# A MEGBÍZHATÓSÁG NÖVELÉSÉNEK EGY OPTIMÁLIS ELOSZTÁSÁRÓL

Írta: DOBÓ ANDOR és SZAJCZ SÁNDOR

## Bevezetés

Tegyük fel, hogy valamilyen berendezést bizonyos irányban fejleszteni kívánunk. A fejlesztés irányának lényeges szempontja legyen az, hogy az újonnan konstruált rendszer megbízhatósága nagyobb legyen a korábban tervezett rendszer megbízhatóságánál. Tételezzük fel, hogy a fejleszteni kívánt rendszer független soros rendszer, melynek $n$ részrendszere van, s ezek $R_1, R_2, \ldots, R_n$ megbízhatósággal működnek[1]; ekkor a rendszer eredő megbízhatósága:

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n.$$

A fejlesztés legyen a megbízhatóság szempontjából olyan irányú, mely szerint előre megadjuk a tervezendő rendszer elérendő megbízhatóságát. Legyen $\bar{R}$ a konstruálandó rendszer előírt (megkövetelt) megbízhatósága, ahol $\bar{R} > R$. Ahhoz, hogy az $R$ megbízhatóságú rendszer elérje az $\bar{R}$ megbízhatóságú szintet, alrendszerei közül legalább egynek működési megbízhatóságát kellő nagyságú értékre kell növelni.

Egy-egy alrendszer megbízhatóságának a növelése bizonyos munkaráfordítást igényel, amelyet különböző módon lehet az egyes alrendszerek között felosztani. A munkaráfordítás mértéke számos tényező függvénye lehet. Így például ez a mérték függhet a vizsgálatok (kísérletek) számától, a rendelkezésre álló munkaeszközök színvonalától, a kutatók számától és szellemi kapacitásától, fejlesztési költségtől és egyéb itt fel nem sorolt számos más tényezőtől.

Felmerül már most az a kérdés, hogy az $R$ értékének az $\bar{R}$ értékre való növelése során mi a teendőnk, ha ezt minimális munkaráfordítással szeretnénk elérni. Tulajdonképpen itt egy minimális munkaráfordítást igénylő módszer kereséséről van szó.

E kérdéskörnek matematikai megfogalmazása gyakorlati szempontból a Nehézvegyipari Kutató Intézet Automatizálási Osztályán merült fel.

A megbízhatóságelmélet irodalmának tanulmányozása során vettük észre, hogy ugyanezen problémával foglalkozik DAVID K. LLOYD és MYRON LIPOW [1] alatt idézett könyvének 267—270. oldala. A szerzők szerint az általuk közölt eljárás A. ALBERTtől származik. (A. ALBERT, „A Measure of the Effort Required to Increase Reliability," *Technical Report* No. 43, November 5, 1958, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University, Contract No. N 6 onr-25140 (NR 342—022).)

[1] Definíció szerint ha $\xi_i$ az $i$-edik alrendszer meghibásodásának az időpontja, akkor $R_i = R_i(t) = 1 - F_i(t)$, ahol $F_i(t) = P(\xi_i < t)$. Vizsgálataink során $t$ értékét rögzitettnek tekintjük.

[1]-ben a probléma matematikai modelljének feltételei, továbbá az ez alapján kapott eredmény (bizonyítás nélkül) közölve van, ezért lehetőség adódott A. ALBERT és az általunk kapott eredmények összehasonlítására.

Az összevetés során azt találtuk, hogy az általunk kapott eredmény megegyezik A. ALBERT eredményével annak ellenére, hogy a kiinduló feltételek között eltérések mutatkoztak.

A kérdéskör gyakorlati szempontból jelentős, ezért úgy véljük nem érdektelen vizsgálataink közzéadása.

Természetesen a problémának teljesen átfogó és egzakt megoldását minden igényt kielégítően nem lehet megadni, már csak azért sem, mert ha történetesen ismernénk is a fejlesztés során közrejátszó tényezőket, akkor sem lennénk képesek elfogadhatóan ezek hatásainak függvényét megadni. Ennek ellenére a kérdéskör viszonylag eléggé általános feltételezések mellett történő vizsgálata is már némi eredményt biztosít, s az a gyakorlat számára első közelítésként hasznos lehet.

## A probléma matematikai modellje

Vizsgáljunk egy tetszés szerinti alrendszert, melynek működési valószínűsége legyen $x (0 \leqq x < 1)$. Jelölje $M(x, y)$ annak a munkaráfordításnak a mértékét, melyet akkor végzünk, amikor az alrendszer megbízhatóságának értékét $x$-ről $y$-ra növeljük ($x<y$; $0 \leqq y < 1$). A továbbiakban *az $M(x, y)$ függvényt munkaráfordítás-függvénynek vagy röviden ráfordítás-függvénynek nevezzük.*

*$M(x, y)$-ra az alábbi kikötéseket tesszük:*

1° $0 < M(x, y) < \infty \qquad (0 \leqq x < y < 1)$

2° $M(x, y) + M(y, z) = M(x, z)$,

ha $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1$. (Ez más szóval azt jelenti, hogy amegbízhatóságnak $x$ értékről $z$ értékre való növelésekor szükséges munkaráfordítás megegyezik azoknak a munkaráfordításoknak az összegével, amelyekkel a megbízhatóságot először $x$ értékről $y$ értékre, majd $y$ értékről $z$-re növeljük.) Könnyen beláthatóak az $M(x, y)$ függvény alábbi tulajdonságai; $(x<y<z)$:

1. $M(x, y) < M(x, z)$

2. $M(x, z) > M(y, z)$

3. $M(x, x) = 0$

4. $M(x, y) = M(0, y) - M(0, x)$

Bevezetve az $M(0, x) = H(x)$ jelölést a 4. alatti tulajdonság egyszerűbben így írható:

4'. $M(x, y) = H(y) - H(x)$.

Nyilvánvaló, hogy e tulajdonság meg is fordítható, azaz ha $M(x, y)$ a 4. alakban állítható elő, akkor arra teljesül az 1° és 2° feltétel.

A munkaráfordítás-függvény következő tulajdonságát — melyet egy újabb feltétel megadása mellett vizsgálunk — már bizonyítani fogjuk.

1. SEGÉDTÉTEL: *Ha*

3° $M(x, x+\varepsilon) < M(y, y+\varepsilon)$

*minden* $x < y$ *és tetszés szerinti* $\varepsilon > 0$ *esetén, akkor a* $H(x)$ *függvény konvex.*

*Bizonyítás:* Minthogy

$$H(x+\varepsilon) - H(x) < H(y+\varepsilon) - H(y),$$

így tetszőleges $x_1 < x_2$ esetén, ha $x = x_1, y = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\varepsilon = \frac{x_2 - x_1}{2}$, akkor

$$H(x_1 + \varepsilon) - H(x_1) < H\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \varepsilon\right) - H\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

ahonnan

$$H\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{H(x_1) + H(x_2)}{2}.$$

Q. e. d.

A továbbiakban szükségünk lesz a konvex függvények egy jól ismert tulajdonságára, melyet a teljesség kedvéért — az eddig közöltek figyelembevétele mellett — bizonyítani fogunk.

2. SEGÉDTÉTEL: *Ha az* $M(x, y)$ *függvény eleget tesz az* 1° — 3° *feltételeknek, akkor az* $M(0, x) = H(x)$ *függvény a* $0 \leqq x < 1$ *intervallumban folytonos.*

*Bizonyítás:* Először kimutatjuk azt, hogy

$$\lim_{h \to +0} M(x, x+h) = 0 \tag{1}$$

tetszőleges $x \in [0, 1)$ esetén.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyhez tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan $h > 0$ és $x \in [0, 1)$, melyre

$$M(x, x+h) \geqq \varepsilon$$

annak ellenére, hogy $0 < h < \delta$. Tekintsük a $\delta_n = \frac{1}{n}$ sorozatot; akkor feltevésünk értelmében tetszőleges $\delta_n$-hez található olyan $h_n < \delta_n$, melyre

$$M(x, x+h_n) \geqq \varepsilon.$$

Válasszuk $n_0$ értékét olyan nagynak, hogy az

$$x + \frac{1}{n_0} < 1$$

egyenlőtlenség már teljesüljön. Legyen $k$ tetszőleges pozitív egész szám és $n=kn_0$, akkor a 2°, valamint 1. és a konvexitás következtében

$$(2)\qquad M\left(x, x+\frac{1}{n_0}\right) = M\left(x, x+\frac{1}{n}\right)+M\left(x+\frac{1}{n}, x+\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+M\left(x+\frac{k-1}{n}, x+\frac{1}{n_0}\right) > kM\left(x, x+\frac{1}{n}\right) > kM(x, x+h_n) \geqq k\varepsilon.$$

Mivel $k$ tetszés szerinti nagy érték lehet és $\varepsilon>0$, ezért $M\left(x, x+\frac{1}{n_0}\right)<\infty$ folytán $k$ megválasztható úgy, hogy

$$k\varepsilon > M\left(x, x+\frac{1}{n_0}\right).$$

Ez viszont ellentmond a (2) alatti egyenlőtlenségnek.

Az 1°, valamint a konvexitás következtében

$$0 < M(x-h, x) < M(x, x+h),$$

gy az előbb kapott eredmény felhasználásával kapjuk, hogy

$$(3)\qquad \lim_{h\to+0} M(x-h, x) = 0$$

tetszőleges $x\in(0, 1)$ esetén.

Az (1) és (3)-ból, valamint a 4. alatti tulajdonságból állításunk már következik.

Mint ismeretes, ha az $f(u)$ függvény a [0, 1] intervallumban eleget tesz a *Lipschitz*-feltételnek, azaz létezik olyan $c>0$ szám, hogy minden $u'$ és $u''\in[0, 1]$ esetén $|f(u')-f(u'')|<c|u'-u''|$, vagy ha $f(u)$ a [0, 1]-ban monoton, akkor az $f(u)$ függvény teljes változása

$$(4)\qquad V_f(0, 1) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |f(u_k)-f(u_{k-1})|\right\} \qquad (0=u_0<u_1<\ldots<u_n=1)$$

eleget tesz az 1° és 2° feltételnek. Nevezetesen

$$(5)\qquad V_f(x, y)+V_f(y, z)=V_f(x, z) \qquad (0\leqq x<y<z\leqq 1).$$

Ennélfogva az $f(u)$ függvény teljes változása munkaráfordítás-függvénynek tekinthető.

További példa munkaráfordítás-függvényre az

$$(6)\qquad M(x, y) = \begin{cases} \ln\dfrac{f(y, a, b, \ldots u)}{f(x, a, b, \ldots u)} & \text{ha } 0\leqq x\leqq y\leqq 1 \\ & a, b, \ldots, u \text{ bizonyos paraméterek} \\ 0 & \text{ha } x>y \end{cases}$$

összefüggés alapján értelmezett függvény, ahol $f(x, a, b, \ldots, u)$ értelmezése olyan, hogy a vele való számolás nem mond ellent $M(x, y)$ tulajdonságainak. Ha pl.: $f(x, a, b, \ldots, u)=(ax+b)^u$, ahol $a, b, u>0$, akkor, mint arról könnyen meggyőződhetünk, az ez alapján számolt $M(x, y)$ függvény valóban ráfordítás-függvény.

Megemelítjük, hogy a DANIEL BERNOULLI felfogását igazoló WEBER és FECHNER-féle pszihofizikai törvény levezetésénél alkalmazott bizonyos analóg feltételezésekkel is nyerhetünk munkaráfordítás-függvényt. (Vö.: [2] 240—241. o.) Eszerint, ha egy alrendszer működési megbízhatósága $x$ és $p$ a valószínűsége annak, hogy $\Delta x$-szel növelni tudjuk a megbízhatóságát, akkor a munkaráfordítás mértéke arányos a $\Delta x$-szel és a $p$ valószínűséggel, továbbá fordított arányban áll $1-x$-szel. Ebből következik, hogy ha a megbízhatóság $p$ valószínűséggel $x$-ről $y$-ra emelkedik, akkor a munkaráfordítás mértéke:

$$M(x, y) = p \int_x^y \frac{dx}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^p. \tag{7}$$

Ha $y \to 1$, akkor $M(x, y) \to \infty$.

### A probléma megoldása

Jelöljük $M_i(x_i, y_i) = H_i(y_i) - H_i(x_i)$-vel az $i$-edik alrendszer ráfordítás-függvényét ($i = 1, 2, \dots n$). Feltételezve, hogy a fejleszteni kívánt rendszer független soros rendszer, ezért eredő megbízhatósága:

$$x = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.$$

Legyen $y > x$ a konstruálandó rendszer előírt megbízhatósága. A közölt előzmények után a minimális munkaráfordítást igénylő módszert a következő matematikai meggondolással nyerhetjük:

*Keressük a*

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i, y_i) \tag{8}$$

*összefüggés minimumát az*

$$y_1 y_2 \cdots y_n = y \tag{9}$$

*feltétel mellett.*[2]

A feladat megoldása esetenként a LAGRANGE-féle multiplikátoros eljárással is történhet. Az alábbiak során viszonylag eléggé általános feltételek mellett, a gyakorlat szempontjából első közelítésként jól felhasználható tételt bizonyítunk.

Tétel: *Ha* $M_i(x_i, x_i + \varepsilon_i) = M(x_i, x_i + \varepsilon_i)$ *minden* $i = 1, 2, \dots, n$*-re, továbbá ha az* $M(x_i, x_i + \varepsilon_i)$ *függvényre teljesül az* $1° - 3°$ *feltétel, akkor a*

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i, x_i + \varepsilon_i) \tag{10}$$

[2] Ha az $M_i(x_i, y_i)$ függvény bizonyos paraméterekkel adott függvény (paraméter pl.: a fejlesztési idő $t$, fejlesztési költség $k$ stb.), akkor elképzelhető, hogy a paraméterekre tett bizonyos megszorítások mellett (pl. $t \leq T$, $k \leq K$) is kell keresnünk a szóban levő minimumot.

*függvénynek a $[0, 1-\delta]$ intervallumban — ahol $\delta$ esetektől függően megválasztható kis pozitív érték*[3] *— az $\varepsilon_i \geqq 0$, továbbá*

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i+\varepsilon_i) = y \tag{11}$$

*feltételek mellett rögzített $x_i \leqq x_{i+1}$ értékek esetén minimuma az*

$$\varepsilon_i = \sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1}\dots x_n}} - x_i \tag{12}$$

*$i=1, 2, \dots j$ és $\varepsilon_{j+1} = \dots = \varepsilon_n = 0$ értékek mellett van, ahol a $j$ index a*

$$v_j < y \leqq v_{j+1} \tag{13}$$

*egyenlőtlenség által van definiálva, s itt*

$$v_{i+1} = \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^i v_i \tag{14}$$

*és*

$$v_1 = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n; \; v_{n+1} = 1^4. \tag{15}$$

*Bizonyítás:* A bizonyítást több lépésen keresztül végezzük. Nyilvánvaló, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} M(x_i, x_i+\varepsilon_i) \tag{16}$$

függvénynek rögzített $x_i$ értékek esetén ott van feltételes minimuma, ahol a

$$\sum_{i=1}^{n} H(x_i+\varepsilon_i) \tag{17}$$

függvénynek feltételes minimuma van[5].

*1. Állítás: Ha a* (17) *alatti függvény* az $x_i+\varepsilon_i = x_i+\alpha_i$ $(i=1, 2, \dots n)$ *helyen veszi fel a feltételes minimumát és $\alpha_{i+1} > 0$, akkor*

$$x_{i+1}+\alpha_{i+1} \leqq x_i+\alpha_i \qquad (i=1, 2, \dots n-1).$$

[3] A $\delta$ megválasztásánál szükséges feltétel a $\max(x_n, \sqrt[n]{y}) < 1-\delta$ egyenlőtlenség teljesülése.

[4] E tétel eredménye — mint jeleztük — megegyezik A. ALBERT-nek az 1°, 2°, 1., 2. továbbá az $x\frac{dH(x)}{dx}$ függvénynek a $0<x<1$ intervallumon való határozott növekedésének feltételezése mellett kapott eredményével. Mint látjuk, 1. és 2. az 1° és 2° feltétel következménye, a $H(x)$ differenciálhatóságát és $x\frac{dH(x)}{dx}$ monotonitásának feltételezését pedig esetünkben az ennél kézenfekvőbb 3° feltétel helyettesíti.

[5] Mivel a 2. segédtétel szerint a $H(x)$ folytonos a $[0, 1)$ intervallumon, ezért tetszőleges kicsiny pozitív $\delta$ esetén $H(x)$ a $[0, 1-\delta]$ zárt intervallumon is folytonos, így a $\sum_{i=1}^{n} H(x_i+\varepsilon_i) + \lambda\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i+\varepsilon_i) - y\right)$ függvénynek ezen intervallumon van minimuma.

Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis hogy valamely rögzített $k$ index esetén $(1 \leqq k \leqq n-1)$ $\alpha_{k+1} > 0$, de

$$\alpha_k + x_k < \alpha_{k+1} + x_{k+1}.$$

Vezessük be a

$$\beta_k = x_{k+1} + \alpha_{k+1} - x_k - \alpha_k$$

jelölést. Az indirekt feltevés folytán $\beta_k > 0$. Legyen

$$\omega_k = \min\left(\alpha_{k+1}, \frac{\beta_k}{2}\right). \tag{18}$$

Mivel $0 < \alpha_{k+1}$ és $0 < \frac{\beta_k}{2}$, így $0 < \omega_k$, továbbá $\omega_k \leqq \alpha_{k+1}$, ezért az $x_{k+1} + \alpha_{k+1}$ értéket $\omega_k$-val csökkenthetjük[6]. Ez esetben

$$H(x_{k+1} + \alpha_{k+1}) - H(x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k)$$

értékkel csökken a $k+1$-edik alrendszernél a munkaráfordítás értéke. Ha ugyanakkor a $k$-adik alrendszer megbízhatóságát $\delta_k$-val növeljük úgy, hogy $\delta_k$ értékét az

$$(x_1 + \alpha_1) \dots (x_k + \alpha_k + \delta_k)(x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k) \dots (x_n + \alpha_n) = y$$

egyenletből határozzuk meg, akkor kapjuk, hogy

$$\delta_k = \frac{x_k + \alpha_k}{x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k}\,\omega_k. \tag{19}$$

Az $\omega_k$ értelmezéséből következik, hogy

$$\omega_k < \beta_k = x_{k+1} + \alpha_{k+1} - x_k - \alpha_k,$$

innen

$$x_k + \alpha_k < x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k.$$

Ez alapján pedig már nyilvánvaló, hogy

$$\delta_k < \omega_k,$$

így a $H(x)$ függvény szigorú monotonitása, valamint konvexitása miatt fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} H(x_k + \alpha_k + \delta_k) - H(x_k + \alpha_k) < H(x_k + \alpha_k + \omega_k) - H(x_k + \alpha_k) \leqq \\ \leqq H(x_{k+1} + \alpha_{k+1}) - H(x_{k+1} + \alpha_{k+1} - \omega_k). \end{aligned} \tag{20}$$

Ez az egyenlőtlenség egyben azt jelenti, hogy ha az $\varepsilon_i = \alpha_i$ értékek mellett van a (17) alatti függvénynek feltételes minimuma, akkor az $x_k + \alpha_k < x_{k+1} + \alpha_{k+1}$ egyenlőtlenség nem teljesülhet, mert ha teljesülne, akkor a (20) szerint az összmunkaráfordítás csökkenthető volna.

*Következmény:* $\alpha_{i+1} \leqq \alpha_i$. Ugyanis $\alpha_{i+1} > 0$ esetén $\alpha_{i+1} \leqq x_i - x_{i+1} + \alpha_i \leqq \alpha_i$, ha pedig $\alpha_{i+1} = 0$, akkor a tétel feltétele folytán $\alpha_{i+1} \leqq \alpha_i$ teljesülése nyilvánvaló.

[6] Ez azt jelenti, hogy az $x_{k+1}$ értéket $\alpha_{k+1} - \omega_k$-val növeltük.

*II. Állítás: Ha a* (17) *alatti függvénynek az $x_i+\varepsilon_i=x_i+\alpha_i$ helyen van a feltételes minimuma ($i=1, 2, \dots n$), akkor*

$$x_i+\alpha_i \leqq x_{i+1}+\alpha_{i+1},$$

*továbbá $\alpha_{i+1}>0$ esetén*

$$x_i+\alpha_i=x_{i+1}+\alpha_{i+1}.$$

Tegyük fel, hogy valamely rögzített $k$ index esetén ($1 \leqq k \leqq n-1$)

$$x_k+\alpha_k > x_{k+1}+\alpha_{k+1}.$$

Vezessük be a

$$\gamma_k=x_k+\alpha_k-x_{k+1}-\alpha_{k+1}$$

jelölést. Az indirekt feltevés folytán $\gamma_k>0$. Az $x_k \leqq x_{k+1}$, valamint $\alpha_{k+1} \leqq \alpha_k$ ($k=1, 2, \dots n-1$) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\gamma_k \leqq \alpha_k,$$

ezért az $x_k+\alpha_k$ értéket $\frac{\gamma_k}{2}$-vel csökkenthetjük, ugyanakkor az $x_{k+1}+\alpha_{k+1}$ értéket

$$\mu_k=\frac{x_{k+1}+\alpha_{k+1}}{x_k+\alpha_k-\frac{\gamma_k}{2}}\frac{\gamma_k}{2}<\frac{\gamma_k}{2} \tag{21}$$

értékkel növelhetjük úgy, hogy az eredő megbízhatóság értéke változatlan marad, míg az összráfordítás értéke csökken. Ezen utóbbi állítás belátása ugyanúgy történhet, mint ahogyan azt korábban már tettük. Mivel ellentmondásra jutottunk, ezért fennáll az

$$x_k+\alpha_k \leqq x_{k+1}+\alpha_{k+1}$$

egyenlőtlenség. Ezt az eredményt összevetve az I. állítás eredményével kapjuk, hogy $\alpha_{i+1}>0$ esetén

$$x_i+\alpha_i=x_{i+1}+\alpha_{i+1}.$$

Rátérve a tétel bizonyítására, jelöljük $j+1$-gyel az $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \dots \geqq \alpha_n$ sorozat null tagjai közül a legkisebb indexűt, vagyis azt, melyre $\alpha_j>0$, de $\alpha_{j+1}=0$. (Ha $\alpha_n>0$, akkor $j=n$.) Ezen jelölés mellett az I. és II. állítások eredménye, valamint az I. állítás következménye alapján fennálló $0=\alpha_{j+1} \geqq \alpha_{j+2} \geqq \dots \geqq \alpha_n \geqq 0$ egyenlőtlenség folytán

$$(x_i+\alpha_i)^j x_{j+1} \dots x_n=y,$$

azaz

$$\alpha_i=\sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1}\cdots x_n}}-x_i \qquad (i=1, 2, \dots j).$$

Mivel $\alpha_j>0$, így

$$x_j<\sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1}\cdots x_n}}.$$

Tekintettel az $x_j+\alpha_j \leqq x_{j+1}$ egyenlőtlenségre kapjuk, hogy

$$\sqrt[j]{\frac{y}{x_{j+1}\cdots x_n}} \leqq x_{j+1},$$

azaz azt, hogy

$$x_j^j x_{j+1} \dots x_n < y \leqq x_{j+1}^{j+1} x_{j+2} \dots x_n .$$

A tételben szereplő $v_i$ jelölések mellett ezen egyenlőtlenség a

$$v_j < y \leqq v_{j+1}$$

alakban írható, így a tételt teljes egészében bizonyítottuk.

Megjegyzések: I. Ha $x_n^n \leqq y$, akkor a tételt lényegesen egyszerűbb meggondolásokkal is bizonyíthatjuk. Tudniillik mivel a $H(x)$ függvény a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban konvex, így a JENSEN-féle egyenlőtlenség folytán

$$nH\left(\frac{x_1+\varepsilon_1+\dots+x_n+\varepsilon_n}{n}\right) \leqq H(x_1+\varepsilon_1)+\dots+H(x_n+\varepsilon_n). \tag{22}$$

Figyelembe véve, hogy $H(x)$ monoton növekedő függvény, ezért az egyenlőtlenség baloldalának ott van feltételes minimuma, ahol az

$$\frac{x_1+\varepsilon_1+\dots+x_n+\varepsilon_n}{n} \tag{23}$$

összefüggésnek feltételes minimuma van. A LAGRANGE-féle multiplikátoros módszer alkalmazásával, vagy akár a mértani és számtani középre vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy (23)-nak a (11) feltétel mellett szélső értéke az

$$\varepsilon_i = \sqrt[n]{y} - x_i \tag{24}$$

választás mellett van. Minthogy $\bar{\varepsilon}_i + x_i = \sqrt[n]{y} =$ konstans, ezért ez egyben azt is jelenti, hogy a (22) alatti egyenlőtlenség baloldalán álló függvénynek ugyanott van feltételes szélső értéke, ahol a jobboldalon álló függvénynek. Tudniillik ebben az esetben az egyenlőtlenség egyenlőségbe megy át, azaz a jobboldalon álló függvény értéke is $nH(\sqrt[n]{y})$. Mivel a baloldal $nH(\sqrt[n]{y})$-nál kisebb értéket nem vehet fel, így a jobboldal sem lehet ennél kisebb, ugyanis az egyenlőtlenség minden szóbajöhető értékre fennáll.

II. A (7) alatti ráfordítás-függvény eleget tesz e tétel feltételeinek, így a vele való számolás csak akkor igényel külön vizsgálatot, ha $p$ értéke alrendszerenként változik.

III. A probléma matematikai szempontból egyszerűbbé válik, ha redundáns elemek beiktatásával kívánjuk a megbízhatóságot növelni. (Ez esetben a rendszer előállítási költségének feltételes minimumát célszerű meghatározni.)

IV. Kéziratunk lektorálása során KOVÁCS LÁSZLÓ hívta fel a figyelmünket arra, hogy a

$$-\ln(x_i+\varepsilon_i) = \vartheta_i$$

jelölés bevezetésével a vizsgált probléma általánosan úgy is megfogalmazható, hogy keresendő bizonyos $f_i$ függvényekre vonatkozóan

$$\min\left[f_1(\vartheta_1)+f_2(\vartheta_2)+\dots+f_n(\vartheta_n)\right] \tag{25}$$

az alábbi feltétel mellett:

$$(26) \qquad \vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n = w. \qquad (\vartheta_i \leqq -\ln x_i)$$

Ezen átfogalmazás segítségével pedig már megoldás nyerhető WILLIAM KARUSH — a konvex programozás körébe vágó — [3] dolgozatában közölt módszerének alkalmazásával.

Megjegyzendő azonban, hogy a KARUSH által közölt algoritmus alkalmazása feltételezi az $f_i$ függvények ismeretét. Természetesen a (25), (26) feladat az $f_i=f$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ esetben megoldható a jelen dolgozatban közölt módszerrel is, s ekkor, mint láttuk, nem feltétlenül szükséges ismerni az $f$ függvény konkrét alakját.

## IRODALOM

[1] DAVID K. LLOYD and MYRON LIPOW: *Reliability: Management, Methods, and Mathematics*, New Jersey, 1962.

[2] JORDAN KÁROLY: Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból, Akadémiai Kiadó, Budapest 1956.

[3] W. KARUSH: A General Algorithm for the Optimal Distribution of Effort, *Management Science* 9 (1962) 1.

(Beérkezett: 1965. május 17.)

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1965. X. 15. – Terjedelem: 11,50 (A/5) ív, 35 ábra, 17 melléklet

Szegedi Nyomda Vállalat 65-5850