\in\Omega_{c,d}$ halmazt, amelyre rögzített $m(\pi)$ esetén $P(\pi|\omega_{a,b})$ maximális. Ez a feladat formálisan megegyezik azzal, amelyet a 4.1. szakaszban vizsgáltunk, és az ottani eredménynek megfelelően

$$\pi = X(\omega_{a,b})+\{f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})\geqq k\}_{\omega_{c,d}}\subset\Omega_{c,d},$$

ahol a k állandót úgy kell megállapítani, hogy $m(\pi)$ a megadott értékű legyen. *A π tartományt a legjobb előrejelzés tartományának nevezik m-re nézve; amint láttuk, elő lehet állítani a maximum likelihood módszer egy egyszerű változata segítségével.*

A legjobb előrejelzés ilyen módon kapott tartománya nyilvánvalóan függ a választott m mértéktől. Markov-folyamatok esetére megmutatjuk e mérték megválasztásának két lehetséges módját.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $x(n)$ stacionárius, normális Markov-folyamat zérus átlaggal és 1 szórással, és a folyamatot az egész számú $(\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ időpontokban figyeljük meg. A korrelációs függvény ebben az esetben

$$r(n) = e^{-\beta|n|}, \qquad \beta > 0$$

alakú (a $\beta = 0$ és $\beta = \infty$ triviális esetekkel nem foglalkozunk). Legyen

$$(a, b) = (-N, -N+1, \ldots, 0)$$

és a (c, d) intervallum álljon az egyetlen $t = \tau > 0$ pontból. Mivel Markov-folyamattal van dolgunk, azért adott $x(-N), x(-N+1), \ldots, x(0)$ esetén $x(\tau)$ feltételes valószínűsége csupán $x(0)$-tól függ. Legyen m a $-\infty < x(\tau) < \infty$ tengelyen értelmezett Lebesgue-mérték. Szinguláris X-rész ebben az esetben nincsen, és

$$f = ce^{-\frac{1}{2}\frac{[x(\tau)-e^{-\beta\tau}x(0)]^2}{1-e^{-2\beta\tau}}}.$$

Így tehát a legjobb előrejelzés tartományát itt a

$$-k < x(\tau) - e^{-\beta\tau}x(0) < k$$

egyenlőtlenségek adják meg. Ha a (c, d) intervallum nem egyetlen pontból állna, hanem pl. a $(\tau, \tau+1, \ldots, \tau+\nu)$ pontokat foglalná magában, akkor ugyanilyen meggondolással az $x(\tau), x(\tau+1), \ldots, x(\tau+\nu)$ koordináták által meghatározott euklideszi térnek egy $(\nu+1)$-dimenziós ellipszoidját kapnánk. Ilyen előrejelzési tartomány azonban az alkalmazások céljaira nem előnyös, helyette célszerűbb a $\{a_\mu < x(\tau+\mu) < b_\mu;\ \mu = 0, 1, \ldots, \nu\}$ $(\nu+1)$-dimenziós intervallumokra szorítkozni, és megkísérelni közülük olyan intervallum kiválasztását, amelynek rögzített LEBESGUE-térfogat esetén legnagyobb a feltételes valószínűsége. Könnyű belátni, hogy ekkor a feltételes valószínűség-sűrűség

$$f = ce^{-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\nu}\frac{(y_{i+1}-\varrho_i y_i)^2}{1-\varrho_i^2}},$$

ahol

$$\begin{cases} y_0 = x(0) \\ y_i = x(\tau+i-1), & i = 1, 2, \ldots, \nu+1 \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \varrho_0 = e^{-\beta\tau} \\ \varrho_i = e^{-\beta}, & i = 1, 2, \ldots, \nu. \end{cases}$$

A problémát tehát visszavezettük olyan, rögzített térfogatú $(\nu+1)$-dimenziós intervallum kikeresésére, amelynek a legnagyobb a valószínűsége az adott sűrűségfüggvényre nézve.

Az m mérték megválasztásának más lehetősége, hogy $\Omega_{c,d}$-ben a P abszolút (nem feltételes) valószínűséget vesszük m-nek. Vizsgáljunk megint egy diszkrét időparaméterű folyamatot és egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az eloszlás folytonos típusú. Ha $S \subset \Omega_{c,d}$, akkor ebben az esetben

$$\begin{cases} P(S|\omega_{a,b}) = \int\limits_S f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})dv \\ P(S) = \int\limits_S f(\omega_{c,d})dv, \end{cases}$$

ahonnan a P-mértékre nézve legjobb alábbi π előrejelzési tartományt kapjuk:

$$\pi = \left\{\frac{f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})}{f(\omega_{c,d})} \geqq k\right\} = \left\{\frac{f(\omega_{a,b})f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})}{f(\omega_{a,b})f(\omega_{c,d})} \geqq k\right\} =$$

$$= \left\{\frac{f(\omega_{a,b}; \omega_{c,d})}{f(\omega_{a,b})f(\omega_{c,d})} \geqq k\right\} = \{f(\omega_{a,b}|\omega_{c,d}) \geqq kf(\omega_{a,b})\} \subset \Omega_{c,d}.$$

Így tehát adott $\omega_{a,b}$ esetén a $\pi(\omega_{a,b})$ tartományt úgy kapjuk, hogy $\Omega_{c,d}$-ben kiválasztunk olyan pontokat, amelyekben az $f(\omega_{a,b}|\omega_{c,d})$ feltételes sűrűség nagy.

Tekintsük példaként a fentebb vizsgált Markov-folyamatot. Ugyanolyan jelölésekkel

$$f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b}) = ke^{-\frac{1}{2}\sum\limits_0^v \frac{(y_{i+1}-\varrho_i y_i)^2}{1-\varrho_i^2}}$$

és

$$f(\omega_{c,d}) = k_1 e^{-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}\sum\limits_1^v \frac{(y_{i+1}-\varrho_i y_i)^2}{1-\varrho_i^2}}$$

$$\frac{f(\omega_{c,d}|\omega_{a,b})}{f(\omega_{c,d})} = k_2 e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(y_1-\varrho_0 y_0)^2}{1-\varrho_0^2} - y_1^2\right\}}.$$

Ezek szerint a jelen esetben

$$\pi = \{|x(\tau) - e^{\beta\tau}x(0)| < k\}.$$

Ez a tartomány különbözik a Lebesgue-mértékre nézve legjobb előrejelzési tartománytól annyiban is, hogy az $x(\tau+1), \ldots, x(\tau+v)$ értékeket semmiképpen sem korlátozza.

6. 5. Szűrés mint regresszió-probléma. Végezetül alkalmazni akarjuk a 6. 1. szakaszban ismertetett módszert a stacionárius folyamatok szűrésének problémájára. Ezt a feladatot részletesen vizsgálja WIENER [1], azonban csupán „egyoldalú szűrőkkel" foglalkozik, vagyis olyan szűrőkkel, amelyek csak a „múlt"-tól függnek. Noha ez sok műszaki alkalmazás számára természetes feltevés, elgondolható, hogy a matematikai statisztikában előforduló észlelési sorozatok szűrése esetén nincsen semmi okunk csupán a folyamat múltban észlelt értékeinek a használatára szorítkozni. Ennek megfelelően azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a realizációt olyan időintervallumban ismerjük, amelyet végtelen hosszúnak lehet tekinteni a folyamat effektív spektrum-szélessége által meghatározott természetes időegységhez képest.

Akár normális eloszlásúnak tételezzük fel a folyamatot és a feltételes valószínűségeloszlásoknak megfelelő várható értéket vesszük, akár pedig a legjobb lineáris szűrőt határozzuk meg, formálisan ugyanazt az eredményt kapjuk. Legyen $y(t)$ egy stacionárius folyamat zérus átlaggal és

$$r_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_y(\lambda) d\lambda$$

korrelációs függvénnyel, ahol $f_y(\lambda)$ az egész $(-\infty, \infty)$ tengelyen integrálható nemnegatív függvény. Az $y(t)$ folyamat legyen $\delta(t)$ additív zajjal eltorzítva; ez utóbbi legyen szintén stacionárius folyamat zérus átlaggal és

$$r_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_\delta(\lambda)\, d\lambda$$

korrelációs függvénnyel. Észleljük az $x(t) = y(t)+\delta(t)$ folyamatot. Tegyük fel először, hogy a zaj nem koherens, vagyis $\delta(t)$ és $y(t)$ között nincs kölcsönös korreláció. Becslést kívánunk adni $y(t)$-re $x(t)$-nek $-\infty < t < \infty$ folyamán észlelt értékei alapján. Tekintsük a lineáris kombinációk alábbi sorát:

$$z_n = \sum_1^n c_i^{(n)} x(t_i^{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_1^n c_i^{(n)} e^{it_i^{(n)}} dZ(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(\lambda) dZ(\lambda),$$

ahol $Z(\lambda)$ az $x(t)$-hez tartozó ortogonális (korrelálatlan növekményű) folyamat (lásd az 1. 3. pontot). Annak, hogy a z_n sorozat átlagban konvergáljon egy $z \in L_2(X)$ elemhez, szükséges és elegendő feltétele, hogy $\gamma_n(\lambda)$ átlagban konvergáljon egy $\gamma_n(\lambda) \in L_2(F)$ függvényhez, ahol

$$F(\lambda) = \mathbf{E}|Z(\lambda)|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} [f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)\, d\lambda$$

és

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) dZ(\lambda).$$

A 6.1. pontban ismertetett módszernek megfelelően az $y(T)$ mennyiség becsléseként a $z = P_{L_2(X)} y(T)$ kifejezést választjuk, amely minimálissá teszi a $\|z-y(T)\|$ „távolságot" a $z \in L_2(X)$ mellékfeltétellel. De

$$z - y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dZ_y(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dZ_\delta(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{iT\lambda} dZ_y(\lambda),$$

tehát

$$\|z-y(T)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda) - e^{iT\lambda}|^2 f_y(\lambda)\, d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 f_\delta(\lambda) d\lambda.$$

Azonban az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{|\gamma(\lambda)-e^{iT\lambda}|^2 f_y(\lambda)+|\gamma(\lambda)|^2 f_\delta(\lambda)\}\,d\lambda$$

mennyiség értéke akkor minimális, ha

$$\gamma(\lambda)=\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\,e^{iT\lambda},$$

mert minden λ-ra $\gamma(\lambda)$-nak éppen ez az értéke teszi az integrál alatti kifejezést minimummá. Ez a $\gamma(\lambda)$ továbbá $L_2(F)$ eleme, mert $|\gamma(\lambda)|\leqq 1$. Ilyen szűrővel a hiba négyzetes átlagát a

$$\|z-y(T)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(\lambda)f_\delta(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\,d\lambda$$

kifejezés adja meg. A legjobb szűrő tehát az

$$y^*_{\text{opt}}(T)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\,e^{iT\lambda}\,dZ(\lambda)$$

képletnek felel meg. Előfordulhat, hogy ez a kifejezés túlságosan bonyolult; ez esetben meg lehet kísérelni $y^*_{\text{opt}}(T)$ approximálását egyszerűbb kifejezésekkel. Nyilvánvaló, hogy ez egyenértékű az $\dfrac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}$ függvény megközelítésének feladatával az f_y+f_δ súlyfüggvény által megadott négyzetes metrikájú függvénytérben. Ha például

$$\sum_1^N c_\nu e^{ia_\nu\lambda_\nu}\sim\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}$$

alakú approximációt alkalmazunk úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_1^N c_\nu e^{ia_\nu\lambda}-\frac{f_y(\lambda)}{f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)}\right|^2[f_y(\lambda)+f_\delta(\lambda)]\,d\lambda<\varepsilon$$

legyen, akkor egy „majdnem legjobb" $y^*_{\text{appr}}(T)$ szűrőt kapunk:

$$y^*_{\text{appr}}(T)=\sum_1^N c_\nu x(T+a_\nu),$$

amelyre

$$\|y^*_{\text{opt}}(T)-y^*_{\text{appr}}(T)\|^2<\varepsilon.$$

6. 6. Egy általánosabb szűrési probléma. Vizsgáljuk most a következő esetet, amely teljesen analóg a véges dimenziójú térre vonatkozó szokásos regressziós feladattal. Legyenek $x(t)$ és $y(t)$ stacionárius folyamatok az

$$\begin{cases} r_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_x(\lambda)\, d\lambda \\ r_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_y(\lambda)\, d\lambda \end{cases}$$

korrelációs függvényekkel. Tegyük fel, hogy az

$$r_{yx}(t) = E\overline{y(s)}\,x(s+t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha} f_{yx}(\lambda)\, d\lambda$$

kölcsönös korrelációs függvény által meghatározott stacionárius valószínűségi kapcsolatban állnak. Ez a kifejezés azt az egyetlen korlátozást feltételezi, hogy a kölcsönös korrelációs függvénynek abszolút folytonos spektruma van.

Becslést keresünk $y(T)$ értékére az $x(t)$ folyamatra ható lineáris szűrő alakjában. Legyen

$$y^*(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda)\, dZ_x(\lambda),$$

akkor

$$\|y^*(T) - y(T)\|^2 = \|y^*(T)\|^2 + \|y(T)\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\mathrm{E}y^*(T)\overline{y(T)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|^2 f_x(\lambda)\, d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} f_y(\lambda)\, d\lambda - 2\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) e^{-iT\lambda} f_{yx}(\lambda)\, d\lambda.$$

Könnyen belátható, hogy a

$$\|y^*(T) - y(T)\|$$

négyzetes középhiba akkor lesz a legkisebb, ha a $\gamma(\lambda)$ függvényt a következőképpen választjuk:

$$\gamma^*(\lambda) = \frac{\bar{f}_{yx}(\lambda)}{f_x(\lambda)} e^{iT\lambda}.$$

Ugyanis nyilvánvalóan

$$2\mathrm{Re}\, \gamma e^{-iT\lambda} f_{yx} \leqq 2|\gamma \sqrt{f_x}| \left| \frac{f_{yx}}{f_x} \right| \leqq |\gamma|^2 f_x + \frac{|f_{yx}|^2}{f_x},$$

amiből következik, hogy

$$|\gamma|^2 f_x - 2\mathrm{Re}\, \gamma e^{-iT\lambda} f_{yx} \geqq -\frac{|f_{yx}|^2}{f_x};$$

azonban a

$$\gamma^*(\lambda) = \frac{\bar{f}_{yx}(\lambda)}{f_x(\lambda)} e^{iT\lambda}$$

választott becslésünk következtében érvényes a

$$|\gamma^*(\lambda)|^2 f_x(\lambda) - 2\mathrm{Re}\, \gamma^*(\lambda) e^{-iT\lambda} f_{yx}(\lambda) = -\frac{|f_{yx}(\lambda)|^2}{f_x(\lambda)}$$

egyenlet. A $\gamma^*(\lambda)$ függvényt lehet szűrő szerkesztésére használni, mert (lásd CRAMÉR [2], 3. tétel):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma^*(\lambda)|^2 f_x(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_{yx}(\lambda)|^2}{f_x(\lambda)} d\lambda \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_y(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Az ilyen szűrő alkalmazásakor fellépő hiba négyzetes középértéke

$$\|y^*(T) - y(T)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_x(\lambda) f_y(\lambda) - |f_{yx}(\lambda)|^2}{f_x(\lambda)} d\lambda \geqq 0.$$

A 6. 5. szakaszban tárgyalt feladat a most vizsgált feladat egy speciális esetének tekinthető. Ha ugyanis koherens zaj esetében a kölcsönös korrelációs függvény

$$r_{y\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f_y(\lambda) = E y(s)\overline{\delta(s+t)},$$

akkor a spektrális sűrűségek a következők:

$$\begin{cases} x(t) \text{ folyamat:} & f_y(\lambda) + f_\delta(\lambda) + 2\mathrm{Re} f_{y\delta}(\lambda) \\ y(t) \text{ folyamat:} & f_y(\lambda) \\ x(t) \text{ és } y(t) \text{ kapcsolata:} & f_y(\lambda) + f_{y\delta}(\lambda). \end{cases}$$

Ekkor a szűrőfüggvény

$$\gamma^*(\lambda) = \frac{f_y(\lambda) + \overline{f_{y\delta}(\lambda)}}{f_y(\lambda) + f_\delta(\lambda) + 2\,\mathrm{Re} f_{y\delta}(\lambda)} e^{iT\lambda}.$$

Látható tehát, hogy $f_{y\delta} = 0$ esetén a korábban kapott eredményhez jutunk.

Megjegyezzük még, hogy ha a T értéket paraméternek tekintjük, akkor az így kapott szűrők az $x(t)$ folyamat stacionárius lineáris transzformációinak felelnek meg KARHUNEN [2] definíciója értelmében.

A. M. JAGLOM KIEGÉSZÍTÉSE U. GRENANDER „SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ÉS STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉSEK" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

A következő kiegészítésben utalunk néhány, az utóbbi években megjelent munkára, amelyeknek a tárgya szoros kapcsolatban van GRENANDER munkájának a tartalmával. Irodalmi utalásaink, és még kevésbé az idézett konkrét eredmények nem tartanak igényt a teljességre; csupán arra törekedtünk, hogy az olvasónak segítséget nyújtsunk mind magában a GRENANDER-féle dolgozatban való tájékozódáshoz, mind pedig az alkalmazások és a dolgozatban foglalt gondolatok továbbfejlesztése tekintetében.

1. fejezet

A sztochasztikus folyamatok matematikai elméletének kimerítő és korszerű tárgyalását foglalja magában DOOB részletes monográfiája [1*].

3. fejezet

Rámutatunk még egy, a sztochasztikus folyamatok elméletének korszerű műszaki alkalmazásaiban nagyon fontos koordináta-típusra. Legyen $x(t)$ olyan stacionárius sztochasztikus folyamat, amelynek $F(\lambda)$ spektrálfüggvénye azonosan állandó a $|\lambda| < 2\pi(W-\varepsilon)$ sávon kívül valamilyen $\varepsilon > 0$ esetében (sőt ezt a feltételt valójában még kissé gyengíteni lehet). Ebben az esetben minden rögzített t_0-ra és a folyamat majdnem minden realizációjára (vagyis egy valószínűséggel) teljesül az

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t_0 + \frac{k}{2W}\right) \frac{\sin 2\pi W\left(t - t_0 - \frac{k}{2W}\right)}{2\pi W\left(t - t_0 - \frac{k}{2W}\right)}$$

összefüggés (lásd pl. BELJAJEV [1*]), amiből következik, hogy *az* $x(t)$ *realizációt ekkor az egész* $-\infty < t < \infty$ *tengelyen teljesen meghatározza az* $x_k = x\left(t_0 + \frac{k}{2W}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *megszámlálhatóan végtelen sok koordináta.* Ezt a tényt már 1933-ban észrevette KOTELNIKOV [1*] (szigorú bizonyítás nélkül); lásd még PETERSON, BIRDSALL, FOX [1*], ahol hasonló előállítás található olyan $x(t)$ folyamatokra, amelyeknek a spektruma a $2\pi W_0 < |\lambda| < 2\pi(W_0 + W)$ sávra korlátozódik. Lehet még az $x_k = x\left(t_0 + \frac{k}{2W}\right)$ koordináták helyett az $x_{2k} = x\left(t_0 + \frac{k}{W}\right)$, $x_{2k+1} = x'\left(t_0 + \frac{k}{W}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ koordinátákat is használni; még több ilyen jellegű változat létezik.

Az $x(t)$ folyamat koordinátáiként a $t_k \in T$ pontok egy megszámlálható, mindenütt sűrű halmazán vett $x(t_k)$ értékek választását illetően lásd még a STRIBEL [2*] munkájára vonatkozó megjegyzést a 4. fejezet 4. 2. szakaszához tartozó kiegészítésben.

4. fejezet

A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó statisztikai hipotézisek vizsgálatának kérdése az utóbbi években igen nagy jelentőségre tett szert a következő gyakorlati feladattal kapcsolatban. Tegyük fel, hogy valamilyen $s(t)$ „jel"-nek a jelenlétét kell megállapítani olyan megfigyelt adatok alapján, amelyek ismert valószínűségeloszlású sztochasztikus folyamatot alkotó $n(t)$ „zajjal" vannak eltorzítva. Így tehát a ténylegesen megfigyelt $x(t)$ folyamat vagy az $s(t) + n(t)$ összeggel (ha a jel valóban jelen van[1]), vagy csupán az $n(t)$ folyamattal azonos. Meg kell állapítani

[1] Csupán azzal a legegyszerűbb (és legfontosabb) esettel foglalkozunk, amikor a zaj additív, vagyis egyszerűen hozzáadódik a jel értékeihez. Elvileg természetesen semmi sem változik azokban az esetekben sem, amikor a zaj valamilyen más ismert módon torzítja el a jeleket.

az $x(t)$ folyamat egy realizációjának a véges $(0, T)$ intervallumon (vagy némely esetben megengedhető végtelen intervallum is) történő megfigyelése alapján, hogy a H_0: $x(t)=n(t)$ hipotézis igaz-e, vagy pedig a H_1: $x(t) = s(t)+n(t)$ hipotézis. Ekkor abban az esetben, amikor az $s(t)$ jelet pontosan ismerjük (vagy pedig a jel ismert valószínűségeloszlású sztochasztikus folyamat), két egyszerű hipotézis összehasonlításával van dolgunk; ha viszont a jel többféle értéket vehet fel (például egy vagy több ismeretlen paramétertől függ), akkor több alternatívát tartalmazó hipotézisvizsgálatról van szó.

Az itt leírt feladat: „jel detektálása zajháttérben", igen nagy fontosságú a gyakorlatban (elsősorban a rádiólokátorok technikájában); ezért az utóbbi években nagyon sok munka foglalkozik vele; bizonyos eredményekre a későbbiek során még visszatérünk.

Jó bevezetőül szolgálhat ebbe a feladatkörbe DAVENPORT és ROOT [1*] könyvének 14. fejezete, amely a kérdést mérnökök számára alkalmas módon tárgyalja és különösen GRENANDER jelen dolgozata 4. fejezetének jelentős részét számukra hozzáférhetővé teszi. Némileg speciálisabb jellegű PETERSON, BIRDSALL és FOX [1*] nagyobb szabású áttekintő munkája (lásd alább, a 4. 4.—4. 12. szakaszokra vonatkozó kiegészítéseket). Ide tartozik még az [1*] cikkgyűjtemény és HELSTROM [1*] monográfiája is.

4. 2. Ennek a szakasznak a fő tétele lényegileg a martingálok elméletének egyszerű következménye — erre a körülményre utal implicit módon pl. DOOB [1*] könyve VII. fejezetének 9. paragrafusában. Ugyanis teljesen világos, hogy ha a $P_1(x_1, \ldots, x_n)$ n-dimenziós eloszlás minden véges n-re abszolút folytonos a $P_0(x_1, \ldots, x_n)$ eloszlásra nézve, akkor $m > n$ esetén

$$l_n(x_1, \ldots, x_n) = M_0\left[l_m(x_1, \ldots, x_m)|x_1, \ldots, x_n\right].$$

Ebből következik, hogy az $l_1(x_1)$, $l_2(x_1, x_2), \ldots$ nem-negatív valószínűségi változók sorozata (ahol az $x_1, x_2, \ldots$ mennyiségek eloszlása P_0) martingál. Ezért az

$$l_\infty(\omega) = \lim_{n\to\infty} l_n(\omega)$$

határérték létezése majdnem mindenütt P_0-ra nézve (tehát P_1-re nézve is), közvetlen folyománya a DOOB [1*] könyv VII. fejezete 4.1. tételének. (Ugyanennek a könyvnek a 312. oldalán levő megjegyzés szerint ezt az eredményt a szemi-martingálok konvergenciájáról szóló általános tétel alapján is le lehet vezetni a $P_1(x_1, \ldots, x_n$ eloszlás $P_0(x_1, \ldots, x_n)$-re nézve abszolút folytonosságának a feltevése nélkül is.) Ha most a P_1 eloszlás a végtelen dimenziójú Ω térben abszolút folytonos P_0-ra nézve (vagyis a 4. 2. szakasz A esete áll fenn), akkor

$$M_0 f(\omega) = M_0 \frac{dP_1}{dP_0} = 1 \quad \text{és} \quad \text{az} \quad l_1(\omega), l_2(\omega), \ldots, f(\omega)$$

mennyiségek martingált alkotnak; ebből a DOOB könyv ugyanezen 4.1. tétele alapján következik, hogy $l_\infty(\omega) = f(\omega)$ majdnem mindenütt P_0-ra nézve. Ezzel az A eset vizsgálata befejeződött. A B és C eseteket ezek után vissza lehet vezetni az A esetre, ahogy ezt GRENANDER teszi, de lehet a martingálok elméletét közvetlenül is alkalmazni ezekre az esetekre.

Ha $x(t)$ a véges vagy végtelen T intervallumon megadott sztochasztikus folyamat, és $x_1, x_2, \ldots$ koordinátákként számára a T-n mindenütt sűrű $D=(t_1, t_2, \ldots)$ megszámlálható halmazon felvett értékeit használjuk, akkor a fent bizonyítottakból következik, hogy (feltéve, ha az A esettel van dolgunk)

$$\lim_{n\to\infty} l_n(\omega) = \frac{dP_1^{(D)}}{dP_0^{(D)}} = f^{(D)}(\omega)$$

majdnem mindenütt $P_0^{(D)}$-re nézve, ahol $P_0^{(D)}$ és $P_1^{(D)}$ a megszámlálható dimenziójú $\Omega^{(D)}=\{x(t_1), x(t_2), \ldots\}$ tér véges dimenziós intervallumai által származtatott Borel-halmaztesten megadott mértékek. Ebből a szempontból érdekes STRIBEL [2*] egyszerű eredménye, amely szerint, ha az összes valós függvények Ω terén a *minden lehetséges* véges dimenziós intervallum által generált Borel-testen megadott, az $x(t)$ folyamathoz tartozó P_1 mérték abszolút folytonos a megfelelő P_0 mértékre nézve, akkor a D halmaz bármely választása esetén a $\frac{dP_1^{(D)}}{dP_0^{(D)}}$ derivált P_0-ra nézve majdnem mindenütt azonos a $\frac{dP_1}{dP_0}$ deriválttal. Ez az eredmény jogossá teszi az $x(t_1), x(t_2), \ldots$ koordináták használatát (ahol $(t_1, t_2, \ldots)$ tetszőleges, T-n mindenütt sűrű, megszámlálható halmaz) minden valószínűségben folytonos $x(t)$ sztochasztikus folyamat esetében.

A 4. 2. szakasz legvégén példaként szerepel az az eset, amikor az $x_1, x_2, \ldots$ koordinátákat úgy lehet megválasztani, hogy független valószínűségi változók legyenek mind a P_0, mind a P_1 valószínűségi mértékre nézve. Az erre vonatkozó megjegyzésben egy kis pontatlanság van: világos, hogy a „nulla vagy egy" törvénynek e példára való alkalmazásához még meg kell követelni, hogy az x_n mennyiség P_1-eloszlása, $P_1^{(n)}$ abszolút folytonos legyen a megfelelő P_0-eloszlásra, $P_0^{(n)}$-re nézve. Egy másik módszert annak bizonyítására, hogy az említett feltétel teljesülése esetén a végtelen dimenziójú Ω térben megadott P_1 eloszlás vagy abszolút folytonos a P_0 eloszlásra nézve, vagy pedig teljesen olyan H halmazon összpontosul, amelyre $P_0(H)=1$, már KAKUTANI [1*] alkalmazott egy viszonylag régi munkájában, amelyben egyszerű feltételt sikerült találnia az A és B eset megkülönböztetésére. Azt bizonyította ugyanis, hogy P_1 *P_0-ra nézve abszolút folytonosságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dP_1^{(n)}(x)}{dP_0^{(n)}(x)}\right]^{\frac{1}{2}} dP_0^{(n)}(x) > 0$$

egyenlőtlenség teljesüljön; ha viszont a szélsőséges szinguláris eset áll fenn, akkor az itt felírt végtelen szorzat feltétlenül nullához tart. Abban a speciális esetben, amikor mindegyik $P_0^{(n)}$, $P_1^{(n)}$ eloszlás normális, továbbá $P_0^{(n)}$ és $P_1^{(n)}$ várható értékei egyenlők, a fenti feltételt a következő alakra lehet hozni:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\sigma_0^{(n)} - \sigma_1^{(n)})^2}{\sigma_0^{(n)}\sigma_1^{(n)}} < \infty,$$

ahol $\sigma_0^{(n)}$ és $\sigma_1^{(n)}$ a $P_0^{(n)}$ és $P_1^{(n)}$ eloszlások szórásai. Könnyen érthető, hogy a normális eloszlás esetében ez utóbbi feltétel szükséges és elegendő P_1 abszolút folytonosságához P_0-ra nézve, anélkül, hogy bármit is ki kellene kötni $P_1^{(n)}$-nek $P_0^{(n)}$-re nézve való abszolút folytonosságára vonatkozóan, ha csak megállapodunk abban, hogy $\frac{(\sigma_0-\sigma_1)^2}{\sigma_0\sigma_1}=1$, amikor $\sigma_0=\sigma_1=0$ (és végtelen, ha a σ_0, σ_1 mennyiségeknek csupán az egyike nulla).

KAKUTANI eredményeit továbbfejlesztette KRAFT [1*], aki egy végtelen dimenziós téren definiált két mérték szélsőséges szingularitásának érdekes általános feltételét fogalmazta meg, és ezt a feltételt a statisztikai hipotézisek ellenőrzésének feladatára alkalmazta. KAKUTANI idézett eredményével kapcsolatos egyéb munkákról lásd alább a 4. 4.—4. 12. szakaszokhoz tartozó kiegészítéseket.

4. 4. A jelek zajháttérben való felismerésének elmélete szempontjából az ebben a szakaszban tárgyalt problémát úgy lehet felfogni, mint két, ismert alakú — additív normális zajjal eltorzított — jel (amelyek közül az egyik pl. azonosan nulla is lehet) megkülönböztetésének a feladatát (vö. DAVIS [2*], DAVENPORT és ROOT [1*], 14—15. paragrafusok). Az itt bevezetett feltétel, amely meghatározza, hogy az A reguláris esettel, vagy pedig a C szélsőséges szinguláris esettel van-e dolgunk, nyilvánvalóan következik a 4. 2. szakaszhoz tartozó kiegészítéseinkben idézett KAKUTANI-féle eredményből is.

STRIBEL [2*] munkájában az $l_n(\omega)$ és $f(\omega)$ likelihood hányadosok más alakját alkalmazza, amennyiben a folyamat koordinátáiként nem az x_ν, y_ν, $\nu=1,2,\ldots$ mennyiségeket használja, hanem az $x(t_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots$ mennyiségeket, ahol a $(t_1, t_2, \ldots)$ megszámlálható halmaz mindenütt sűrű az (a, b) intervallumon. Ebben az esetben $l_n(\omega)$ explicit kiszámításához nem kell az $r(s, t)$-magú integrálegyenletet megoldani, azonban ehelyett invertálni kell az $\|r(t_i, t_j)\|$, $i, j=1,\ldots,n$ mátrixot, aminek a tényleges végrehajtása szintén csak kivételes esetekben lehetséges.

További, a 4. 4. szakasz tartalmával szorosan kapcsolatos eredmények találhatók PITCHER [1*], BÉTHOUX [1*], CHOVER és FELDMAN [1*], valamint HANEN [1*, 2*] munkáiban.

4. 5.—4. 6. Ezeknek a szakaszoknak minden eredményét egészen könnyen át lehet vinni arra az esetre, amikor az $x(t)$ folyamat átlaga a H_1 hipotézis szerint több ismeretlen paramétertől függ az alábbi módon:

$$H_1:\quad M_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}x(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_i(t),$$

ahol $m_1(t),\ldots,m_n(t)$ ismert függvények (vö. például GRENANDER, ROSENBLATT [1*], 7. fejezet; STRIBEL [2*].

Az egyetlen ismeretlen paramétert tartalmazó esetet:

$$H_0:\quad M_0x(t)=0,\qquad H_\alpha:\quad M_\alpha x(t)=\alpha m(t),$$
$$(-\infty<\alpha<\infty)$$

részletesen tárgyalja HÁJEK [3*] a Hilbert-terek elmélete alapján. Kimutatja, hogy ha az összes $\Sigma c_k x_k(t)$ alakú véges lineáris kombinációk H_x halmazához hozzácsatolunk minden olyan x valószínűségi változót, amelyre fennáll, hogy valamilyen

$x_n \in H_x$, $n=1,2,\ldots$ sorozatra minden α esetén érvényes a $\lim\limits_{n\to\infty} M_\alpha |x-x_n|^2=0$ összefüggés, akkor a H_0 Hilbert-térhez jutunk $((x,y)=M_1\, x\bar{y}$ skalár szorzattal), és minden P_α, $-\infty<\alpha<\infty$ eloszlást H_0-ban definiált eloszlásként foghatunk fel. Ekkor H_0-ban létezik olyan u valószínűségi változó, (amelyet az $M_1(ux(t)) = m(t)\cdot M_1 u^2$ összefüggés egyértelműen meghatároz), hogy az u-ra ortogonális $H_u \subset H_0$ altérben az összes P_α eloszlások pontosan egybeesnek; ebből következik, hogy $x\in H_0$ esetén az

$$f_\alpha(x)=\frac{dP_\alpha(x)}{dP_0(x)}$$

likelihood hányadost vissza lehet vezetni az $x_u=(x,u)$ mennyiségek két egydimenziós Gauss-eloszlásának a hányadosára. Világos, hogy ekkor vagy a reguláris, vagy a szélsőségesen szinguláris esettel állunk szemben, attól függően, hogy az u mennyiség szórása nullánál nagyobb-e, vagy pedig nulla; a fontos speciális esetek egész sorában találni lehet HÁJEK eredményei alapján teljesen hatékony kritériumokat a H_0 és H_α hipotézisek összehasonlítására.

4. 6. Abban a speciális esetben, amikor $r(s,t) = r(t-s)$ egy racionális $f_x(\lambda) = F'(\lambda)$ függvény Fourier-transzformáltja, az ebben a szakaszban az $f(t)$ függvényre kapott integrálegyenletet vissza lehet vezetni állandó együtthatójú differenciálegyenletre és explicite meg lehet oldani (lásd pl. DAVENPORT és ROOT [1*], 2. függelék, vagy LANING és BATTIN [1*], 8. fejezet). Az így kapott megoldás azonban általában elfajult függvényeket tartalmaz: a δ-függvényt és deriváltjait; annak a feltétele, hogy létezzék $f(t)\in L_2(T)$ megoldás, itt egyenértékű azzal a feltétellel, hogy $f(t)$ kifejezése ne tartalmazzon ilyen elfajult függvényeket.

A feltételeknek az ebben a szakaszban adott alakja és a jel/zaj-viszonyt maximalizáló szűrők konstruálásának feladata közötti összefüggésről lásd DAVIS [2*]; DAVENPORT és ROOT [1*], 14—15. paragrafusokat.

4.7. Ennek a szakasznak a fő eredménye közvetlenül adódik KAKUTANI eredményeiből, amelyekről a 4. 2. szakaszhoz tartozó kiegészítésekben szóltunk.

4. 8. Ennek a szakasznak az elején utalás történik arra, hogy az $r(s,t)$-magú integrálegyenlet megoldása bonyolult feladat. Ezzel kapcsolatban szem előtt kell tartani, hogy ha $r(s,t) = r(t-s)$ racionális függvénynek a Fourier-transzformáltja, akkor a hozzá tartozó egyenletet hasonlóan lehet megoldani, mint ahogy megoldható az $f(t)$-re a 4. 6. szakaszban levezetett egyenlet (lásd DAVENPORT és ROOT [1*], SLEPIAN [1*], GELFAND és JAGLOM [2*]). Itt azonban a λ_ν sajátértékek és $\varphi_\nu(t)$ sajátfüggvények végső meghatározása egy transzcendens egyenlet megoldására (amelynek éppen a λ_ν értékek a gyökei) vezetődik vissza, ezt az egyenletet pedig csak közelítő numerikus módszerekkel lehet megoldani.

4.10. Pólya-folyamatnak (PÓLYA GYÖRGY-ről) olyan pontfolyamatot neveznek, amelynél az esemény megjelenésének a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban

$$p(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

a valószínűsége, ahol $p(t)=\dfrac{1+\beta n}{1+\beta\lambda t}$, β és λ rögzített állandók, n pedig a $(0,t)$ időben történt események száma. Ebben az esetben a $(0,t)$ időben történt események számának a valószínűségeloszlása az ún. Pólya-eloszlás:

$$P(0) = (1+\beta\lambda t)^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$P(n)=\left(\frac{\lambda t}{1+\beta\lambda t}\right)^n \frac{1\cdot(1+\beta)\dots(1+(n-1)\beta)}{n!}P(0).$$

Ha $\beta\to 0$, akkor a Pólya-eloszlás a Poisson-eloszláshoz tart, a Pólya-folyamat pedig a Poisson-folyamathoz.

GRENANDER csak a $\lambda=1$ esettel foglalkozik, amelyre az általános eset az időlépték egyszerű változtatásával visszavezethető.

4.11. Az a tény, hogy nincs olyan $f(t)\in L_2(T)$ függvény, amellyel a feltételt ki lehetne fejezni, abból is belátható, hogy az

$$\int_0^T e^{-\beta|t-s|}f(t)\,dt=1$$

integrálegyenlet megoldására alkalmazott szokásos módszer (lásd DAVENPORT és ROOT [1*], 2. függelék) az

$$f(t) = \frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-T)$$

eredményre vezet, amely δ-függvényt tartalmaz.

STRIBEL [2*] és HÁJEK [3*] kimutatják, hogy a H_0: $M_0x(t)=0$ és H_1: $M_1x(t)==m(t)$ általánosabb hipotézis-összehasonlítás esetében, ha az $x(t)$ normális folyamat korrelációs függvénye

$$r(s,t)=M[x(s)-Mx(s)][x(t)-Mx(t)] = e^{-\beta|t-s|},$$

akkor az $f(\omega)$ likelihood-függvény alakja:

$$f(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2}\left[x(0)\left(m(0)-\frac{m'(0)}{\beta}\right)+x(T)\left(m(T)+\frac{m'(T)}{\beta}\right)-\frac{1}{2}m^2(0)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}m^2(T)+\int_0^T x(t)\left(\beta m(t)-\frac{m''(t)}{\beta^2}\right)dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\beta m^2(t)+\frac{m'^2(t)}{\beta}\right)dt\right\}$$

(ahol feltesszük, hogy az $m(t)$ függvény kétszer differenciálható).

A 4.11. szakasz eredményeinek egy másik általánosítása található SEGUCHI és IKEDA [1*] munkájában, ahol a H_0: $M_0x(t)=0$ és H_1: $M_1x(t)=m$ hipotézis-összehasonlítás feladatot az (általában nem stacionárius) $x(t)$ normális Markov-folyamatok olyan osztályának esetére tárgyalják, amelyet az $y(t)$ Wiener-folyamatból az időléptéknek a t-ponttól függő változtatásával és a folyamat által felvett értékek megfelelő normálásával lehet származtatni. Ebben a munkában az $f(\omega)$ likelihood-függvényre kapott általános kifejezés alakja hasonló a 4.12. szakaszban kapott speciális kifejezés alakjához.

4.4.—4.12. Ezeknek a szakaszoknak a fő tartalma olyan válogatott példák gyűjteménye, amelyekben az $f(\omega)$ likelihood-függvényt explicit alakban lehet meghatározni (és ezen az úton meg lehet találni a vizsgált hipotézisek megkülönböztetésének a leghatékonyabb kritériumait), továbbá meg lehet adni annak a feltételeit, hogy a reguláris A esettel, vagy pedig a szélsőségesen szinguláris C esettel van-e dolgunk (a közbenső B eset ezekben a példákban egyszer sem fordul elő). A jelen kiegészítésben még néhány hasonló jellegű példát kívánunk bemutatni, és röviden kitérünk a példákkal kapcsolatos általános eredményekre is.

Elsőként egy speciális példát tárgyalunk, amelynek jellege nagyon közel áll a 4. 4.—4.11. szakaszokban foglalt példákéhoz, de még közvetlenebbül érinti a rádiólokáció gyakorlati feladatait. Legyen

$$H_0:\ x(t)=n(t), \qquad H_1:\ x(t) = A\cos(\omega t+\vartheta)+n(t),$$

ahol $n(t)$ stacionárius normális folyamat nulla átlaggal és $r(s,t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t-s|}$ korrelációs függvénnyel, A ismert paraméter, ϑ pedig a $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az ehhez a feladathoz tartozó $f(\omega) = \dfrac{dP_1}{dP_0}$ likelihood-hányadosra REICH és SWERLING [1*] explicit kifejezést vezetnek le oly módon, hogy kiszámítják a sűrűségfüggvények $x_k = x\left(\dfrac{kT}{n}\right)$, $k=0, 1, \ldots, n$ helyeken vett értékeinek az $l_n(x_0, \ldots, x_n)$ hányadosait és azután képezik az $n\to\infty$ határértéket. Ebben az esetben adódott, hogy az $f(\omega)$ függvény csak az $x(0)$, $x(T)$, $\int\limits_T^\infty x(t)\cos\omega t\,dt$ és $\int\limits_0^T x(t)\sin\omega t\,dt$ mennyiségektől függ; az $\alpha\to\infty$, $\sigma^2\to\infty$, $\dfrac{\sigma^2}{\alpha}\to K=$ konst. határátmenet után (azaz a „fehér zaj" esetében) $f(\omega)$ függése $x(0)$-tól és $x(T)$-től megszűnik és ebben a határesetben a leghatékonyabb kritérium az alábbi nagyon egyszerű alakot ölti:

$$\left|\int\limits_0^T e^{i\omega t}x(t)\,dt\right|^2 \geqq k.$$

REICH és SWERLING munkájukban megmutatják az $f(\omega)$ függvény meghatározásának általános módszerét az $n(t)$ „zaj" számos más alakú $r(s,t)$ korrelációs függvényeinek az esetére is.

PETERSON, BIRDSALL és FOX [1*] munkájukban néhány olyan feladatot vizsgálnak, ahol az $n(t)$ zaj „normális, korlátos spektrumú fehér zaj", azaz olyan folytonos normális folyamat, amelynek a $t_k = \dfrac{K}{2W}$, $k=0, 1, \ldots, 2WT$ időpontokban vett értékei (valamilyen $W>0$ esetén) független valószínűségi változók nulla átlaggal és egyenlő szórásokkal. Így tehát ezekben a feladatokban az $x(t)$ folyamatot rögzített véges számú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinátákkal megadottnak tekintik; világos, hogy az ilyen feltevés alapján kapott kritériumok közelítő jellegűek a GRENANDER-dolgozat 4.12. szakaszában kifejtett értelemben.

Hipotézisek megkülönböztetésére vonatkozó, konkrét műszaki problémákból eredő további feladatok találhatók az [1*] cikkfordítás-gyűjteményben, továbbá DAVENPORT és ROOT [1*], valamint HELSTROM [1*] könyveiben.

Abban a speciális esetben, amikor P_0 az ún. Wiener-mérték, amely a Wiener-folyamatnak felel meg — vagyis azon normális $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak, amelyre $x(0)=0$, $Mx(t)=0$ és $Mx(s)x(t)=\min(s,t)$ —, P_1 pedig a Wiener-mértékből néhány speciális jellegű egyszerű transzformációval származtatott mérték, meg lehet határozni az $f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}$ likelihood-hányadost CAMERON, MARTIN és más szerzőknek a Wiener-mérték szerinti integrálok különféle változó-helyettesítésekkel végzett átalakításainak szabályaira vonatkozó eredményeiből. Így például a CAMERON és MARTIN [1*], CAMERON [1*] és SEGAL [1*] munkákban kimutatták, hogy a H_0: $Mx(t)=0$ és H_1: $Mx(t)=m(t)$ hipotézisek összehasonlítása esetén, ha $x(t)$ olyan folyamat, hogy az $x(t)-Mx(t)$ különbség Wiener-folyamat, akkor

$$f(\omega)=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T [m'(t)]^2\,dt+\int\limits_0^T m'(t)\,dx(t)},$$

feltéve, hogy $m(t)$ olyan abszolút folytonos függvény, amelyre $m'(t)\in L_2(T)$; az ellenkező esetben a P_0 és P_1 mértékek diszjunkt halmazokon összpontosulnak, tehát a szélsőségesen szinguláris C eset következik be. A CAMERON és MARTIN [2*], SEGAL [1*] és SEIDMAN [1*] munkákban azt az esetet vizsgálják, amikor a P_1 mértéket a P_0 Wiener-mértékből az Ω függvénytéren végrehajtott lineáris transzformációkkal származtatják, a CAMERON és MARTIN [3*], valamint a CAMERON és FAGEN [1*] munkákban pedig ezeket az eredményeket kiterjesztik a nem-lineáris transzformációk néhány típusára (lásd még e tekintetben GELFAND és JAGLOM [1*] összefoglaló dolgozatát.

A Wiener-folyamat normális, független növekményű Markov-folyamat, és kitűnik, hogy a reá vonatkozó eredményeket általánosítani lehet az olyan folyamatok viszonylag tág osztályára, amelyek e három tulajdonság közül legalább az egyikkel rendelkeznek. Legelőször is megjegyezzük, hogy ha mindkét eloszlás — P_0 és P_1 —, normális, akkor KAKUTANI [1*] eredményének értelmében (lásd még a GRENANDER-dolgozat 4. 2. szakaszának a végén található megjegyzést) az várható, hogy csupán csak az A reguláris eset vagy a szélsőségesen szinguláris C eset lehetséges (ugyanis itt a folyamat koordinátáit úgy lehet megválasztani, hogy kölcsönösen függetlenek legyenek mind a P_0, mind a P_1 mértékre nézve; e célra csupán diagonális alakra kell hozni egyszerre két pozitív definit kvadratikus alakot, amelyeket az M_0xy és M_1xy várható értékek határoznak meg, egy végtelen dimenziószámú térben). Ennek a ténynek a szigorú bizonyítása (a reguláris és a szinguláris esetet jellemző feltételekkel együtt) megtalálható két, újabban — egymástól függetlenül — megjelent munkában: FELDMAN [1*] (amely lényegében SEGAL [1*] régebbi általános eredményeit alkalmazza) és HÁJEK [1*]. A P_0 és P_1 normális mértékek regularitására (illetve szélsőséges szingularitására) e két munkában kapott szükséges és elegendő feltételek külső alakjukban erősen különböznek, valójában azonban egymásra vissza lehet őket vezetni. A normális mértékek regularitásának és szingularitásának általános feltételeit még egy másik alakban adta meg SZKOROHOD [3*], ezenkívül megmutatta az $f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}$ likelihood-hányados általános előállítását a reguláris esetben.

Sajnos, FELDMAN, HÁJEK, és SZKOROHOD általános feltételei nem eléggé konstruktívak — nagyon nehéz (ha éppen nem lehetetlen) adott esetekben meggyőződni róla, hogy teljesülnek-e. Ezért igen nagy a jelentősége azoknak a regularitásra vagy a szingularitásra vonatkozó speciálisabb elegendő feltételeknek, amelyeket hatékonyan lehet alkalmazni a sztochasztikus folyamatok egyes fontos osztályaira. A szingularitás legfontosabb elegendő feltételei azok, amelyek az $x(t)$ folyamat realizációinak valamilyen „majdnem biztos" tulajdonságaival kapcsolatosak. Ha ki lehet mutatni, hogy az $x(t)$ folyamat realizációja valamilyen meghatározott tulajdonsággal bír 1 valószínűséggel a P_0 mértékre nézve, és ugyanannak a tulajdonságnak 0 a valószínűsége a P_1 mértékre nézve, akkor ebből azonnal következik, hogy a P_0 és P_1 eloszlások a függvénytér diszjunkt halmazain összpontosulnak, és ekkor a folyamat egyetlen realizációja alapján 1 valószínűséggel meg lehet állapítani, hogy a H_0 vagy a H_1 hipotézis igaz-e. Például az analitikus sztochasztikus folyamatok fontos osztálya esetében (amelyekre vonatkozóan lásd BELJAJEV [1*] munkáját) a folyamat egyetlen realizációjának az időtengely bármilyen rövid szakaszán való ismerete alapján meg lehet határozni 1 valószínűséggel ennek a realizációnak az egész tengelyen felvett értékeit. A stacionárius, metrikusan tranzitív $x(t)$ folyamat esetén ebből máris következik, hogy a realizáció bármilyen rövid szakasza alapján 1 valószínűséggel meg lehet határozni a folyamatnak megfelelő P_0 mértéket. Ennek az eredménynek egy speciális esete az a tétel, amely szerint két tetszőleges, egymástól különböző, normális stacionárius mérték szinguláris, ha akár csak egyikük is metrikusan tranzitív, stacionárius, korlátos spektrumú folyamatnak felel meg (vö. SLEPIAN [2*]).

A nem-analitikus normális sztochasztikus folyamatok esetére HUNT [1*], LOÉVE [1*], BAXTER [1*], BELJAJEV [2*], GLADÜSEV [1*] munkái a folyamat realizációinak számos olyan „majdnem biztos" tulajdonságára mutatnak rá, amelyeket az $r(s, t)$ korrelációs függvény vagy (a stacionárius esetben) az $F(\lambda)$ spektrálfüggvény különféle tulajdonságai határoznak meg. Ezekből a tulajdonságokból kiindulva, két normális P_0 és P_1 mérték szingularitására sokféle elegendő feltételt lehet megadni; ezek közül itt csupán a következőt idézzük: *ha két, tetszőleges véges T intervallumon megadott normális stacionárius folyamathoz (vagy stacionárius növekményű folyamathoz) tartozó P_0 és P_1 mértékek, amelyeknek az átlaga zérus és a spektrálsűrűségei $f_0(\lambda)$ és $f_1(\lambda)$ olyanok, hogy $|\lambda|\to\infty$ esetén $f_i(\lambda) = C_i\lambda^{-\alpha_i}[1+0(\lambda^{-2})]$, $i=0, 1$, (ahol C_i és α_i valós állandók, $C_i>0$, $\alpha_i>1$) és $\lim \frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)} \neq 1$, akkor a P_0 és P_1 mértékekre a szélsőségesen szinguláris C eset áll fenn* (SLEPIAN [2*], GLADÜSEV [1*].

Ami két normális P_0 és P_1 mérték regularitásának hatékony feltételeit illeti, ilyen irányú eredmény még nagyon kevés ismeretes. A legfontosabb ilyen jellegű bebizonyított tény az, hogy *nulla várható értékű és racionális $f_0(\lambda)$ és $f_1(\lambda)$ spektrálsűrűségű normális, stacionárius folyamatoknak megfelelő P_0 és P_1 mértékek abszolút folytonosak egymásra nézve, feltéve hogy* $\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)} = 1$ [2] (lásd pl. PISZARENKO [1*]

[2] Azt az esetet, amikor a P_0 és P_1 mértékek azonos (de nem feltétlenül nulla) várható értékű folyamatnak felelnek meg, közvetlenül vissza lehet vezetni az előző esetre, ha pedig az $m_0(t)$ és $m_1(t)$ várható értékek különböznek, akkor elegendő e célra pótlólag a 4. 4.—4. 5. szakaszok eredményeit alkalmazni. Megemlítjük még, hogy a fenti állítás értelmében a P_0 és P_1 mértékekre feltétlenül a szélsőségesen szinguláris eset áll fenn, ha a spektrálsűrűségek ugyan racionálisak, de $\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \neq 1.$

mérnöki szintnek megfelelő szigorúsággal írt munkáját, valamint GIRSZANOV [1*] dolgozatát, amely néhány olyan általános eredményt tartalmaz, amelyeknek a fent idézett tény a következménye, továbbá PINSZKER [1*] monográfiáját, amelyről a következőkben még szó lesz).

PISZARENKO munkájában még az alábbi szabályt adja meg az $f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}$ likelihood hányados előállítására két ilyen P_1 és P_0 mérték esetében:

$$f(\omega) = Ae^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T x(t)[u(t)-v(t)]\,dt},$$

ahol A valamilyen állandó (amelyet meghatározott módon lehet kiszámítani), $u(t)$ és $v(t)$ pedig a vizsgált sztochasztikus folyamat $x(t)$ realizációjával az

$$\int\limits_0^T r_0(t-s)u(s)\,ds = x(t), \quad \int\limits_0^T r_1(t-s)v(s)\,ds = x(t)$$

integrálegyenletek útján kapcsolatos függvények ($r_0(t-s)$ és $r_1(t-s)$ az $x(t)$ folyamat korrelációs függvényei a P_0, illetve P_1 mértékre nézve). Abban a speciális esetben, amikor

$$r_0(t-s) = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha|t-s|} \quad \text{és} \quad r_1(t-s) = \frac{1}{\beta}e^{-\beta|t-s|},$$

$$\left(\text{tehát } f_0(\lambda)=\frac{1}{\pi(\lambda^2+\alpha^2)} \text{ és } f_1(\lambda)=\frac{1}{\pi(\lambda^2+\beta^2)}\right)$$

a fentiekből könnyen következik, hogy

$$f(\omega)=\frac{dP_1}{dP_0}=Ae^{-\frac{\beta^2-\alpha^2}{4}\int\limits_0^T x^2(t)\,dt+\frac{\beta-\alpha}{4}[x^2(0)+x^2(T)]}.$$

Ezekhez közelálló eredményeket lehet még találni a GELFAND és JAGLOM [2*], valamint PINSZKER [1*] munkáiban, amelyek információelmélettel foglalkoznak. A dolog lényege, hogy a T intervallumon megadott $x_0(t)$, $x_1(t)$ sztochasztikus folyamatok egyikében a másikra vonatkozó információmennyiség értéke

$$I(x_0(t), x_1(t)) = M_{01}\log\frac{dP_{01}}{d(P_0XP_1)},$$

ahol P_0 és P_1 az $x_0(t)$, illetőleg $x_1(t)$ folyamatoknak megfelelő mértékek, P_{01} az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ értékek együttes valószínűségeloszlását a függvénypárok terében meghatározó mérték, P_0XP_1 a független $x_0(t)$ és $x_1(t)$ esetének megfelelő mérték ugyanebben a térben, és M_{01} a várható érték a P_{01} mértékre nézve (lásd GELFAND és JAGLOM [2*]). Ennélfogva az $I(x_0(t), x_1(t))$ mennyiség kiszámítása szoros kapcsolatban áll a $\frac{dP_{01}}{d(P_0XP_1)}$ likelihood-hányados meghatározásával, vagyis azzal a feladattal, hogy összehasonlítsuk az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamatok adott együttes valószínűségeloszlásának megfelelő H_1 hipotézist azzal az alternatív H_0 hipotézissel, hogy ugyanezek a folyamatok kölcsönösen függetlenek; $I(x_0(t), x_1(t))$ csupán akkor lehet véges mennyiség, ha a két hipotézis összehasonlítása a reguláris esetnek felel meg. PINSZKER [1*] munkájában bevezeti még az $x_1(t)$ sztochasztikus folyamatnak egy másik $x_0(t)$ folyamatra vonatkoztatott „entrópiasűrűsége" fogalmát, amelyet a $h(x_0(t), x_1(t)) = M_1 \log \frac{dP_1}{dP_0}$ összefüggés határoz meg, ahol M_1 a várható érték a P_1 mértékre nézve (a B vagy C szinguláris esetben definíció szerint $h(x_0(t), x_1(t)) = \infty$). A $h(x_0(t), x_1(t))$ mennyiség kiszámításának a feladata magától értetődően nagyon közel áll sztochasztikus folyamatokra vonatkozó két hipotézis összehasonlításának a feladatához. Például PINSZKER eredményeiből azonnal következik, hogy *ha a P_0 és P_1 mértékek véges intervallumon megadott normális stacionárius folyamatoknak felelnek meg, amelyek átlaga nulla és $f_0(\lambda), f_1(\lambda)$ spektrálsűrűségeik közül legalább az egyik olyan racionális függvénye λ-nak, amelynek nincsenek valós gyökei, akkor a P_0 és P_1 mértékekre vagy az A reguláris eset, vagy a C szélsőségesen szinguláris eset áll fenn, attól függően, hogy az alábbi két integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)} - 1 \right) d\lambda \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \, d\lambda$$

egyszerre konvergens-e vagy pedig nem. PINSZKER eredményei magukban foglalnak még néhány általánosabb esetet is (például azt az esetet, amikor az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamatok várható értékei nullától különböznek, vagy amikor a folyamatok többdimenziósak, vagyis ha $x_0(t) = (x_{01}(t), \ldots, x_{0m}(t))$ és hasonlóan $x_1(t)$).

Térjünk most át arra az esetre, amikor P_0 és P_1 Markov-mértékek (vagyis a nekik megfelelő sztochasztikus folyamatok Markov-folyamatok).

A legegyszerűbb ismert eredmény itt a következő: *ha $x_0(t)$ és $x_1(t)$ diffúziós-típusú Markov-folyamatok, amelyekre $x_0(0) = x_1(0)$ és amelyeket a Fokker—Planck egyenletek írnak le, ahol a b_0 és b_1 diffúziós együtthatók állandók és az $a_0(x, t), a_1(x, t)$ átviteli együtthatók kielégítenek valamilyen természetes regularitási feltételt, akkor $b_0 \neq b_1$ esetében a P_0 és P_1 mértékek a függvénytér diszjunkt halmazain összpontosulnak, viszont a $b_0 = b_1$ esetben e mértékek abszolút folytonosak egymásra nézve és P_1 sűrűsége P_0-hoz viszonyítva*

$$f(\omega) = \frac{dP_1}{dP_0} = e^{\frac{1}{4b_0} \left\{ \int_0^T \left[a_1^2(x(t), t) - a_0^2(x(t), t) \right] dt - 2 \int_0^T \left[a_1(x(t), t) - a_0(x(t), t) \right] dx(t) \right\}}$$

(lásd pl. PROHOROV [1*], 2. függelék, továbbá a Wiener-mérték szerinti integrálok transzformációira fent megadott irodalmat). Tegyük most fel, hogy a $b_0(x, t)$ és $b_1(x, t)$ diffúziós együtthatók x-től és t-től függnek (és e két változónak eléggé sima függvényei), akkor $b_0(x, t) \neq b_1(x, t)$ esetén a P_0 és P_1 mértékek szintén szingulárisak egymásra nézve a könnyen bizonyítható

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[x\left(\frac{(t_1 - t_0)(k+1)}{n} \right) - x\left(\frac{(t_1 - t_0)k}{n} \right) \right]^2 = 2 \int_{t_0}^{t} b(x(t), t) \, dt$$

1 valószínűséggel érvényes összefüggés következményeképpen.[3] Ezeknek az eredményeknek további lényeges általánosításai találhatók SZKOROHOD [2*] és GIRSZANOV [1*, 2*] újabb keletű munkáiban. E munkák közül az első az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ Markov-folyamatok igen általános típusára (amely mint nagyon speciális esetet a diffúziós folyamatokat is magában foglalja) megadja a P_0 és P_1 mértékek abszolút folytonosságának tág elégséges feltételeit, és e feltételekkel kapcsolatban előállítja az egyik mértéknek a másikra vonatkoztatott sűrűségét meghatározó kifejezést. A második munka hasonló eredményeket tartalmaz a sztochasztikus folyamatok egy másik érdekes osztályának az esetére, amely a Markov-féle diffúziós folyamatok osztályának a természetes általánosítása (ebben az osztályban maguk az $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamatok nem kell hogy Markov-folyamatok legyenek, de olyan típusú sztochasztikus egyenletekkel kell megadva legyenek, mint ITÔ egyenlete a diffúziós Markov-folyamatokra). Végül a harmadik munka a szingularitás és regularitás feltételeit vizsgálja az olyan függvények terében megadott mértékek esetére, amelyeknek értéktartománya korlátos; ezek a mértékek különféle határfeltételekkel megadott korlátos tartományban értelmezett Markov-folyamatokhoz tartoznak.

Végül két független növekményű $x_0(t)$ és $x_1(t)$ folyamat esetére SZKOROHOD [1*] munkája adja meg a P_1 mérték P_0-ra vonatkozó abszolút folytonosságának általános feltételeit és a megfelelő $f(\omega)=\dfrac{dP_1}{dP_0}$ sűrűség kifejezését (ugyanez a szerző ezeket az eredményeket pl. lényegesen felhasználja [2*] munkájában).

5. fejezet

A műszaki alkalmazások szempontjából a becsléselmélet alapfeladatát a következőképpen lehet megfogalmazni: Legyen $x(t)$ a vett jel, amely néhány, számunkra ismeretlen paramétertől függ és ezenkívül tartalmaz néhány véletlen paramétert, amelyeknek a valószínűségeloszlása ismeretes, továbbá eltorzítják véletlen zavarok („zajok"). A folyamat véges T intervallumon megfigyelt $x(t)$ realizációja alapján becslést kell adni az ismeretlen paraméterek értékeire. Az így kitűzött feladat rendkívül fontos a rádiólokáció céljaira; lásd pl. DAVENPORT és ROOT [1*] könyvét és SLEPIAN [1*], YOULA [1*], SWERLING [1*] és HANEN [1*] munkáit, amelyek közvetlen gyakorlati fontosságú konkrét becslési példákat foglalnak magukban.

5.1. A minimális D_0t szórású torzítatlan $t(\omega)$ becslés szerkesztésére lásd pl. SWERLING [1*] munkáját és az ott idézett matematikai irodalmat. A Poisson-folyamat paramétereinek a becslése tekintetében lásd még MORAN [1*]-et.

5. 4. Az itt levezetett

$$Mm^*\overline{x(\alpha)}=C, \quad a\leqq t\leqq b$$

[3] Az itt megadott összefüggés helyett abból is ki lehet indulni, hogy a

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{|x(t+h)-x(t)|}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}}=[2b(x(t),t)]^{\frac{1}{2}}$$

összefüggés 1 valószínűséggel érvényes (lásd MARUYAMA [2*]). Ehhez csupán annyit kívánunk megjegyezni, hogy mindkét idézett összefüggés csak annyit mond, hogy a szélsőségesen szinguláris C eset feltétlenül bekövetkezik, ha $b_0(x, t_0)\neq b_1(x, t_0)$ valamilyen $t_0\in T$-re és *x minden lehetséges értékére* (pl. ha $b_0(t)$ és $b_1(t)$ nem függnek x-től és $b_0(t_0)\neq b_1(t_0)$); ha azonban x-nek csupán egyes értékei esetén igaz, hogy $b_0(x, t_0)\neq b_1(x, t_0)$, akkor csak annyit lehet kimondani, hogy a P_1 mérték nem lehet abszolút folytonos P_0-ra nézve a függvénytér valamilyen részében).

feltételnek, amely egyértelműen meghatározza a minimális szórású torzítatlan lineáris m^* becslést, egyszerű geometriai értelmezése van. Tekintsük az $L_2(Y; a, b)$ Hilbert-teret; világos, hogy az m átlagnak minden lehetséges torzítatlan lineáris μ^* becslése ebben a térben valamilyen M hipersíkot tölt be, amely nem megy keresztül az $L_2(Y; a, b)$ tér O kezdőpontján. A μ^* becslés szórása $\|\mu\|^2 - m^2$; ezért a legkisebb szórású becslésnek az O ponthoz legközelebbi $m^* \in M$ pont felel meg. Ez a legközelebbi pont az O-ból M-re bocsátott merőleges talppontja; tehát m^*-ot egyértelműen meghatározzák a következő feltételek: $m^* \in M$, és hogy minden $m^* - \mu^*$ vektor merőleges m^*-ra (ahol $\mu^* \in M$ tetszőleges torzítatlan becslése m-nek). Az összes torzítatlan becslések helyett elegendő csupán a $\mu = x(\alpha)$, $a \leqq \alpha \leqq b$ típusú becsléseket tekinteni, és éppen ezen az úton juthatunk a GRENANDER által levezetett feltételhez, egyszersmind megkapjuk, hogy $c = Dm^*$.

A 137—138. oldalakon m^* legjobb becslését adja meg arra az esetre, amikor $x(t)$ olyan stacionárius folyamat, amelynek a spektrálsűrűsége egy 1 számlálójú racionális törtfüggvény; semmit sem közöl azonban arról, hogyan találta meg ezt a becslést. Az eredmény levezetésének egy lehetséges módja az m^* mennyiség egy, — GRENANDER későbbi [1*] munkájában megadott —, előállításának a felhasználása. E dolgozat szerint stacionárius $x(t)$ folyamat esetén a legkisebb szórású m^* becslést az alábbi alakban lehet előállítani:

$$m^* = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} x^*(t)\,dt,$$

ahol $t \notin T$ esetén $x^*(t)$ az $x(t)$ értékeinek a $t \in T$-re adott $x(t)$ értékek alapján szerkesztett legjobb lineáris torzítatlan előrejelzése; $t \in T$ esetén pedig természetesen $x^*(t) = x(t)$. Ugyanebben a munkában bizonyos regularitási feltételekkel egy további, még alkalmasabb képletet vezet le:

$$m^* = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\,dt,$$

ahol $\tilde{x}(t)$ az $x(t)$ értékeinek legjobb lineáris előrejelzése az $m = 0$ feltétellel, γ pedig egy állandó (amelyet az m^* becslés torzítatlanságának a feltétele egyértelműen meghatároz). Az 5. 4. szakaszban vizsgált speciális $x(t)$ folyamat esetében az utóbbi képletből nagyon egyszerűen kaphatunk explicit kifejezést m^*-ra (az $\tilde{x}(t)$ előrejelzést itt ugyanis nagyon könnyen és igen egyszerű alakban lehet előállítani; lásd JAGLOM [1*]).

Egy másik módszer m^* explicit képletének az előállítására e mennyiség alábbi alakú formális kifejezésén alapul:

$$m^* = \int_{a}^{b} f(t)x(t)\,dt.$$

Ebből $f(t)$ számára az

$$\int_{a}^{b} r(s,t)f(t)\,dt = c$$

integrálegyenletet kapjuk (lásd az 5. 2. és 4. 6. szakaszokat), amelyet explicite meg lehet oldani, ha az $r(s,t)=r(t-s)$ korrelációs függvénynek racionális Fourier-transzformáltja van (lásd a 4. 6. szakaszhoz tartozó kiegészítésekben idézett irodalmat). Az így kapott megoldás általában tartalmazza a $\delta(t-a)$ és $\delta(t-b)$ δ-függvényeket és azok deriváltjait, a legjobb m^* becslést tehát a folyamat megfigyelési intervallumának a határain vett értékeiből és minden létező deriváltjának ugyanott vett értékeiből képezett lineáris kombinációknak és az $x(t)$ ezen az intervallumon valamilyen folytonos súlyfüggvénnyel vett integráljának az összege állítja elő. A 136—137. oldalon vizsgált speciális esetben ez az eljárás az ott megadott képletre vezet.

Végül még egy módszer m^* legjobb becslésére stacionárius $x(t)$ folyamat esetén abban áll, hogy m^*-ot

$$m^*=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\,dZ(\lambda)$$

alakban állítjuk elő és vizsgáljuk $Z(\lambda)$ viselkedését komplex λ értékekre; ezzel a módszerrel szintén egyszerű módon le lehet vezetni a 138. oldalon megadott képletet, és általánosítani lehet tetszőleges racionális spektrumú stacionárius folyamatok esetére (lásd JAGLOM [2*]). Ezzel kapcsolatban például könnyű bizonyítani, hogy tetszőleges ilyen folyamatok esetében

$$\lim_{T\to\infty}\frac{Dm^*}{T}=\pi h(0),$$

ahol $h(\lambda)$ az $x(t)$ folyamat spektrálsűrűsége; ebből közvetlenül folyik, hogy ebben az esetben a számtani közép szerinti becslés aszimptotikusan efficiens a lineáris becslések osztályában.

A racionális spektrálsűrűségű stacionárius $y(t)$ sztochasztikus folyamat állandó m átlagának a becslésére vonatkozó legtöbb eredményt minden nehézség nélkül általánosítani lehet az $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ paraméterek becslésére abban az esetben, amikor az $My(t)=m(t)$ várható érték

$$m(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_i(t)$$

alakban írható, ahol $m_1(t),\ldots,m_n(t)$ ismert függvények. Az m^* becslés előállítására az előzőkben megadott mindkét módszert (az integrálegyenletek módszerét és a $\Phi(\lambda)$ függvény vizsgálatának a módszerét) alkalmazni lehet az α_i paraméterek becslésére szolgáló explicit képletek szerkesztésére is (vö. LANING és BATTIN [1*], 8. fej.; BÉTHOUX [2*]). Egy hasonló folyamat speciális esetét, az

$$y(t)=x(t)+m(t)$$

folyamatot — ahol $r(s,t)=Mx(t)x(s)=e^{-|t-s|}$ —, vizsgálták MANN és MORANDA [1*], és STRIBEL [1*]. Ezekben a munkákban az $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ paraméterek minimális szórású torzítatlan $\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*$ becslésein kívül vizsgálták még a „legkisebb négyzetek módszerével való becslést" (amely nem függ az $r(s,t)$ korrelációs függvény explicit alakjától, és az $m(t)=\Sigma\alpha_\nu m_\nu(t)$ alakú várható érték esetében ugyanaz a szerepe, mint az $m(t)=m=$konst. esetben az m paraméter számtani közép szerinti becslésének), és kimutatták, hogy az aszimptotikus efficiencia fogalmának ésszerű általánosítása esetén a legkisebb négyzetek módszerével így kapott becslések aszimptotikusan efficiensek a lineáris becslések osztályában, feltéve, hogy $m(t)$ ismeretlen együtthatójú polinom vagy trigonometrikus polinom, de nem rendelkeznek az aszimptotikus efficiencia tulajdonsággal a legtöbb más esetben.

5. 5. A sztochasztikus folyamatokra ebben a szakaszban kirótt feltételek nem előnyösek a gyakorlati alkalmazás céljaira, mert az $f(\lambda)$ függvény viselkedésére vonatkoznak, amelynek a kiszámítása mindig nagyon nehéz feladat, kivéve a racionális spektrálsűrűség esetét. Később GRENANDER [1*] munkájában kimutatta, hogy diszkrét időparaméterű $x(t)$ sztochasztikus folyamatok (sztochasztikus sorozatok) esetén e feltételek helyett pl. azt a követelményt lehet támasztani, hogy az $x(t)$ folyamat reguláris legyen, spektrálsűrűsége $h(\lambda)=F'(\lambda)$ pozitív legyen és a spektrálsűrűségnek létezzék folytonos első két deriváltja. Folytonos időparaméterű $x(t)$ folyamatokra vonatkozó, hasonló jellegű, de erősebb eredmény található CHIANG TSE-PEI [1*] munkájában, aki ennek segítségével pl. kimutatta, hogy az 5. 5. szakasz fő eredménye, az m mennyiség számtani közép szerinti becslésének a lineáris becslések osztályában való aszimptotikus efficienciájáról szóló tétel érvényes marad minden olyan reguláris sztochasztikus folyamat esetében is, amelynek $h(\lambda)$ spektrálsűrűsége pozitív és folytonos a $\lambda=0$ pontban. CHIANG TSE-PEI egyszersmind egy általánosabb erdményt is kapott, amely szerint $m(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu e^{i\lambda_\nu t}$ alakú várható értékek esetén (ahol $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ismeretesek) az α_ν, $\nu=1,\dots,n$ paramétereknek a legkisebb négyzetek módszerével kapott becslése aszimptotikusan efficiens e paraméterek torzítatlan lineáris becsléseinek az osztályában minden olyan reguláris stacionárius $x(t)$ folyamat esetében, amelynek spektrálsűrűsége pozitív és folytonos a $\lambda=\lambda_\nu$, $\nu=1,\dots,n$ pontokban.

A stacionárius sztochasztikus folyamatok egy másik osztálya, amelyre kimutatták a várható érték számtani közép szerinti becslésének aszimptotikus efficienciáját az összes lineáris torzítatlan becslések osztályában, azokat az $x(t)$ folyamatokat foglalja magában, amelyeknek $r(t)$ korrelációs függvénye konvex (lásd HÁJEK [1*][4]). Erre az esetre azt is kimutatták, hogy a minimális szórású torzítatlan m^* becslést minden $T>0$ esetén elő lehet állítani az alábbi alakban:

$$m^*=\int_0^T x(t)\,dF(t),$$

ahol $F(t)$ olyan nem-csökkenő függvény, amelyre $\int_0^T dF(t)=1$.

5. 6. Az $y(t)=x(t)+m(t)$ alakú normális folyamatok tág osztályára — ahol $Mx(t)=0$, és $m(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu m_\nu(t)$ —, STRIBEL [2*] munkájában kimutatta, hogy az α_ν paraméterek α_ν^* maximum likelihood becslése efficiens; ugyanebben a munkában általános képleteket is ad (amelyek általában a gyakorlati használatra kevéssé

[4] Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy az olyan folytonos konvex $r(t)$, $0\leq t<\infty$ függvények, amelyekre $r(t)\to 0$, ha $t\to\infty$, mindig valamilyen reguláris stacionárius folyamat korrelációs függvényei.

alkalmasak) ezeknek az α_ν^* becsléseknek a kiszámítására (vö. a 4. 4. szakaszhoz tartozó kiegészítéseket). Az 5. 6. szakasz utolsó eredményének az általánosítása néhány nem-stacionárius normális Markov-folyamatra megtalálható SEGUCHI és IKEDA [1*] munkájában (vö. a 4.11. szakaszhoz tartozó kiegészítéseket).

SLEPIAN [1*] munkájában az $m(t) = V\cos(\omega t + \Theta)$ rezgés V amplitúdójára ad maximum likelihood becslést, amelyet az $y(t) = x(t) + m(t)$ folyamat egy realizációjának véges intervallumon megfigyelt értékei alapján szerkeszt meg (ahol $x(t)$ normális stacionárius „fehér" vagy „Markov-"zaj és $Mx(t) = 0$). Általánosabb eset az $Mx(t) = \alpha m(t)$ α-paraméterének α^* becslése, ahol $m(t)$ ismert függvény; ezzel az esettel HÁJEK [3*] munkája foglalkozik, amelyről már szó volt a 4. 5.—4. 6. szakaszokhoz tartozó kiegészítésben.

5. 9. Ennek a szakasznak az eredményeiből a gyenge függésű valószínűségi változókra vonatkozó központi határeloszlástétel értelmében (lásd pl. VOLKONSZKIJ és ROZANOV [1*]) az is közvetlenül folyik, hogy a megadott feltételekkel a maximum likelihood becslés aszimptotikusan normális.

5.10. Az $x(t)$ normális, stacionárius folyamat metrikus tranzitivitásának szükséges és elegendő feltételeiről szóló tételt már MARUYAMA [1*] bebizonyította, valamivel korábban, mint GRENANDER. Nem-normális stacionárius $x(t)$ folyamatok metrikus tranzitivitására vonatkozó néhány elégséges feltétel található LEONOV egy újabb [1*] megjegyzésében; ezeket a feltételeket a folyamat karakterisztikus funkcionáljára, illetve a szemi-invariánsaira vonatkozó korlátozások alakjában adja meg.

5.14. Ergodikus stacionárius sztochasztikus $x(t)$ folyamat korrelációs függvényének a becslése a folyamat egy realizációja alapján (vagy ami ugyanaz, a spektrálfüggvény, illetve spektrálsűrűség becslése) rendkívül fontos gyakorlati probléma és kiterjedt irodalma van. Lásd e tekintetben az alábbi monográfiákat: BARTLETT [1*], 9. fej. és GRENANDER és ROSENBLATT [1*], 4. és 6. fej., amelyek főleg a diszkrét paraméterű folyamatokkal foglalkoznak. Lásd még BLACKMAN és TUKEY [1*] kis terjedelmű könyvét, amely a folytonos paraméterű $x(t)$ folyamatokat tárgyalja. Ezekben a könyvekben további irodalmi utalások találhatók.

6. fejezet

Ez a fejezet röviden tárgyal néhány, a sztochasztikus folyamatok előrejelzésének (prognózisának, extrapolációjának) és szűrésének először KOLMOGOROV [1*, 2*] és WIENER [1*] által kidolgozott elméletére vonatkozó kérdést, éspedig ennek az elméletnek az alkalmazását a $-\infty < t < T$ féltengelyen megadott stacionárius $x(t)$ folyamatokra. A KOLMOGOROV—WIENER elmélet fő tételeinek szigorú matematikai tárgyalását az alábbi munkákban lehet megtalálni: DOOB [1*] monográfiája, 12. fej.; lásd még JAGLOM [1*] összefoglaló művét, DAVENPORT és ROOT [1*] könyve, 11. fej.; LANING és BATTIN [1*] könyve, 7. fej.; SZOLODOVNYIKOV [1*] könyvét. Ezekben számos példa és folyóirat-cikkekre való utalás található. A véges intervallumon megadott stacionárius és azzal rokon sztochasztikus folyamatok extrapolációjára és szűrésére vonatkozó feladattal foglalkoznak: ZADEH és RAGAZZINI [1*] és JAGLOM [2*, 3*]; lásd még LANING és BATTIN [1*], 8. fej. és SZOLODOVNYIKOV [1*], 8. fej. A tetszőleges sztochasztikus folyamatok előrejelzésére és szűrésére vonatkozó feladatoknak a 6. 2. szakaszban vázolt általános megközelítését jelentősen továbbfejlesztették DAVIS [1*] és PUGACSOV [1*] munkái.

KIEGÉSZÍTŐ IRODALOM[5]

M. S. BARTLETT: [1*] *An Introduction to Stochastic Processes*, Cambridge, 1955.

G. BAXTER: [1*] A strong limit theorem for Gaussian processes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 522–527.

P. BÉTHOUX [1*] Discrimination entre plusieurs signaux en telecommunication, *C. R. Acad. Sci.*, **247** (1958), 412–415.
[2*] Filtrage d'une fonction aléatoire dont la moyenne est une fonction linéaire, *C. R. Acad. Sci.*, **248** (1959), 3685–3686.

R. P. BLACKMAN and J. W. TUKEY: [1*] *The Measurement of Power Spectra*, New York, 1959.

J. HÁJEK: [1*] Линейная оценка средней стационарного процесса с выпуклой корреляционной функцией, *Чехосл. матем. журн.*, **6 (81)**, (1956), 94—117.
[2*] Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса, *Чехосл. матем. журн.*, **8 (83)**, (1958), 610—618.
[3*] On a simple regression model in Gaussian processes, *Trans. 2nd Prague Conf. on Inform. Theory*, Prague, 1960, 185–198.

U. GRENANDER: [1*] On empirical spectral analysis of stochastic processes, *Ark. för Mat.*, **1** (1951), 503–531.

U. GRENANDER and M. ROSENBLATT: [1*] *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, New York, 1956.

W. B. DAVENPORT and W. L. ROOT: [1*] *Введение в теорию случайных сигналов и шумов*, Москва, 1960.

J. L. DOOB: [1*] *Stochastic Processes*, New York, 1953.

R. S. DAVIES: [1*] On the theory of prediction of nonstationary stochastic processes *Journ. Appl. Phys.*, **23** (1952), 1047–1053.
[2*] On the detection of sure signals in noise, *Journ. Appl. Phys.*, **25** (1954), 76–82.

R. C. CAMERON: [1*] The translation pathology of Wiener space, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 623–627.

R. C. CAMERON and W. T. MARTIN: [1*] Transformations of Wiener integrals under translations, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 386–396.
[2*] Transformations of Wiener integrals under a general class of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945), 184–219.
[3*] Transformations of Wiener integrals by nonlinear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 253–283.

R. C. CAMERON and R. E. FAGEN: [1*] Nonlinear transformations of Volterra type in Wiener space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 552–575.

CHIANG TSE-PEI: [1*] On the estimation of regression coefficients of a continuous parameter time series with a stationary residual, *Теория вероят. и ее примен.*, **4** (1959), 405—423.

J. CHOVER and J. FELDMAN: [1*] On positive-definite integral kernels and a related quadratic form, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 405–423.

A. HANEN: [1*] Quelques problémes de tests d'hypothese et d'estimation en théorie des communications, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 3940–3942.
[2*] Étude géometrique du maximum de vraisemblance pour processes stochastiques laplaciens, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 4100–4101.

C. W. HELSTROM: [1*] *Statistical Theory of Signal Detection*, London, 1959.

G. A. HUNT: [1*] Случайные преобразования Фурье, сб. *Математика*, **2** (1958), 87—114.

J. FELDMAN: [1*] Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 699–708. (Corrections: uo. **9** (1959), 1295–1296).

S. KAKUTANI: [1*] On equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 214–224.

C. KRAFT: [1*] Some conditions for consistency and uniform consistence of statistical procedures, *Univ. Calif. Publ. Stat.*, **2** (1955), 125–142.

M. LOÉVE: [1*] *Теория вероятностей*, Москва, 1961.

J. H. LANING and R. H. BATTIN: [1*] *Случайные процессы в задачах автоматического управления*, Москва. 1958.

H. B. MANN and P. B. MORANDA: [1*] On the efficiency of the least square estimates of parameters in the Ornstein-Uhlenbeck process, *Sankhya*, **13** (1954), 351–358.

G. MARUYAMA [1*] The harmonic analysis of stationary stochastic processes, *Mem. Fac. Sci. Kyusu Univ.*, **A4** (1949), 45–106.

[5] A. M. JAGLOM összeállítása.

[2*] Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Mat. Palermo*, **4** (1955), 1–43.

P. A. P. MORAN: [1*] Estimation methods for evolutive processes, *J. Roy. Stat. Soc.*, Ser. B, **13** (1951), 141–146.

W. W. PETERSON, T. G. BIRDSALL and W. C. FOX: [1*] Теория обнаружения сигналов, сб. *Теория информации и ее приложения*, Москва, 1959, 210—274.

T. S. PITCHER: [1*] Likelihood ratios of Gaussian processes, *Ark. för Mat.*, **4** (1960), 35–44.

E. REICH and P. SWERLING: [1*] The detection of a sine wave in Gaussian noise, *J. Appl. Phys.*, **24** (1954), 289–296.

T. SEGUCHI and N. IKEDA: [1*] Note on the statistical inferences of certain continuous stochastic processes, *Mem. Fac. Sci. Kyusu Univ.*, **A8** (1954), 187–199.

T. SEIDMAN: [1*] Linear transformations of a functional integral, I., *Commun. pure and appl. Math.*, **12** (1959), 611–621.

I. E. SEGAL: [1*] Distribution in Hilbert space and canonical systems of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 12–41.

D. SLEPIAN: [1*] Estimation of signal parameters in the presence of noise, *Trans. IRE*, **Pgit-3** (1954), 68–89.

[2*] Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise, *Trans. IRE*, **Pgit-4** (1958), 65–68.

CH. STRIBEL: [1*] On the efficiency of the estimates of trend in the Ornstein-Uhlenbeck process, *Ann Math. Stat.*, **29** (1958), 192–200.

[2*] Densities for stochastic processes, *Ann. Math. Stat.*, **30** (1959), 559–567.

P. SWERLING: [1*] Parameter estimation for wave-forms in additive Gaussian noise, *SIAM Journ.*, **7** (1959), 152–166.

D. C. YOULA: [1*] The use of the method of maximum likelihood in estimating continuous-modulated intelligence which has been corrupted by noise, *Trans. IRE*, **Pgit-3** (1954), 90–105.

Ю. К. Беляев: [1*] Аналитические случайные процессы, *Теория вероят. и ее примен.* **4** (1959), 437—444.

[2*] Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов, *Теория вероят. и ее притен.*, **5** (1960), 128—131.

В. А. Волконский и Ю. А. Розанов: [1*] Некоторые предельные теоремы для случайных функций, *Теория вероят. и ее примен.*, **4** (1959), 186—207.

И. М. Гельфанд и А. М. Яглом: [1*] Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике, *Усп. матем. наук*, **11** (1956), 77—114.

[2*] О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции, *Усп. матем. наук*, **12** (1957), 3 —52.

И. В. Гирсанов [1*] О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, *Теор. вероят. и ее примен.*, **5** (1960), 314—330.

[2*] О фактор-процессах марковских процессов. *Теор. вероят. и ее примен.*, **6** (1961).

А. Н. Колмогоров: [1*] Стационарные последовательности в гильбертовом проствнстве. *Бюлл. Моск. гос. ун-та*, **2** (1941), 3—40.

[2*] Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей, *Изв. Акад. Наук СССР*, сер. матем., **5** (1941), 3—14.

В. А. Котельников: [1*] О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи, Матер. к 1 Всесоюзн. сьезду по вопросам техн. реконстр. дела связи, Москва, 1933.

В. П. Леонов: [1*] Применение характеристического функционала и семиинвариантов к эргодической теории стационарных процессов, *ДАН, СССР*. **133** (1960), 523—526.

М. С. Пинскер: [1*] *Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов*, Москва, 1960.

В. Ф. Писаренко: [1*] К задаче обнаружения случайного сигнала на фоне шума, *Радиотехн. и электр.*, **5** (1960), № 12.

Ю. В. Прохоров: [1*] Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теор. вероят. и ее примен.*, **1** (1956), 177—238.

В. С. Пугачев: [1*] *Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.* Москва, 1957.

Сборник переводных статей [1*] *Прием сигналов при наличии шума*, Москва, 1960.

А. В. Скороход: [1*] О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, 1. *Теор. вероят. и ее примен.*, **2** (1957), 417—443.

[2*] О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, 2. *Теор. вероят. и ее примен.*, **5** (1960), 45—53.

[3*] Про одне питання статистики гауссовских прочесив, *Доп. Укр. АН* (1960).

В. В. Солодовников: [1*] *Введение в статистическую динамику систем автоматического управления*, Москва—Ленинград, 1952.

А. М. Яглом: [1*] Введение в теорию стационарных случайных функций, *Усп. матем. наук*, **7** (1952), 3—168.

[2*] Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, *Тр. Моск. матем. общ-ва*, **4** (1955), 237—278.

[3*] Корреляционная теория процессов со случайными стационарными приращениями. *Матем. сб.*, **37 (79)**, (1955), 141—196.

Fordította: dr. Korodi Albert
a műszaki tudományok
kandidátusa