

KORLÁTOZOTT HOZZÁRENDELÉSI PROBLÉMA ÉS MEZŐGAZDASÁGI ALKALMAZÁSA

Írta: KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA*
és NAGYKÁLNAI ENDRE**

A hozzárendelési probléma megoldása — melyen a jelen dolgozat alapszik — H. W. KUHN amerikai matematikus nevéhez fűződik, aki ezt az eredményt a [7] dolgozatában tette közzé. Felhasználta EGERVÁRY JENŐ [2] és KÖNIG DÉNES [5] dolgozatának eredményeit, ezért módszerét „magyar módszer”-nek nevezte. Később a módszert EGERVÁRY JENŐ tovább fejlesztette [3] dolgozatában és így alkalmassá vált szállítási feladatok megoldására is.

Jelen dolgozat témája egy olyan hozzárendelési probléma megoldása, amelyben nem minden permutációs összeg választható, hanem csak azok közül kell megtalálni a minimálisat, amelyek bizonyos korlátozó feltételeknek eleget tesznek. A feladat egy mezőgazdasági probléma vizsgálata során merült fel, amelynek rövid leírása az 1. pontban található. A matematikai megfogalmazást tartalmazza a 2. pont. Így egy 0—1 egészértékű programozási feladathoz jutunk, amely elvben megoldható a GOMORY-féle algoritmussal (lásd pl. [4]-et), azonban az egészértékű változók nagy száma miatt — $n \times n$ -es mátrix esetén n^2 — ez az út gyakorlatilag járhatatlan.

A feladatot átfogalmaztuk egy olyan hozzárendelési problémára, amelyben a permutációs összegek közül csak azok jönnek számításba, amelyeknek megfelelő permutációs összeg egy másik mátrixban egy adott korlát alatt marad.

Az így kapott feladat egy kielégítő megoldását kapjuk meg az 5. pontban leírt mátrix-keverési eljárással. A következő pontban a megoldás pontosságának becslése, valamint az eljárás végeességének bizonyítása található.

Végül a dolgozat utolsó három pontja a konkrét felhasználás előkészítését, valamint egy megoldott feladat mezőgazdasági elemzését tartalmazza.

1. Egy mezőgazdasági probléma

A mezőgazdasági üzemek többsége meghatározott termelési feladatokat lát el, így egy-egy termelési ciklusban a termelendő növények fajtái és vetésterülete rögzített.

Az üzemek vezetői többnyire tisztában vannak az egyes növényeknek a különböző táblákon (ez természetesen különböző földminőséget, szállítási távolságot, ráfordítás igényt stb. jelent) való termeléséhez szükséges erőforrásokkal, valamint az ezúton elérhető termelési értékkel és jövedelemmel.

* MTA Matematikai Kutató Intézet.

** FM Agrárgazdasági Kutató Intézet.

Egyes táblákon a növények többsége egyaránt kiváló eredménnyel termelhető, míg másokon ugyanezek a növények rendkívül silány eredményt adnak. Ez a tény a mezőgazdasági tudomány jelenlegi módszerei szerint gyakorlatilag lehetetlenné teszi a növénytermelés olyan területi elhelyezését, amely számol a különféle termelési kapacitások (kézi munkaerő, gépmunka, fogatmunka, műtrágya, szerves trágya stb.) korlátaival és a jövedelemoptimumot megközelíti.

A gyakorlat által felvetett esetek többségében elégséges egyetlen termelési kapacitással mint korlátozó tényezővel számolni, mivel a legkritikább eset, hogy két erőforrás is adott időszakban tényleges korlátozást jelentsen. Számításainkban mi a kézi munkaerőt tekintettük korlátozó tényezőnek.

A probléma egyszerűbb megfogalmazása érdekében a növénytermelés tábláit azonos méretűeknek (pl. 1 kataszteri holdasáknak) tételezhetjük fel, mivel az egy-séges méretet megfelelően kicsire választva minden, konkrét üzemben előforduló táblanagyság többszörözéssel előállítható. A konkrét számítások elvégzésénél ezt a felosztást már nem szükséges elvégeznünk (l. 7. pont).

2. A feladat megfogalmazása egészértékű programozásként

Számozzuk meg az egyes növényeket ($i = 1, 2, \dots, n$), ill. „táblákat” ($j = 1, 2, \dots, n$). Lehetséges, hogy némelyik növény több számot is kap. (Ezeket nagyobb területen vetjük, mint a számítási egységül választott táblaméret.) A föld egyenlő területű részekre van felosztva. A következő jelöléseket használjuk:

- a_{ij} az i -edik növénynek a j -edik táblán való termesztéséből származó tiszta jövedelem.
- b_{ij} az i -edik növénynek a j -edik táblán való termesztéséhez szükséges munkaerő. (Ezt esetleg csak munkacsúcsban végzett munkára számoljuk.)
- k a számítási időszakban rendelkezésre álló munkaerő a b_{ij} -kel azonos mértékegységben.
- x_{ij} változó: értéke 1, ha az i -edik növényt a j -edik táblán termesztjük és 0, ha másutt.

Az egyenleteket annak alapján írhatjuk fel, hogy mindegyik növényt egy és csak egy táblán termeljük:

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

továbbá minden táblán termelünk egyféle növényt, de csak egyet:

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

A következő feltételt a munkaerő-korlát szolgáltatja:

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} x_{ij} = k.$$

És végül a cél: a fenti feltételek mellett keresendő

$$(2.4) \quad \max \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij},$$

ahol

$$(2.5) \quad x_{ij} = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

A (2. 1)—(2. 5) feladat egy tiszta egészértékű 0—1 lineáris programozási feladat. Ennek hagyományos módszerekkel történő megoldása azonban (pl. GOMORY-féle algoritmus) a változók nagy számára való tekintettel már $n = 10$ esetén reménytelen. Ezért a dolgozat további részében megadunk egy, a hozzárendelési probléma megoldó algoritmusát felhasználó módszert, amely feladatunknak egy közelítő megoldását szolgáltatja. A megoldásnak az optimumtól való maximális eltérését is közöljük.

Először rövid áttekintést adunk a hozzárendelési probléma megoldásáról. Erről bővebb ismertetés található a [2], [3], [7], [I]—[V] művekben.

3. A hozzárendelési probléma és megoldása

A (2. 3) feltétel elhagyásával nyert (2. 1), (2. 2), (2. 4), (2. 5) feladatot hozzárendelési problémának nevezzük és az áttekinthetőség kedvéért egy átfogalmazását is megadjuk. Adott egy

$$(3.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix. Ezen mátrix egy permutációs összegének az

$$(3.2) \quad a_{1p_1} + a_{2p_2} + \dots + a_{np_n}$$

összeget nevezzük, ahol a $p_1, p_2, \dots, p_n$ számok az $1, 2, \dots, n$ számoknak egy tetszőleges permutációját jelentik. Más szóval egy permutációs összeget úgy kapunk, hogy kiválasztunk az A mátrixból n elemet úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan egyet választunk, és ezeket összeadjuk. Jelöljük a $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ vektort $\mathbf{p}$ -vel, és az $1, 2, \dots, n$ összes permutációinak halmazát P_n -nel. Azt a tényt, hogy $\mathbf{p}$ az $1, 2, \dots, n$ elemek egy permutációja, úgy fejezhetjük ki, hogy $\mathbf{p} \in P_n$. Jelölje továbbá az A mátrix egy permutációs összegét

$$(3.3) \quad A(\mathbf{p}) = a_{1p_1} + a_{2p_2} + \dots + a_{np_n}.$$

A hozzárendelési probléma az, hogy keresendő egy adott mátrix minimális permutációs összege. (Ha a maximális permutációs összeget keressük, akkor elegendő a $-A$ mátrix minimális permutációs összegét megtalálni.)

1. MEGJEGYZÉS. Könnyen belátható, hogy ha az A mátrix bármelyik sorának vagy oszlopának minden eleméhez ugyanazt a (pozitív vagy negatív) számot adjuk, akkor a permutációs összegek nagyság szerinti sorrendje nem változik, így a minimális permutációs összegnek megfelelő elemek összege az új mátrixban továbbra is minimális marad, mivel minden permutációs összeg ugyanannyival nőtt vagy csökkent.

2. MEGJEGYZÉS. Ugyancsak könnyű belátni, hogy egy mátrixot egy tetszőleges pozitív számmal beszorozva a permutációs összegek nagyság szerinti sorrendje változatlan marad.

A hozzárendelési probléma megoldására szolgáló „magyar módszer” rövid leírása

A fenti első megjegyzés alapján feltehetjük, hogy az A mátrix elemei nem-negatívak. Ellenkező esetben egy elég nagy számot hozzáadva minden elemhez, ilyen mátrixot kapunk. A továbbiakban minden lépésnél ügyelni fogunk arra, hogy az A mátrix ezen tulajdonsága megmaradjon. Először is a mátrix minden sorából, majd az így kapott mátrix minden oszlopából levonjuk az ottani legkisebb elemet. Így minden sorban és minden oszlopban szerepel legalább egy zérus. Ha ki tudunk választani n darab független nullát (azaz n darab olyan nullát, amelyből bármely kettő nincs egy oszlopban és nincs egy sorban), akkor ezek összege minimális permutációs összeg lesz, mert a mátrix elemei nemnegatívak. A fenti 1. MEGJEGYZÉS értelmében ezzel az eredeti mátrixban is megkaptuk a minimális permutációs összeget.

Ha zérus permutációs összeg még nincsen, akkor a KÖNIG—EGERVÁRY tétel (l.: [2], [5]) segítségével folytathatjuk az eljárást. Ez a tétel azt mondja ki, hogy bármely mátrixban az összes zérusokat lefedő vonalak minimális száma megegyezik a független nullák maximális számával. (Vonalon sort vagy oszlopot értünk.)¹

Így, ha még csak $r < n$ független nulla van a mátrixban, akkor r vonallal (sorral és oszloppal) lefedhetjük azokat. Kiválasztjuk a le nem fedett elemek közül a legkisebbet. (Ez természetesen nagyobb, mint zérus, hiszen az összes zérust lefedtük.) Ezután a mátrix minden eleméből levonjuk ezt a számot, majd, hogy a negatív elemeket eltüntessük, minden lefedő vonal mentén minden elemhez hozzáadjuk ezt a számot. Így végeredményben a le nem fedett elemekből kivontuk, a kétszer lefedettekhez egyszer hozzáadtuk a fenti számot, az egyszer lefedetteket pedig változatlanul hagytuk. Ismét megnézzük, hogy van-e már n független zérus. Ha van, megkaptuk a megoldást, mert a 2. MEGJEGYZÉS értelmében „megengedett” változtatásokat végeztünk. Ha nincs, megismételjük az utolsó lépést. Belátható, hogy amennyiben az A mátrix elemei tetszőleges racionális számok, akkor a lefedési algoritmus véges sokszor való alkalmazásával megkapjuk a minimális permutációs összeget, azaz véges sok lépés után egy olyan mátrixhoz jutunk, melyben már található n számú független zérus. A feladat optimális megoldását kapjuk, ha a független zéróknak megfelelő változókat 1-nek, a többi 0-nak választjuk.

¹ A maximális számú független zérus, ill. a minimális számú lefedővonal megtalálására egy egyszerű, elektronikus számítógépre is alkalmazható algoritmust ad a [III] dolgozat.

PÉLDA.

Keressük meg a következő mátrixban a minimális permutációs összeget szolgáltató elemeket:

6	12	5	9	-5	1	7	0	4
7	14	10	14	-7	0	7	3	7
12	9	11	4	-4	8	5	7	0
8	10	2	7	-2	6	8	0	5

-5

		+1				+1	+1	
-1	1	2	0	4		-1	0	1
-1	0	2	2	7	+1	-1	0	2
-1	8	0	7	0	+1	-1	0	0
-1	6	3	0	5		-1	5	2

Így a megoldás: $x_{12}=x_{21}=x_{34}=x_{43}=1$, a többi zérus. A megoldáshoz tartozó célfüggvény érték (a minimalizálandó függvény értéke az optimumnál):

$$a_{12} + a_{22} + a_{34} + a_{43} = 12 + 7 + 4 + 2 = 25.$$

3. MEGJEGYZÉS. Az elmondottakból az is kiderül, hogy az utolsó mátrixból valamennyi optimális megoldást megkaphatjuk, ha minden lehetséges módon kiválasztunk n számú független zérust. (A példában nincs alternatív optimum.)

4. A korlátozott hozzárendelési probléma és közelítő megoldása

A (2. 1)–(2. 5) feladatot átfogalmazhatjuk a következőképpen:

Adott két mátrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Keresendő az A mátrixban egy maximális permutációs összeg azok közül a permutációk közül, amelyeknél a megfelelő elemek összege a B mátrixban egy adott k korlát alatt marad, azaz keresendő

$$(4. 1) \quad \max_{(p_1 \dots p_n)} (a_{1p_1} + a_{2p_2} + \dots + a_{np_n}),$$

ahol a $p_1, p_2, \dots, p_n$ az $1, 2, \dots, n$ számoknak egy olyan permutációja, amelyre

$$(4. 2) \quad b_{1p_1} + b_{2p_2} + \dots + b_{np_n} \leq k.$$

A feladatot átfogalmazzuk minimalizálási feladatra a

$$(4. 3) \quad C = (c_{ij}) = (-a_{ij} + r_i)$$

mátrix bevezetésével, ahol r_i olyan pozitív számot jelent, melyre $-a_{ij} + r_i \geq 0$ minden j -re. Hasonlóan a $b_{ij} \geq 0$ egyenlőtlenségeket is feltehetjük, ellenkező esetben ugyanis a B mátrix elemeihez hozzáadhatunk egy elég nagy M pozitív számot. (Ekkor természetesen a k korlátot is meg kell növelni nM -mel, hiszen minden permutációs összeg ennyivel növekszik.)

(3. 3) szerint $C(\mathbf{p})$, ill. $B(\mathbf{p})$ ($\mathbf{p} \in P_n$) jelöli a C , ill. a B mátrix egy-egy — ugyanazon permutációkból álló, azaz egymásnak megfelelő — permutációs összegét. Ekkor a feladat így fogalmazható:

Keresendő a

$$(4. 4) \quad \min_{\substack{B(\mathbf{p}) \leq k \\ \mathbf{p} \in P_n}} C(\mathbf{p}).$$

5. A mátrixok keverése és egy közelítő megoldás megadása

A továbbiakban vizsgálni fogjuk a

$$(5. 1) \quad C + \lambda B \quad (0 \leq \lambda \leq \infty, \lambda \text{ racionális})$$

alakú mátrixokat, ahol a $\lambda = \infty$ esetben az (5. 1) kifejezés a B mátrixot jelenti. A 2. MEGJEGYZÉS értelmében ugyanis a $C + \lambda_n B$ ($\lambda_n \rightarrow \infty$) mátrix minimális összegű permutációja megegyezik a $\frac{1}{\lambda_n} C + B$ minimális összegű permutációjával. Ez utóbbi azonban $\lambda_n \rightarrow \infty$ esetén tart a B mátrixhoz.

A (4. 1)—(4. 2), ill. az átfogalmazott (4. 4) feladat egy közelítő megoldásához jutunk az alábbi eljárás segítségével. Az (5. 1) mátrix minimális permutációs összegét keressük meg különböző λ -k esetén. Jelöljük (C_i, B_i) -vel a λ_i esetén kapott minimális permutációs összeget, azaz:

$$(5. 2a) \quad C_i + \lambda_i B_i = \min_{\mathbf{p} \in P_n} C(\mathbf{p}) + \lambda_i B(\mathbf{p}).$$

A λ_i sorozatot a következőképpen definiáljuk:

Az (5. 2a) egyenlőség annak kifejezésére szolgál, hogy a jobboldali kifejezés a minimumát $\mathbf{p} = \mathbf{p}^i$ -re éri el és a

$$(5. 2b) \quad C(\mathbf{p}^i) = C_i \quad B(\mathbf{p}^i) = B_i$$

rövid jelölést alkalmazzuk.

$\lambda_1 = 0$. Azaz megkeressük a C mátrix minimális permutációs összegét, ill. összegeit, megoldva a hozzárendelési problémát a C mátrixszal. Amennyiben több alternatív optimális megoldás van, akkor ezek közül meghatározzuk azt, amelyhez tartozó permutációs összeg a B mátrixban minimális a következő módon:

A 3. pontban található 3. MEGJEGYZÉS szerint a megoldás során kapott utolsó mátrix tartalmazza az összes optimális megoldást, minden lehetséges módon kiválasztva n számú független zérust (és csak ezek az optimális megoldások). Írjuk be tehát az említett végső mátrixba a zérusok helyére a B mátrix megfelelő elemeit (az ugyanazon pozícióban levőket), minden más helyre pedig ∞ -t. (Gépi számítás esetén egy elegendően nagy számot, pl. a B mátrix elemei összegének kétszeresét.) Az így kapott mátrixra ismét oldjuk meg a hozzárendelési problémát és az eredményül kapott permutációhoz tartozó összegeket jelöljük (C_1, B_1) -gyel. Ha $B_1 \leq k$, meg-

kaptuk a (4. 1)—(4. 2) feladat optimális megoldását, ha $B_1 > k$, akkor $\lambda_2 = \infty$, azaz megkeressük a B mátrix minimális permutációs összegét. Ha $B_2 > k$, akkor a feladatnak egyáltalán nincs megoldása. Ha $B_2 = k$, akkor csak azok a permutációs összegek elégitik ki a feladat korlátozását (a (4. 2) feltételt), amelyekhez tartozó B mátrixbeli permutációs összeg minimális, azaz k . Ezek közül kell kiválasztanunk (ha egyáltalán több ilyen van) azt, amelyre nézve a C mátrixbeli permutációs összeg a legkisebb. Ezt a $\lambda_1 = 0$ esetben leírtakhoz hasonlóan végezzük. A megoldás során kapott legutolsó mátrixban a zérusok helyébe az A mátrix megfelelő elemeit, minden más helyre egy elegendően nagy számot (mint fent) teszünk. Az így kapott mátrixszal megoldjuk a hozzárendelési feladatot, melynek eredménye a (4. 1)—(4. 2) feladat optimális megoldását adja, a megfelelő permutációs összegeket (C_2, B_2) -vel jelöljük. $B_2 < k$ esetén hasonló módon határozzuk meg a minimális C_2 permutációs összeget (B -re nézve alternatív optimumok létezése esetén) azok közül, melyek a B mátrixra nézve minimális permutációnak felelnek meg. Az így kapott permutációs összeg-párt ebben az esetben is (C_2, B_2) -vel jelöljük.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(5.3) \quad (C_2^I, B_2^I) = (C_1, B_1)$$

$$(C_2^{II}, B_2^{II}) = (C_2, B_2).$$

Legyen továbbá

$$(5.4) \quad \lambda_i = \frac{C_{i-1}^{II} - C_{i-1}^I}{B_{i-1}^I - B_{i-1}^{II}} \quad (i = 3, 4, \dots),$$

és

$$(5.5) \quad (C_i^I, B_i^I) = \begin{cases} (C_i, B_i), & \text{ha } B_i > k \\ (C_{i-1}^I, B_{i-1}^I), & \text{ha } B_i < k \end{cases}$$

$$(C_i^{II}, B_i^{II}) = \begin{cases} (C_{i-1}^{II}, B_{i-1}^{II}), & \text{ha } B_i > k \\ (C_i, B_i), & \text{ha } B_i < k \end{cases}$$

ahol (C_i, B_i) -t az (5. 2) kifejezés szolgáltatja a λ_i ismeretében. Ha $B_i = k$, akkor a 2. Tétel *b)* pontja értelmében (C_i, B_i) az optimális megoldást szolgáltatja. Mivel λ_3 kiszámítható (5. 3) segítségével, (5. 4) és (5. 5) rekurzíven definiál egy $\lambda_i(C_i^I, B_i^I), (C_i^{II}, B_i^{II})$ sorozatot. Ezt a sorozatot addig számítjuk, amíg a

$$(5.6) \quad C_i^I + \lambda_{i+1} B_i^I = C_i^{II} + \lambda_{i+1} B_i^{II} = C_{i+1} + \lambda_{i+1} B_{i+1}$$

egyenlőség nem teljesül. (Az első egyenlőség természetesen λ_{i+1} definíciója miatt mindig fennáll.) Ekkor a (C_i^{II}, B_i^{II}) permutációs összegpárokat, ill. a megfelelő permutációt az optimális megoldás közelítésének fogadjuk el. A gyakorlati számítások során tapasztaltuk, hogy ez az optimálishoz igen közel van, azonban a következő pontban egy számszerű becslést is adunk arra, hogy a legrosszabb esetben mennyi lehet az optimumtól való eltérés. A következő pontban ezen kívül az algoritmus végességével is foglalkozunk.

1. MEGJEGYZÉS. Amennyiben ismerünk egy λ'_1 és λ'_2 -t úgy, hogy a hozzátartozó (C'_1, B'_1) és (C'_2, B'_2) permutációs összegpárookra $B'_1 > k$ és $B'_2 < k$, akkor az algoritmust kezdetjük a $(C'_2, B'_2) = (C'_1, B'_1)$, valamint a $(C_2^{II}, B_2^{II}) = (C'_2, B'_2)$ mennyiségekkel. Ekkor az alternatív optimumok problémája sem merül fel!

2. MEGJEGYZÉS. Amennyiben a megoldás pontossága nem kielégítő (a tárgyalt gyakorlati problémában 2—3%-os hiba elhanyagolható a becslések pontatlansága miatt), akkor a feladat megoldható valamilyen kombinatorikus típusú módszerrel is (lásd pl. E. BALAS [VI] és KOVÁCS L. B. [VII] munkáját). A módszer elektronikus számítógép igénye (kapacitás, idő) elég nagy. Jelen dolgozatban szereplő módszer használatával nyert eredmény hasznosítható a kombinatorikus algoritmus gyorsítására.

6. A közelítő megoldás pontosságának becslése és az eljárás végessége

Az optimális megoldást jelöljük (C^*, B^*) -gal. Ezt a

$$(6.1) \quad C^* = \min_{\substack{B(p) \leq k \\ p \in P_n}} C(p)$$

egyenlőség definiálja. Az alábbiakban megbecsüljük a $(C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$ megoldás hibáját, amelyre (5.6) teljesül, és amelyet az optimális megoldás közelítéseként fogadunk el.

1. TÉTEL

a) $A(C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$ megoldás hibája

$$(6.2) \quad C_i^{\text{II}} - C^* \leq \lambda_{i+1}(k - B_i^{\text{II}});$$

b) Amennyiben az eljárás során bármely λ_i -re (a λ_2 kivételével) $B_i = k$ adódik, akkor a hozzátartozó C_i a pontos optimum értékét szolgáltatja.

Bizonyítás: Az (5.6) egyenlőség annak figyelembevételével, hogy a minimális permutációs összeg a $C + \lambda_{i+1}B$ mátrixban $C_{i+1} + \lambda_{i+1}B_{i+1}$ a következőképpen írható:

$$(6.3) \quad C_i^{\text{I}} + \lambda_{i+1}B_i^{\text{I}} = C_i^{\text{II}} + \lambda_{i+1}B_i^{\text{II}} = C_{i+1} + \lambda_{i+1}B_{i+1} \leq C^* + \lambda_{i+1}B^*$$

Innen azonnal következik $B^* = k$ miatt, hogy

$$(6.4) \quad C_i^{\text{II}} - C^* \leq \lambda_{i+1}(k - B_i^{\text{II}})$$

így a tétel a) részét beláttuk.

Hasnolón beláthatjuk, hogyha valamely $\lambda_i \neq \infty$ esetén $B_i = k$, akkor az így adódó permutációs összeg a korlátozott hozzárendelési probléma optimális megoldását szolgáltatja. Legyen ugyanis (C_0, B_0) egy tetszőleges összetartozó permutációs-összeg pár, melyre $B_0 \leq k$. Ekkor, minthogy

$$\min_{p \in P_n} \{C(p) + \lambda_i B(p)\} = C_i + \lambda_i B_i,$$

fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(6.5) \quad C_i + \lambda_i k = C_i + \lambda_i B_i \leq C_0 + \lambda_i B_0.$$

Innen azonban a $B_0 \leq k$ feltevésből következik, hogy $C_0 \leq C_i$, amivel a tétel b) részét is beláttuk. Az eljárás végességét igazoljuk az alábbiakban:

2. TÉTEL. Az 5. pontban leírt eljárás véges sok lépés után vagy az (5. 6) eset előfordulásához, vagy a $B_i = k$ egyenlőség teljesüléséhez vezet.

Bizonyítás: Belátjuk, hogy amennyiben a $B_i = k$ eset nem fordul elő, akkor véges sok lépés után az (5. 6) egyenlőséget kielégítő permutációs összeghez jutunk. Ehhez elegendő belátni, hogy a fenti esetben, ha (C_{i+1}, B_{i+1}) -gyel még nem ért véget az eljárás, azaz

$$(6.6) \quad C_i^I + \lambda_{i+1} B_i^I = C_i^{\text{II}} + \lambda_{i+1} B_i^{\text{II}} > C_{i+1} + \lambda_{i+1} B_{i+1},$$

akkor a továbbiakban a (C_j, B_j) ($j=1, 2, \dots, i$, de $(C_j, B_j) \neq (C_i^I, B_i^I), (C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$) permutációs összeg párok egyike sem fog fellépni ismét. Ez ugyanis azt jelenti, hogy az (5. 6) egyenlőség teljesülése előtt nem fordulhat elő a permutációs összeg párok egyikének ismétlődése sem, és mivel ezek száma véges, továbbá a (6. 6) egyenlőtlenség miatt a (C_i^I, B_i^I) és $(C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$ párok közül az egyik is bekerül a nem ismétlődők közé az eljárás végessége is igazolva van. Most bebizonyítjuk az átfogalmazott állítást. Jelöljük λ_i^I -gyel, illetve λ_i^{II} -vel azokat a λ -kat, amelyekkel a (C_i^I, B_i^I) , illetve $(C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$ permutációs összeg párokat kaptuk, ekkor természetesen

$$C_i^I + \lambda_i^I B_i^I < C_i^{\text{II}} + \lambda_i^{\text{II}} B_i^{\text{II}}$$

$$(6.7) \quad C_i^I + \lambda_i^{\text{II}} B_i^I > C_i^{\text{II}} + \lambda_i^{\text{II}} B_i^{\text{II}}.$$

Összevetve a (6. 6) és a (6. 7) kifejezéseket, mivel $B_i^I > k > B_i^{\text{II}}$, könnyen kiszámítható, hogy

$$(6.8) \quad \lambda_i^I < \lambda_{i+1} < \lambda_i^{\text{II}}.$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$(6.9) \quad \lambda_2^I \leq \lambda_3^I \leq \dots \leq \lambda_i^I \leq \dots \leq \lambda_i^{\text{II}} \leq \dots \leq \lambda_3^{\text{II}} \leq \lambda_2^{\text{II}},$$

a hol az egyenlőséget azért kell megengedni, mert az egymás után következő (C_i^I, B_i^I) , illetve $(C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$ párok közül bizonyosak megegyeznek. Vizsgáljunk most egy tetszőleges (C_j, B_j) permutációt ($j=1, 2, \dots, i$, $(C_j, B_j) \neq (C_i^I, B_i^I), (C_i^{\text{II}}, B_i^{\text{II}})$). Tegyük fel, hogy $B_j > k$, azaz $(C_j, B_j) = (C_f^I, B_f^I)$, ahol $(f < i)$. Ekkor az $\lambda_f^I < \lambda_i^I$, valamint a

$$(6.10) \quad C_i^I + \lambda_i^I B_i^I < C_f^I + \lambda_i^I B_f^I$$

$$(6.11) \quad C_i^I + \lambda_f^I B_i^I > C_f^I + \lambda_f^I B_f^I$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$(6.12) \quad B_i^I < B_f^I.$$

Legyen λ_r egy tetszőleges későbbi λ ($r \geq i+1$). Ekkor $\lambda_r \geq \lambda_i^I$ miatt

$$(6.13) \quad (\lambda_r - \lambda_i^I) B_i^I \leq (\lambda_r - \lambda_i^I) B_f^I.$$

Ha a (6. 10) és (6. 13) egyenlőtlenségeket összeadjuk, a

$$(6.14) \quad C_i^I + \lambda_r B_i^I < C_f^I + \lambda_r B_f^I$$

egyenlőtlenség adódik, ami mutatja, hogy (C_f^I, B_f^I) nem lehet semmilyen λ_r -re ($r \geq i+1$) minimális permutációs összeg. A $B_j < k$ eset vizsgálata teljesen hasonlóan történik, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

MEGJEGYZÉS. Természetesen nem kell az összes permutációt megvizsgálni a most leírt eljárással. Már a 2. TÉTEL bizonyításában is csak olyan (C_i, B_i) permutációs összegekhez tartozó permutációk szerepeltek, amelyekhez nincs olyan $p \in P_n$ permutáció, melyre

$$(C(p), B(p)) \neq (C_i, B_i) \quad \text{és} \quad C(p) \leq C_i, B(p) \leq B_i.$$

Az ilyen tulajdonságú permutációknak is csak kis hányadát vizsgáljuk, mert minden lépésnél a még számbajöhető permutációknak mintegy felét elhagyjuk.

7. Korlátozott szállítási probléma

Ismeretes, hogy a 3. pontban leírt megoldás a szállítási problémára is alkalmazható. Ennek lényege, hogy minden telephelyet annyi példányban írunk fel, amennyi az odaszállítandó vagy onnan elszállítandó mennyiség. Így egy igen nagyméretű hozzárendelési problémát kapunk. Ezt a felbontást azonban csak elvben végezzük el. Belátható ugyanis, hogy a független nullák lefedésekor amennyiben valamelyik telephelynek megfelelő sort (vagy oszlopot) lefedjük, akkor le kell fedni a többi is. Így tehát nem kell a fenti felbontást elvégezni, hanem csak a lefedő vonalat annyi-szorosan számolni, amennyi az illető telephelyre, vagy onnan elszállítandó mennyiség. (Lásd [3].)

A most elmondottak lehetővé teszik, hogy különböző vetésterületek is szerepeljenek az 1. és 2. pontban leírt modellekben és azt ne kelljen azonos egységekre bontani.

8. Blokk-diagram és az algoritmus leírása

A feladat a következő: Adott két nemnegatív racionális elemekből álló $n \times n$ mátrix: C és B . Keresendő a

$$(8.1) \quad \min_{\substack{B(p) \leq k \\ p \in P_n}} C(p),$$

ahol P_n az 1, 2, ..., n számok permutációinak halmaza és

$$C(p) = c_{1p_1} + c_{2p_2} + \dots + c_{np_n}.$$

*Algoritmus a feladat megoldására.**

- 1a) Határozzuk meg a C mátrixban a minimális permutációs összeget a „magyar módszer”-rel, ezt jelöljük C_1 -gyel.
- b) Határozzuk meg az 1a) pontban nyert alternatív optimumok közül azt, amelyre a megfelelő permutációs összeg minimális a B mátrixban. Az 1a) pontban kapott végső mátrixban a zérók helyére az azonos pozícióban levő B mátrixbeli elemet tegyük, a többire pedig egy nagy számot. (Pl. a B mátrix elemei összegének kétszeresét.) Az így nyert permutációs összeget jelöljük B_1 -gyel.

* Az algoritmus a blokk-diagramon is követhető. Természetesen az algoritmusban a „magyar-módszer” helyett tetszőleges más módon is megoldhatjuk a hozzárendelési feladatot.

- c) Ha $B_1 \leq k$, akkor (C_1, B_1) optimális permutációs-összeg pár, és az 1a)—b)-ben kapott p^1 permutáció, melyre

$$(8.2) \quad (C_1, B_1) = (C(p^1), B(p^1))$$

az optimális permutáció, azaz a feladat optimális megoldása:

$$(8.3) \quad x_{1p_1^1} = x_{2p_2^1} = \dots = x_{np_n^1} = 1, \quad x_{ij} = 0 \quad (j \neq p_i^1).$$

Ha $B_1 > k$, folytatjuk az algoritmust.

- 2a) Határozzuk meg a B mátrixban a minimális permutációs összeget a „magyar módszer”-rel (B_2).

- b) Ha $B_2 > k$ a (8. 1) feladatnak nincs megoldása. Ellenkező esetben:
c) Határozzuk meg a 2a) pontban nyert alternatív minimumok közül azt, amelyre a megfelelő C permutációs összeg is minimális. (Mint 1b) pontban.)
d) Ha $B_2 = k$, akkor (C_2, B_2) optimális permutációs-összeg pár, a megfelelő optimális megoldást (8. 2)—(8. 3) mintájára nyerhetjük. Ha $B_2 < k$:

3. Legyen

$$i = 3 \\ (C_2^I, B_2^I) = (C_1, B_1) \\ (C_2^{II}, B_2^{II}) = (C_2, B_2).$$

4. Legyen

$$\lambda_i = \frac{C_{i-1}^{II} - C_{i-1}^I}{B_{i-1}^I - B_{i-1}^{II}}.$$

- 5a) Számítsuk ki a $C + \lambda_i B$ mátrix egy minimális permutációs összegét, amely például a p^i permutációhoz tartozik:

$$\min_{p \in P_n} \{C(p) + \lambda_i B(p)\} = C(p^i) + \lambda_i B(p^i).$$

Ekkor legyen

$$C_i = C(p^i) \text{ és } B_i = B(p^i).$$

- b) Ha $B_i = k$, akkor (C_i, B_i) optimális permutációs összeg pár. A megfelelő megoldást nyerhetjük, mint (8. 2)—(8. 3)-ban. Egyébként:
c) Ha $C_{i-1}^{II} + \lambda_i B_{i-1}^{II} = C_i + \lambda_i B_i$, akkor $(C_{i-1}^{II}, B_{i-1}^{II})$ a feladatunk közelítő permutációs összeg párja, a megfelelő megoldás nyerhető, mint (8. 2)—(8. 3)-ban. Ha C^* a feltételezett optimális megoldáshoz tartozó permutációs összeg, akkor a jelen megoldás maximális hibája:

$$C_{i-1}^{II} - C^* \leq \lambda_i (k - B_{i-1}^{II}).$$

Ha a fenti egyenlőség nem teljesül, folytatjuk az algoritmust:

- d) Ha $B_i < k$ a 6a) pontban, ha $B_i > k$ a 6b) pontban folytatjuk az algoritmust.

- 6a) Legyen

$$(C_i^I, B_i^I) = (C_{i-1}^I, B_{i-1}^I) \\ (C_i^{II}, B_i^{II}) = (C_i, B_i).$$

Folytatás a 7. pontban.

b) Legyen

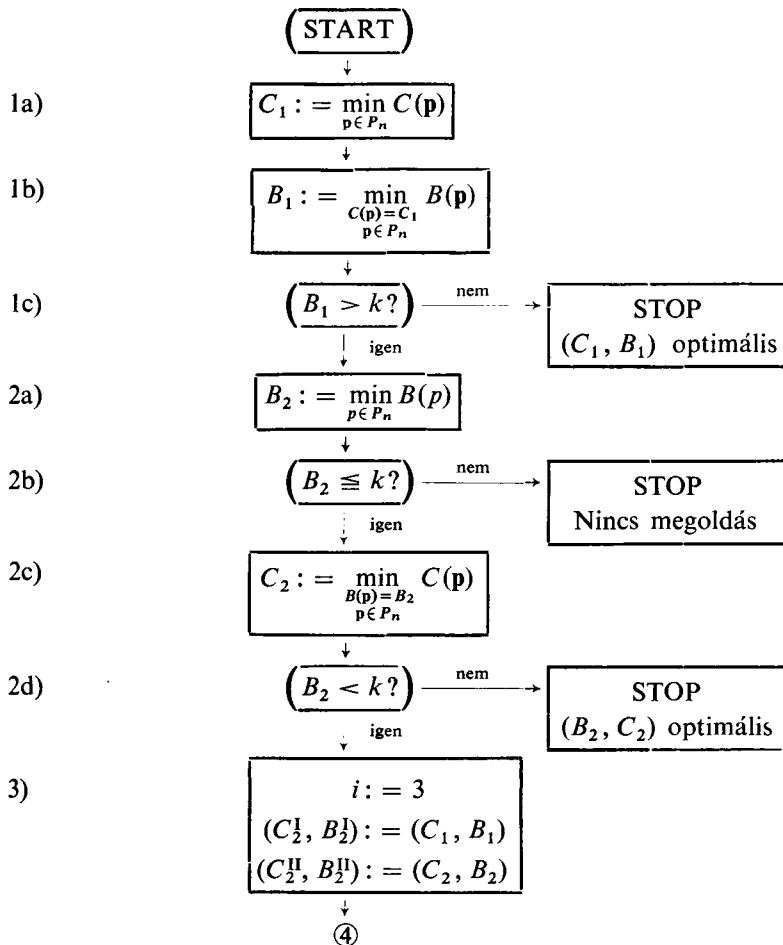
$$(C_i^I, B_i^I) = (C_i, B_i)$$

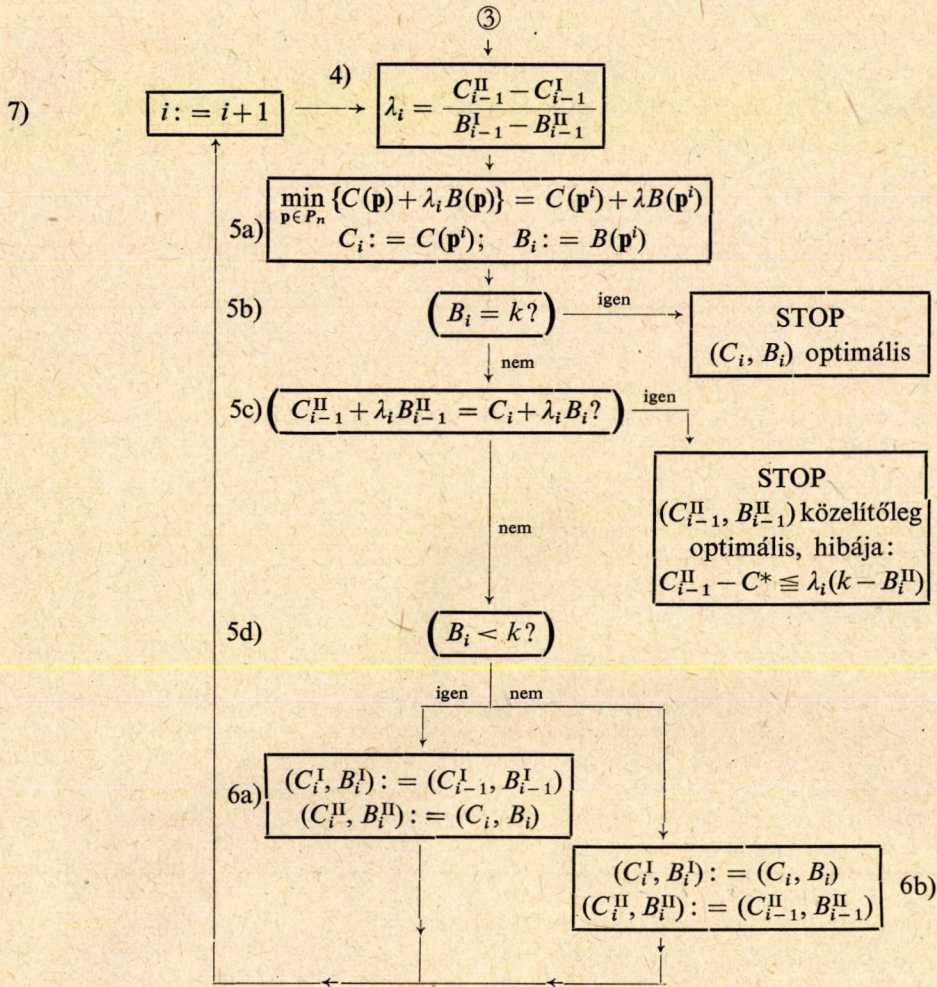
$$(C_i^{II}, B_i^{II}) = (C_{i-1}^{II}, B_{i-1}^{II}).$$

Folytatás a 7. pontban.

7. Tegyük i helyébe $(i+1)$ -et, és folytassuk az algoritmust a 4. pontban. Mint már korábban bizonyítottuk, az algoritmus véges sok lépés után véget ér: vagy nincs megoldás, vagy egy optimális megoldáshoz jutottunk, vagy egy közelítő megoldáshoz, ismert hibabecsléssel.

A (8.1) feladat megoldásának blokk-diagramja





9. A konkrét alkalmazás előkészítése

A 2—7. pontban tárgyalt matrixalgebrai rendszer jó közelítését nyújtja az 1. pontban felvetett mezőgazdasági probléma megoldásának. Az alábbiakban szeretnénk néhány mezőgazdasági érdekességre rávilágítani egy hipotetikus üzem szántóföldi növénytermelésé elhelyezési problémájának megoldása során. Alapfeltételünk a szántóföldi növénytermesztés üzemén belüli önelszámoló helyzete.

Már a fentiekben részletesen tárgyalt módszer első lépéseként olyan mélységet kell feltárni az üzem megismerése során, amely egymagában is sok érdekes és hasznos tanácsot szolgáltat az üzem vezetői számára. Történetesen a gazdaság táblabeosztásán és az egyes táblák termesztési adottságain [10] kívül feltétlenül szükségessé

válík a különféle növényeknek a különféle táblákon való termesztésével elérhető hozam, ráfordítás és jövedelem ismerete. Üzemeink gyakorlatában ezek az adatok csak hézagosan lelhetők fel, hiszen képtelenség, hogy egyetlen tábláról ugyanazon feltételek mellett minden termesztésbe vont növényre vonatkozólag rendelkezésre álljanak a hozam-ráfordítás adatok. Az irodalom tanulmányozása alapján a hozam-becsülésnek a gyakorlat igényeit lényegében kielégítő módszerei ismeretesek [10], [11], [12], [9], ugyanakkor azonban a termeléshez szükséges ráfordítások becslése még korántsem eléggé differenciált, bár már itt is vannak eredményes próbálkozások [9], [13]. Mindezek arra készítettek bennünket, hogy részletesebben csak a ráfordítások becslésével foglalkozunk.

Első lépésként az adott tábla termesztési adottságai alapján meghatározzuk a vizsgált növényeknél a konvencionálistól eltérő agrotechnikai műveleteket, és azok gép, fogat és kézimunka igényét, amelyeket előfordulási valószínűségükkel korrigálva az átlagosan szükséges tételekhez [13] hozzáadunk. Ezekután a talajok kötöttségének [10] megfelelően a kötöttségtől függően több vagy kevesebb ráfordítást igénylő tételeket helyesbítjük, egyúttal elvégezve a kisebb vagy nagyobb szállítási távolság következtében módosuló ráfordítások átszámítását is.

A természetes egységekben elvégzett számítások után a normálhold, kézimunkanap és lófogatnap igényt a gazdaságban kialakult önköltségekkel szorozva, majd a szorzatok összegéhez az egyéb, talajtól független ráfordítások (növényvédőszer, vetőmag, műtrágya, szervestrágya stb.) [8] értékét hozzáadva megkapjuk a ráfordítások során felmerülő költségeket, illetve azok közvetlen részét. A közvetett költségeket az üzemben kialakult részarányban történő beszámítás útján kaphatjuk meg.

Az eddigiekben elvégzett számításokat minden elhelyezést igénylő növényre, minden tábla viszonylatában elkészítjük. Leghelyesebb, ha számításaink során, mind az áttekinthetőség, mindpedig a későbbi számítások gyors elvégzése érdekében ezeket a kalkulációkat mátrixszerűen (táblázatosan) végezzük. Az eredményül kapott, 1 kataszteri holdra vonatkozó számítási anyagot mint a ráfordítások kiinduló táblázatát a következő években is felhasználhatjuk, hiszen ezeknek a tételeknek megváltoztatása csak a termelés és ráfordítás színvonalának lényeges módosítása esetén szükséges.

A táblánként és növényenként elérhető hozam még azonos ráfordítások esetén is a nem ráfordítás jellegű tényezők (pl: elővetemény) hatására évenként eltérően alakulhat. Ezért a számítás további részét, amely a hozamok kalkulációját és az elérhető jövedelem táblánkénti és növényenkénti kiszámítását célozza, évente újra kell végeznünk.

Miután az elhelyezéshez szükséges összes kiinduló adat rendelkezésre áll, a tényleges táblaméretek legnagyobb közös osztójának nagyságrendjére transzformáljuk azokat, és ilyen nagyságú egységekből álló csoportokat alakítunk ki az egyes termelendő növényekből is. (Mint a 7. pontban láttuk, ezt az egyszerű egységesítési műveletet elkerülhetjük, ha vállaljuk a valamivel bonyolultabb számítási eljárás végrehajtását). A növények összterületének természetszerűleg meg kell egyeznie a táblák összterületével. Amennyiben a növények között választhatunk (egyeseket esetleg nem szükséges termesztetni), akkor ún. fiktív táblákkal egészítjük ki a feladatot, amelyeken a ráfordítás és a jövedelem egyaránt zérus. Ekkor a kötelezően előírt növényeknek a fiktív táblán való termesztését kizárjuk igen nagy ráfordítások beírásával.

A vetésterület és szerkezet kialakításához más matematikai (pl.: lineáris programozás stb.) módszereket alkalmazhatunk, vagy egyéb spekulatív úton juthatunk (szerződhetőség, hiteltétel, hagyomány stb.).

Adott termelési szerkezet mellett konkrét esetben mindig adottak a termelés korlátját szolgáltató legfontosabb tényezők is. Számuk többnyire alacsony, sőt általában elegendő egyetlen tényező korlátozó szerepét figyelembe venni. Ennek a tényezőnek természetes egységben készült mátrixát a költségekhez és hozamokhoz hasonlóan szintén transzformáljuk a konkrét táblaméret legnagyobb közös osztójának megfelelően.

10. A példaanyag megfogalmazása és megoldása

Az amúgy is nagy terjedelem csökkentése érdekében csak a hipotetikus üzemben tényleges korlátot jelentő kézi munkaerőnek és a termelési célfüggvényt nyújtó bruttó jövedelemnek 70 kh-as legnagyobb közös osztóra redukált mátrixát közöljük. (Lásd 1. és 2. táblázatok.) Ezek a mátrixok magukban foglalják mindazokat az egyszerűsítéseket, amelyek a módszer megértését nem zavarják, de ugyanakkor nem terjednek ki azokra a tényezőkre, amelyek a módszer sokoldalú alkalmazhatóságát reprezentálják.

Feladat: A szántóföldön egyaránt 70 kh-as táblákon termeljük az őszi búzát, rozsot, silókukoricát, lucernát, őszi keveréket, burgonyát és cukorrépát, valamint 140 kh-on kukoricát. Helyezzük el a fenti területű növényeket 9, egyöntetűen 70 kh-asnak vett táblán, amelyek közül a talajminőség szempontjából azonos a 3-as és a 4-es, valamint az 5-ös, 6-os és a 7-es jelzésű tábla, a szállítási távolság szempontjából viszont az 1-es, a 2-es és 3-as, valamint a 4-es, 5-ös, 7-es és a 8-as tábla azonos.

A minimumra fordított (lásd 3. pont) jövedelem mátrix (C) megoldása a kézimunkanap fedezet és szükséglet figyelmen kívül hagyásával 1 616 379 Ft bruttó jövedelmet tesz elérhetővé. Ezen permutációhoz azonban a kézimunkaerő mátrixban 7092 kézimunkanap felhasználás tartozik, ami lényegesen több, mint a rendelkezésre álló 6850 kézimunkanap.

1. TÁBLA. A VÁRHATÓ BRUTTÓ JÖVEDELEM ALAKULÁSÁNAK VARIÁCIÓI

M. e.: Ft

Növény	Búza	Rosz	Kukorica	Kukorica	Silókukorica	Lucerna	Őszi keverék	Burgonya	Cukorrépa
Táblaszám	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	105,608	51,316	212,329	212,329	193,730	150,607	84,189	547,030	447,587
2	101,241	62,455	205,461	205,461	195,097	113,623	72,797	539,750	314,953
3	21,125	79,244	139,733	139,733	126,579	72,785	16,451	127,394	282,250
4	23,217	80,616	142,047	142,047	135,153	73,520	20,631	130,034	289,524
5	11,478	87,593	144,516	144,516	141,540	95,189	52,148	278,122	140,439
6	18,353	93,279	152,914	152,914	153,180	98,703	58,986	289,224	150,855
7	17,393	92,598	151,614	151,614	148,183	98,097	55,970	287,131	148,629
8	-3,485	59,266	97,736	97,736	81,203	82,507	2,756	279,819	75,004
9	-37,106	21,888	51,909	51,909	57,168	42,931	-9,024	21,196	15,559

2. TÁBLA. A KÜLÖNFÉLE NÖVÉNYEK TÁBLÁNKÉNTI KÉZIMUNKANAP IGÉNYE
M. e.: 10 óras kézimunkanap

Növény	Búza	Rozs	Kukorica	Kukorica	Silókuko- rica	Lucerna	Őszi keverék	Burgonya	Cukorrépa
Táblaszám	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	201	137	946	946	428	309	62	1618	2618
2	201	143	946	946	428	269	62	1618	2566
3	150	155	918	918	386	221	62	1276	2553
4	150	155	918	918	386	221	62	1276	2553
5	150	167	925	925	397	253	62	1413	2502
6	150	167	925	925	397	253	62	1413	2502
7	150	167	925	925	397	253	62	1413	2502
8	138	120	903	903	367	237	62	1413	2476
9	114	143	883	883	344	189	62	1173	2451

Az erőforrás mátrix B megoldása 6514 kézimunkanap végeredményhez vezet, és így bizonyítja, hogy létezik a korlátot túl nem lépő megoldás, de a hozzá tartozó bruttó jövedelem értéke csak 738 612 Ft.

Az 5. pontban leírt mátrixkeveréses módszerrel kapott megoldás: $x_{19} = x_{23} = x_{31} = x_{44} = x_{57} = x_{65} = x_{78} = x_{82} = x_{96} = 1$ és a többi változó zérus, azaz mezőgazdasági szempontból a táblák sorrendjében a következő elhelyezést adja: cukorrépa, kukorica, őszi búza, kukorica, őszi keverék, silókukorica, burgonya, rozs, lucerna, miközben a kézimunkaerő felhasználás értéke 6813 kézimunkanap, az előállítható bruttó jövedelem pedig 1 410 876 Ft lesz.

A 3. táblázat az algoritmusban leírt különböző λ_i értékeket és a hozzájuk tartozó permutációs-összeg párokat tartalmazza. Az algoritmus által szolgáltatott legjobb megoldásként kapott elhelyezés, mint láthatjuk, nem pontosan a korlátozó tényező kapacitásának megfelelő nagyságrendű felhasználást igényel, hanem annál kevesebbet, elvileg tehát lehetséges, hogy a számítottnál jobb, a kapacitást tökéletesebben kihasználó megoldás is létezik. A 6. pont szerint számítva az optimális megoldástól való eltérés legfeljebb 39 960 Ft lehet, a jövedelem 2,8 %-a. Ez azonban csak egy felső becslés, lehetséges, hogy a feladatnak nincsen a fentínél jobb megoldása.

3. TÁBLA. A MÁTRIXKEVERÉSEK MEGOLDÁS RÉSZEREDMÉNYEI

i	C_i^I	B_i^I	C_i^{II}	B_i^{II}	λ_i
1	3130,054	7,092	—	—	0
2	→	—	3909,722	6,514	
3	3130,054	7,092	3559,879	6,612	1,349
4	3136,685	6,997	3559,879	6,612	895
5	3136,685	6,997	3335,448	6,813	1,099
6	3136,685	6,997	3335,448	6,813	1,080

11. Az eredmények helyességének mezőgazdasági indokolása, módosítások

Elhelyezésünk során a cukorrépa búza-cukorrépa-lucerna talajra, a kukorica búza-kukorica-vöröshere és búza-napraforgó-szegletes lednek talajra, az ősibúza búza-napraforgó-szegletes lednek talajra, az őszi keverék (rozsos-bükköny), a silókukorica és a burgonya rozs-kukorica-baltacim talajra, a rozs rozs-burgonya-somkóró és a lucerna rozs-napraforgó-szöszösbükköny talajra került. Ebben az elhelyezésben mezőgazdasági szempontból két lényegesen kifogásolható pont van, az egyik a burgonyának kukorica talajra helyezése, holott volt a választási lehetőségek között burgonya talaj is, miközben a rozsot számára kevésbé alkalmas talajra szorítja vissza, a másik váratlan eredmény a lucernának az esetünkben előforduló legrosszabb talajra való helyezése.

A burgonya a 7-es táblán nagyobb jövedelmet ad, (7312 Ft-tal), mint a 8-ason, ugyanakkor a rozs is a 7-es táblán ad nagyobb jövedelmet (33 332 Ft-tal), mint a 8-ason. A bruttó jövedelem volumenének összehasonlítása a rozs javára való döntést indokolja, de ugyanakkor a kézimunkaerő igény a burgonyánál mindkét táblán azonos, a rozsnál viszont a 8-as táblán a 7-eshez képest 47 kézimunkanappal kedvezőbb, kisebb. Ez a 47 kézimunkanap a 6850-es erőforrás kapacitás mellett már nem teljesíthető (hiszen $6813 + 47 = 6860$), és így a burgonya és rozs táblacseréje bár 26 020 Ft többletjövedelmet hozna, nem hajtható végre.

Hasonló esetben rendkívül fontos, hogy az üzem vezetői a helyi ismeretek birtokában eldöntsék, melyik megoldás adja a magasabb és biztosan elérhető jövedelmet:

- a program nyújtotta elhelyezés, vagy
- a kapacitás valamilyen módon való felemelése — a hozzá tartozó aránytalanul nagy áldozattal — a helycsere kívánta színvonalig. (Korlátnak csak az az erőforrás kapacitás nevezhető, amelyet növelni csak a növelés mértékét lényegesen meghaladó áldozattal lehet!)

Esetünkben nem kétséges a döntés, hiszen a kapacitás 10 kézimunkanappal (alkalmazott, időszaki munkás munkábaállítása) való emelése még az általunk elszámolt bér (60 Ft/10 órás kézimunkanap) többszörösével kalkulálva is kifizetődik. A számított optimum nyújtotta 207,08 Ft/kézimunkanap bruttó jövedelmet a kapacitás azonos költségszinten való felemelésével egybekötött helycsereje 209,46 Ft-ra emelheti.

Végül egyetlen nyitott kérdés maradt, a lucerna elhelyezése. A legrosszabb talajon (amennyiben alapmátrixaink megfelelnek a feltételezett helyi viszonyoknak és az 1966. január elsején érvényes árakon kalkulált hozam-ráfordítás arányoknak) a lucernánál nagyobb jövedelmet csak a kukorica és a silókukorica nyújt (8978, illetve 14 237 Ft/70 kh-dal), de ugyanakkor a kézimunkanap igényük lényegesen (694, illetve 155 kézimunkanap/70 kh-dal) nagyobb, olyannyira, hogy helycsere esetén a program végrehajthatatlanná válik. A burgonya-rozs helycserénél alkalmazott mérlegelés a lucerna esetében a kapacitás korlát további növelése ellen dönt. A lucernának bármely másik növényvel való helycsereje az egy kézimunkanapra jutó jövedelmet — a korlát felemelésével járó áldozatot nem is tekintve — rontaná. Mindezek az 1. és a 2. tábla tüzetes vizsgálatával könnyen beláthatók.

A továbbiakban felmerül annak lehetősége (amely elől természetesen nem zárkózunk el példaanyagunk esetében sem), hogy az üzemi adottságok, a ráfordítás és hozam mátrixok összeállítása során az egyes növényeknek a különféle táblákon

való termesztésének kalkulációja a becsült adatok, valamint a kiindulást képező ismeretek kisebb-nagyobb mértékben téves információi folytán hibás. Már viszonylag kisebb eltérés is vezethet a fenti, mezőgazdasági szempontból érthetetlennek tűnő eredményre. A hibás, vagy részhibát tartalmazó anyagból kiinduló bármely számítás is csak hibás eredményhez vezethet. Itt kell tehát felhívni a figyelmet arra, hogy az alapmátrixok összeállítása során elkövetett minden pontatlanság, szubjektivitás a számítás során nem küszöbölhető ki, így a végeredményben is megmutatkozik.

Összegezve a fentieket, a mátrix keverésen alapuló közelítő megoldás a korlátozott hozzárendelési probléma gyakorlat számára kielégítő megoldását nyújtja, számítása különösebb matematikai előképzettséget nem igényel, és elektronikus rendszerekkel jól gépesíthető.

*

Köszönetet mondunk LIPTÁK TAMÁSNAK a dolgozat gondos áttanulmányozásáért és hasznos tanácsaiért.

IRODALOMJEGYZÉK

Matematikai művek

- [1] G. B. DANTZIG: *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [2] EGERVÁRY J.: Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok* 38 (1931).
- [3] EGERVÁRY J.: Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 4. (1959). 15—28.
- [4] R. E. GOMORY: *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. Recent Advances in Mathematical Programming.* (Szerk.: R. L. Graves és Ph. Wolfe) McGraw-Hill Book Company, New York, London, 1963.
- [5] KÖNIG, D.: Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38 (1931).
- [6] KREKÓ, B.: *Lineáris programozás*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1962.
- [7] H. W. KUHN: The Hungarian Method for the Assignment Problem, *Naval Research Logistics Quarterly* 2 (1955) 83—97.
- [I] L. S. GODDARD: *Mathematical Techniques of Operational Research*, Pergamon Press, London 1963. 75—84.
- [II] KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: Mik azok a hozzárendelési problémák? „10 példa a matematika alkalmazására” cikkgyűjtemény, Gondolat Kiadó, 1967. 33—54.
- [III] A. YASPAN: On Finding a Maximal Assignment, *Operations Research*, 14 (1966). 646—651.
- [IV] PRÉKOPA ANDRÁS: *Lineáris programozás* (A Bolyai János Matematikai Társulat Operációkutatási Tanfolyamának jegyzete, sajtó alatt.)
- [V] Példa a magyar módszer felhasználására. A. KAUFMAN: *Az optimális programozás*. Műszaki Könyvkiadó, 1964. Függelék 395—397.
- [VI] E. BALAS: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs With Zero-One Variables, *Operations Research*, 13 (1965). 517—545.
- [VII] KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA: *Egészértékű programozás*. (A Bolyai János Matematikai Társulat Operációkutatási Tanfolyamának jegyzete, sajtó alatt.)

Mezőgazdasági művek

- [8] *A kiskőrösi járás mezőgazdaságának adatai*. Szerk.: Csete László. Budapest, 1966. (Kiadás alatt a nagyüzemi gazdálkodás sorozatban.)
- [9] CSETE LÁSZLÓ, HALÁSZ KATALIN, NAGYKÁLNAI ENDRE: *Az északbalatoni partvidék termelőszövetkezeti közös gazdaságainak távlati fejlesztése*. Budapest, 1965. (Kézirat) FM Agrárgazdasági Kut. Int. 284 p.

- [10] GÉCZY GÁBOR: *Magyarország mezőgazdasági területe*. 1966. (Kiadás alatt).
- [11] KÁLLAY KORNÉL: *Az öntözővíz norma. A tápanyagellátás és az öntözés többlettermésének összefüggései*. Budapest, 1965. (Kézirat) 34. p.
- [12] NAGYKÁLNAI ENDRE, ZUG JÁNOSNÉ: A termelés területi elhelyezésének és a termésátlagok tervezésének fejlesztése a termelőszövetkezetekben. *Gazdálkodás*, IX. évf. 1965. 3. szám.
- [13] *Üzemszervezési útmutató a nagyüzemi növénytermelési munkafolyamatok szervezéséhez*. 1959. FM ÁG-ok Főigazgatósága.

THE RESTRICTED ASSIGNMENT PROBLEM AND ITS APPLICATION IN AGRICULTURE

by -

L. B. KOVÁCS—E. NAGYKÁLNAI

Summary

In this paper an algorithm is presented for an approximating solution of the following problem.

Two matrices C and B , of size $n \times n$ and a constant k are given. It is to be found the

$$\min_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (C_{1j_1} + C_{2j_2} + \dots + C_{nj_n})$$

where the subscripts $j_1, j_2, \dots, j_n$ run over those permutations of the numbers $1, 2, \dots, n$ for which the inequality

$$b_{1j_1} + b_{2j_2} + \dots + b_{nj_n} \leq k$$

holds. The substance of the method is the finding of a minimal assignment in the matrix $C + \lambda B$ for various λ 's. The choice of λ 's, the estimation of the error and the proof of the finiteness of the procedure is given in points 5 and 6.

The problem has arisen in an agricultural task of an assignment of plants on various fields with a restricted source (money, manpower or machine-power, etc.)

In our hand-solved examples the computations gave a maximal error of 2—3 percent of the total sum. The relative error is supposed to be decreasing by the increasing of the size of the matrices. The paper is completed by the agricultural analysis of an example.

(Beérkezett: 1965. XII. 27.)