A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉNEK EGY PROBLÉMAKÖRÉRŐL*

Írta: RÉNYI ALFRÉD

1. §. Bevezetés

1953-ban közölt [1] dolgozatomban több tételt bizonyítottam be az empirikus és az elméleti eloszlásfüggvény relatív eltérésére vonatkozólag. Az azóta eltelt kereken 15 év alatt e problémakörben számos újabb eredményt értek el. E dolgozat ezen vizsgálatokról nyújt áttekintést, egy új eredményt is tartalmaz (lásd 2. § 1. tétel), továbbá új, egyszerűbb bizonyítást ad egyes eredményekre, és felhívja a figyelmet néhány megoldatlan problémára, valamint kitér a szóban forgó eredmények alkalmazási lehetőségeire is.

Legyen $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ egy n elemű minta egy folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű sokaságból; más szóval legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független és egyforma eloszlású valószínűségi változók. Jelölje $F_n(x)$ a $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ minta empirikus eloszlásfüggvényét, vagyis legyen

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\xi_k < x \\ 1 \leqq k \leqq n}} 1 \tag{1.1}$$

Legyenek $\xi^*_{n,1} \leqq \xi^*_{n,2} \leqq \ldots \leqq \xi^*_{n,n}$ a $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ minta elemei nagyság szerint elrendezve. Nyilvánvaló, hogy

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqq \xi^*_{n,1} \\ \dfrac{k}{n} & \text{ha} \quad \xi^*_{n,k} < x \leqq \xi^*_{n,k+1} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1) \\ 1 & \text{ha} \quad \xi^*_{n,n} < x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Így tehát $F_n(x)$ minden rögzített x-re egy valószínűségi változó. V. I. GLIVENKO jólismert tétele ([2]; lásd továbbá [25] 333. o.) szerint a $\sup\limits_x |F_n(x) - F(x)|$ eltérés 1 valószínűséggel 0-hoz tart, ha $n \to +\infty$; N. V. SZMIRNOV [3] és A. N. KOLMOGOROV [4] ismert tételei szerint

$$\lim_{n \to +\infty} P(\sqrt{n} \sup_x (F_n(x) - F(x)) < y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2} & \text{ha} \quad y > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y \leqq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

és

$$\lim_{n \to +\infty} P(\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| < y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 y^2} & \text{ha} \quad y > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y \leqq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

* E dolgozat a szerzőnek a Nemzetközi Statisztikai Intézet 1967 szeptemberében Sydneyben megrendezett 36. ülésszakán tartott előadásának szövegét tartalmazza.

Azt a tényt, hogy $F_n(x)$ konvergál $F(x)$-hez, ha $n\to\infty$, kifejezhetjük úgy is, hogy az $\frac{F_n(x)}{F(x)}$ hányados 1-hez tart, ha $n\to\infty$, minden egyes olyan rögzített x-re, amelyre $F(x)>0$. Azonban $\frac{F_n(x)}{F(x)}$ nem tart x-ben egyenletesen 1-hez, ha $n\to\infty$. Fennáll ugyanis a következő tétel:

$$P\left(\sup_{0<F(x)}\frac{F_n(x)}{F(x)}>1+\varepsilon\right)=\frac{1}{1+\varepsilon}\quad \text{ha}\quad \varepsilon\geqq 0. \tag{1.5}$$

Az (1. 5) tételt először H. E. DANIELS bizonyította be (lásd [5], (12. 2) képlet) 1945-ben, fonalkötegek erősségének statisztikai elméletére vonatkozó vizsgálatai során. A feltűnően egyszerű és tetszetős (1. 5) összefüggést (amelyben különösen az a meglepő, hogy a $\sup\limits_{0<F(x)}\frac{F_n(x)}{F(x)}$ mennyiség eloszlása nem függ n-től) DANIELStől függetlenül többen újra felfedezték, így H. ROBBINS [6], CHANG LI CHIEN [7], CHAPMAN [8] és DEMPSTER [22]. Az (1. 5) tételre a 2. §-ban egy egyszerű új bizonyítást adunk. GLIVENKO említett tételéből nyilvánvalóan következik, hogy ha x-nek csak olyan értékeire szorítkozunk, amelyekre $F(x)\geqq a>0$, ahol a egy rögzített (n-től nem függő) szám ($0<a<1$), akkor ezen intervallumon $\frac{F_n(x)}{F(x)}$ x-ben egyenletesen tart 1 valószínűséggel 1-hez. Ezen túlmenőleg, mint azt az [1] dolgozatban megmutattam, KOLMOGOROV és SZMIRNOV fent említett tételeinek következő, $F_n(x)$ és $F(x)$ *relatív* eltérésére vonatkozó analogonjai állnak fenn:

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq F(x)}\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}<y\right)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt & \text{ha}\quad y>0\\ 0 & \text{ha}\quad y\leqq 0\end{cases} \tag{1.6}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq F(x)}\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}<y\right)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-a)}{8y^2a}}}{2k+1} & \text{ha}\quad y>0\\ 0 & \text{ha}\quad y\leqq 0\end{cases} \tag{1.7}$$

hacsak $0<a<1$.

Az [1] dolgozatban ennél általánosabb tételek is találhatók, amelyekben az $F(x)\geqq a>0$ feltétel helyett az $a\leqq F(x)\leqq b$ megszorítás szerepel, ahol $0<a<b<1$.

A módszer, amellyel [1]-ben ezen eredményeket bebizonyítottuk, az alábbi 1. lemmán alapszik:

1. LEMMA. *A $\xi^*_{n,k}$ $(k=1,2,\dots,n)$ változók előállíthatók a*

$$\xi^*_{n,k}=F^{-1}\left(\exp\left(-\sum_{j=0}^{n-k}\frac{\delta_j}{n-j}\right)\right)\qquad(k=1,2,\dots,n) \tag{1.8}$$

alakban, ahol $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ *független,* 1 *várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, vagyis* $P(\delta_j < x) = 1 - e^{-x}$, *ha* $x \geqq 0$.

Az 1. lemma jelentősége abban áll, hogy segítségével a rendezett minták vizsgálata visszavezethető független valószínűségi változók összegeinek vizsgálatára. (A szóban forgó módszerrel kapcsolatban lásd a [9] és [18] dolgozatokat is.)

A rendezett minták elméletének egy másik egyszerű, de alapvető eredménye (lásd [10]), amelyet a következőkben ismételten használni fogunk, a következő:

2. LEMMA *Legyen* $\eta_k = F(\xi_k)$ *és* $\eta^*_{n,k} = F(\xi^*_{n,k})$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. *Akkor az* $\eta_1, \dots, \eta_n$ *változók egyenletes eloszlásúak a* $(0, 1)$ *intervallumban és az* $\eta^*_{n,k+1} = c$ $(0 < c < 1)$ *feltétel mellett az* $\frac{\eta^*_{n,1}}{c}, \dots, \frac{\eta^*_{n,k}}{c}$ *változók együttes eloszlása megegyezik egy a* $(0, 1)$ *intervallumban egyenletes eloszlásból vett k elemű rendezett minta eloszlásával, ha* $1 \leqq k \leqq n-1$, *míg az* $\frac{\eta^*_{n,k+2} - c}{1-c}, \dots, \frac{\eta^*_{n,n} - c}{1-c}$ *változók együttes eloszlása megegyezik egy a* $(0, 1)$ *intervallumban egyenletes eloszlásból vett* $n-k-1$ *elemű rendezett minta eloszlásával, ha* $0 \leqq k \leqq n-2$, *és e két minta független egymástól.*

2. §. Néhány eloszlás pontos meghatározása

Először egy egyszerű bizonyítást adunk az (1. 5) összefüggésre. Ha $\eta^*_{n,1} > 0$ (ami 1 valószínűséggel teljesül), akkor nyilván

$$\sup_{0<F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} = \max_{1 \leqq k \leqq n} \frac{k}{n\eta^*_{n,k}} = \left(\min_{1 \leqq k \leqq n} \frac{n\eta^*_{n,k}}{k} \right)^{-1}. \tag{2. 1}$$

Így, bevezetve a

$$G_n(t) = P\left(\sup_{0<F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} < \frac{1}{t} \right) \qquad (t > 0) \tag{2. 2}$$

jelölést, azt kapjuk, hogy

$$G_n(t) = P\left(\min_{1 \leqq k \leqq n} \frac{n\eta^*_{n,k}}{k} > t \right). \tag{2. 3}$$

Felhasználva a 2. lemmát, és azt, hogy $\eta^*_{n,n}$ sűrűségfüggvénye ny^{n-1} $(0 < y < 1)$, a $G_n(t)$ függvényekre a következő rekurzív összefüggést nyerjük:

$$G_n(t) = \int_t^1 G_{n-1}\left(\frac{(n-1)t}{ny} \right) ny^{n-1}\, dy. \tag{2. 4}$$

Mármost nyilván fennáll, hogy

$$G_1(t) = P(\eta^*_{1,1} > t) = 1 - t \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{2. 5}$$

és így (2. 4)-ből a

$$G_n(t) = 1 - t \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \quad \text{ha} \quad n = 1, 2, \dots \tag{2. 6}$$

összefüggés teljes indukcióval következik.

Nyilvánvaló, hogy 1 valószínűséggel $\inf\limits_{F(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} = 0$; azonban, ha az $F(x) > 0$ feltétel helyett az $F_n(x) > 0$ feltételt vezetjük be, vagyis, ha az $\inf\limits_{F_n(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)}$ mennyiséget vizsgáljuk, meg lehet mutatni, hogy e mennyiségnek nemtriviális határeloszlása van, ha $n \to \infty$, mégpedig a következő tétel érvényes (lásd [7]):

$$(2.7) \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\inf_{F_n(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} < \frac{1}{t} \right) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{k-1}(te^{-t})^k}{k!} \quad \text{ha} \quad t > 0.$$

A (2. 7) összefüggésre a következőkben egy új, egyszerű bizonyítást fogunk adni.

Nyilvánvaló, hogy 1 valószínűséggel fennáll az

$$(2.8) \quad \inf_{F_n(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} = \left(\max_{1\le k\le n-1} \frac{n\eta^*_{n,k+1}}{k} \right)^{-1}$$

egyenlőség. Így (2. 7) a következő ekvivalens alakra hozható:

$$(2.9) \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\max_{1\le k\le n-1} \frac{n\eta^*_{n,k+1}}{k} > t \right) = e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{k-1}(te^{-t})^k}{k!}$$

ha $t > 0$. Könnyen be lehet látni, pl. a hatványsorok inverz függvényére vonatkozó ún. BÜRMAN—LAGRANGE képlet segítségével (lásd [21]), hogy

$$(2.10) \quad e^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^{k-1}}{k!} (te^{-t})^k = 1, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 1.$$

A (2. 7) összefüggés (2. 9) alakban való átírása felveti a következő kérdést: mi a $\max\limits_{1\le k\le n} \frac{n\cdot\eta^*_{n,k}}{k}$ mennyiség határeloszlása, ha $n \to +\infty$?

E kérdésre (amelyet tudomásunk szerint eddig nem vizsgáltak) ad választ a következő

1. TÉTEL

$$(2.11) \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\max_{1\le k\le n} \frac{n\eta^*_{n,k}}{k} > t \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k e^{-(k+1)t}(k+1)^{k-1}}{k!} \quad \text{ha} \quad t \ge 0.$$

Megjegyzendő, hogy fennáll a következő azonosság (lásd [21])

$$(2.12) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k e^{-(k+1)t}(k+1)^{k-1}}{k!} = 1 \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 1.$$

A

$$\sup_{a\le F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)} \quad \text{és} \quad \inf_{a\le F(x)} \frac{F_n(x)}{F(x)}$$

mennyiségek pontos eloszlását minden n-re GORO ISHI [11] határozta meg, többdimenziós integrálok kiszámítása útján. Ezen eloszlások meghatározására N. V. SZMIRNOV [12] egy egyszerűbb utat talált, amely a következő lemmán alapszik (lásd [17]-et is):

3. LEMMA. *Ha* $0<p<1$ *és* $n\geqq 2$, *akkor*

$$P\left(\eta^*_{n,k}\leqq p+\frac{(k-1)(1-p)}{n-1}\quad \text{ha}\quad 1\leqq k\leqq n-1\right)=p\left(1+\frac{1-p}{n-1}\right)^{n-1} \tag{2.13}$$

Először a 3. lemmára adunk egy új bizonyítást. Legyen

$$P_n(p)=P\left(\eta^*_{n,k}\leqq p+\frac{(k-1)(1-p)}{n-1}\quad \text{ha}\quad 1\leqq k\leqq n-1\right) \tag{2.14}$$

A 2. lemma segítségével, figyelembe véve, hogy $\eta^*_{n,1}$ sűrűségfüggvénye $n(1-y)^{n-1}$ $(0<y<1)$, nyerjük, a

$$P_n(p)=\int_0^p n(1-y)^{n-1}P_{n-1}\left(\frac{p-y+\dfrac{1-p}{n-1}}{1-y}\right)dy,\quad n=3,4,\ldots \tag{2.15}$$

rekurziós formulát. Mivel $P_2(p)=P(\eta^*_{2,1}\leqq p)=p(1+(1-p))$, tehát a

$$P_n(p)=p\left(1+\frac{1-p}{n-1}\right)^{n-1} \tag{2.16}$$

képlet (2. 15)-ből teljes indukcióval adódik.

Felhasználva a 2. és 3. lemmát, SZMIRNOVot követve nyerjük a következő lemmát:

4. LEMMA. *Legyen*

$$P_{n,s}(a,b)=P(\eta^*_{n,k}\leqq a+(k-1)b\quad \text{ha}\quad 1\leqq k\leqq s,\ \eta^*_{n,s+1}>a+sb), \tag{2.17}$$

akkor

$$P_{n,s}(a,b)=\binom{n}{s}a(a+sb)^{s-1}(1-a-sb)^{n-s} \tag{2.18}$$

ha $s=0,1,\ldots,n,\ a>0,\ b>0,\ a+sb<1$.

MEGJEGYZÉS. A 4. lemma korolláriumaként adódik az alábbi — N. H. ABELtől származó — azonosság:

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}a(a+sb)^{s-1}(1-a-sb)^{n-s}=1 \tag{2.19}$$

A (2. 19) azonosság a binomiális tétel általánosításának tekinthető, mivel a $b=0$ esetben a binomiális tételre redukálódik.

Ezekután rátérhetünk (2. 9) és (2. 11) bizonyítására.

Nyilván fennáll, hogy

$$P\left(\max_{1\leqq k\leqq n}\frac{n\eta^*_{n,k}}{k}>t\right)=\sum_{s=0}^{n-1}P\left(\eta^*_{n,k}\leqq\frac{kt}{n}\quad \text{ha}\quad 1\leqq k\leqq s,\quad \eta^*_{n,s+1}>\frac{(s+1)t}{n}\right),$$

ha $t>0$. Így a 4. lemmából

$$P\left(\max_{1\leqq k\leqq n}\frac{n\eta^*_{n,k}}{k}>t\right)=\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n}{s}\left(\frac{t}{n}\right)^{s}(s+1)^{s-1}\left(1-\frac{(s+1)t}{n}\right)^{n-s}, \tag{2.20}$$

ha $t>0$. Elvégezve az $n\to+\infty$ határátmenetet, nyerjük (2. 11)-et. Hasonlóképpen a 4. lemmából nyerjük a

(2. 21)
$$P\left(n\max_{1\leq k\leq n-1}\frac{\eta^*_{n,k+1}}{k}>t\right)=$$
$$=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n+\int_0^{\frac{t}{n}} n(1-y)^{n-1}\left[\sum_{s=0}^{n-2}P_{n-1,s}\left(\frac{\frac{t}{n}-y}{1-y},\frac{t}{n(1-y)}\right)\right]dy$$

ha $t>0$, összefüggést; elvégezve (2. 21)-ben az $n\to+\infty$ határátmenetet, kapjuk, hogy

(2. 22)
$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\max_{1\leq k\leq n-1}\frac{n\eta^*_{n,k+1}}{k}>t\right)=e^{-t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(te^{-t})^k(k-1)^{k-1}}{k!},\quad \text{ha}\quad t>0.$$

Ez pedig azonos (2. 9) összefüggéssel.

E módszerrel meg lehetne határozni $\sup\limits_{F(x)>0}\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}$ eloszlását is.

3. §. Különböző általánosítások

Ismeretes, hogy KOLMOGOROV és SZMIRNOV tételei általánosíthatók két minta eltérésére. A megfelelő általánosítást a *relatív* eltérésekre az egyoldalú eltéréseket illetően WANG SHOU-JEN végezte el [13], a kétoldali eltérésre nézve a feladatot CSÖRGŐ Miklós [14] oldotta meg. Az eddig tárgyalt vizsgálatokban mindvégig fel volt téve, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény folytonos. A KOLMOGOROV—SZMIRNOV tételeket, valamint a szerző (1. 6) és (1. 7) tételeit nemfolytonos eloszlásokra P. SCHMID [15] és H. CARNAL [16] általánosították.

CSÖRGŐ Miklós az (1. 6) és (1. 7) tételek további variánsait [19], [20], [23] adta, további új bizonyítást adott az (1. 6) és (1. 7) tételekre (lásd [24]). Ezen új bizonyítás a szóban forgó tételeket GAUSS-folyamatokra vonatkozó állításokra vezeti vissza, J. L. DOOB [26] a KOLMOGOROV—SZMIRNOV tételekkel kapcsolatban felvetett gondolatát követve. E tételeknek bizonyos értelemben ez a legtermészetesebb (bár nem a legelemibb) bizonyítása. A [19] dolgozatban CSÖRGŐ megjegyzi, hogy az (1. 6) és (1. 7) tételek érvényesek maradnak akkor is, ha az $\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}$ hányados helyébe az $\frac{F_n(x)-F(x)}{F_n(x)}$ hányadost írjuk.

Ami (1. 6)-ot illeti, ez leolvasható az alábbi azonosságból:

$$P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leq F_n(x)}\frac{F_n(x)-F(x)}{F_n(x)}<y\right)=P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leq F_n(x)}\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}<\frac{y}{1-\frac{y}{\sqrt{n}}}\right).$$

Az (1. 7) tétel megfelelő módosítása hasonlóan látható be.

A [20] és [23] dolgozatokban CSÖRGŐ a következő általánosítással foglalkozik: Legyen adva ugyanabból a folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű sokaságból vett

r darab független, rendre $n_1, \ldots, n_r$ elemszámú minta; legyenek $F_{n_1}(x), \ldots, F_{n_r}(x)$ e minták empirikus eloszlásfüggvényei.

Vizsgáljuk a $\sqrt{N} \cdot \sup\limits_{\alpha < F(x)} \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{r} F_{n_j}(x) - F^r(x)}{F^r(x)}$ mennyiséget, ahol $N^{-1} = \sum\limits_{j=1}^{r} n_j^{-1}$.

Ha $n_1, \ldots, n_r$ úgy tartanak egyidejűleg $+\infty$-hez, hogy a $\lim \dfrac{n_1}{n_j} = \varrho_j$ határértékek léteznek és pozitívak, akkor az említett mennyiségnek ugyanaz a határeloszlása, mint az, ami (1. 6) jobb oldalán szerepel.

4. §. Néhány további megjegyzés

Mint arra már az [1] dolgozatban rámutattam, az $\dfrac{F_n(x)}{F(x)}$ hányadoson alapuló próbák egyik előnye az $F_n(x) - F(x)$ különbségen alapuló próbákkal szemben az, hogy e próbák a relatív hibát vizsgálják az abszolút hiba helyett, a numerikus analízis általános elveinek megfelelően. Ma is nyitott kérdés azonban, hogy a relatív eltérésre vonatkozó próbák ereje hogyan viszonylik a KOLMOGOROV—SZMIRNOV-féle próbák erejéhez.

Egy másik szempont, amely a $\sup\limits_{a \leq F(x) \leq b} \dfrac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)}$ mennyiségen alapuló próbák használatát indokolhatja, az, hogy igen gyakran csak csonkított minta áll rendelkezésünkre, más szóval a minta igen nagy vagy igen kis elemeinek pontos értéke nem áll rendelkezésünkre. ISHII mutatott rá nyomatékosan, hogy az élettartam-eloszlás vizsgálatánál legtöbbször ez a helyzet.

Ami a CSÖRGŐ által vizsgált $\sqrt{N} \cdot \sup\limits_{a < F(x)} \dfrac{\prod\limits_{j=1}^{r} F_{n_j}(x) - F^r(x)}{F^r(x)}$ mennyiséget illeti, természetszerűleg felmerül a kérdés, hogy nem előnyösebb-e az r mintát egyetlen nagy mintává egyesíteni?

Úgy sejtem, hogy az utóbbi esetben a próba ereje általában nagyobb lesz; ennek ellenére gyakorlati szempontból előnyösebb lehet a minták egyesítésétől eltekinteni, különösen, ha ilyen módon túl nagy mintát kapnánk, ahol az elemek nagyság szerinti rendezése nagyobb munkát jelent, mint sok kis minta elemeinek nagyság szerinti rendezése. BÉKÉSSY András hívta fel a figyelmemet arra, hogy ilyen helyzet fordul elő pl. véletlen számgenerátorok minőségellenőrzésénél.

(Beérkezett: 1967. IX. 11.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. Rényi, On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 191—231.

[2] V. I. Glivenko, Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita, *Giornale Ist. Ital. Attuary* **4** (1933) 92—99.

[3] N. V. Smirnov, Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe, *Metron*, **12** (1935) 59—81.

[4] A. N. Kolmogorov, Sulle determinazione empirica di una legge di distribuzione, *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **4** (1933) 83—91.

[5] H. E. Daniels, The statistical theory of the strength of bundles of threads, *I. Proceedings of the Royal Society, Ser. A.* **183** (1945) 405—435.

[6] H. Robbins, *Annals of Math. Stat.* **25** (1954) 409.

[7] Chang Li Chien, On the ratio of an empirical distribution function to the theoretical distribution function. (Kínai nyelven, angol kivonattal). *Acta Math. Sinica* **5** (1955) 437—368.

[8] Chapman, P. G.: On a limiting distribution due to Rényi, *Annals of Math. Stat.* **29** (1958) 1282.

[9] M. M. Rao, Theory of order statistics, *Math. Annalen* **147** (1962) 298—312.

[10] Hajós Gy.—Rényi A., Elemi bizonyítások a rendezett minták elméletének néhány alapvető összefüggésére, *MTA III. o. Közleményei.* **4** (1954) 467—472.

[11] Goro Ishii, On the exact probabilities of Rényi's tests. *Ann. Inst. Stat. Math.* **11** (1959) 17—24.

[12] N. V. Smirnov, The probability of large values of one-sided non-parametric tests of goodness of fit (oroszul), *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **64** (1961) 185—210.

[13] Wang Shou-Jen, On the limiting distribution of the ratio of two empirical distributions. (Kínai nyelven, angol kivonattal) *Acta. Math. Sinica* **4** (1955) 253—267.

[14] M. Csörgő, Some Smirnov-type theorems of probability theory, *Annals of Math. Stat.* **36** (1965) 1113—1119.

[15] P. Schmid, On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontinuous distribution functions, *Annals of Math. Stat.* **29** (1958) 1011—1027.

[16] H. Carnal, Sur les théorèmes de Kolmogoroff et Smirnoff dans le cas d'une distribution discontinue, *Comm. Math. Helv.* **37** (1962) 19—35.

[17] W. Nef, Über die Differenz zwischen theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **3** (1964) 154—163.

[18] G. Blom, *Statistical estimates and transformed beta-variables* Wiley, New York, 1958.

[19] M. Csörgő, Some Rényi-type limit theorems for empirical distribution functions, *Annals of Math. Stat.* **36** (1965) 322—326.

[20] M. Csörgő, k-sample analogues of Rényi's Kolmogorov—Smirnov-type theorems (in print).

[21] G. Pólya—G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925, Vol. I. p. 125.

[22] A. P. Dempster, *Annals of Math. Stat.* **30** (1959) 593—596.

[23] M. Csörgő, Some k-sample Kolmogorov—Smirnov—Rényi-type theorems for empirical distribution functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966) 325—334.

[24] M. Csörgő, A new proof of some results of Rényi and the asymptotic distribution of the range of his Kolmogorov—Smirnov-type random variables, *Canadian Journal Math.* **19** (1967) 550—558.

[25] Rényi A., *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Bp., 1966.

[26] J. L. Doob, Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems, *Annals of Math. Stat.* **20** (1949) 393.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE DES OBSERVATIONS ORDONNÉES

par Alfréd Rényi

Résumé

L'auteur a publié en 1953 un travail sur le quotient du fonction de répartition empirique et théorique d'un échantillon. Depuis on a obtenu des nombreux résultats dans ce domain. La note présent donne une synthese de ce developpement et des demonstrations nouvelles simples pour certaines theorèmes. Quelques problèmes encore non resolus sont mentionnées et certaines remarques sont faites sur l'application des resultats en question.